www.engclubs.net

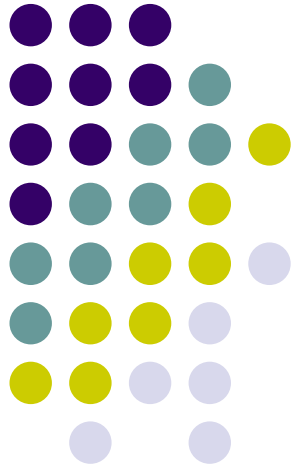
درس محاسبات عددی

تعداد واحد: ۲ واحد نظری

مقطع: کارشناسی ارشد

مدرس: عاطفه پرورش

پاییز ۹۱



برخی از مراجع درس

- Applied Numerical Analysis, C. Gerald & P. Wheatley, 2003
- محاسبات عددی، آنالیز عددی کاربردی برای رشته های مهندسی و علوم، علی محمد پورپاک، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشکده فنی دانشگاه تهران (ترجمه مرجع اول)
- محاسبات عددی، دکتر بهمن مهری، دکتر رضا نخعی، ویرایش دوم، چاپ چهارم، انتشارات آییژ
- محاسبات عددی، دکترعبداله شیدفر، دکتر حسین آذری
- روش های محاسبات عددی، دکتر بهروز قلی زاده، چاپ چهارم، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف
- محاسبات عددی، دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر خسرو مالک نژاد، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

- محاسبات عددی یا آنالیز عددی یا تحلیل عددی به تنظیم، مطالعه و اعمال شیوه های تقریبی محاسباتی می پردازد که این شیوه ها برای حل آن دسته از مسائل ریاضیات پیوسته (در مقابل ریاضیات گسسته) بکار میروند که با روشهای تحلیلی و دقیق قابل حل نیستند.
- نخستین رساله در حساب به معنی امروزی نوشته محمد بن موسی الخوارزمی است و آوازه وی چنان پیچید که روشهای حل مسئله در محاسبات عددی را الگوریتم نامیدند.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- حل تحلیلی معادله درجه دو

$$Q = \frac{1}{n} A R^{\frac{2}{3}} \sqrt{S}$$

- حل عددی معادله مانینگ- استریکلر

$$f(y) = \frac{Qn}{\sqrt{S}} = known \qquad y = ?$$

- یافتن ریشه‌های یک معادلهٔ غیر خطی
- حل دستگاه‌های بزرگ از معادلات غیر خطی
- درونیابی برای یافتن مقادیر میانی در یک جدول از داده‌ها
- یافتن تقریبات توابع
- تقریب مشتق توابع از هر مرتبه حتی وقتی فقط جدولی از مقادیر تابع معلوم است
- انتگرالگیری از یک تابع حتی وقتی فقط جدولی از مقادیر تابع معلوم است، همچنین می‌توان انتگرالهای چندگانه را حساب کرد
- حل معادلات دیفرانسیل معمولی وقتی مقادیر اولیهٔ متغیر معلوم است این معادلات می‌توانند از هر مرتبه و یا هر پیچیدگی باشند
- حل مسائل مقدار مرزی یافتن جوابهای عددی انواع معادلات دیفرانسیل جزیی

- با پیشرفت رایانه ها نیاز به حل مسائل ریاضی از طریق عددی بیش از پیش حس شد و الگوریتمهایی که توسط افرادی چون نیوتن و اولر ارائه شده بودند، اهمیت کاربردی خود را پیدا کردند.
- ریاضی کارهای دیگر نیز در این راه پا گذاشتند و روشهایی کاراتر ارائه دادند و محاسبات عددی شکلی نوین به خود گرفت.

- **دو دسته کلی از روشها در محاسبات عددی وجود دارند:**

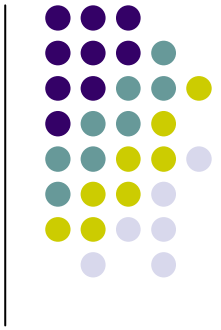
۱- روشهای مستقیم (Direct): **حذف گوس در حل دستگاه معادلات خطی**

