بسمه تعالی

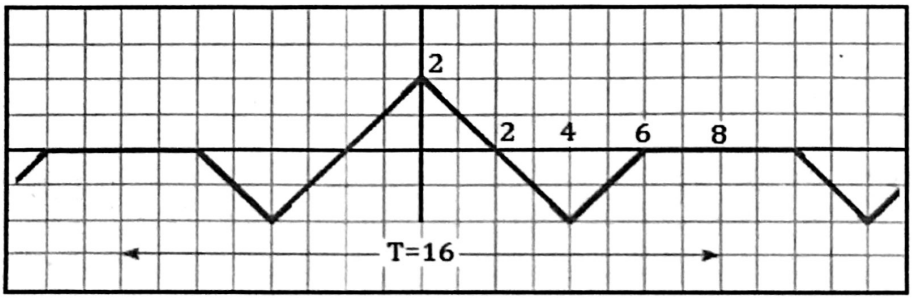
دانشکده علوم مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
تاریخ آزمون: ۱۳۹۵/۱/۳۰	ساعت آزمون: ۱۶	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۹۵-۱۳۹۴	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره

۱ الف: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. $(T = 16)$ — ۱/۵



ب: به کمک سری فوریه بدست آمده حاصل سری عددی زیر را بیابید. — ۱

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n^2}$$

۲ تبدیلات زیر را بدست آورید. — ۲

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right) \quad ; \quad \mathcal{F}\left(\frac{\cos 3x}{x^2+2}\right)$$

۳ در معادله موج زیر با استفاده از روش دالامبر مقدار $u(5,19)$ را بدست آورید. — ۱

$$u_{tt} = 4u_{xx} \;\; ; \;\; 0 < x < 17 \;\; ; \;\; t > 0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \; ; \; u(17,t) = 0 & B.C. \\ u(x,0) = x \; ; \; u_t(x,0) = 6x^2 & I.C. \end{cases}$$

۴ معادله حرارت غیرهمگن زیر را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید. — ۳

$$u_t = u_{xx} + x^2 + t\big(1 + \cos(\pi x)\big) \;\; ; \;\; 0 < x < 1 \;\; ; \;\; t > 0$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 2 \;\; ; \;\; u_x(1,t) = 2(1+t) & B.C. \\ u(x,0) = 2x & I.C. \end{cases}$$

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی — دانشکده علوم مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی — دانشگاه تهران

تاریخ آزمون: ۱۳۹۳/۸/۲۹ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: اول — سال تحصیلی: ۹۴-۱۳۹۳ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: تابع $f(x) = x(\pi - x)$ را که در بازه $0 < x < \pi$ تعریف شده است گسترش فرد داده و سری سری فوریه سینوسی آنرا بیابید.	۱/۵
	ب: به کمک قسمت قبل با انتخاب یک x مناسب، حاصل سری عددی زیر را بدست آورید. $A = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{5^3}\right) + \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3}\right) + \left(\frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3}\right) + \cdots$	۱
۲	الف: انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورده، به کمک آن I را محاسبه کنید. $f(x) = \begin{cases} cosx & \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \lvert x\rvert > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad ; \quad I = \int_0^\infty \frac{cosx}{\pi^2 - 4x^2}\,dx$	۱/۵
	ب: اگر $\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\alpha)$ باشد، تبدیل فوریه $xf(x-3)$ را بر حسب $\hat{f}(\alpha)$ بدست آورید.	۱
۳	تابع $f(x) = x$ را بر حسب توابع ویژه مساله اشتورم-لیوویل زیر بسط دهید. $y'' + \lambda y = 0 \;;\; 0 < x < 1$ $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases}$	۲
۴	معادله حرارت زیر را حل کنید. $u_t = u_{xx} - x - cost \;;\; 0 < x < 3 \;;\; t > 0$ $\begin{cases} u_x(0,t) = t \;;\; u(3,t) = 3t - sint & B.C. \\ u(x,0) = 2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3}x^3 - 9 & I.C. \end{cases}$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۲/۱/۲۸ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: دوم — سال تحصیلی: ۹۳-۱۳۹۲ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

نام و نام خانوادگی دانشجو: — شماره دانشجویی:

ردیف		نمره
۱	الف: فرض کنید ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(-\pi,\pi)$ برابر با a_0 ، a_n و b_n باشند. ضرایب سری فوریه تابع $f(x)cosx$ را بر حسب این ضرایب بدست آورید. ب: به کمک قسمت قبل و یا بصورت معمول، سری فوریه $xcosx$ را در بازه $(-\pi,\pi)$ بیابید. ج: به کمک قسمت قبل حاصل سری زیر را بدست آورید. $A=\frac{3}{2\times 4}-\frac{5}{4\times 6}+\frac{7}{6\times 8}-\frac{9}{8\times 10}+\cdots$	۱ ۱ ۰/۵
۲	تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید. (راهنمایی: طرفین را در x^2 ضرب کرده و از دو طرف تبدیل بگیرید) $f(x)=\left(\frac{sinx}{x}\right)^2$	۱/۵
۳	مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله اشتورم لیوویل زیر را بدست آورید. تابع دلخواه $f(x)$ را که در شرایط دیریکله صدق میکند، بر حسب توابع ویژه آن بسط دهید. $y''+y'+\lambda y=0 \quad ; \quad y(0)=0 \; ; \; y(1)=0$	۲
۴	معادله ارتعاش زیر را حل نمایید. $u_{xx}=u_{tt}+t^2-x^2-t+x \quad ; \quad 0<x<1 \quad ; \quad t>0$ $\begin{cases} u_x(0,t)=t \; ; \; u_x(1,t)=t^2 & B.C. \\ u(x,0)=0 \; ; \; u_t(x,0)=\frac{-x^2}{2} & I.C. \end{cases}$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی — گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۲/۸/۳۰ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: اول — سال تحصیلی: ۹۳-۱۳۹۲ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: تبدیل فوریه $f(x) = xe^{-ix-\lvert x\rvert}$ را بدست آورید. ب: با استفاده از رابطه زیر تبدیل فوریه $f(x)$ را بدست آورید. $f(x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)dt \quad ; \quad -1 < x < 1$	۲
۲	مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله اشتورم لیوویل زیر را بدست آورید. $(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \quad ; \quad y'(1) = y(2) = 0$	۲
۳	معادله مشتق جزئی زیر را همراه با شرط داده شده حل نمایید. $xu_x + yu_y = 1 + y^2 \quad ; \quad u(x,1) = 1 + x$	۱/۵
۴	مساله زیر را حل نمایید. $u_{xx} = u_t + 1 - 3xt^2 + x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t > 0$ $u(0,t) = t \quad ; \quad u(1,t) = t^3 \quad ; \quad u(x,0) = x^2$	۳/۵

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پاسخنامه آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی، نیمسال اول ۹۴-۱۳۹۳

$$\underbrace{A=0;a_n=0}_{\boxed{0.25}};b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(nx)\,dx=\frac{8\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3}\ \boxed{1}\rightarrow x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\ \boxed{0.25}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\ \boxed{0.5}\rightarrow\frac{\pi}{3}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{5^3}\right)+\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}\right)+\left(\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}\right)+\cdots\right]\rightarrow A=\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}}\ \boxed{0.5}$$

$$B(\alpha)=0\,;A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)(\cos\alpha x)\,dx=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi(1-\alpha^2)}\ \boxed{0.75}\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha\ \boxed{0.25}$$

$$x=0\rightarrow\underbrace{f(0)}_{1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}d\alpha\ \boxed{0.25}\rightarrow x=\frac{\alpha\pi}{2}\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}dx=\frac{1}{4}\ \boxed{0.25}$$

$$\mathcal{F}\big(f(x-3)\big)=e^{-3i\alpha}\hat{f}(\alpha)\ \boxed{0.25}\rightarrow\mathcal{F}\big(xf(x-3)\big)=i\left(e^{-3i\alpha}\hat{f}(\alpha)\right)'=e^{-3i\alpha}\left(3\hat{f}(\alpha)-i\hat{f}'(\alpha)\right)\ \boxed{0.75}$$

$$\underbrace{\lambda=0,\lambda=-\alpha^2}_{\boxed{0.25}}\ \boxed{\times}\ ;\lambda=\alpha^2\rightarrow y=c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x)\xrightarrow{B.C.}c_1=0;c_2\sin\alpha+2\alpha c_2\cos\alpha=0\ \boxed{0.5}$$

$$\xrightarrow{y\neq0}\tan\alpha=-2\alpha\quad(0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots)\rightarrow\varphi_n(x)=\sin(\alpha_n x)\ \boxed{0.25}$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\underbrace{\sin(\alpha_n x)}_{\varphi_n(x)}\rightarrow c_n=\frac{\int_0^1 x\sin(\alpha_n x)\,dx}{\int_0^1\sin^2(\alpha_n x)\,dx}=\frac{-\frac{3\cos(\alpha_n)}{\alpha_n}}{\frac{1+2\cos^2(\alpha_n)}{2}}=\frac{-6\cos(\alpha_n)}{\alpha_n(1+2\cos^2(\alpha_n))}\ \boxed{1}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\ ;\ w(x,t)=a(t)x+b(t)\ \boxed{0.25}$$

$$w_x(0,t)=t\ ;\ w(3,t)=3t-\sin t\rightarrow w(x,t)=tx-\sin t\ \boxed{0.25}\rightarrow u=v+tx-\sin t$$

$$v_t=v_{xx}-2x\rightarrow\begin{cases}v_x(0,t)=0\,;v(3,t)=0 & B.C.\\ v(x,0)=2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3}x^3-9 & I.C.\end{cases}\ \boxed{0.5}$$

$$v(x,t)=z(x,t)+\varphi(x)\ \boxed{0.25}\rightarrow\varphi''(x)=2x\ ;\ \varphi_x(0)=0\ ;\ \varphi(3)=0\rightarrow\varphi(x)=\frac{x^3}{3}-9\ \boxed{0.25}$$

$$z_t=z_{xx}\rightarrow\begin{cases}z_x(0,t)=0\,;z(3,t)=0 & B.C.\\ z(x,0)=2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) & I.C.\end{cases}\ \boxed{0.5}$$

$$X''+\lambda X=0\xrightarrow{X'(0)=X(3)=0}\lambda_n=\alpha_n^2\,;\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{6};\ X_n(x)=\cos(\alpha_n x)\ \boxed{0.25}$$

$$T'+\alpha_n^2T=0\rightarrow T_n(t)=ce^{-\alpha_n^2t}\ \boxed{0.25}\rightarrow z(x,t)=X_n(x)T_n(t)=A_n\cos(\alpha_n x)e^{-\alpha_n^2t}$$

$$z(x,0)=2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\rightarrow A_n\cos(\alpha_n x)=2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\rightarrow A_n=2;\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\rightarrow n=5\ \boxed{0.25}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=z(x,t)+\varphi(x)+w(x,t)\rightarrow u=\underbrace{2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)e^{\frac{-9\pi^2}{4}t}}_{z}+\underbrace{\frac{x^3}{3}-9}_{\varphi}+\underbrace{tx-\sin t}_{w}\ \boxed{0.25}$$

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۳/۲۰	ساعت آزمون: ۸ صبح	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۸۹-۱۳۸۸	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

لطفا تا حد امکان مرتب و خوانا بنویسید. برگه سوال بایستی ضمیمه پاسخنامه گردد

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = x\sin x$ را در بازه $-\pi \le x \le \pi$ بدست آورده $(T = 2\pi)$ و به کمک آن سری عددی $A = \frac{1}{1\times 3} - \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} - \frac{1}{7\times 9} + \dots$ را محاسبه کنید.	۳
۲	تبدیل معکوس فوریه تابع زیر را محاسبه نمایید. $F^{-1}\left\{\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right\}$	۱/۵
۳	معادله دیفرانسیل مشتق جزئی مرتبه یک زیر را با توجه به شرط مرزی داده شده حل نمایید. $z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = y \quad ; \quad z(x,2) = x$	۲
۴	میله ای باریک به طول ۱ واحد در نظر است. دمای اولیه نیمه سمت چپ میله ۱ واحد و نیمه سمت راست ۰/۵ واحد میباشد. محیط اطراف میله عایق بوده و هیچ گرمایی از نقاط ابتدایی و انتهایی آن منتقل نمیشود (یعنی گرادیان دما در این نقاط صفر است) . در اینصورت برای یافتن دما در هر لحظه خاص معادله دیفرانسیل مشتق جزئی زیر را خواهیم داشت. آنرا به کمک روش تفکیک متغیرها ، با توجه به شرایط مرزی داده شده حل نمائید. در نهایت دمای حالت پایدار را نیز بدست آورید. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad 0 < x < 1 \,,\, t > 0$ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=1} = 0$ $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases}$	۳/۵

با آرزوی موفقیت

بنام خدا

حل امتحان ریاضی مهندسی پایان ترم ۲ - ۸۹-۸۸

۱

$f(x)=x\sin x \quad -\pi\leq x\leq\pi \qquad f(-x)=f(x)\Rightarrow b_n=0$ [۰/۲۵] $\qquad 2l=2\pi \Rightarrow \frac{n\pi x}{l}=nx$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx=\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}=\begin{cases}\frac{2}{n^2-1} & n\neq1 \text{ فرد } n\\ \frac{-2}{n^2-1} & n \text{ زوج}\end{cases}$$ [۱]

$$\Rightarrow a_0=2,\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x=-\frac{1}{2}$$ [۰/۵]

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}-\frac{\cos 3x}{3^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}-\cdots\right)$$ [۰/۵]

$$x=\pi/2 \Rightarrow \frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}+\cdots=\frac{\pi-2}{4}$$ [۰/۲۵]

۲

$$F(e^{-ax}H(x))=\frac{1}{a+i\alpha} \quad (1)$$
$$F(xf(x))=i\,F'(\alpha) \quad (2)$$
$$F(f(x-a))=e^{-ia\alpha}F(\alpha) \quad (3)$$

$$(1),(2)\Rightarrow F^{-1}\left(\frac{1}{(3+i\alpha)^2}\right)=xe^{-3x}H(x) \quad (4)$$ [۰/۲۵]

$$(3),(4)\Rightarrow F^{-1}\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right)=(x-2)e^{-3(x-2)}H(x-2)$$ [۰/۲۵]

۴

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad 0<x<1,\ t>0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0 \ (1) \qquad u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<0.5\\ 0 & 0.5<x<1\end{cases} \ (2)$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)\Rightarrow \frac{\ddot F}{F}=\frac{\dot G}{G}=K \qquad \partial u(x,t)/\partial x=\dot F(x)G(t)\xRightarrow{(1)}\dot F(0)=\dot F(1)=0 \ (3)$$ [۰/۲۵]

$$K=-\lambda^2\Rightarrow F(x)=c_1\sin\lambda x+c_2\cos\lambda x\xRightarrow{(3)}c_1=0,\ \sin\lambda=0\Rightarrow\lambda=n\pi\Rightarrow F(x)$$ بدست آمد [۱]

$$\dot G+\lambda^2G=0\Rightarrow G(t)=c_2e^{-\lambda^2t}=c_2e^{-n^2\pi^2t}$$ [۰/۵] $$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-n^2\pi^2t}\cos(n\pi x)$$ [۰/۲۵]