سیمپلکس مورد استفاده در برنامه ریزی خطی

۲-روشهای تکراری(Iterative):**روش نیوتن در حل دستگاه معادلات غیرخطی**

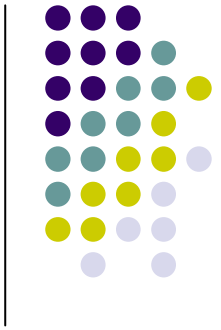
- **الگوریتم مجموعه‌ای متناهی از دستورالعمل‌ها است، که اگر به ترتیب خاصی اجرا شوند، می‌توانند مسئله‌ای را حل کنند. به عبارت دیگر، یک الگوریتم، روشی گام به گام را برای حل مسئله بیان می‌کند. تمام الگوریتم‌ها باید شرایط و معیارهای زیر را دارا باشند:**
- **ورودی: یک الگوریتم باید یک یا چندین پارامتر را به عنوان ورودی بپذیرد؛**
- **خروجی: الگوریتم بایستی حداقل یک کمیت به عنوان خروجی (نتیجه عملیات) تولید کند؛**
- **قطعیت: دستورات الگوریتم باید با زبانی دقیق، و إبی‌ابهام بیان شوند. هر دستوراالعمل نیز باید انجام‌پذیر باشد. دستوراتی نظیر «مقدار ۶ یا ۷ را به X اضافه کنید» یا «حاصل تقسیم پنج بر صفر را محاسبه کنید» مجاز نیستند؛ چراکه در مورد مثال اول، معلوم نیست که بالاخره چه عددی باید انتخاب شود، و در خصوص مثال دوم هم، تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نشده است.**
- **محدودیت: الگوریتم باید دارای شروع و پایان مشخصی باشد، به نحوی که اگر دستورات آنرا دنبال کنیم، برای تمامی حالات، الگوریتم پس از طی مراحل محدودی خاتمه یابد. به علاوه، زمان لازم برای خاتمه الگوریتم هم باید به گونه‌ای معقول، کوتاه باشد؛**

- معمولاً برای حل یک مسئله، روش‌ها و الگوریتم‌های گوناگونی وجود دارند؛ یک الگوریتم ممکن است عمل مورد نظر را با دستورات مختلف در مدت زمان و یا کار کمتر یا بیشتری نسبت به الگوریتم دیگر انجام دهد. به همین دلیل، انتخاب الگوریتم مناسب و کارا اهمیت زیادی در موفق بودن و کارایی برنامه رایانه‌ای دارد. الگوریتم‌ها به عنوان یک فناوری مطرح هستند و دانشمندان آنها را طراحی، تحلیل، و مطالعه می‌کنند .تحلیل الگوریتم‌ها رشته‌ای است که به بررسی کارایی الگوریتم‌ها می‌پردازد. تحلیل الگوریتم‌ها یعنی پیش‌بینی منابع مورد نیاز برای اجرای یک الگوریتم، همچون: حافظه، پهنای‌باند ارتباطی، سخت‌افزار، و از همه مهمتر، زمان.
- کارایی یا پیچیدگی هر الگوریتم را با تابعی نشان می‌دهند که تعداد مراحل لازم برای اجرای الگوریتم را برحسب طول داده ورودی، یا میزان محل‌های لازم حافظه را بر حسب طول داده ورودی نشان می‌دهد .



- **تعریف خطا و انواع آن** (Error Definition)
- **مقدار دقیق** (exact): P **مقدار حاصل شده:** P*
- E(abs)=|P-P*|
- E(rel)=|P-P*|/P , P#0
- **منابع خطا** (Error Resources)

خطای برشی- خطای گرد کردن- خطا در داده های اصلی- خطای پخش شده- خطای انسانی



عدد*P تقریبی برای P با t رقم معنی دار است، اگر t بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد بطوریکه:

$$\frac{|P - P^*|}{|P|} < 5 \times 10^{-t}$$

$$P = 3.50, \quad P^* = 3.47 \quad \Rightarrow \frac{0.03}{3.5} < 5 \times 10^{-t}$$

$$\Rightarrow 8.57 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-2} \Rightarrow t = 2$$

$$P = 3.50, \quad P^* = 3.11 \quad \Rightarrow t = 2$$

روشهای حل معادلات غیرخطی

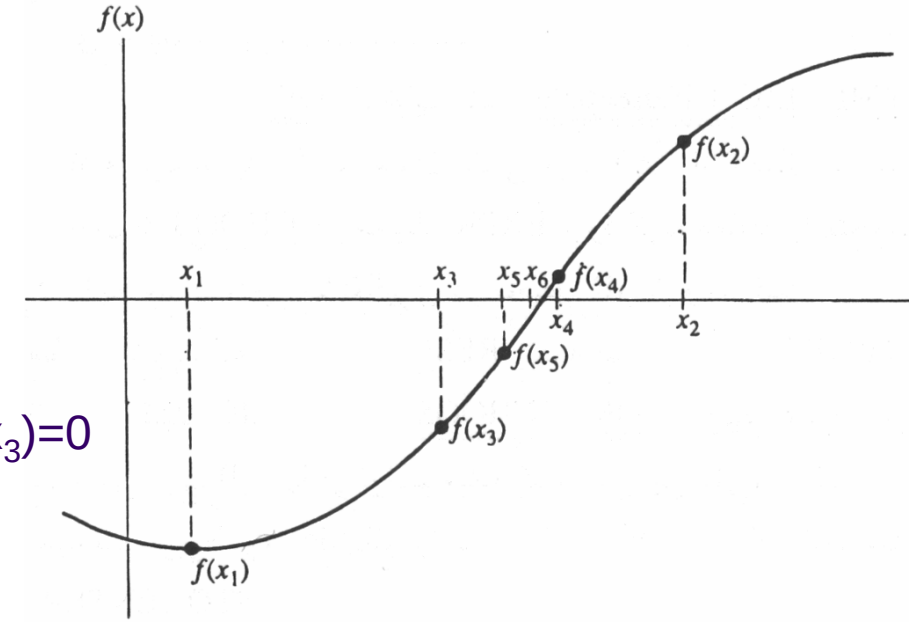
Solution of non Linear Equation

- روش تنصیف (Bisection or Halving the Interval)
- روش وتری یا سکانت
- نقطه ثابت X=g(x)
- روش نیوتن
- روش مولر

الگوریتم نصف سازی بازه

- Given f(x)=0.0
- Guess x_1, x_2 so that $F(x_1)* F(x_2)<0$
- REPEAT if not

- SET $X_3=(x_1+x_2)/2$
- IF $F(x_1)* F(x_3)<0$;
- SET $x_2=x_3$
- ELSE SET $x_1=x_3$
- ENDIF
- UNTIL ($|X_1-X_2|$<tolerance value) or $f(x_3)=0$

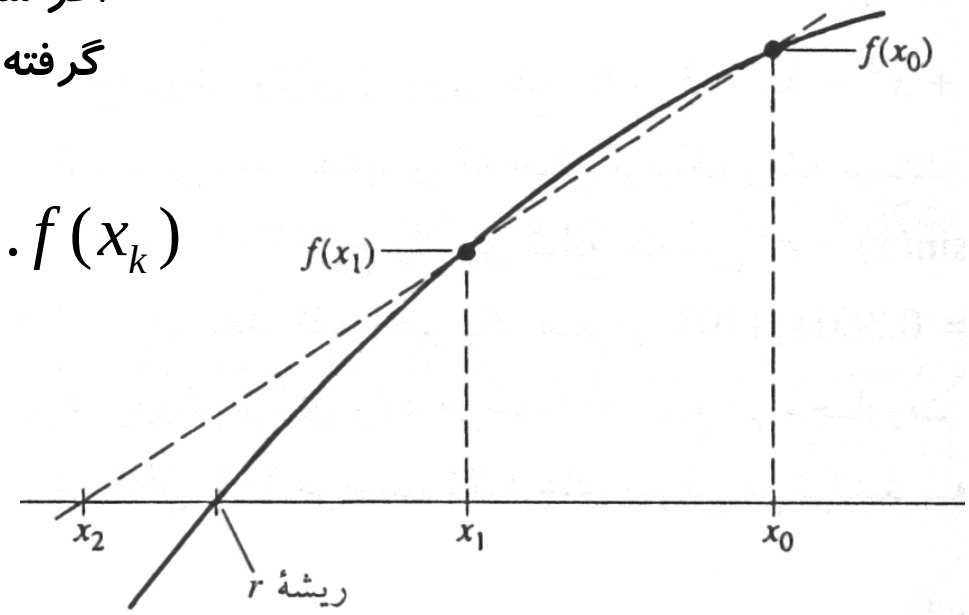


- کارایی لازم را ندارد و میتوان روشهایی را یافت که رسیدن به ریشه را تسریع کند.
- برای یافتن جواب اولیه مسائلی که نیاز به حدس اولیه دارند استفاده میشود.
- حداکثر خطا بعد از k مرحله تکرار برابر است با: $\frac{|x_2 - x_1|}{2^k}$

روش وتری

- همان الگوریتم روش تنصیف را دارد با این تفاوت که رفتار تابع را هم در نظر میگیرد. در واقع آن را با تابع خطی تخمین می زند.
- هر چه تابع در حول و حوش ریشه رفتار خطی تر داشته باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.
- اگر شرط قرار گرفتن X_2 بین X_0 و X_1 هم در نظر گرفته شود آن را روش رگولافالسی می نامند.

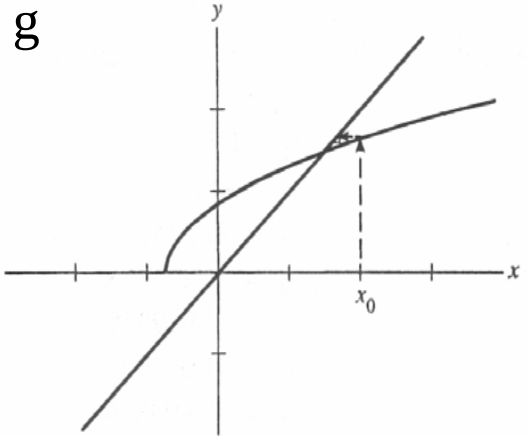
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k)$$



X=g(x) or Fixed-Point Method

$$f(x) \equiv [x = g(x)]$$

$$if\ (\exists r,\ \ f(r) = 0) \Rightarrow r - g(r) = 0 \Rightarrow r : \text{fixed point of g}$$