با شرط اولی (۲) می‌بینیم A_n ضریب a_n در بسط کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ است زیرا:

$$\underset{f(x)}{u(x,0)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\pi x)$$ [۰/۲۵]

$$T=2\Rightarrow a_0=1/2,\ a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x$$ [۱]

و در حالت پایدار $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\frac{1}{2}$ خواهد بود. [۰/۲۵]

۳

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=y \qquad z(x,2)=x \qquad \frac{dx}{z}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{y}$$ [۰/۲۵]

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{y}\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}y^2-z \ (1)$$ [۰/۲۵] $$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{1}\xRightarrow{(1)}\frac{dx}{\frac{1}{2}y^2-c_1}=\frac{dy}{1}\Rightarrow x=\frac{1}{6}y^3-c_1y+c_2 \ (2)$$ [۰/۵]

یعنی $c_2=f(c_1)\xRightarrow{(1),(2)}x-\frac{1}{6}y^3+c_1y=f\left(\frac{1}{2}y^2-z\right)\xRightarrow{(1)}x+\frac{1}{6}y^3-yz=f\left(\frac{1}{2}y^2-z\right) \ (3)$ [۰/۵]

$$z(x,2)=x\Rightarrow f(2-x)=-x+\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=x+\frac{2}{3} \ (4)$$ [۰/۲۵] $$\xRightarrow{(3),(4)}z=\frac{x+\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}}{y-1}$$ [۰/۲۵]

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۹/۲۹	ساعت آزمون: ۱۷	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: اول	سال تحصیلی: ۹۰- ۱۳۸۹	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
۱	ابتدا سری فوریه تابع $f(x)$ را در بازه $-\pi \le x \le \pi$ بدست آورده ($T = 2\pi$) و به کمک آن سری عددی A را محاسبه کنید. $f(x) = \lvert sin(x) \rvert \quad , \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$		۲/۵
۲	ابتدا تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورده و به کمک آن انتگرال I را محاسبه کنید. $, \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \lvert x \rvert < 1 \\ 0 & \lvert x \rvert > 1 \end{cases} \quad I = \int_0^{\infty} \frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^6} dx$		۲/۵
۳	پس از تبدیل معادله زیر به فرم استاندارد، جواب عمومی آنرا بدست آورید. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$		۲/۵
۴	معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط مرزی داده شده حل نمایید. $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad , \quad t > 0$ $u(-1,t) = u(1,t) \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=-1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=1} \quad , \quad u(x,0) = \lvert x \rvert$		۲/۵

با آرزوی موفقیت ، لطفا برگه سوال را ضمیمه پاسخنامه نمایید.

۱) تابع زوج است لذا $b_n = 0$ (۰/۲۵)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \text{ فرد} \\ \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{زوج} \end{cases} \quad (1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0 \ (0/25) \Rightarrow \begin{cases} a_{2n-1} = 0 & (0/25) \\ a_{2n} = \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

لذا $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$ (۰/۲۵) به ازای $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ (۰/۵)

۲) $$F(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1-x^2) e^{-i\alpha x} dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos \alpha x \, dx - i\int_{-1}^{1} (1-x^2)\sin \alpha x \, dx = \frac{4(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{\alpha^3} \quad (1/25)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{15} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{\alpha^6} d\alpha = \frac{\pi}{15} \quad (1)$$

۳) $D = 0 \Rightarrow R = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha = \frac{y}{x}$, $\beta = y$ (مخرج) (۰/۲۵)

لذا $u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -\frac{\alpha^2}{\beta} u_\alpha$, $u_{xx} = \frac{\alpha^4}{\beta^2} u_{\alpha\alpha} + \frac{2\alpha^3}{\beta^2} u_\alpha$

$u_{xy} = -\frac{\alpha^3}{\beta^2} u_{\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2}{\beta} u_{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} u_\alpha$, $u_y = \frac{\alpha}{\beta} u_\alpha u_\beta$, $u_{yy} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2\alpha}{\beta} u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$ (۱/۲۵) جایگذاری

$\Rightarrow \beta^2 u_{\beta\beta} = 0 \Rightarrow u_{\beta\beta} = 0 \Rightarrow u = \beta f(\alpha) + g(\alpha) = y f(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$ (۰/۵)

$u(x,t) = F(x)G(t)$ $\begin{cases} u(-1,t) = u(1,t) \Rightarrow F(1) = F(-1) \ (1) \\ u_x|_{x=-1} = u_x|_{x=1} \Rightarrow F'(1) = F'(-1) \ (2) \ (0/25) \end{cases}$ و $\begin{cases} F'' - kF = 0 \ (3) \\ G' - 2kG = 0 \ (4) \ (0/25) \end{cases}$

$k = -\lambda^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} F(x) = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x$ (۰/۲۵) $\overset{(1)}{\Rightarrow} 2B_1 \sin \lambda = 0$ (۰/۲۵) و $\overset{(2)}{\Rightarrow} 2A_1 \lambda \sin \lambda = 0$ (۰/۲۵)

اگر $\sin \lambda \neq 0$ باید $A_1 = B_1 = 0$ که بدیهی است لذا $\lambda = n\pi$ (۰/۲۵)

$(4) \overset{\lambda = n\pi}{\Rightarrow} G(t) = C_1 e^{-2n^2\pi^2 t}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(n\pi x)\} e^{-2n^2\pi^2 t}$ (۰/۲۵)

$f(x) = u(x,0) = |x| \overset{T=2}{\Rightarrow} A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$, $A_n = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$, $B_n = 0$ (۰/۵)

لذا $u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) e^{-2n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس: رحامی	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۱۱/۷	ساعت آزمون: ۸	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: اول	سال تحصیلی: ۹۰- ۱۳۸۹	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	چنانچه قسمت موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ بصورت زیر باشد، با محاسبه قسمت حقیقی ، تابع را بدست آورید. $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta - r\cos\theta + 2$	۲
۲	تبدیل یافته دایره $\lvert z\rvert=\frac{1}{2}(a+b)$ را با استفاده از نگاشت $w=z+\frac{a^2-b^2}{4z}$ بدست آورید.	۲
۳	فرض کنیم $P(z)$ یک چند جمله ای باشد که یک ریشه تکراری از مرتبه n در $z=a$ داشته و $z=a$ تنها نقطه داخل ناحیه D باشد که مرز آن c است. در اینصورت حاصل انتگرال زیر را بدست آورید. $\oint_c \frac{P'(z)}{P(z)}dz$ (راهنمایی: چند جمله ای $P(z)$ را بصورت $P(z)=(z-a)^n Q(z)$ بنویسید که در آن $Q(a)\neq 0$)	۲
۴	با نوشتن سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ حول نقطه $a=1$ در ناحیه $2<\lvert z-1\rvert<3$ مقدار مانده را در این نقطه محاسبه کنید.	۲
۵	انتگرال حقیقی زیر را بدست آورید. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-a^2}dx$	۲

با آرزوی موفقیت

۱)

$$v(r,\theta) = r^2\cos 2\theta - r\cos\theta + 2$$

$$\begin{cases} r u_r = v_\theta \Rightarrow u_r = -2r\sin 2\theta + \sin\theta \ \boxed{0/25} \Rightarrow u = -r^2\sin 2\theta + r\sin\theta + g(\theta) \ \boxed{0/5} \\ -\frac{1}{r}u_\theta = v_r \Rightarrow g'(\theta) = 0 \Rightarrow g(\theta) = c \ \boxed{0/25} \Rightarrow f(r,\theta) = \underbrace{r^2(-\sin 2\theta + i\cos 2\theta)}_{ie^{2i\theta}} - \underbrace{r(-\sin\theta + i\cos\theta)}_{ie^{i\theta}} + 2i + c \ \boxed{0/5} \end{cases}$$

$$f(z) = i(z^2 - z + 2) + c \ \boxed{0/5}$$

۲)

$$w = z + \frac{\frac{a^2-b^2}{4}k}{z} \quad \begin{cases} w = u + iv \\ z = re^{i\theta} \ \boxed{0/5} \end{cases} \Rightarrow u = \left(r + \frac{k}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{k}{r}\right)\sin\theta \ \boxed{0/5}$$

اگر $r = \frac{1}{2}(a+b) \xRightarrow{\text{جایگذاری}} u = a\cos\theta, \ v = b\sin\theta \ \boxed{0/5} \Rightarrow \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \ \boxed{0/5}$ بیضی

۳)

$$\oint_C \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \oint_C \frac{n(z-a)^{n-1}Q(z) + (z-a)^n Q'(z)}{(z-a)^n Q(z)}dz \ \boxed{0/25} = \oint_C \frac{n + \frac{z-a}{Q(z)}Q'(z)}{z-a}dz \ \boxed{0/25} = 2\pi i f(a) = 2\pi n i \ \boxed{0/5}$$

تابع تحلیلی $f(z)$

۴)

$f(z) = \frac{1}{z(z-5)}$ حول $a=1$: $f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z}\right) \ \boxed{0/25}$ در ناحیه $2 < |z-1| < 3$

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{z-1-4} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 + \cdots\right)$$ زیرا در این ناحیه: $\left|\frac{z-1}{4}\right| < 1$ $\boxed{0/25}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\left(1 - \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 - \cdots\right)$$ زیرا در این ناحیه: $\frac{1}{4} < \frac{1}{|z-1|} < 1$ $\boxed{0/25}$

بسط $\frac{1}{z-1}$ برابر $-\frac{1}{5}$ است

$$f(z) = -\frac{1}{20}\left(1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 + \cdots\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \cdots\right) \ \boxed{0/25}$$

۵)

$$I = \frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x-a}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx\right) \ \boxed{0/25} = \frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos z\cos a - \sin z\sin a}{z}dz - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos z\cos a + \sin z\sin a}{z}dz\right) \ \boxed{0/25}$$

تغییر متغیر $z = x-a$ تغییر متغیر $z = x+a$

$$= \frac{-\sin a}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz = -\frac{\pi\sin a}{a} \ \boxed{0/5}$$

بسمه تعالی

پردیس
دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

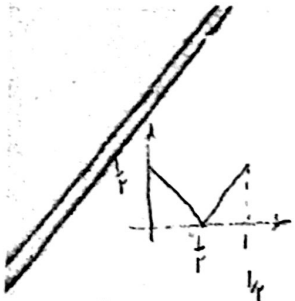
گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
تاریخ آزمون: ۱۳۹۰/۲/۱	ساعت آزمون: ۸	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۹۰- ۱۳۸۹	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	سری فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورید. به کمک آن سری عددی A را بیابید. $f(x)=\begin{cases}0.5-x & 0<x\le 0.5\\ x-0.5 & 0.5<x\le 1\end{cases} \quad ; \quad T=1$ $A=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}--++\cdots$	۲/۵
۲	تبدیل فوریه معکوس $F(\alpha)$ را بیابید. $F(\alpha)=\frac{4b\sin(\pi\alpha)}{\alpha b^2+\alpha^3}$	۲
۳	معادله مشتق جزئی زیر را حل نمائید. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)^3 z$	۲/۵
۴	برای میله ای به طول L معادله گرما با شرایط مرزی داده شده را حل نمایید. در این معادله h یک عدد ثابت مثبت و $f(x)$ توزیع دمای اولیه میله میباشد. $u_t=c^2u_{xx} \quad ; \quad t\ge 0$ $u(0,t)=0 \quad ; \quad u_x(L,t)+hu(L,t)=0$ $u(x,0)=f(x) \quad ; \quad 0\le x\le L$	۳

با آرزوی موفقیت ، لطفا برگه سوال را ضمیمه پاسخنامه نمایید.

به نام

حل سؤالات ریاضی مهندسی - میان‌ترم ۲-۹۰-۸۹



۱)

$2l=1$ زوج $\Rightarrow b_n=0$ $\boxed{0/25}$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\begin{cases}\frac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج} \neq 0\end{cases}$$ $\boxed{0/25}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{2}{2l}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1^2}+\frac{\cos 6\pi x}{3^2}+\frac{\cos 10\pi x}{5^2}+\cdots\right)$$ $\boxed{0/25}$ $\boxed{0/25}$

$$x=\frac{1}{8} \Rightarrow A=1-\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$ $\boxed{1}$

۲)

$$F(\alpha)=\underbrace{\frac{2\sin\pi\alpha}{\alpha}}\ \underbrace{\frac{2b}{b^2+\alpha^2}} \overset{\text{تبدیل}}{\Rightarrow} f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-b|x-t|}\,dt$$ $\boxed{0/25}$

$\boxed{1}$ $\begin{cases}1 & |x|<\pi \text{ محدود}\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ محدود $e^{-b|x|}$

۱) اگر $x\leq-\pi \Rightarrow f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{b(x-t)}\,dt=\frac{2\sinh\pi b}{b}e^{bx}$ $\boxed{0/25}$

۲) $|x|<\pi \Rightarrow f(x)=\int_{-\pi}^{x}+\int_{x}^{\pi}=\frac{2(1-e^{-\pi b}\cosh bx)}{b}$ $\boxed{0/25}$

۳) $x\geq\pi \Rightarrow f(x)=\frac{2\sinh\pi b}{b}e^{-bx}$ $\boxed{0/25}$

۳)

این معادله را به پوش تبدیل کنید

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{(x+y)^2z}=\frac{m\,dx+n\,dy+l\,dz}{m(x^2+y^2)+n(2xy)+l(x+y)^2z}$$ $\boxed{0/25}$

$$l=0,\ m=n=1 \Rightarrow \frac{dz}{(x+y)^2z}=\frac{dx+dy}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{dz}{z}=(x+y)(dx+dy) \Rightarrow 2\ln z=(x+y)^2+C_1$$ $\boxed{1}$

$$l=0,\ m=1,\ n=-1 \Rightarrow \frac{dz}{(x+y)^2z}=\frac{dx-dy}{(x-y)^2}=\frac{dx+dy}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{-1}{x-y}=\frac{-1}{x+y}+C_2$$ $\boxed{1}$

$$C_1=f(C_2) \Rightarrow z=\exp\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}f\left(\frac{-2y}{x^2-y^2}\right)\right]$$ $\boxed{0/25}$

۴)

$$u(x,t)=X(x)T(t) \Rightarrow \frac{\ddot{X}}{X}=\frac{\dot{T}}{c^2T}=K \overset{K=-\lambda^2}{\Rightarrow} \ddot{X}+\lambda^2X=0,\ X(0)=0,\ \dot{X}(l)+hX(l)=0$$ $\boxed{0/25}$

$$X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x \xrightarrow[\text{شرایط مرزی}]{} \operatorname{tg}\lambda l=-\frac{\lambda}{h}$$ $\boxed{1}$

اثبات کنید $K\geq 0$ - جواب بدیهی می‌باشد. $\boxed{0/25}$

$\alpha=\lambda l \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\frac{\alpha}{lh}$ ریشه‌های معادله را α_n می‌نامیم $\alpha_1<\alpha_2<\cdots$ $\Rightarrow X(x)=\sin(\lambda_n x)$ $n=1,2,\ldots$ $\boxed{0/25}$

$$\dot{T}+\lambda_n^2c^2T=0 \Rightarrow T_n(t)=e^{-\lambda_n^2c^2t}$$ $\boxed{0/25}$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\lambda_n^2c^2t}\sin(\lambda_n x) \quad \left(\lambda_n=\frac{\alpha_n}{l}\right)$$ $\boxed{0/25}$