Example: $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

first type: $x = g_1(x) = \sqrt{2x+3}$

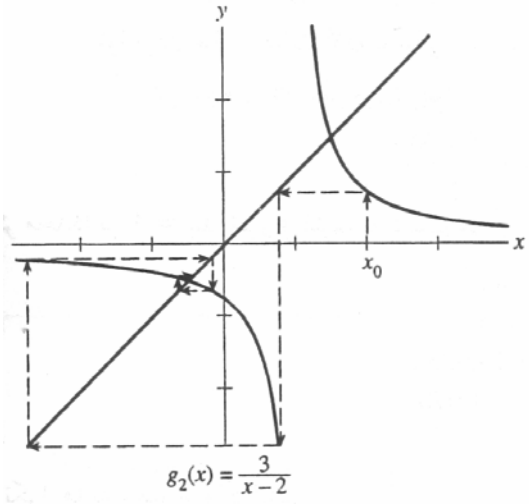
$x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = 3.31662 \Rightarrow x_2 = 3.10375 \Rightarrow$

$x_3 = 3.03439 \Rightarrow x_4 = 3.01144 \Rightarrow x_5 = 3.00381$

second type: $x = g_2(x) = \dfrac{3}{(x-2)}$

$x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = 1.5 \Rightarrow x_2 = -6 \Rightarrow x_3 = -0.375 \Rightarrow$

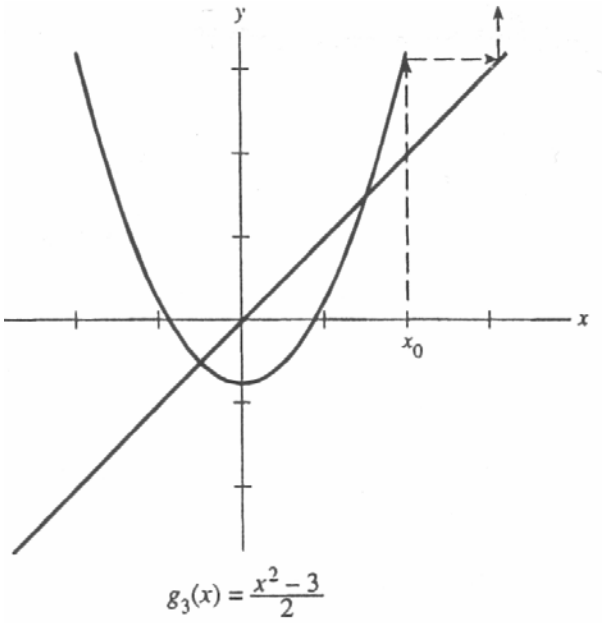
$x_4 = -1.263158 \Rightarrow x_5 = -0.919355 \Rightarrow \ldots x_8 = -1.00305$



$$third\ type:\ x = g_3(x) = \frac{\left(x^2 - 3\right)}{2}$$

$$x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = 6.5 \Rightarrow x_2 = 19.625 \Rightarrow$$

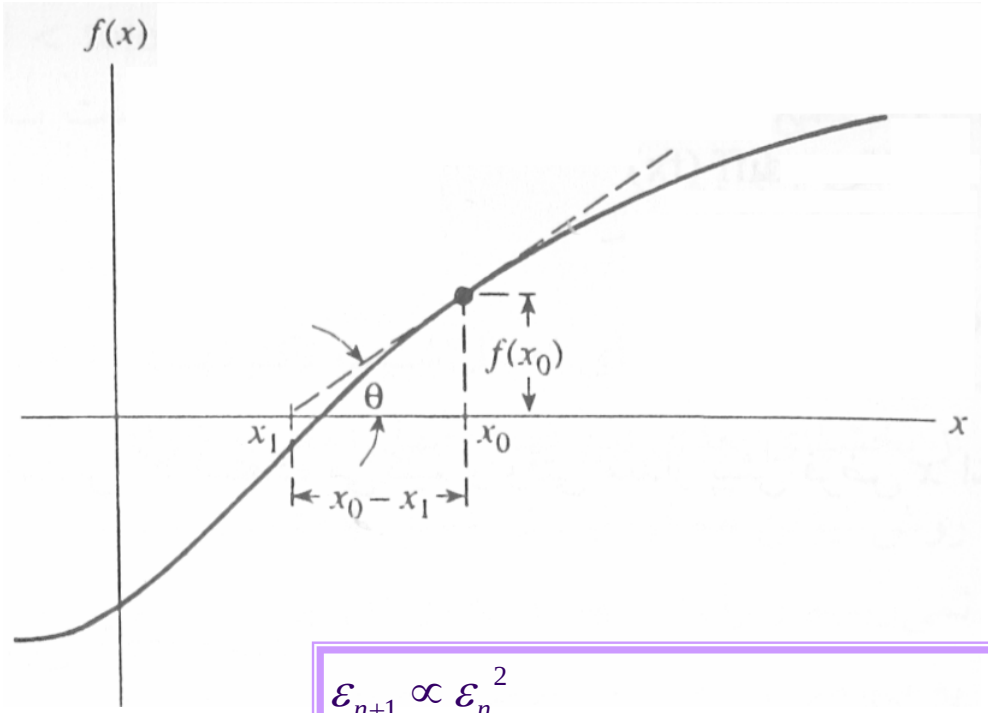
$$x_3 = 191.070$$



- **ممکن است به ریشه ای غیر از ریشه مورد نظر همگرا شود و یا کلاً واگرا شود.**
- **شرط کافی برای همگرایی در روش فوق:**

اگر x_0 حول ریشه انتخاب شود و $|g'(x_0)| < 1$ باشد، x_0 به ریشه همگراست.

- **اعمال این شرط مشکل است و در یک برنامه کامپیوتری بهتر است که در هر گام معیار $|x_3-x_2|<|x_2-x_1|$ چک شود.(در واقع هم ارز هستند)**



روش نیوتون

$$tg\,\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},\ tg\,\theta = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} \propto \varepsilon_n{}^2$$

$$if \quad f(x_0) = 0 \ : x_0 = root \quad \& \quad x_n = guess$$

$$x_n = x_0 + \varepsilon_n \ , \ f(x_0) = f(x_n - \varepsilon_n) = 0 \Rightarrow via\,Taylor\,Series$$

$$f(x_0) = f(x_n) - \varepsilon_n f'(x_n) + \underbrace{\frac{\varepsilon_n{}^2}{2!} f''(x_n) - .....}_{\frac{\varepsilon_n{}^2}{2!} f''(\eta) \approx 0} = 0 \Rightarrow \varepsilon_n \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\begin{cases} x_0 = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \dfrac{\varepsilon_n{}^2}{2!} \dfrac{f''(\eta)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \left(-\frac{1}{2!} \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)} \right) \varepsilon_n{}^2$$

- تست همگرایی روش نیوتن با توجه به اینکه نوع خاصی از روش نقطه ثابت است به چه صورت خواهد بود؟

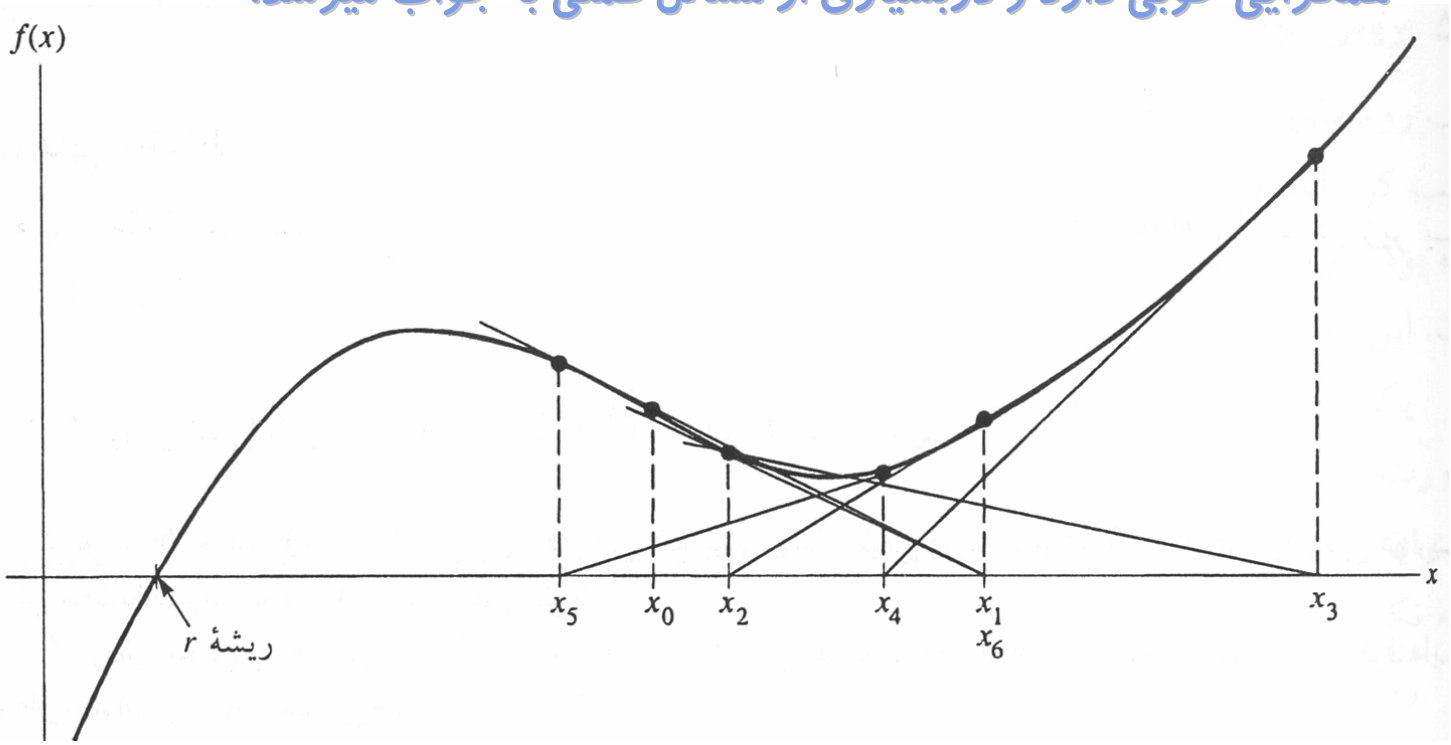
- ریشه تابع زیر را از روشهای نقطه ثابت و نیوتن بدست آورید.