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\lambda_n x)$$

با توجه به معادله استورم لیوویل $p(x)=1$ لذا A_n از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_n=\frac{\int_0^l f(x)\sin\lambda_n x\,dx}{\int_0^l\sin^2\lambda_n x\,dx}=\frac{1}{\frac{1}{2}l-\frac{1}{4}\sin\lambda_n l}\int_0^l f(x)\sin\lambda_n x\,dx$$ $\boxed{0/5}$

بسمه تعالی

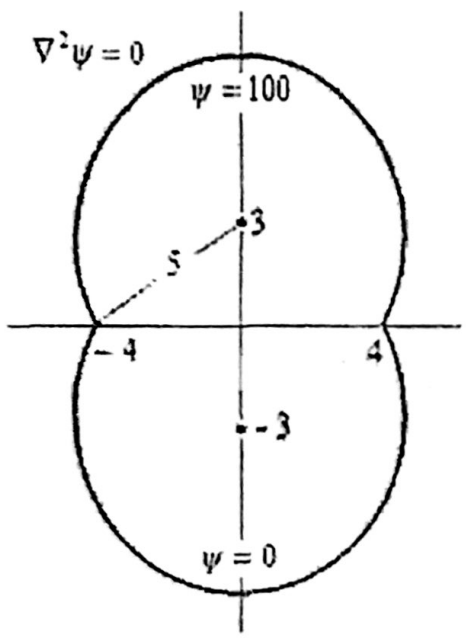
پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۰/۳/۳۱ — ساعت آزمون: ۸ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: دوم — سال تحصیلی: ۹۰-۱۳۸۹ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	با انتخاب $u(x,t)=X(x)T(t)$ معادله زیر را حل نمایید. $\begin{cases} u_{tt}+9u_{xx}=u\ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=u(x,0)=0 \end{cases}$	۲
۲	الف) اگر تابع $u=f(x^2+y^2)$ یک تابع همساز(هارمونیک) باشد، این تابع را بدست آورید.	۲
	ب) معادله $exp(i\bar{z})=\overline{exp(iz)}$ را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.	۱
۳	الف) نگاشت دو خطی بیابید که نقاط $-4\ ,0\ ,4$ را به ترتیب به $\infty\ ,-1\ ,0$ انتقال دهد.	۱
	ب) به کمک نگاشت قبل معادله لاپلاس را برای ناحیه هاشور خورده حل نمایید. شعاع هر دو کمان دایره ها ۵ بوده و مرکز یکی $(0,3)$ و دیگری $(0,-3)$ میباشد. در قسمت فوقانی بر روی مرز $\psi=100$ و در قسمت پایینی بر روی مرز $\psi=0$ میباشد.	۳
۴	انتگرالهای زیر را به کمک قضیه مانده ها بدست آورید. $\oint_{\lvert z\rvert=2} Im(z)cos(\bar{z})dz \quad , \quad \int_0^{2\pi} cos(cos\theta+i\,sin\theta)d\theta$	۳



با آرزوی موفقیت

ب/احمد

حل سؤالات پایان ترم درس ریاضی مهندسی - سال تحصیلی ۹۰-۸۹

۱)

$$u_{tt}+9u_{xx}=u \Rightarrow XT''+9X''T=XT \Rightarrow \frac{9X''}{X}-1=-\frac{T''}{T}=-\lambda^2 \quad \boxed{0/25}$$

$$\frac{T''}{T}=\lambda^2 \Rightarrow T(t)=c_1\sinh\lambda t+c_2\cosh\lambda t \quad \boxed{0/5} \xrightarrow[\text{لذا } T(0)=0]{u(x,0)=0} c_2=0 \quad \boxed{0/25}, \quad \frac{9X''}{X}-1=-\lambda^2 \Rightarrow X''+\frac{\lambda^2-1}{9}X=0$$

$$\Rightarrow X(x)=c_3\sin\frac{\sqrt{\lambda^2-1}\,x}{3}+c_4\cos\frac{\sqrt{\lambda^2-1}\,x}{3} \quad \boxed{0/5} \xrightarrow[\text{لذا } X(0)=0]{u(0,t)=0} c_4=0 \quad \boxed{0/25}, \quad u(\pi,t)=0 \Rightarrow X(\pi)=0 \Rightarrow \lambda=\sqrt{1+9n^2} \quad \boxed{0/25}$$

لذا $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx)\sinh\left(\sqrt{1+9n^2}\,t\right)$

---

۲) الف)

$$\begin{cases} u_x=2x f'(x^2+y^2) \\ u_y=2y f'(x^2+y^2) \end{cases} \boxed{0/25} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx}=2f'+4x^2f'' \\ u_{yy}=2f'+4y^2f'' \end{cases} \boxed{0/25} \Rightarrow \nabla^2 u=0 \quad \boxed{0/25} \xrightarrow{z=x^2+y^2} \frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{-1}{z} \Rightarrow f'(z)=\frac{c_1}{z} \Rightarrow f(z)=c_1\ln z+c_2 \quad \boxed{0/25}$$

ب)

$$\exp(i\bar z)=\overline{\exp(iz)} \Rightarrow e^{+y}(\cos x+i\sin x)=e^{-y}(\cos x-i\sin x) \quad \boxed{0/5} \Rightarrow e^{-y-ix}=e^{y+ix}$$

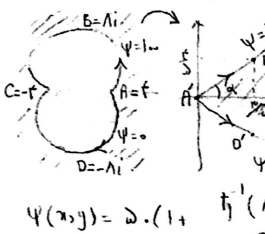
$$\Rightarrow e^{2i\bar z}=1 \Rightarrow 2i\bar z=2k\pi i \Rightarrow \bar z=k\pi \Rightarrow z=k\pi \quad \boxed{0/5}$$

---

۳)

$$\begin{cases} -4\to\infty \\ 0\to -1 \\ 4\to 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{صلبی}} w=\frac{z-4}{z+4} \quad \boxed{1}$$

در قسمت بالایی $\begin{cases} 4\to 0 \\ 8i\to \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \\ -4\to\infty \end{cases}$ در قسمت تحتانی $\begin{cases} 4\to 0 \\ -8i\to \frac{3}{5}-\frac{4}{5}i \\ -4\to\infty \end{cases}$ $\boxed{0/25}$



می‌توان کنترل کرد چون $w=1+\frac{-8}{z+4}$ لذا با ترکیب انتقال و دوران و انعکاس به خط می‌رسیم

ناحیه جدید را می‌توان مجدداً به نیم‌صفحه تبدیل کرد لذا جواب بصورت تابع φ بود و لذا $\ln z$ $\boxed{0/5}$

$\psi=50\left(1+\frac{\varphi}{\alpha}\right)$ $\boxed{1/5}$ با توجه به شرایط مرزی: $\nabla^2\psi=0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=0 \Rightarrow \psi=A\varphi+B$ $\boxed{0/5}$

برای برگشت به فضای اولیه $\varphi=tg^{-1}\frac{v}{u}=tg^{-1}\frac{8y}{x^2+y^2-16}$ لذا:

$$\psi(x,y)=50\left(1+\frac{tg^{-1}\left(8y/(x^2+y^2-16)\right)}{tg^{-1}(4/3)}\right)$$

* چون ۰ در D_0 نیست پس ۱- نیز نمی‌تواند باشد لذا ناحیه D مصرح تواند شکل مطلوب خود باشد.

---

۴) الف)

$$\bar z=\frac{|z|^2}{z}=\frac{4}{z}, \quad Im(z)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{4}{z}\right) \quad \boxed{0/25} \Rightarrow I=\int_{|z|=2}\frac{1}{2i}\left(z-\frac{4}{z}\right)\cos\frac{4}{z}\,dz \quad \boxed{0/25}$$

تنها کیس ۰=z در بسط لذا:

$$\left(z-\frac{4}{z}\right)\left(1-\frac{1-\left(\frac{4}{z}\right)^2}{2!}+\cdots\right) \quad \boxed{0/25} \Rightarrow a_{-1}=-\frac{16}{2!}-4=-12 \quad \boxed{0/25} \Rightarrow I=2\pi i\,\frac{-12}{2i}=-12\pi \quad \boxed{0/25}$$

ب)

$$I=\int_0^{2\pi}\cos(e^{i\theta})\,d\theta \quad \boxed{0/5} \xrightarrow{z=e^{i\theta}} -i\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\,dz \quad \boxed{0/5} \quad \boxed{0/5}\ a_{-1}\Big|_{z=0}=1 \Rightarrow I=-i(2\pi i(1))=2\pi \quad \boxed{0/25}$$

رابطه دوم: طبق قضیه مونتیگ‌ولس اگر f رو در درون دایره $|z-z_0|=R$ تحلیلی باشد:

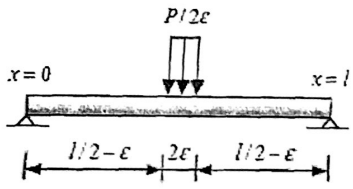
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta \quad \boxed{0/5}$$

$$f(z)=\cos z\ ;\ z_0=0,\ R=1 \Rightarrow \int_0^{2\pi}\cos(e^{i\theta})\,d\theta=2\pi f(0)=2\pi \quad \boxed{0/5}$$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۹۰/۸/۲۶	ساعت آزمون: ۱۱	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: اول	سال تحصیلی: ۹۱-۱۳۹۰	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. $f(x)=\cos(\alpha x)\ ,\ -\pi\le x\le\pi\ ,\ T=2\pi\ ,\ \alpha\ne 0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ ب: با توجه به سری فوق حاصل عبارت زیر را بصورت یک سری بیان نمایید. $S=\pi\cot(\alpha\pi)-1/\alpha$ ج: با انتگرال گیری از طرفین سری S از $\alpha=0$ تا $\alpha=x$ نشان دهید: (ثابتهای A_n بایستی محاسبه شوند) $\frac{\sin(x)}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{A_n^2})$ د: با استفاده از رابطه قبل نشان دهید: $\frac{\pi}{2}=\frac{2^2\times4^2\times6^2\times8^2\times...}{1\times3^2\times5^2\times7^2\times...}$	
۲	معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل نمایید. جواب را بصورت انتگرال پیچشی بیان نمایید. $y''+3y'+2y=f(x)\ ,\ f(x)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert<1\\ 0 & \lvert x\rvert>1\end{cases}$	
۳	با استفاده از تغییر متغیرهای ذکر شده، معادله زیر را حل نمایید. $xu_{xx}-yu_{xy}+u_x=0\ ,\ \alpha=y\ ,\ \beta=xy$	
۴	تیری به طول l در دو سر خود بدون تغییر مکان بوده و تا قبل از زمان صفر در حال سکون می‌باشد. در زمان صفر در وسط خود تحت شدت نیرویی برابر با $P/2\varepsilon$ در طول 2ε قرار می‌گیرد. تغییرمکان تیر، $u(x,t)$ ، را در هر لحظه بیابید. $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+f(x,t)$ $u(0,t)=u(l,t)=u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$ $f(x,t)=\begin{cases}0 & 0<x<l/2-\varepsilon\\ P/2\varepsilon & l/2-\varepsilon<x<l/2+\varepsilon\\ 0 & l/2+\varepsilon<x<l\end{cases}$  نتی‌جه را برای زمانی که $\varepsilon\to0$ میل میکند ساده نمایید.	

با آرزوی موفقیت

بسم الله

حل سؤالات امتحان ریاضی مهندسی - میان ترم ۹۱-۹۰

الف: تابع زوج است لذا $b_n = 0$.

$$2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi \qquad \frac{n\pi x}{l} = nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha - n)x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha + n)x\, dx = \frac{2\alpha \sin\alpha\pi \cos n\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

لذا $a_0 = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$

$$\Rightarrow \cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2}\cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2}\cos 2x - \cdots\right)$$

ب: با انتخاب $x = \pi$

$$\pi \cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$

ج:

$$\int_0^x \left(\pi \cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right) d\alpha = \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} d\alpha + \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} d\alpha + \cdots \Rightarrow \ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \xrightarrow{x \to \frac{x}{\pi}} \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}}$$ قسمت دوم نتیجه می‌شود

۲- با برقراری تبدیل فوریه از طرفین:

$$(i\alpha)^2 Y(\alpha) + 3i\alpha Y(\alpha) + 2Y(\alpha) = F(\alpha) \Rightarrow Y(\alpha) = F(\alpha)\left[\frac{1}{1+i\alpha} - \frac{1}{2+i\alpha}\right] \boxed{1/5}$$

بنابراین

$$\Rightarrow y(x) = f(x) * \left(e^{-x} - e^{-2x}\right) H(x) = \int_{-1}^{1}\left[e^{-(x-t)} - e^{-2(x-t)}\right] H(x-t)\, dt$$

$\boxed{1/5}$ $\boxed{1/5}$

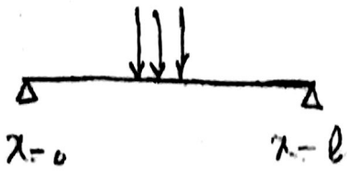
$$y(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0 & x \leq -1 \\ e^{-x}\int_{-1}^{x} e^{t}\, dt - e^{-2x}\int_{-1}^{x} e^{2t}\, dt = \frac{1}{2} - e^{x+1} + \frac{1}{2}e^{-2(x+1)} & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}\int_{-1}^{1} e^{t}\, dt - e^{-2x}\int_{-1}^{1} e^{2t}\, dt = 2e^{-x}\sinh 1 - e^{-2x}\sinh 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۳- $x = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = \alpha$ لذا:

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = \alpha u_\beta \; ; \; u_{xx} = (u_x)_\alpha \alpha_x + (u_x)_\beta \beta_x = \alpha^2 u_{\beta\beta}$$

$$u_{xy} = (u_x)_\alpha \alpha_y + (u_x)_\beta \beta_y = u_\beta + \alpha u_{\beta\alpha} + \beta u_{\beta\beta} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \alpha^2 u_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow u = f(\alpha) + g(\beta) = f(y) + g(xy)$$



$$(\alpha)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t)$$

$$(\beta)\quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$(\gamma)\quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$(\delta)\quad f(x,t) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{l}{2} - \epsilon \\ \frac{P}{2\epsilon} & \frac{l}{2} - \epsilon < x < \frac{l}{2} + \epsilon \\ & \frac{l}{2} + \epsilon < x < l \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$(\alpha) \Rightarrow \sum \left(G_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} G_n\right) \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x,t)$$

$$\Rightarrow G_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} G_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x;t) \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}-\epsilon}^{\frac{l}{2}+\epsilon} \frac{P}{2\epsilon} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{P}{l\epsilon} \times \frac{-l}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}-\epsilon}^{\frac{l}{2}+\epsilon}$$

$$= \frac{-P}{n\pi\epsilon}\left[\cos\frac{n\pi}{l}\left(\frac{l}{2}+\epsilon\right) - \cos\frac{n\pi}{l}\left(\frac{l}{2}-\epsilon\right)\right]$$

$$G_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} G_n = \frac{2P}{n\pi\epsilon} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{n\pi\epsilon}{l}$$