$F(x)=3x+\sin(x)-e^x$

- روش نیوتن یکی از روشهای کاربردی برای حل دستگاههای معادلات غیرخطی از طریق تکرار است. در بسیاری از نرم افزارهای مهندسی از این روش کارآمد برای حل دستگاههای معادلات به صورت زیر استفاده شده است که در بخشهای بعدی درس به آنها خواهیم پرداخت:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

- در روش نیوتن همیشه باید تعریف مشتق تابع مشخص باشد و در فاصله مشخصی مشتق پذیر باشد.
- به حدس اولیه و وضعیت تابع حساسیت دارد.
- در مواردی مانند شکل ارائه شده، ممکن است در دور بینهایت بیفتد و یا واگرا شود.
- همگرایی خوبی دارد و دربسیاری از مسائل عملی به جواب میرسد.



مثال

۱- در رابطه مانینگ- استریکلر عمق جریان را در مقطع مستطیلی وضریب زبری ۰/۰۱۸ در کانالی با شیب ۰/۰۰۱و دبی ۳متر مکعب بر ثانیه و عرض کف ۲متر بیابید.

$$Q=\frac{1}{n}AR^{\frac{2}{3}}\sqrt{S}=\frac{1}{n}(by)\left(\frac{by}{b+2y}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{S}\Rightarrow$$

$$\frac{3\times 0.018}{2\sqrt{0.001}}=y\left(\frac{2y}{2+2y}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y\left(\frac{y}{1+y}\right)^{\frac{2}{3}}-0.8538=0.0$$

۲- آب در لوله چدنی به قطر ۳۰۰میلیمترو طول ۱ کیلومتر و دبی ۰/۱ مترمکعب برثانیه در جریان است. مطلوبست میزان ضریب زبری برای استفاده در رابطه دارسی - ویسباخ.

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2\log\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}+\frac{e}{3.7D}\right),\ \frac{e}{D}=8.667\times10^{-4},\ \mathrm{Re}=424413$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{f}}=-2\log\left(\frac{2.51}{424413\sqrt{f}}+\frac{8.667\times10^{-4}}{3.7}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}+2\log\left(\frac{2.51}{424413\sqrt{f}}+\frac{8.667\times10^{-4}}{3.7}\right)=0.0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}+2\log\left(\frac{5.91405\times10^{-6}}{\sqrt{f}}+0.00023424\right)=0.0$$

روش مولر

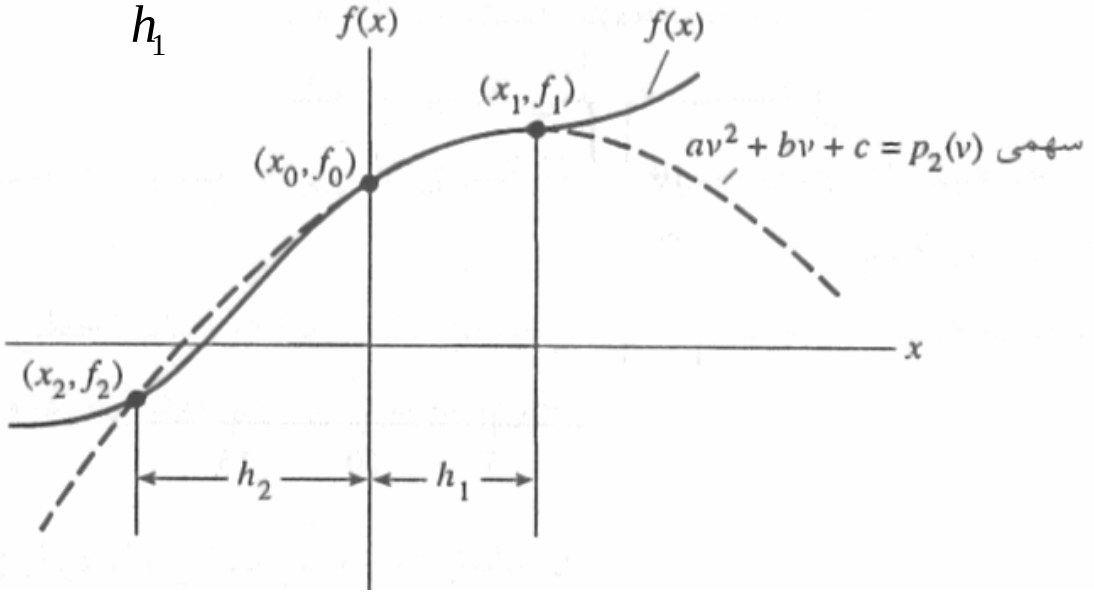
- برای بهبود روشهایی که بر اساس تقریب خطی تابع عمل میکنند می توان تقریب را از درجهٔ دو انجام داد. ایده اصلی: از سه نقطه یک سهمی عبور میکند.
  انتخاب نقاط: مثلاً می تواند دو نقطهٔ ابتدا و انتهای بازه و نقطه وسط آنها باشد.

$$av^2 + bv + c$$

$$a = \frac{\gamma f_1 - f_0(1+\gamma) + f_2}{\gamma h_1^2 (1+\gamma)}, \quad b = \frac{f_1 - f_0 - a h_1^2}{h_1}$$

$$c = f_0 \quad , \quad \gamma = h_2 / h_1$$

$$x_r = x_0 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$



الگوریتم روش مولر

Given the points x_2, x_0, x_1 in increasing value,

1. Evaluate the corresponding function values f_2, f_0, f_1.
2. Find the coefficients of the parabola determined by the three points.
3. Compute the two roots of the parabolic equation.
4. Choose the root closest to x_0 and label it x_r.
5. IF $x_r > x_0$ THEN rearrange x_0, x_r, x_1 into x_2, x_0, x_1
6. ELSE rearrange x_2, x_r, x_0 into x_2, x_0, x_1
7. IF $|f(x_r)|<TOL$, THEN return (x_r).
8. ELSE go to 1.

* ریشه تابع زیر را در فاصله ۰ و ۱ از روشهای نیوتن و مولر بیابید. (برنامه های مورد نیاز را بنویسید و اجرا کنید)

$$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$$

میانیابی با استفاده از چند جمله ایها

Interpolating Polynomials

هدف : بدست آوردن معادله یک چندجمله ای که بر نقاط منفصل $[x_i, y_i]$ میگذرد.

این چندجمله‌ای که آن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم تقریبی است از تابعی مانند $f(x)$ که این تابع نیز به نوبهٔ خود بیان کنندهٔ چگونگی تغییرات کمیتی خاص در جهت x است.

در صورتی که $f(x)$ را با $P_n(x)$ تقریب بزنیم می‌توانیم با استفاده از این چند جمله‌ای، در xهایی که مقدار f در آنها موجود نیست برآوردی از کمیت مورد نظر به دست آوریم. همچنین می‌توان مشتق مرتبهٔ اول یا مراتب بالاتر $f(x)$ را نیز برآورد کرد.

برای پیدا کردن تابع در نقاط بین نقاط داده شده میتوان میانگین گیری حسابی انجام داد و در حقیقت تغییرات را خطی فرض کرد.

همچنین میتوان از دو نقطهٔ موجود و یک نقطهٔ دیگر، یک چند جمله ای درجه ۲ عبور داد و مقدار تابع در X مورد نظر را به دست آورد.

با تعداد نقاط بیشتر میتوان درجه چند جمله ای برآورد شده را بالاتر برد.

Linear interpolation ---- 2 points

Quadratic interpolation ---- 3 points

Cubic interpolation ---- 4 points

*تقریبهای کمترین مربعات برای تخمین بهترین چند جمله ای گذرنده از نقاط (توضیح)

در هنگام مشتق گیری از یک تابع ناشناخته در یک نقطه دلخواه، هر قدر که درجهٔ انترپولاسیون بالاتر باشد دقت محاسبه مشتق در آن نقطه بیشتر است.

در هنگام محاسبه انتگرال یا سطح زیر یک منحنی ناشناخته که تنها تعدادی از نقاط آن برای ما مشخص است، نتیجه محاسبه به این بستگی دارد که نقاط موجود را چگونه به یکدیگر متصل کنیم.

به عبارت دیگر مهم است که تغییرات را خطی فرض کنیم و یا به صورت یک چندجمله ای از درجه ۲، ۳ یا مراتب بالاتر.

می‌دانیم که از n+1 نقطهٔ منفصل مانند $[x_o, y_o], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$

فقط و فقط یک چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌گذرد. روشهای مختلفی برای برآورد این چند جمله ای وجود دارد. به عبارت این چند جمله ای را میتوان به فرمهای مختلف نوشت. معمولترین فرمها عبارتند از:

- فرم معمولی
- فرم لاگرانژی
- فرم نیوتونی
- درونیابی با اسپلاینهای مکعبی
- تقریب چند جمله ای سطوح برای بیش از یک متغیر مستقل

فرم معمولی چند جمله ای:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

که در آن, a_0 تا a_n ضرایب ثابتی می‌باشند (n+1 ضریب) که با استفاده از نقاط منفصل به دست می‌آیند.

با جایگذاری تک تک نقاط $[x_o, y_o], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ در معادله فوق، n+1 معادله به دست خواهیم آورد که با حل همزمان آنها، n+1 مجهول مورد نظر را به دست می آوریم.

معایب این فرم: محاسبات بسیار طولانی برای حل دستگاه معادله حاصل و امکان خطا (مشکلات حل دستگاه معادلات)

فرم لاگرانژی چند جمله ای:

فرم لاگرانژی برای چهار نقطه $[x_o, f_o], [x_1, f_1], [x_2, f_2], [x_3, f_3]$ **به صورت زیر نوشته میشود:**

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3$$

معایب این فرم: عدم وجود "عمومیت" در فرم لاگرانژی به این معنی که با تغییر تعداد نقاط بایستی تمامی محاسبات را از ابتدا انجام داد.