جواب عمومی $G_{nh} = a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t$

جواب خصوصی $G_{np} = \frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{n\pi\epsilon}{l}$

$$T(t) = a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + \frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi\epsilon}{l}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t + \frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi\epsilon}{l}\right] \times \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$(\gamma)_1 \Rightarrow u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n + \frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi\epsilon}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi\epsilon}{l}$$

$$(\gamma)_2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\frac{n\pi c}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Pl^2}{n^3\pi^3c^2\epsilon}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi\epsilon}{l}\left[1-\cos\frac{n\pi c}{l}t\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2Pl}{n^2\pi^2c^2} \times \sin\frac{n\pi}{2}\left[1-\cos\frac{n\pi c}{l}t\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۱/۲۴	ساعت آزمون: ۱۱	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۱۳۹۰-۹۱	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. $f(x)=x\sin(x)\ ,\ -\pi\le x\le\pi\ ,\ T=2\pi$ ب: با توجه به سری فوق، حاصل سری عددی زیر را بیابید. $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2-1}$	۳
۲	اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ بصورت زیر باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos^3 x)dx$ را بیابید. $f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos(\omega x)+\omega\sin(\omega x)}{\omega^2+4}\right)d\omega$	۲
۳	مساله زیر را حل نمایید. $u_{tt}-u_{xx}=x+t\ ;\ 0<x<\pi\ ;\ t>0$ $u(x,0)=2\ ;\ u_t(x,0)=x\ ;\ 0\le x\le\pi$ $u(0,t)=2t\ ;\ u(\pi,t)=t\ ;\ t\ge 0$	۳
۴	میدانیم جواب مساله موج ($u_{tt}=c^2u_{xx}$) را برای میله ای به طول L میتوان بصورت زیر نوشت: $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب انحراف و سرعت اولیه میباشند. نحوه گسترش این دو تابع را برای حالت $u_x(0,t)=u(L,t)=0$ ثابت نمایید.	۱

با آرزوی موفقیت

$\frac{\pi}{l} = nx \qquad b_n = 0 \qquad \boxed{0/25}$ (1

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx = -\frac{2(-1)^n}{n^2-1} \quad n \neq 1 \quad \boxed{0/5} \qquad a_1 = -\frac{1}{2}\ \boxed{0/25}, \quad a_0 = 2 \quad \boxed{0/25}$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \quad \boxed{0/5}$

$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\times 3} - \frac{\cos 4x}{2\times 4} + \frac{\cos 6x}{3\times 5} - \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$

$f(\pi) = f(-\pi)\ \boxed{0/25} \xRightarrow{\text{تمرین}} \sin x + x\cos x = \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(-n\sin nx)}{n^2-1}\ \boxed{0/5} \xrightarrow[x=\frac{\pi}{2}]{} S = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ \boxed{0/5}$

(2 $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha^2+4}\ \boxed{0/5}\ ;\ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x = \frac{\alpha}{\alpha^2+4}\ \boxed{0/5}$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x\,dx + 3\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx\right) \quad \boxed{0/5}$

$= \frac{1}{4}\left(\pi A(3) + 3\pi A(1)\right) = \frac{11\pi}{60} \quad \boxed{0/75}$

(3 $u(x,t) = v(x,t) + \frac{t}{\pi}x + t \quad \boxed{0/5}$

$v_{tt} - v_{xx} = x + t \quad 0 < x < \pi \quad t \geq 0 \qquad v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \quad t \geq 0$

$v(x,0) = 2 \quad v_t(x,0) = \frac{\pi-1}{\pi}x - 1 \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \boxed{0/5}$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right)\sin nx = x + t \quad \boxed{0/5}$

$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+t)\sin nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2t}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) \quad \boxed{0/25}$

کلی $T_n(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} + \frac{2t}{n^3\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) \Rightarrow v$ بدست می‌آید $\boxed{0/5}$

b) $v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}\right)\sin nx = 2 \quad \boxed{0/25}$

$a_n = -\frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{n^3}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) \quad \boxed{0/5}$

$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n + \frac{2}{\pi n^3}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right)\sin nx = \frac{\pi-1}{\pi}x - 1 \quad \boxed{0/25}$

$nb_n + \frac{2}{\pi n^3}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-1}{\pi}x - 1\right)\sin nx\,dx \Rightarrow b_n$ بدست می‌آید.

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی | مدرس: | آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۳/۳۰ | ساعت آزمون: ۸ | مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

نیمسال: دوم | سال تحصیلی: ۹۱-۱۳۹۰ | استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
۱	معادله با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0$$		۱/۵
۲	تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w=\tan\frac{z}{2}$ بدست آورید. $$D=\left\{z \mid -\frac{\pi}{2}\le \mathrm{Re}(z)\le\frac{\pi}{2}\right\}$$		۳
۳	انتگرال مختلط زیر را بدست آورید. $$I=\oint_c z^3 e^{\frac{1}{z}}\cos(\frac{2}{z})\,dz \quad , \quad c:\lvert z\rvert=1$$		۱/۵
۴	انتگرال حقیقی زیر را با استفاده از قضیه مانده ها به دست آورید. $$I=\int_0^\infty \frac{16-x^2}{\left(16+x^2\right)^2}\cos\frac{x}{4}\,dx$$		۳

با آرزوی موفقیت

بسم خدا

حل سؤالات امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی - نیمسال دوم ۹۰-۹۱

$\alpha = y+2x$
$\beta = y-2x$

سوال ۱)

$$(D^2+DD'-2D'^2-D-2D')z=0 \Rightarrow D^2+D(D'-1)-2D'^2-2D'=0 \Rightarrow \begin{cases} D=1+D' \\ D=-2D' \end{cases} \quad \boxed{0/75}$$

$$\Rightarrow (D+2D')(D-D'-1)z=0 \Rightarrow z=f(y-2x)+e^{x}g(y+x) \quad \boxed{0/75}$$

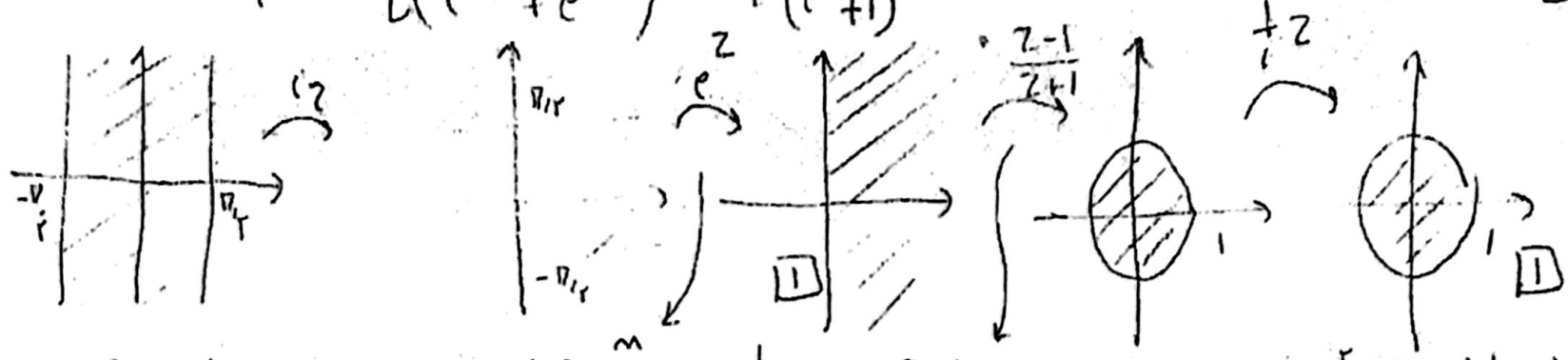
سوال ۲) $z=0$ تنها تکین تابع تحت انتگرال است که تکین اساسی است.

$$f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}\cos\frac{2}{z}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{(\frac{2}{z})^2}{2!}+\frac{(\frac{2}{z})^4}{4!}-\cdots\right) \quad \boxed{0/75}$$

$$a_{-1}\Big|_{z=0}=\frac{2^4}{4!}-\frac{4}{2!2!}+\frac{1}{4!}=\frac{-7}{24} \quad \boxed{0/5} \Rightarrow I=2\pi i\, a_{-1}=\frac{-7\pi i}{12} \quad \boxed{0/25}$$

سوال ۳)

$$w=\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}=\frac{e^{i\frac{z}{2}}-e^{-i\frac{z}{2}}}{i\left(e^{i\frac{z}{2}}+e^{-i\frac{z}{2}}\right)}=\frac{e^{iz}-1}{i\left(e^{iz}+1\right)} \Rightarrow z\to iz\to e^{z}\to\frac{z-1}{z+1}\to\frac{1}{i}z \quad \boxed{1}$$



زیرا در z $\begin{cases} -\infty<x<\infty \\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<\rho=e^{x}<\infty \\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ربع اول و چهارم

$$w=\frac{z-1}{z+1}\Rightarrow z=\frac{w+1}{1-w}=\frac{1-u^2-v^2+i(2v)}{(1-u)^2+v^2}$$

$Re(z)\ge 0 \Rightarrow u^2+v^2\le 1$ داخل دایره واحد

سؤال ۴)

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{0/25} \Rightarrow \oint_C \frac{16-z^2}{(16+z^2)^2}e^{i\frac{z}{4}} \quad \boxed{0/5}$$

در صفحه مختلط از صورت حدش کل بیشتر است

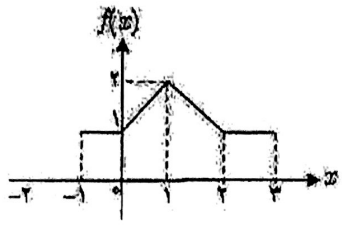
$\int_{\Gamma}=0$ لذا $\boxed{0/25}$

$$z=4i \xrightarrow[\boxed{0/25}]{m=2} a_{-1}=\lim_{z\to 4i}\left[(z-4i)^2\frac{16-z^2}{(16+z^2)^2}e^{i\frac{z}{4}}\right]'=\frac{1}{8ei} \quad \boxed{1/25} \Rightarrow I=\frac{1}{2}Re\left(2\pi i\frac{1}{8ei}\right)=\frac{\pi}{8e} \quad \boxed{0/5}$$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:
	تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۸/۲۵	ساعت آزمون: ۱۱
	نیمسال: اول	سال تحصیلی: ۹۲-۱۳۹۱

آزمون درس: ریاضی مهندسی		دانشگاه تهران
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		
استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست		

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
۱	سری فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورید. $f(x) = x\sin(x) \quad ; \quad -\pi \le x \le \pi$		۱/۵
۲	تبدیل فوریه تابع روبرو را بدست آورده، به کمک آن حاصل انتگرال زیر را بیابید. $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\alpha)\rvert^2 d\alpha$		۲/۵
۳	معادله مشتق جزئی زیر را حل نمایید. $\left(\frac{y-z}{yz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{z-x}{zx}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{xy}$		۱/۵
۴	مساله زیر را حل نمایید. $u_{tt}=4u_{xx}+1 \quad ; \quad 0<x<\pi \quad ; \quad t>0$ $u(0,t)=1 \quad ; \quad u_x(\pi,t)=t \quad ; \quad u(x,0)=1 \quad ; \quad u_t(x,0)=x$		۳/۵

با آرزوی موفقیت

مسئله ۱: $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2 \quad 0/25$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \cos nx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad n \neq 1 \quad 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \quad 0/25 \qquad x \sin x = 1 - \frac{\cos x}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-1}$$

مسئله ۲: اگر بود f را در نظر می‌گیریم

0/5

$$F(\alpha) = \int_{-2}^{2} f(x+1) e^{-i\alpha x} = \int_{-2}^{2} f(x+1)\cos \alpha x \, dx - i \underbrace{\int_{-2}^{2} f(x+1) \sin \alpha x \, dx}_{0} \quad 0/5$$

$$= 2\left(\int_0^1 (2-x)\cos \alpha x + \int_1^2 \cos \alpha x \, dx\right) = 2\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\right)$$

با کانولوشن $\Rightarrow$ $F(\alpha) = 2e^{-i\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\right)$ 1 $\qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{40\pi}{3}$ 1

مسئله ۳:

$$\frac{dx}{\frac{y-z}{yz}} = \frac{dy}{\frac{z-x}{zx}} = \frac{dz}{\frac{zx-y}{xy}} \Rightarrow \frac{dx}{\frac{1}{z}-\frac{1}{y}} = \frac{dy}{\frac{1}{x}-\frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}} \Rightarrow dx+dy+dz=0$$

0/25 $\qquad x+y+z=C_1$

$$\frac{dx/x}{y-z} = \frac{dy/y}{z-x} = \frac{dz/z}{z-y} \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \Rightarrow xyz = C_2$$

0/25

$$x+y+z = f(xyz)$$

حل سؤال ۴

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

$$\varphi(0,t) = 1 \Rightarrow c(t) = 1 \qquad \varphi_x(\pi,t) = t \Rightarrow 2a(t)\pi + b(t) = t \Rightarrow \begin{cases} a(t) = 0 \\ b(t) = t \end{cases}$$ مثلاً می‌تواند

$$\varphi(x,t) = tx + 1 \quad \boxed{0/5}$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow v_{tt} = 4v_{xx} + 1 \qquad v(0,t) = v_x(\pi,t) = v(x,0) = v_t(x,0) = 0$ $\boxed{0/5}$

$$\ddot{X} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow a = 0, \quad \dot{X}(\pi) = 0 \Rightarrow b\lambda\cos\lambda\pi = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2n-1}{2} \quad \boxed{0/5}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{2n-1}{2}x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\underbrace{\ddot{T}_n(t) + (2n-1)^2 T_n(t)}_{C_n}\Big]\sin\frac{2n-1}{2}x = 1 \quad \boxed{0/5}$$

$$C_n = \frac{\int_0^{\pi} 1\cdot\sin\frac{2n-1}{2}dx}{\int_0^{\pi}\sin^2\frac{2n-1}{2}x\,dx} = \frac{4}{\pi(2n-1)} \quad \boxed{0/5} \Rightarrow \ddot{T}_n(t) + (2n-1)^2 T_n(t) = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

جواب خصوصی $= \dfrac{4}{\pi(2n-1)^3}$ $\boxed{0/5}$ جواب عمومی $= a\cos(2n-1)t + b\sin(2n-1)t$ $\boxed{0/5}$

با توجه به شرایط اولیه می‌توان $T_n(0) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^3}, \quad \dot{T}_n(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow T_n(t) = \frac{4}{\pi(2n-1)^3}\big(1 - \cos(2n-1)t\big) \quad \boxed{0/5}$$

جواب نهایی $u(x,t) = tx + 1 + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\big(1 - \cos(2n-1)t\big)\sin\frac{2n-1}{2}x$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی | مدرس: | آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۱۰/۱۹ | ساعت آزمون: ۸ | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: اول | سال تحصیلی: ۹۲-۱۳۹۱ | استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره

۱ مساله حرارت در ناحیه نیمه متناهی زیر را با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی حل نمایید. **۲**

$$u_t = 4u_{xx} \qquad x > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x} \qquad x > 0$$
$$u(0,t) = 0$$

۲ چنانچه درتابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ ، رابطه زیر بین جزء حقیقی و موهومی آن برقرار باشد،تابع $f(z)$ را بدست آورید. **۲**

$$u - v = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$$

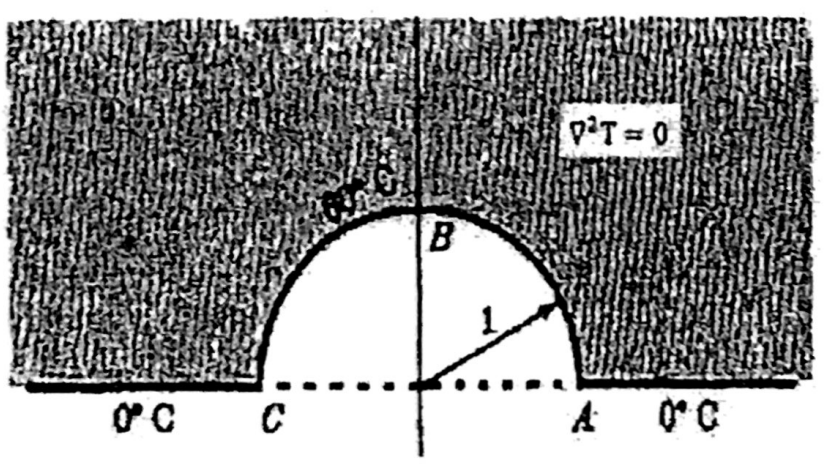
۳ تبدیل یافته ربع اول دستگاه مختصات را تحت نگاشت زیر بدست آورید. **۲**

$$w = \frac{z-1}{z+2}$$

۴ با استفاده از یک نگاشت مناسب دمای حالت پایدار را برای ناحیه نشان داده شده بیابید. **۲**

(دما در روی مرز نیم دایره ای برابر ۶۰ میباشد)

صفحهٔ z



۵ الف: سری لوران تابع زیر را حول نقطه $z = i$ بدست آورده، مانده در این نقطه را بدست آورید. **۳**

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$$

ب: با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال حقیقی زیر را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$$

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

حل مسائل امتحان ریاضی مهندسی - پایان ترم ۱ - ۹۱-۹۲

۱) $F_s(u_t) = 4F_s(u_{xx}) \Rightarrow \frac{\partial U_s}{\partial t} + 4\alpha^2 U_s = 0 \Rightarrow U_s(\alpha,t) = Ae^{-4\alpha^2 t}$ $\boxed{1/75}$

$u(x,0) = e^{-x} \Rightarrow U_s(\alpha,0) = \int_0^\infty e^{-x}\sin\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} = A$ $\boxed{0/75}$

$U_s(\alpha,t) = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}e^{-4\alpha^2 t} \Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+1}e^{-4\alpha^2 t}\sin\alpha x\,d\alpha$ $\boxed{0/5}$

۲) $\left.\begin{array}{l} u+iv = f(z) \\ iu - v = if(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{(u-v)}^{U} + i\overbrace{(u+v)}^{V} = (1+i)f(z) = g(z) \Rightarrow U+iV = g(z)$ $\boxed{0/5}$ $\boxed{1/5}$

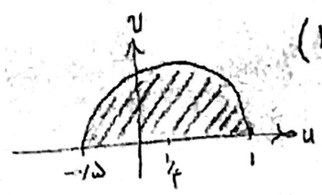
چون حقیقی $g(z)$ دارد، کافی است، پس ابتدا $g'(z)$ و سپس $g(z)$ را بدست می‌آوریم.

$g'(z) = U_x - iU_y = 3x^2+6xy-3y^2 - i(3x^2-6xy-3y^2) \xrightarrow[y\to 0]{x+z} (1-i)3z^2$ $\boxed{0/5}$

$\Rightarrow g(z) = (1-i)z^3 + C = (1+i)f(z) \Rightarrow f(z) = -iz^3 + \frac{C}{1+i}$ $\boxed{0/5}$

۳) $z = \frac{2w+1}{1-w} \xrightarrow[w=u+iv]{z=x+iy} x = \frac{-2u^2-2v^2+u+1}{(1-u)^2+v^2}$, $y = \frac{3v}{(1-u)^2+v^2}$ $\boxed{1}$

$x \geq 0 \Rightarrow (u-\frac{1}{4})^2+v^2 \leq \frac{9}{16}$, $y \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$

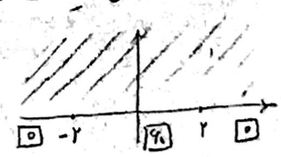


۴) با نگاشت یکوفسکی این ناحیه به نیم صفحه فوقانی می‌رود. حال این ناحیه با نگاشت $\operatorname{Ln} z$ امتداد پذیر است و با سه‌تکه روابط زیر:

$T = -\frac{60}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{v}{u+2} + \frac{60}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{v}{u-2}$ $\boxed{0/5}$ $\boxed{1}$

$w = z + \frac{1}{z}$ $\boxed{0/5}$

$u = x + \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}$ که در روابط بالا جایگزین می‌شود.



۵) $\frac{((z-i)+i)^2}{(1+((z-i)+i)^2)^3} \xrightarrow{z-i=t} \frac{-1+2it+t^2}{(2it+t^2)^3} = \frac{-1+2it+t^2}{-8it^3}\left(1+\frac{t}{2i}\right)^{-3}$ $\boxed{0/5}$

$= -\frac{1}{8i}\left(-\frac{1}{t^3}+\frac{2i}{t^2}+\frac{1}{t}\right)\left(1-\frac{3t}{2i}+\frac{(-3)(-4)}{2}\frac{t^2}{-4}+\cdots\right) \Rightarrow$ ضریب $\frac{1}{t} = -\frac{1}{8i}\left(\frac{3}{2}-3+1\right) = \frac{-i}{16}$ $\boxed{0/5}$ $\boxed{1}$

از آنجا که صرفاً $z=i$ در نیم صفحه فوقانی قرار می‌گیرد لذا: $\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\Gamma} f(z)\,dz}_{0} = 2\pi i\left(-\frac{i}{16}\right) = \frac{\pi}{8}$ $\boxed{1}$

(چون درجه مخرج حداقل ۲ تا از صورت بیشتر است)

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:
	تاریخ آزمون: ۱۳۹۲/۳/۱۲	ساعت آزمون: ۸
	نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۱۳۹۲- ۱۳۹۱

آزمون درس: ریاضی مهندسی

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	معادله دیفرانسیل مشتق جزئی زیر را به کمک روش جداسازی متغیرها حل کنید. $u_{xx} - 2u_x + u_y = 0$ $u_x(0,y) = 2e^{-3y} \quad ; \quad u(0,y) = 0$	۲
۲	معادله لاپلاس را برای ناحیه داده شده حل نمایید. لازم بذکر است که $\lvert u(x,y)\rvert$کراندار میباشد. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$ $u_x(0,y) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$	۲/۵
۳	چنانچه درتابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ بدانیم $u(x,y) = e^{2x}\,(\mathrm{x}\cos(2y) - \mathrm{y}\sin(2y))$ ، با محاسبه تابع$v(x,y)$ ، تابع $f(z)$ را بدست آورید.	۲
۴	تبدیل یافته ناحیه خارج$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ و داخل $\lvert z - i\rvert = 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{-i}{z}$ بدست آورده، ناحیه بدست آمده را رسم کنید.	۱/۵
۵	با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال حقیقی زیر را بیابید. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} \quad ; \quad a > b > 0$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پاسخ سوالات ریاضی مهندسی - سال دوم ۹۱-۹۲

۱-

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{\ddot{X}-2\dot{X}}{X}=\frac{-\dot{Y}}{Y}=\lambda \qquad \dot{Y}+\lambda Y=0 \Rightarrow Y(y)=c_1 e^{-\lambda y}$$

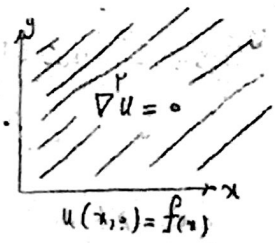
$$\ddot{X}-2\dot{X}-\lambda X=0 \Rightarrow X(x)=c_2 e^{m_1 x}+c_3 e^{m_2 x} \qquad m_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\lambda} \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow u=\left(A e^{(1+\sqrt{1+\lambda})x}+B e^{(1-\sqrt{1+\lambda})x}\right)e^{-\lambda y} \quad \boxed{1/5} \quad \text{و } u(0,y)=0 \Rightarrow A=-B$$

$$u_x(0,y)=(2A\sqrt{1+\lambda})e^{-\lambda y}=2e^{-3y} \Rightarrow \lambda=3,\ A=\frac{1}{2} \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}e^{-3y}\left(e^{3x}-e^{-x}\right) \quad \boxed{1/5}$$

۲-

$$\frac{\ddot{X}}{X}=\frac{-\ddot{Y}}{Y}=-\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \\ Y(y)=c_3 e^{\lambda y}+c_4 e^{-\lambda y}\end{cases}$$



در بی‌نهایت جواب نمی‌خواهیم $\Rightarrow c_3=0$, $\dot{X}(0)Y(y)=0 \Rightarrow \dot{X}(0)=0 \Rightarrow c_2=0$ $\boxed{1}$

$$u(x,y)=\int_0^\infty A(\lambda)e^{-\lambda y}\cos\lambda x\,dx \quad \boxed{1/5}$$

برای λ متغیری بدست نمی‌آوریم:

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,dx \Rightarrow A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} \quad \boxed{1}$$

۳-

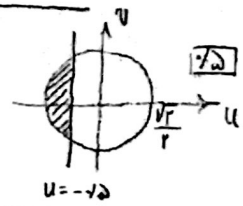
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^{2x}(2x\cos 2y-2y\sin 2y+\cos 2y) \Rightarrow v=e^{2x}\left[2x\frac{\sin 2y}{2}-\left(2y\frac{-\cos 2y}{2}-2\frac{-\sin 2y}{4}\right)+\frac{\sin 2y}{2}\right]+\varphi(x)$$

$$\Rightarrow v=e^{2x}(x\sin 2y+y\cos 2y)+\varphi(x) \quad \boxed{1} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=e^{2x}(2x\sin 2y+\sin 2y+2y\cos 2y)+\varphi'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \varphi(x)=C' \Rightarrow f(z)=u+iv=(x+iy)e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)+iC'=ze^{2(x+iy)}+C=ze^{2z}+C \quad \boxed{1}$$

۴-

$$z=\frac{-i}{w} \quad \begin{cases} |z|\geq\sqrt{2} \Rightarrow |w|\leq\frac{\sqrt{2}}{2} & \boxed{1/5} \\ |z-i|\leq 1 \Rightarrow |-i(w+1)|\leq|w| \Rightarrow |w+1|\leq|w| & \boxed{1/5}\end{cases}$$



$\boxed{1/5}$

۵-

$$2\cos\theta=z+\frac{1}{z} \Rightarrow I=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2} \quad \boxed{1/5}$$

α, β ریشه‌های مخرج $=b^2(z-\alpha)^2(z-\beta)^2$ داخل دایره واحد است زیرا $\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$ خواهد بود. $\boxed{1/5}$

$$a_{-1}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\alpha}\left[\cancel{(z-\alpha)^2}\frac{z}{b^2\cancel{(z-\alpha)^2}(z-\beta)^2}\right]'=\frac{1}{b^2}\,\frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^3}\ \boxed{1}=\frac{1}{b^2}\,\frac{-\frac{-2a}{b}b^3}{8(a^2-b^2)^{3/2}} \quad \boxed{1/5}$$

$$I=2\pi i\,\frac{4}{ib^2}\,\frac{2ab^2}{8(a^2-b^2)^{3/2}}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \quad \boxed{1/5}$$

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۱/۲۴ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

نیمسال: دوم — سال تحصیلی: ۹۱-۱۳۹۰ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. $f(x)=x\sin(x)\ ,\ -\pi\le x\le\pi\ ,\ T=2\pi$ ب: با توجه به سری فوق، حاصل سری عددی زیر را بیابید. $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2-1}$	۳
۲	اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ بصورت زیر باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos^3 x)dx$ را بیابید. $f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos(\omega x)+\omega\sin(\omega x)}{\omega^2+4}\right)d\omega$	۲
۳	مساله زیر را حل نمایید. $u_{tt}-u_{xx}=x+t\ ;\ 0<x<\pi\ ;\ t>0$ $u(x,0)=2\ ;\ u_t(x,0)=x\ ;\ 0\le x\le\pi$ $u(0,t)=2t\ ;\ u(\pi,t)=t\ ;\ t\ge 0$	۳
۴	میدانیم جواب مساله موج ($u_{tt}=c^2u_{xx}$) را برای میله ای به طول L میتوان بصورت زیر نوشت: $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب انحراف و سرعت اولیه میباشند. نحوه گسترش این دو تابع را برای حالت $u_x(0,t)=u(L,t)=0$ ثابت نمایید.	۱

با آرزوی موفقیت

$\frac{n\pi x}{l} = n x \qquad b_n = 0$ $\boxed{0/25}$ (1

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \cos nx = -\frac{2(-1)^n}{n^2-1} \qquad n \neq 1.$ $\boxed{0/5}$

$a_1 = -\frac{1}{2}$ $\boxed{0/25}$, $a_0 = 2$ $\boxed{0/25}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 1x}{1\times 3} - \frac{\cos 3x}{3\times 5} + \frac{\cos 4x}{3\times 5} - \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1}$$ $\boxed{0/5}$

$f(\pi) = f(-\pi)$ $\boxed{0/25}$ $\xRightarrow{\text{تمرین}}$ $\sin x + x\cos x = \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(-n\sin nx)}{n^2-1}$ $\boxed{0/5}$ $\xRightarrow[x=\frac{\pi}{2}]{}$ $S = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ $\boxed{0/5}$

(2 ج

$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx = \frac{1}{\alpha^2+4}$ $\boxed{0/25}$; $B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin \alpha x = \frac{\alpha}{\alpha^2+4}$ $\boxed{0/25}$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos^3 x\, dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x\, dx + 3\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\, dx\right)$ $\boxed{0/5}$

$= \frac{1}{4}\left(\pi A(3) + 3\pi A(1)\right) = \frac{11\pi}{60}$ $\boxed{0/25}$

(3

$u(x,t) = v(x,t) + \frac{t}{\pi}x + t$ $\boxed{0/5}$

ج

$$\left.\begin{array}{ll} v_{tt} - v_{xx} = x+t & 0<x<\pi \quad t\geq 0 \qquad v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \quad t\geq 0 \\ v(x,0) = 2 & v_t(x,0) = \frac{\pi-1}{\pi}x - 1 \quad 0\leq x\leq \pi \end{array}\right\}$$ $\boxed{0/5}$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right)\sin nx = x+t$ $\boxed{0/25}$

$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+t)\sin nx\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2t}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$ $\boxed{0/5}$

$T_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} + \frac{2t}{n^3\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right) \Rightarrow v$ بدست میآید $\boxed{0/5}$

$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}\right)\sin nx = 2$ $\boxed{0/25}$

$a_n = -\frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx = \frac{2}{n^3}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$ $\boxed{0/5}$

$$n b_n + \frac{2}{\pi n^2}\left(1+(-1)^{n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-1}{\pi}x-1\right)\sin nx\,dx$$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left[\pi(-1)^n+1\right] - \frac{2}{n^4\pi}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

بسمه تعالی

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی

گروه علوم پایه مهندسی | مدرس: | آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۰/۲/۱ | ساعت آزمون: ۸ | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال دوم | سال تحصیلی: ۹۰-۱۳۸۹ | استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

شماره دانشجویی:

نام و نام خانوادگی دانشجو:

ردیف		نمره
۱	سری فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورید. به کمک آن سری عددی A را بیابید. $f(x)=\begin{cases}0.5-x & 0<x\le 0.5\\ x-0.5 & 0.5<x\le 1\end{cases}\quad ;\quad T=1$ $A=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}--++\cdots$	۲/۵
۲	تبدیل فوریه معکوس $F(\alpha)$ را بیابید. $F(\alpha)=\frac{4b\sin(\pi\alpha)}{\alpha b^2+\alpha^3}$	۲
۳	معادله مشتق جزئی زیر را حل نمائید. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)^3 z$	۲/۵
۴	برای میله ای به طول L معادله گرما با شرایط مرزی داده شده را حل نمایید. در این معادله h یک عدد ثابت مثبت و $f(x)$ توزیع دمای اولیه میله میباشد. $u_t=c^2u_{xx}\quad ;\quad t\ge 0$ $u(0,t)=0\quad ;\quad u_x(L,t)+hu(L,t)=0$ $u(x,0)=f(x)\quad ;\quad 0\le x\le L$	۳

با آرزوی موفقیت ، لطفا برگه سوال را ضمیمه پاسخنامه نمایید.