فرم نیوتنی چند جمله‌ای:

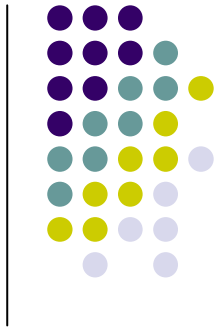
$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

که در آن, b_0 تا b_n ضرایب ثابتی می‌باشند که با استفاده از نقاط منفصل به دست می‌آیند.

با جایگذاری اولین نقطه، $[x_0, f_0]$ در $P_n(x)$ خواهیم داشت:

$$b_0 = f_0$$

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$



و با جایگذاری دومین نقطه، $[x_1, f_1]$ در $P_n(x)$ خواهیم داشت:

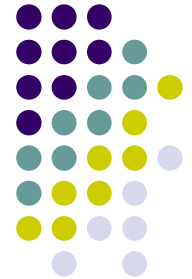
$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

و به همین ترتیب با جایگذاری سومین نقطه، $[x_2, f_2]$ در $P_n(x)$ و ساده کردن رابطه حاصل میتوانیم معادله زیر را برای b_2 به دست آوریم:

$$b_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

به ترتیب تفاضل تقسیمی اول و دوم نامیده میشوند. $\dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ و $\dfrac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

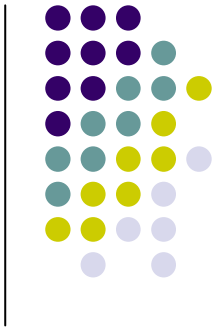


تفاضل تقسیمی اول first divided difference و تفاضل تقسیمی دوم second divided difference را به ترتیب با نمادهای زیر نمایش میدهیم:

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$



به سادگی میتوان ثابت کرد:

$$b_1 = f[x_1, x_0] = f[x_0, x_1]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = f[x_0, x_1, x_2]$$

به عبارت دیگر ترتیب آرگومانها در نتیجهٔ نهایی تاثیری ندارد.

به همین ترتیب میتوان معادله زیر را برای b_n به دست آورد:

$$b_n = f[x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n]$$

حال می‌توان فرم نیوتونی $P_n(x)$ را با استفاده از نمادهای تعریف شده برای تفاضل‌های تقسیمی به صورت زیر نوشت:

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

در صورتی که فرض کنیم نقاط منفصل $[x_o, y_o], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ به ترتیب Xها مرتب شده باشند $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots.. < x_n)$ و علاوه بر این، اختلاف بین هر دو X متوالی نیز مقداری ثابت و برابر با h باشد، با شکلی خاص از تفاضل‌های تقسیمی رو به رو هستیم که تفاضل‌های محدود نامیده می‌شوند.

تفاضلهای محدود را می‌توان با استفاده از عملگرهای Δ ، ∇ و δ نوشت و شکلهای جدیدی از فرم نیوتونی $P_n(x)$ به دست آورد که کاربردهای خاص خود را دارند.

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

انواع مختلف تفاضلهای محدود finite differnces:

۱- تفاضلهای تقسیمی رو به جلو forward finite differences:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f_1 - f_0) = \frac{1}{h}\Delta f_0$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2h} = \frac{1}{2h^2}(\Delta f_1 - \Delta f_0) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_0$$

.....

.....

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

Δf_0 تفاضل رو به جلوی اول و $\Delta^2 f_0$ تفاضل رو به جلوی دوم نامیده می‌شوند.

در صورتی که n+1 نقطه منفصل را با $[x_i, y_i], [x_{i+1}, y_{i+1}], \ldots, [x_{i+n}, y_{i+n}]$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$P_n(x) = f_i + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{i+n-1})$$

این معادله، فرمول نیوتن-گریگوری رو به جلو Newton-Gregory forward formula برای تقریب f(x) نامیده می‌شود.

با استفاده از این فرمول می‌توان مشتق مرتبهٔ اول و مراتب بالاتر f(x) در نقطهٔ x_i را به کمک نقاطی که بعد از x_i واقع شده‌اند تقریب کرد.

$$P_n(x) = f_i + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) + \dots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}(x - x_i)(x - x_{i+1})\dots(x - x_{i+n-1})$$

به عنوان مثال تقریب درجه دو برای مشتق مرتبهٔ اول f(x)را به کمک فرمول نیوتن-گریگوری رو به جلو می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} f(x) \approx P_2(x) = f_i + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} = \frac{\Delta f_i}{h} + \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}x - \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i + x_{i+1}) \Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{\Delta f_i}{h} + \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}x_i - \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i + x_{i+1}) \Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{\Delta f_i}{h} + \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}(x_i - x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)}{2h} \Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{4f_{i+1} - 3f_i - f_{i+2}}{2h} \end{cases}$$

x	f
3.2	22
2.7	17.8
1	14.2
4.8	38.3
5.6	51.7

چند جمله ای درونیاب درجه ۳ را که با چهار نقطه اول برازش دارد بنویسید.

چند جمله ای درجه ۴ که در ۵ نقطه برازش دارد کدام است؟

به ازای $x=4.1$ مقدار تابع چقدر است؟

www.engclubs.net
A site for all Engineers