بنام خدا

حل نمونه سوالات ریاضی مهندسی - میان ترم ۲-۹۰-۸۱

۱)

$2l=1$ زوج $\Rightarrow b_n=0$ $\boxed{0/25}$

$\Rightarrow a_n=\frac{2}{l}\int_0^{1/2}(\frac{1}{2}-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\begin{cases}\frac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج} \neq 0\end{cases}$ $\boxed{0/25}$

$\frac{a_0}{2}=\frac{2}{2l}\int_0^{1/2}(\frac{1}{2}-x)\,dx=\frac{1}{4}$ $\boxed{0/25}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1^2}+\frac{\cos 4\pi x}{3^2}+\frac{\cos 10\pi x}{5^2}+\dots\right)$ $\boxed{0/25}$

$x=\frac{1}{8}\Rightarrow A=1-\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$ $\boxed{1}$

۲)

$F(\alpha)=\underbrace{\frac{2\sin\pi\alpha}{\alpha}}\ \underbrace{\frac{2b}{b^2+\alpha^2}}$ $\xrightarrow{\text{معکوس}} f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-b|x-t|}\,dt$ $\boxed{0/25}$

$\boxed{1}\begin{cases}1 & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ معکوس $e^{-b|x|}$ معکوس

۱) اگر $x\leq-\pi\Rightarrow f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{b(x-t)}\,dt=\frac{2\sinh\pi b}{b}e^{bx}$ $\boxed{0/25}$

۲) $|x|<\pi\Rightarrow f(x)=\int_{-\pi}^{x}+\int_{x}^{\pi}=\frac{2(1-e^{-\pi b}\cosh bx)}{b}$ $\boxed{0/25}$

۳) $x\geq\pi\Rightarrow f(x)=\frac{2\sinh\pi b}{b}e^{-bx}$ $\boxed{0/25}$

۳)

$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{(x+y)^3z}=\frac{m\,dx+n\,dy+l\,dz}{m(x^2+y^2)+n(2xy)+l(x+y)^3z}$ $\boxed{0/25}$

$l=0,\ m=n=1\Rightarrow\frac{dz}{(x+y)^3z}=\frac{dx+dy}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{dz}{z}=(x+y)(dx+dy)\Rightarrow 2\ln z=(x+y)^2+C_1$ $\boxed{1}$

$l=0,\ m=1,\ n=-1\Rightarrow\frac{dz}{(x+y)^3z}=\frac{dx-dy}{(x-y)^2}=\frac{dx+dy}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{-1}{x-y}=\frac{-1}{x+y}+C_2$ $\boxed{1}$

$C_1=f(C_2)\Rightarrow z=\exp\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}f\left(\frac{-2y}{x^2-y^2}\right)\right]$ $\boxed{0/25}$

۴)

$u(x,t)=X(x)T(t)\Rightarrow\frac{\ddot{X}}{X}=\frac{\dot{T}}{c^2T}=K\overset{K=-\lambda^2}{\Rightarrow}\ddot{X}+\lambda^2X=0,\ X(0)=0,\ \dot{X}(l)+hX(l)=0$ $\boxed{0/25}$

$X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}}\operatorname{tg}\lambda l=-\frac{\lambda}{h}$ $\boxed{1}$ اثبات اینکه $K\geq0$ به جواب بدیهی می‌انجامد. $\boxed{0/25}$

$\lambda l\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\alpha}{ih}$ ریشه‌های معادله را α_n می‌نامیم که $\alpha_1<\alpha_2<\dots$ $\Rightarrow X_n(x)=\sin(\lambda_n x)$ $n=1,2,\dots$ $\boxed{0/25}$

$\dot{T}+\lambda_n^2c^2T=0\Rightarrow T_n(t)=e^{-\lambda_n^2c^2t}$ $\boxed{0/25}$ $\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\lambda_n^2c^2t}\sin(\lambda_nx)$ $(\lambda_n=\frac{\alpha_n}{l})$ $\boxed{0/25}$

$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\lambda_nx)$ با توجه به معادله اورتوگونالیتی $p(x)=1$ لذا A_n از رابطه زیر بدست می‌آید:

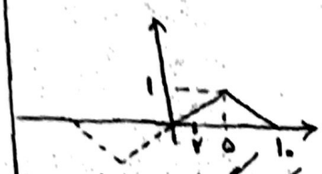
$A_n=\frac{\int_0^l f(x)\sin\lambda_nx\,dx}{\int_0^l\sin^2\lambda_nx\,dx}=\frac{1}{\frac{1}{2}l-\frac{1}{4}\sin\lambda_nl}\int_0^l f(x)\sin\lambda_nx\,dx$ $\boxed{0/5}$

جلسه چهاردهم :

$$u(x,t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l}$$

$$\underbrace{u(x,0)}_{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c\, 0}{l}$$

* مثال : فرض کنید برای سیمی به طول l ، وسط آن را به اندازه‌ی یک واحد بالا کشیده و با سرعت اولیه‌ی صفر رها کرده ، معادله ارتعاش را بیابید!



$$v_0 = 0 \ \frac{m}{s}$$

فرض می‌کنیم لبه‌ها فرد داده شده است!

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & 0<x<5 \\ 2-\frac{x}{5} & 5<x<10 \end{cases}$$

$\rightarrow T = 20 = 2l$ $\quad a_n = 0$ لبه‌ها فرد

$$b_n = \frac{2}{10}\left(\int_0^5 \frac{x}{5} \sin \frac{n\pi x}{10}\, dx + \int_5^{10} \left(2-\frac{x}{5}\right) \sin \frac{n\pi x}{10}\, dx\right)$$

معادل A_n قبل

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{10} \cos \frac{n\pi c t}{10}$$

— ارتعاش $x=2$ در 7 ثانیه بعد چقدر است؟ $\leftarrow$ $u(2,7)$ را حساب می‌کنیم!

نکته ۱ : چنان چه طول سیم نامحدود باشد ، λ مقید نخواهد بود و به این ترتیب جواب مسأله به جای سری فوریه ، به انتگرال فوریه می‌رسد.

نکته ۲ : چنان چه سرعت اولیه‌ی کمانی به صورت صفر باشد ، در این صورت مقدار ویژه‌ی مسأله استرم لیوویل $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ و تابع ویژه‌ی آن $X(x) = \sin \frac{n\pi}{l}$ خواهد بود. حال به جای کاسینه $T(t)$ هم جواب را به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

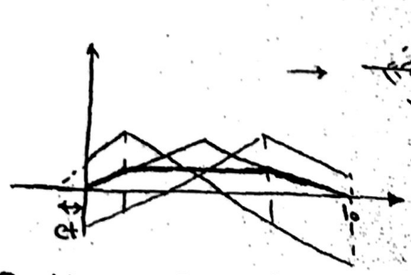
در نظر می‌گیریم و جای گذاری $T_n(t)$ به دست می‌آید!

— ساده کردن معادله موج :

$$g(x) = 0 \rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l}}_{\frac{1}{2}\left[\sin \frac{n\pi}{l}(x-ct) + \sin \frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{l}}_{\text{همان بالا}}$$ اختلاف اولیه

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$



$\rightarrow$

جمع ۲ موج در هر x تقسیم بر ۲ می‌شود! $\leftarrow$ ct باید بعد سطح سیم ذره‌ای می‌شود!

$u_x = u_y \quad , \quad u = f(x+y)$

$1\, f'(x+y) = 1\, f'(x+y)$

طول ۱۸ — طول ۱۸

$c = 12$

طول سیم $= 10\,m$

مثال: $u(2,3)$ را برای تمرین قبل بیابید.

$$u(2,3) = \frac{1}{2}\Big(f(38) + f(-34)\Big) = \frac{1}{2}(-0.4 + 0.8) = 0.2$$

$T = 20 \rightarrow f(-2) \xrightarrow{\text{فرد}} -f(2)$

$T = 20 \rightarrow f(6)$

حل معادله موج در حالت کلی:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

در این جا مشابه روش دالامبر عمل می‌کنیم!

B.C (۴)
$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$f(x) = u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = c\varphi'(x) - c\psi'(x)$$

با انتگرال گیری از رابطه‌ی اول و حل ۲ معادله ۲ مجهول مشابه مسأله ≜

مشتق‌ها نسبت به x از زمان داخل آن!

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds$$

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int g(s)\,ds$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

فرمول کلی‌تر است چون سرعت در آن وجود دارد!

از سری فوریه‌های مکانی استفاده می‌کنیم!

فرض $g(x) = 0$

$u(0,t) = f(ct) + f(-ct) = 0$ نقطه‌ی نسبت به مبدأ قرینه

$u(l,t) = f(l+ct) + f(l-ct) = 0$ نسبت به l قرینه است!

← این یعنی تناوب دارد. ← گسترش فرد دارد!

به طور خلاصه می‌توان گفت هم جواب به همان صورتی است که قبلاً گفته شد اما تناوب سری باعث می‌شود، f و g گسترش‌های

حاصل را بیابید: f و g حول $x=l$ فرد و حول $x=0$ فرد!

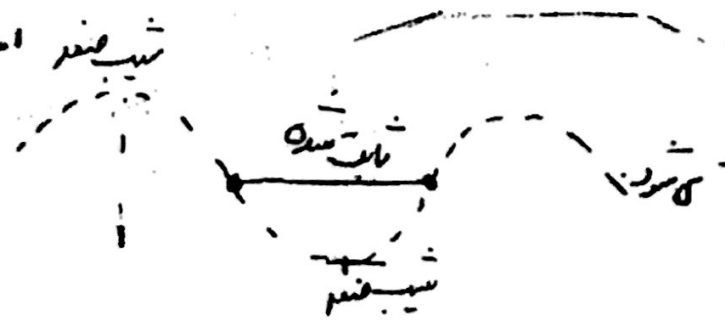
1) $u(0,t) = u(l,t) = 0 \xrightarrow{T=2l}$

2) $u(0,t) = u_x(l,t) = 0 \xrightarrow{T=4l}$ $x=0$ فرد $\quad x=l$ زوج

3) $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \xrightarrow{T=4l}$ $x=0$ زوج $\quad x=l$ فرد

4) $u_x(0,t) = u(l,t) = 0 \xrightarrow{T=2l}$ $x=0$ و $x=l$ حول f,g زوج

شیب صفر اما ل جابه جا شده!



اگر بخواهیم بنویسیم که هم گسترش فرد دارد نسبت به یک نقطه و هم گسترش زوج دارد نسبت به یک نقطه‌ی دیگر، $T = 4l$ می‌شود.

- جلسه پانزدهم :

- معادله حرارت :

- میله‌ای به طول L که ۲ سرش آن عایق شده و دمای اولیه‌ی آن $f(x)$ است، معادله حرارت به صورت زیر می‌باشد!

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2 T} = K$$

- درست مسئله قبل : $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2\lambda^2 t} \cdot \sin \lambda x \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$

می‌توان لفت گسترش فرد دارد!

در این جا چون به صورت زیر خواهد شد!

$$\Rightarrow \underbrace{u(x,0)}_{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- مثال : معادله‌ی حرارت زیر را حل کنید.

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \rightsquigarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) + h\,u(l,t) = 0 \quad , \quad h > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

در نظر نمی‌گیریم! $\rightarrow$ بدیهی $\longrightarrow$ صفر شدن و همگن

حل:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2 T} = K = -\lambda^2$$

$$u(0,t) = 0 \longrightarrow X(0) = 0$$

$$\underset{x \downarrow l}{u(x,t)} + h\,u(l,t) = 0 \longrightarrow X'(l) + h X(l) = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \longrightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \xrightarrow{B.C} tg\,\lambda l = \frac{-\lambda}{h}$$

$$\alpha = \lambda l \longrightarrow tg\,\alpha = -\frac{\alpha}{lh}$$

معادله ویژه

ریشه‌ها $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$

تابع ویژه $X(x) = \sin \lambda x$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda x$$

$$\dot{T} + \lambda^2 c^2 T = 0 \longrightarrow T(t) = A e^{-\lambda^2 c^2 t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 c^2 t} \sin \lambda_n x$$

بسا کردن $\longrightarrow \underbrace{u(x,0)}_{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x$

در این جا $A_n = \dfrac{\int_0^l f(x) \sin \lambda_n x}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n x \, dx}$

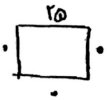
$\frac{1}{2} l - \frac{1}{4} \sin 2\lambda_n l$

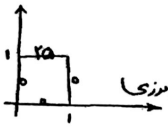
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ \cancel{u_t} = c^2 \nabla^2 u \longrightarrow \nabla^2 u = 0 \end{cases}$$

معادله لاپلاس

مثال — $\nabla^2 u = 0$ / دمای پایدار در تیغه زیر را بیابید.

حل:





$u_{xx} + u_{yy} = 0$

شرط‌های مرزی:
$$\begin{cases} u(1,y) = 0 \rightarrow X(1) = 0 \\ u(x,1) = 25 \\ u(0,y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \\ u(x,0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow u(x,y) = X(x)\, Y(y)$

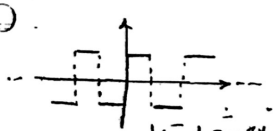
$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{-\ddot{Y}}{Y} = \lambda^2$$

$\ddot{X} + \lambda^2 X = 0 \xrightarrow{B.C} \lambda = \frac{n\pi}{l}, \; X(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\ddot{Y} - \lambda^2 Y = 0 \xrightarrow{Y(0)=0} Y(y) = a \sinh \lambda y$

$\xrightarrow{l=1}$ جواب $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi y}{1} \cdot \sin \frac{n\pi x}{1}$

$\underbrace{u(x,1)}_{25} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sinh(n\pi)}_{b_n} \sin(n\pi x)$



* اگر صفرها در یک راستا باشد، $\frac{n\pi x}{l}$ تابع ویژه و در غیر این صورت $\frac{n\pi y}{l}$ تابع ویژه است!

— معادلات ناهمگن:

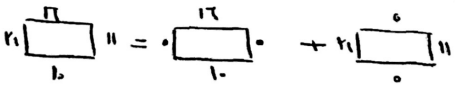
یک مسأله همگن است در خود معادله و یا در شرایط مرزی آن غیرهمگن باشد. معادله‌ی همگن است که $u = 0$ جواب آن باشد!

شرط مرزی همگن نیز شرایط مرزی است که نسبت به یک متغیر در ۲ سمت آن برابر با صفر باشد!

اصل جمع آثار

Super Position

می‌توان هر مسأله‌ی غیرهمگن را به ۲ مسأله تبدیل کرد



- در حالت کلی در معادله‌ای که هم خود ماده و هم شرایط مرزی ناهمگن است روش کار این است که ابتدا با استفاده از $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$ آن را همگن می‌کنیم.

φ را .... شرط مرزی‌اش با u یکی باشد که v صفر شود.

تابع φ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند!

شرایط مرزی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = g_2(t) \end{cases}$$

- از آن جایی که این شرایط خطی می‌باشند، کافی است φ را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\varphi(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

مثلاً

برای یافتن φ و u :

$$\begin{cases} u(0,t) = t \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases} \quad B.C$$

$$\varphi(0,t) = c(t) = t$$

$$\varphi_x(1,t) = 2\underset{0}{a(t)} + \underset{1}{b(t)} = 1 \rightarrow \varphi(x,t) = x + t$$

← گاهی هیچ a احتیاج نداریم، کافی است نسبت شرط مرزی‌ها u_x باشد و α_1 و α_2 صفر باشد.

حال نسبت به v یک مسأله‌ی همگن در شرط مرزی داریم! که یک مسأله اشتروم لیوویل است و فرض کنیم تابع ویژه آن $\varphi_n(x)$ شود!

جواب را به صورت حدس می‌زنیم → $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\varphi_n(x)$

با جایگذاری $T_n(t)$ را می‌یابیم!

مثال - مسأله حرارت زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}(x - 1 + \sin \pi x) \qquad 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} u(0,t) = e^{-t} \\ u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = 1 + \sin \pi x \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$$

چون $u(0,t)$ و $u(1,t)$ فاقد مشتق نسبت به x می‌باشند:

$$\varphi(x,t) = b(t)x + c(t)$$

$$\begin{cases} \varphi(0,t) = e^{-t} \longrightarrow c(t) = e^{-t} \\ \varphi(1,t) = 1 \longrightarrow b(t) = 1 - e^{-t} \end{cases} \rightarrow \varphi = e^{-t}(1-x) + x$$

$$u_t = v_t \rightarrow v_t - e^{-t}(1-x) = v_{xx} + e^{-t}(x - 1 + \sin \pi x)$$

$\varphi(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ⇐ این مسأله اشتروم لیوویل است *

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + e^{-t}\sin \pi x \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = \sin \pi x \end{cases} \longrightarrow \boxed{\text{تابع ویژه} : \sin \frac{n\pi x}{l_1}}$$

چون ۲ طرف صفر شده!

حوب مسأله

- جواب را به صورت $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$ حدس می‌زنیم! $(l=1)$

* با جایگذاری ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) \right] \sin \pi x = e^{-t} \sin \pi x$

$$\begin{cases} T_1'(t) + \pi^2 T_1(t) = e^{-t} \\ T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0 \quad n=2,\dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1(t) = \frac{1}{\pi^2-1} e^{-t} + c_1 e^{-\pi^2 t} \\ T_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 t} \quad n=2,3,\dots \end{cases} \quad (*)$$

شرط مرزی B.C : $v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n\pi x = \sin \pi x$

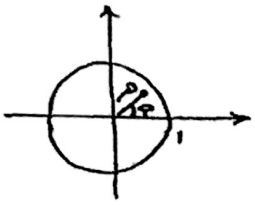
- ضرب $\sin \pi x$ به ازای $n=1$ در سیگما

عدد یک است و بقیه صفر است چون طرف دیگر شمارش نداریم!

$\xrightarrow{\text{نتیجه گیری}}$ $T_1(0) = 1$, $T_n(0) = 0$, $n=2,3,\dots$ $\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{(*)}$ $\begin{cases} c_1 = \frac{\pi^2-2}{\pi^2-1} \\ c_n = 0 \ / \ n=2,3,4,\dots \end{cases}$

← v از حالت سری بیرون می‌آید! ← عملاً:

$$\begin{cases} v(x,t) = T_1(t) \sin \pi x \\ u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t) \end{cases}$$



- مثال: دمای پایدار ورقه‌ی زیر را بیابید. ورقه در ۲ درجه عایق بندی شده است و دمای نیم‌دایره‌ی بالایی u_1 و دمای نیم‌دایره‌ی پایینی u_2 می‌باشد!

دمای پایدار - معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ ←

هنگام از قطبی بنویسیم. $\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

(این که ۲ درجه عایق است $\rightarrow$ ۳ بعدی نیست!)

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} u_1 & 0<\varphi<\pi \\ u_2 & \pi<\varphi<2\pi \end{cases} \qquad u(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi)$$

با جایگذاری داریم: $\ddot{P}\Phi + \frac{1}{\rho}\dot{P}\Phi + \frac{1}{\rho^2}P\ddot{\Phi} = 0$

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = -\frac{\rho^2\ddot{P}}{P} - \frac{\rho\dot{P}}{P} = K$$

تفکیک سری است!

1) $K=0 \rightarrow \ddot{\Phi} = 0 \rightarrow \Phi = c + d\varphi$

$\rho^2\ddot{P} + \rho\dot{P} = 0 \rightarrow u = (A + B\ln\rho)(C + D\varphi)$

$\dot{P} = y \longrightarrow$ جدا کردن $\longrightarrow P = A + B\ln\rho$

2) $K = -\lambda^2 \rightarrow \ddot{\Phi} + \lambda^2\Phi = 0 \longrightarrow \Phi(\varphi) = a_1\cos\lambda\varphi + b_1\sin\lambda\varphi$

از این جا که جواب باید نسبت به φ تناوب 2π داشته باشد، بدیهی است که در حالت $K=\lambda^2$، جواب‌ها به فرم هیپربولیک است و تناوب نخواهد داشت!

$\rho^2\ddot{P} + \rho\dot{P} - \lambda^2 P = 0 \xrightarrow[\text{جواب } \rho^m]{\text{کوشی اویلر}} m = \pm\lambda$

$P(\rho) = a_2\rho^{\lambda} + b_2\frac{1}{\rho^{\lambda}}$

در حالت $K=0$، به $D=0$ خواهیم رسید و $K=-\lambda^2$ به $\lambda=n$ خواهیم رسید.

$\left(\lambda = \frac{n\pi}{l} \xrightarrow{l=\pi} \lambda = n\right)$ اعداد صحیح

3) $K = +\lambda^2 \longrightarrow \dots$

- با توجه به این که در مبدأ باید جواب کراندار باشد در نتیجه در حالت $K=0$، $B=0$ و در حالت $K=-\lambda^2$، $b_2=0$ است! چون بی‌کران می‌دهند برای شده است!

ما ترکیب خطی این جواب ها خواهیم داشت : $u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

$$\xrightarrow{B.C} u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \begin{cases} u_1 & 0<\varphi<\pi \\ u_2 & \pi<\varphi<2\pi \end{cases}$$

اگر برای این تابع سری فوریه نوشته ایم ! برای خودش نه برای گسترش چون خودش گسترش یافته است !

سری فوریه

$$\longrightarrow A_0 = \frac{u_1+u_2}{2}, \quad A_n = 0$$

چون فرد است !

$$B_n = \frac{u_1-u_2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

- معادله لاپلاس درون محیط مقدار حداقل و حداکثر را در مرز می پذیرد.

هیچ u مقدار ماکسیمم را در وسط نمی گیرد مثلا در بالا هیچ گاه دمای مرکز ۲۵ نمی شود !

- چنانچه مقدار u در مرز مشخص باشد مسأله دیریکله نامیده می شود و اگر میزان تغییرات u در مرز مشخص شده باشد مسأله نیومن خواهد بود

newman

با جایگذاری ضرایب a_n و b_n در سری فوریه می توان نشان داد اگر شعاع دایره برابر b باشد در این صورت

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(b^2-\rho^2)\, f(t)}{b^2-2\rho b\cos(t-\varphi)+\rho^2}\, dt$$

تغییر انتگرال گیری

فرمول پواسون برای مسأله دیریکله در ناحیه دایره ای

$$b=1 \longrightarrow u(\rho,\varphi) = 1 - \frac{1}{\pi} tg^{-1} \frac{2\rho\sin\varphi}{1-\rho^2}$$

①

سؤال: معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط مرزی داده شده حل نمایید.

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} & ; -1<x<1 \ , \ t>0 \\ u(-1,t) = u(1,t) \ , \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} \\ u(x,0) = |x| & ; -1<x<1 \end{cases}$$

گام اول:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \xRightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} \left(F(x)\dot{G}(t) = 2F''(x)G(t)\right) \times \frac{1}{FG} .$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{2F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} u(-1,t) - u(1,t) = 0 \\ u_x(-1,t) - u_x(1,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1) - F(1) = 0 \quad ① \\ F'(-1) - F'(1) = 0 \quad ② \end{cases}$$

گام دوم:

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = k^2 , \ k>0$$

$$\Rightarrow 2F''(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow 2F''(x) - k^2 F(x) = 0 \Rightarrow$$ معادله مشخصه: $2r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{k^2}{2}}$

$$r = \pm\frac{k}{\sqrt{2}} \Rightarrow F(x) = C_1 \cosh\frac{k}{\sqrt{2}}x + C_2 \sinh\frac{k}{\sqrt{2}}x$$

اعمال شرایط مرزی:

$$① \Rightarrow \cancel{C_1 \cosh\frac{k}{\sqrt{2}}} - C_2 \sinh\frac{k}{\sqrt{2}} - \cancel{C_1 \cosh\frac{k}{\sqrt{2}}} - C_2 \sinh\frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ \text{یا} \\ k = 0 \Rightarrow \text{در } \lambda \text{ بررسی خواهد شد} \end{cases}$$

$$② \xRightarrow{C_2=0} C_1\frac{k}{\sqrt{2}} \sinh\frac{-k}{\sqrt{2}} - C_1\frac{k}{\sqrt{2}} \sinh + \frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow C_1 \sinh\frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow F = 0 \Rightarrow$$ جواب بدیهی

دقت شود که در این حالت فقط λ های مثبت در نظر گرفته شده است در نتیجه $\lambda = 0$ که متناظر با $k=0$ می باشد در این قسمت قابل قبول نمی باشد.

(۴)

$\lambda = 0$

$$\Rightarrow 2F''(x) = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B$$

اعمال شرایط مرزی:

$$① \Rightarrow -A + \cancel{B} - A - \cancel{B} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = B$$ B مقدار دلخواه

$$② \Rightarrow 0 = 0$$

$$\dot{G}(t) - \lambda G(t) = 0 \xrightarrow{\lambda = 0} \dot{G}(t) = 0 \Rightarrow G(t) = C_0 \Rightarrow u(x,t) = BC_0 = C_0^* \ (I)$$

$\lambda < 0,\ \lambda = -k^2,\ k > 0$

$$2F''(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow 2r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{k^2}{2} \Rightarrow r = \pm \frac{k}{\sqrt{2}} i$$

$$\Rightarrow F(x) = C\cos\frac{k}{\sqrt{2}}x + D\sin\frac{k}{\sqrt{2}}x$$

اعمال شرایط مرزی:

$$① \Rightarrow \cancel{C\cos\frac{k}{\sqrt{2}}} - D\sin\frac{k}{\sqrt{2}} - \cancel{C\cos\frac{k}{\sqrt{2}}} - D\sin\frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow D\sin\frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \begin{cases} D = 0 \\ \text{یا} \\ \frac{k}{\sqrt{2}} = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$② \Rightarrow +\frac{k}{\sqrt{2}} \times C\sin\frac{k}{\sqrt{2}} + D \times \cancel{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\frac{k}{\sqrt{2}}} + \frac{k}{\sqrt{2}} \times C\sin\frac{k}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{k}{\sqrt{2}} \times D\cos\frac{k}{\sqrt{2}}} = 0 \Rightarrow C\sin\frac{k}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\begin{cases} C = 0 \\ \text{یا} \\ \frac{k}{\sqrt{2}} = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن $k = \sqrt{2}n\pi,\ n = 1, 2, \ldots$ هر دو شرط مرزی ارضا می‌شوند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_n(x) = C_n\cos n\pi x + D_n\sin n\pi x$$

(۲)

$$\dot{G}(t)-\lambda G(t)=0 \xrightarrow{\lambda=-k^2} \dot{G}(t)+k^2G(t)=0 \Rightarrow r=-k^2 \Rightarrow G(t)=Ee^{-k^2t}$$

$$k=\sqrt{2}\,n\pi \Rightarrow G_n(t)=E_n e^{-2n^2\pi^2 t}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=(C_n\cos n\pi x+D_n\sin n\pi x)E_n e^{-2n^2\pi^2 t}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=(C_n^*\cos n\pi x+D_n^*\sin n\pi x)e^{-2n^2\pi^2 t} \quad (II)$$

بنابراین با توجه به (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$u(x,t)=C_0^*+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^*\cos n\pi x+D_n^*\sin n\pi x)e^{-2n^2\pi^2 t}$$

گام سوم:

با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت:

$$u(x,0)=|x|$$

$$|x|=C_0^*+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^*\cos n\pi x+D_n^*\sin n\pi x) \quad -1<x<1$$

برای بدست آوردن ثابتها سری فوریه تابع $|x|$ را بدست آورده:

$T=2\Rightarrow L=1$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_0^1|x|\,dx=\frac{1}{2}, \quad b_n=0 \quad \text{تابع زوج}$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

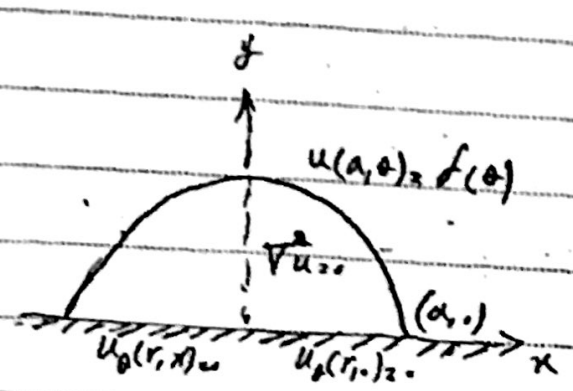
$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos n\pi x=C_0^*+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^*\cos n\pi x+D_n^*\sin n\pi x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0^*=\frac{1}{2} \\ C_n^*=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right) \\ D_n^*=0 \end{cases} \Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos n\pi x\right)e^{-2n^2\pi^2 t}$$

Subject:
Year. Month. Date. مثال

حل معادله لاپلاس:

مسأله مقدار کرانه‌ای در داخل نیم دایره با شرایط مرزی داده شده را حل کنید. بر روی کمان نیم دایره شرط کرانه‌ای $u(a,\theta)=f(\theta)$ یک تابع معلوم است و قطر با عایق پوشانیده شده است. در حالت خاص $f(\theta)=|\theta-\frac{\pi}{2}|$ ، $0\leq\theta\leq\pi$ جواب مسئله را کاملاً مشخص کنید. $(0\leq r\leq a)$



حل:

گام اول:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2}=0$$

$$u(r,\theta)=F(r)G(\theta)\Rightarrow F''(r)G(\theta)+\frac{1}{r}F'(r)G(\theta)+\frac{F(r)G''(\theta)}{r^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{F''(r)}{F(r)}+\frac{F'(r)}{rF(r)}+\frac{G''(\theta)}{r^2G(\theta)}=0\Rightarrow\frac{r^2F''(r)}{F(r)}+\frac{r^2F'(r)}{rF(r)}=-\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}=\lambda$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases}G'(0)=0 & (1)\\ G(\pi)=0 & (2)\\ |u(r,\theta)|\leq M: & \text{کراندار}\end{cases}$$

گام دوم:

$\lambda>0\Rightarrow\lambda=k^2$

حالت اول:

$$-G''(\theta)-k^2G(\theta)=0\Rightarrow r^2+k^2=0\Rightarrow r=\mp ki\Rightarrow G(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta$$

با شرط (1) $\Rightarrow G'(0)=-Ak\sin k0+Bk\cos 0=0\Rightarrow B=0$

(2) $\Rightarrow G(\pi)=-Ak\sin k\pi=0\Rightarrow$
- $A=0\Rightarrow G=0$ جواب بدیهی
- $k\pi=n\pi\Rightarrow k=n\quad n=1,2,\ldots$

$$\Rightarrow G_n(\theta)=A_n\cos n\theta$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow r^3F''(r)+r^2F'(r)-k^2rF(r)=0 \Rightarrow r^2F''(r)+rF'(r)-k^2F(r)=0$$

معادله کوشی اویلر $\Longleftarrow$ معادله مشخصه

$$D'(D'-1)+D'-k^2=0$$

$$D'^2-k^2=0 \Rightarrow D'=\pm k$$

$$\Rightarrow F(r)=Cr^k+Dr^{-k} \xrightarrow[\text{کراندار و } k>0]{r\to 0} D=0 \Rightarrow F(r)=Cr^k$$

$$\Rightarrow F_n(r)=C_nr^n \Rightarrow u_n(r,\theta)=A_n^*r^n\cos n\theta$$

حالت دوم: $\lambda=0$

$$\Rightarrow G''(\theta)=0 \Rightarrow G(\theta)=E\theta+H$$

اعمال شرایط: $\begin{cases} ① \Rightarrow G(0)=0 \Rightarrow E=0 \\ ② \Rightarrow G'(\pi)=0 \Rightarrow E=0 \end{cases}$ $\Rightarrow G(\theta)=H$ ~ مقدار ثوابت

$$\Rightarrow r^2F''(r)+rF'(r)=0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه}: D'(D'-1)+D'=0 \Rightarrow D'^2=0$$

$$\Rightarrow F(r)=C_1r^{d}+C_2(\ln r)r^{d}=C_1+C_2\ln r \xrightarrow[\text{کراندار}]{r\to 0} C_2=0$$

$$\lambda=0 \Rightarrow u_0(r,\theta)=C_1H=C_0^*$$

حالت سوم: $\lambda=-k^2<0$

$$G''(\theta)-k^2G(\theta)=0 \Rightarrow r^2-k^2=0 \Rightarrow r=\pm k \Rightarrow G(\theta)=A_1\cosh k\theta+B_1\sinh k\theta$$

اعمال شرایط $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow G'(0)=0 \Rightarrow 0=A_1k\sinh k0+B_1k\cosh k0 \Rightarrow B_1=0$

② $\Rightarrow G'(\pi)=0 \Rightarrow 0=A_1k\sinh k\pi=0 \Rightarrow A_1=0 \Rightarrow u=0$ برای بررسی

$\Rightarrow k\pi=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \lambda=0$ برای بررسی لند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. (1)

$$u(r,\theta) = C_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* r^n \cos n\theta$$

$$u(a,\theta) = f(\theta) \Longrightarrow f(\theta) = C_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* a^n \cos n\theta$$

$$f(\theta) = \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \qquad 0 < \theta < \pi$$

$$C_0^* = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta$$

$$C_0^* = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left(-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\pi}{2}\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4}} + \underbrace{\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\pi}{2}\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}\right)}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4}}_{\frac{\pi^2}{8}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$A_n^* a^n = a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \cos n\theta \, d\theta \Rightarrow A_n^* = \frac{2}{\pi a^n}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{---} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{---}\right]$$

$$A_n^* = \frac{2}{\pi a^n}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos n\theta \, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos n\theta \, d\theta\right]$$

$$I = \int \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos n\theta = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin n\theta - \frac{1}{n^2}\cos n\theta$$

$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\cos n\theta$
-1	$\frac{1}{n}\sin n\theta$
0	$\frac{-1}{n^2}\cos n\theta$

$$\Longrightarrow A_n^* = \frac{2}{\pi a^n}\left[\frac{-1}{n^2}\left(\cos n\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) - \left(\frac{-1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A_n^* = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ \frac{2}{\pi a^{2k}}\left[\frac{-1}{(2k)^2}\left((-1)^k - 1\right) - \left(1 - (-1)^k\right)\right] & n = 2k \end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi a^{2k} k^2}\left((-1)^{k+1} + 1\right) = \frac{1}{\pi a^{2k} k^2}\left((-1)^{k+1} + 1\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Longrightarrow u(r,t) = \frac{\gamma}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi a^{2k} k^2} r^{2k} \cos(2k\theta)$$

در مسأله مقدار اولیه-کرانه‌ای زیر مقدار $u\left(\frac{L}{2}, \frac{23L}{3}\right)$ را حساب کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2(L-x),\ u_t(x,0) = \begin{cases} g_0 ; & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 ; & 0 < x < \frac{L}{3} \text{ یا } \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \xRightarrow{x=L,\ x=0} \text{توسیع فرد توابع نسبت به}$$

$$\begin{cases} f(x \pm 4L) = f(x), \quad g(x \pm 4L) = g(x) \\ \int_{x_1}^{x_1+4L} g(s) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(p)\,dp \right]$$

$$u\left(\frac{L}{2}, \frac{23L}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{49L}{6}\right) + f\left(-\frac{43L}{6}\right) + \int_{-\frac{43L}{6}}^{\frac{49L}{6}} g(p)\,dp \right]$$

استفاده از $(x \pm 4L) = f(x)$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{49L}{6}\right) = f\left(\frac{L}{6}\right) = \frac{5L^3}{6^3} \qquad f\left(-\frac{43L}{6}\right) = f\left(\frac{5L}{6}\right) = \frac{25L^3}{6^3}$$

$$\int_{-\frac{43L}{6}}^{\frac{49L}{6}} g(p)\,dp = \int_{-\frac{43L}{6}+8L}^{\frac{5L}{6}} g\,dp + \int_{\frac{5L}{6}}^{\frac{L}{6}} g(p)\,dp + \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{49L}{6}} g(p)\,dp$$

$$= -\int_{\frac{L}{6}}^{\frac{5L}{6}} g(p)\,dp = -\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} g_0\,dp = -\frac{g_0 L}{3}$$

$$u\left(\frac{L}{2}, \frac{23L}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5L^3}{36} - \frac{g_0 L}{3}\right)$$

نکته: $-\frac{43L}{6} + 8L = \frac{5L}{6}$ $\qquad \frac{49L}{6} - 8L = \frac{L}{6} \Longleftarrow$ برای استفاده از $\int_{x_1}^{x_1+4L} g(s)\,ds = 0$

مطلوبست حل مسئله زیر به کمک دالامبر:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6x & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_t(x,0) = 0,\ u(x,0) = x^3 + 3x + \sin x \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \pi^3 + 3\pi \end{cases}$$

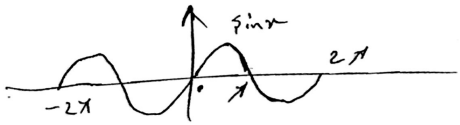
$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v(\pi,t) = 0 \\ v_{tt} = v_{xx} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{c = 1}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \Rightarrow \begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(\pi,t) = \pi^3 + 3\pi \\ w''(x) - 4x = 0 \end{cases}$$

$$w(x) = x^3 + c_1 x + c_2 \xrightarrow[w(\pi) = \pi^3 + 3\pi]{w(0) = 0} \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) = x^3 + 3x$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} - g(x) & 0 < x < \pi \\ v_t(x,0) = 0,\ v(x,0) = \underbrace{\sin x}_{f(x)} & 0 < x < \pi \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$



$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(p)\,dp$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) + \sin(x-t)\right] = \sin x \cos t$$

$$u(x,t) = \sin x \cos t + x^3 + 3x$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$$

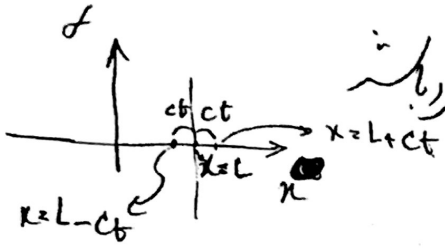
$u(L,t)=0$

$u_x(0,t)=0$

$$u(L,t)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[f(L+ct)+f(L-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{L-ct}^{L+ct} g(\xi)\,d\xi=0$$

برای اینکه شرط بالا ارضا شود می‌توانیم فرض‌های زیر را در نظر بگیریم:

① $f(L+ct)+f(L-ct)=0 \Rightarrow f(L+ct)=-f(L-ct)$



این شرط وقتی می‌تواند برقرار باشد که تابع f نسبت به $x=L$ تابعی فرد باشد

② $\int_{L-ct}^{L+ct} g(\xi)\,d\xi=0$ $\quad u=\xi-L \quad du=d\xi \quad \xi_1=L-ct \Rightarrow u_1=-ct \quad \xi_2=L+ct \Rightarrow u_2=ct$

$\Rightarrow \int_{-ct}^{ct} g(u)\,du=0 \Rightarrow$ چون اگر تابع g را نسبت به $u=0$ فرد گسترش دهیم انتگرال روی بازه صفر می‌شود

دقت کنید $x=L \Leftarrow \xi=L \Leftarrow \xi-L=0 \Leftarrow u=0$

پس در واقع باید تابع $g(x)$ را نسبت به $x=L$ به صورت فرد گسترش دهیم.

$$u_x(0,t)=0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left[f'(ct)+f'(-ct)\right]}_{(I)}+\frac{1}{2c}\overbrace{\left[g(0+ct)-g(0-ct)\right]}^{(II)}=0$$

اگر جمله اول (I) و جمله دوم (II) تک تک صفر باشند شرط بالا ارضا می‌شود.

پس برای اینکه شرط بالا برقرار شود کافیست توابع f و g را نسبت به $x=0$ توسیع زوج دهیم.

$(I) \Rightarrow f'(ct)=-f'(-ct) \Rightarrow$ f' تابعی فرد نسبت به مبدأ $\Rightarrow$ f تابعی زوج نسبت به مبدأ

$(II) \Rightarrow g(0+ct)=g(0-ct) \Rightarrow$ g تابعی زوج نسبت به مبدأ

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۹۲/۳/۱۲	ساعت آزمون: ۸	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۱۳۹۲- ۱۳۹۱	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	معادله دیفرانسیل مشتق جزئی زیر را به کمک روش جداسازی متغیرها حل کنید. $u_{xx} - 2u_x + u_y = 0$ $u_x(0,y) = 2e^{-3y} \quad ; \quad u(0,y) = 0$	۲
۲	معادله لاپلاس را برای ناحیه داده شده حل نمایید. لازم بذکر است که $\lvert u(x,y)\rvert$ کراندار میباشد. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$ $u_x(0,y) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$	۲/۵
۳	چنانچه درتابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ بدانیم $u(x,y) = e^{2x}\,(x\cos(2y) - y\sin(2y))$ ، با محاسبه تابع $v(x,y)$ ، تابع $f(z)$ را بدست آورید.	۲
۴	تبدیل یافته ناحیه خارج $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ و داخل $\lvert z - i\rvert = 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{-i}{z}$ بدست آورده، ناحیه بدست آمده را رسم کنید.	۱/۵
۵	با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال حقیقی زیر را بیابید. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} \quad ; \quad a > b > 0$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۲/۲	ساعت آزمون: ۸ صبح	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
	نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۱۳۸۸	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

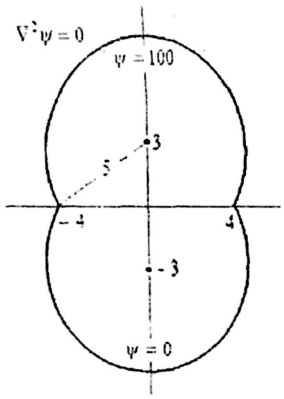
دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	یک تبدیل دو خطی بدست آورید بگونه ای که نقاط $z = 1,2,3$ را بترتیب به نقاط $w = -2,\infty,0$ نگاشت نماید. سپس تصویر نقاط داخل دایره به مرکز $(\frac{5}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ را تحت این نگاشت بیابید.	۲/۵
۲	سری لوران تابع $f(z)$ را حول نقطه $z = 1$ بدست آورده، مانده آنرا در این نقطه بیابید. سپس مانده را با استفاده از روابط مربوط به قطب نیز بدست آورده و در نهایت $\oint_c f(z)dz$ را محاسبه نمایید. $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^5} \quad ; \quad c : \lvert z-1 \rvert < 1$	۲/۵
۳	با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال حقیقی زیر را بیابید. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)} d\theta$	۲/۵
۴	چنانچه در تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ بدانیم $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ ، $f(z)$ را بدست آورید.	۲/۵

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
تاریخ آزمون: ۱۳۹۰/۳/۳۱	ساعت آزمون: ۸	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۹۰-۱۳۸۹	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	با انتخاب $u(x,t)=X(x)T(t)$ معادله زیر را حل نمایید. $\begin{cases} u_{tt}+9u_{xx}=u\ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=u(x,0)=0 \end{cases}$	۲
۲	الف) اگر تابع $u=f(x^2+y^2)$ یک تابع همساز(هارمونیک) باشد، این تابع را بدست آورید.	۲
	ب) معادله $exp(i\bar{z})=\overline{exp(iz)}$ را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.	۱
۳	الف) نگاشت دو خطی بیابید که نقاط $-4\ ,0\ ,4$ را به ترتیب به $\infty\ ,-1\ ,0$ انتقال دهد.	۱
	ب) به کمک نگاشت قبل معادله لاپلاس را برای ناحیه هاشور خورده حل نمایید. شعاع هر دو کمان دایره ها ۵ بوده و مرکز یکی $(0,3)$ و دیگری $(0,-3)$ میباشد. در قسمت فوقانی بر روی مرز $\psi=100$ و در قسمت پایینی بر روی مرز $\psi=0$ میباشد. 	۳
۴	انتگرالهای زیر را به کمک قضیه مانده ها بدست آورید. $\oint_{\lvert z\rvert=2} Im(z)\cos(\bar{z})dz\quad ,\quad \int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

پردیس دانشکده های فنی	گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
	تاریخ آزمون: ۱۳۹۱/۳/۳۰	ساعت آزمون: ۸	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه
	نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۹۱-۱۳۹۰	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	معادله با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0$$	۱/۵
۲	تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w=\tan\frac{z}{2}$ بدست آورید. $$D=\left\{z \mid -\frac{\pi}{2}\le \mathrm{Re}(z)\le\frac{\pi}{2}\right\}$$	۳
۳	انتگرال مختلط زیر را بدست آورید. $$I=\oint_c z^3 e^{\frac{1}{z}}\cos(\frac{2}{z})\,dz \quad , \quad c:\lvert z\rvert=1$$	۱/۵
۴	انتگرال حقیقی زیر را با استفاده از قضیه مانده ها به دست آورید. $$I=\int_0^\infty \frac{16-x^2}{\left(16+x^2\right)^2}\cos\frac{x}{4}\,dx$$	۳

با آرزوی موفقیت