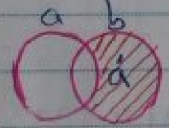
نویسنده : نیپ شورته   مترجم : لرطلا

Year: ——— Month: ——— Date: ———   Subject. ———

ریاضیات گسسته :

جبر بول :

$1)\ a.b = b.a$	قانون عطف (جابجایی)	$1)\ a+b = b+a$
$2)\ a.(b+c) = (ab)+(ac)$	پخش پذیری	$2)\ a+(b.c) = (a+b).(a+c)$
$3)\ a.1 = a$	همانی	$3)\ a+0 = a$
$4)\ a.a' = 0$	متمم پذیری	$4)\ a+a' = 1$



گزاره : هر گزاره دو حالت دارد

True ← 1 ← درست ← روشن

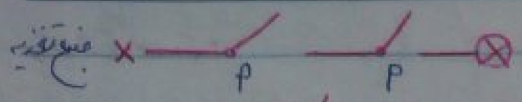
Fals ← 0 ← غلط ← خاموش

اگر n گزاره ها ترکیب شوند ، 2^n حالت وجود دارد.

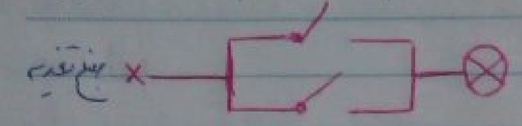
مفهوم متمم : ارزش هر گزاره ، عکس آن می شود.

P	P'
0	1
1	0

Year: Month: Date: Subject.



۱ ← AND ← و ← عطفی



۲ ← OR ← یا

$p \Rightarrow q$ ← p آنگاه q (اگر آنگاه) ← اگر هوا بارانی باشد آنگاه چتر همراه خود خواهم داشت.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

1) $a \cdot a = a$

قانون خود توانی

a	a	aa
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1) $a + a = a$

a	a	a+a
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

2) $a \cdot 0 = 0$ قانون برابر اندازی

2) $a + 1 = 1$

3) $a \cdot (a+b) = a$ قانون جذب

a	b	a+b	a.(a+b)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

3) $a + (a \cdot b) = a$

a	b	a.b	(a.b)+a
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

کمکی

$4)\ (a+b)+c = a+(b+c)$	قانون شرکت پذیری $4)\ (a.b).c = a.(b.c)$
$5)\ (a+b)' = a'.b'$	دمورگان $5)\ (a.b)' = a'+b'$
$6)\ 0' = 1 \longrightarrow (a')' = a$	قانون برگشت $6)\ 1' = 0$

تعریف همارزی همیشه درست یا تاتولوژی: فرمول های گزاره ای که ارزش (های) آن ها همواره True باشد، یک تاتولوژی می‌گویند. مثل $(p \vee (\neg p))$

$\neg$ نقیض

p	$\neg p$	$(p \vee (\neg p))$
T	F	T
F	T	T

همارزی دوشرطی:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \rightarrow q$ یک شرطی

$p \leftrightarrow q$ دوشرطی

گزاره های هم ارز (معادل) : دو گزاره ی p و q را هم ارز می نامیم هرگاه ستون آخر ارزش هر دو گزاره یکی باشد و به صورت $p \equiv q$ (هم ارز) نمایش می دهیم.

مثال: $p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

مثال: $p \vee q \equiv q \vee p$

بنابر خاصیت جابجایی $p \vee q$ هم ارز با $q \vee p$ می باشد.

مثال: $(p \vee q) \vee r \equiv p (q \vee r)$

طبق خاصیت شرکت پذیری $p(\vee q) \vee r$ هم ارز با $p(q \vee r)$ می باشد.

مثال: $(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \equiv p\wedge(q\vee r)$

$$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

طبق خاصیت پخش پذیری $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ با $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ هم ارز می باشند.

مثال: $(p\vee q)\wedge(p\vee r) \equiv p\vee(q\wedge r)$

$$(p\vee q)\wedge(p\vee r) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

طبق خاصیت پخش پذیری هم ارز می باشند.

مثال: $(p\wedge \neg q)\vee \neg r \equiv p\vee \neg(q\vee r)$

قانون دمورگان $\neg(a\cdot b)=\neg a+\neg b$

$$\neg(a+b)=\neg a\cdot\neg b$$

طبق قانون دمورگان باهم هم ارز می باشند.

Year: Month: Date: Subject.

مثال: $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$

قانون دمورگان

طبق قانون دمورگان با هم هم‌ارز می‌باشند.

تمرین: $p \to q$ با کدام یک از گزاره های زیر هم ارز است؟

1) $\sim p \vee q$ 2) $\sim q \to \sim p$ 3) $\sim(\sim p \wedge q)$

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۹

۷

۸

Year: Month: Date: Subject.

تمرین: جدول درستی هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

2) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

3) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

4) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

Year: Month: Date: Subject.

استنتاج: می‌گوییم گزاره‌ی q یک استنتاج از گزاره‌های p_1 و p_2 و ... و p_n

می‌باشد هرگاه $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.

$$p_1 , p_2 , \dots , p_n \underset{\text{استنتاج}}{\vdash} q$$

استنتاج های مهم:

۱- قیاس استثنایی (استنتاجی)

$$p , p \rightarrow q \vdash q$$

۲- قیاس تعدی

$$p \rightarrow q , q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

۳- قیاس عکس

$$p \rightarrow q , \neg q \vdash \neg p$$

۴- قیاس فصلی

$$p \vdash p \vee q$$

۵- قیاس عطفی (تخصیص)

$$p \wedge q \vdash p$$

کهکی

۹

Year: Month: Date: Subject.

جواب تمرین ۱ صفحه ۷

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

مثال: بدون استفاده از جدول درستی، نشان دهید قیاس های زیر معتبر است.

۱) $\underbrace{p \, , \, p \rightarrow q}_{q} \, , \, q \rightarrow r \vdash r$

مراحل	گزاره ها	دلایل
۱	p	مقدم
۲	$p \rightarrow q$	مقدم
۳	q	قیاس استثنایی ۱،۲
۴	$q \rightarrow r$	مقدم
۵	r	قیاس استثنایی ۳،۴

کهکی

Year: Month: Date: Subject.

2) $p \vee q \,,\, \neg p \vdash q$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

هر گزاره شرطی هم ارز است با نقیض اولی یا دومی

$\neg p \,,\, \neg p \rightarrow q \,,\, \neg p$

مراحل	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \vee q$	فرض
۲	$\neg p \rightarrow q$	هم ارزی ۱
۳	$\neg p$	فرض
۴	q	قیاس استثنایی ۲و۳

3) $p \,,\, (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$

4) $q \,,\, p \,,\, (p \wedge q) \rightarrow r \vdash r$

Year: Month: Date: Subject.

مجموعه ها : هر دسته ای از اشیاء از هر نوعی که باشد تشکیل یک مجموعه می دهد . از نظر ریاضیات ، مجموعه ها همانند نقطه و خط تعریف نشده است .

مثال :

۱. دانشجویان رشته ی کامپیوتر مقطع کارشناسی کامپیوتر ، تشکیل یک مجموعه را می دهند .

اشیاء

۲. گل های لاله ی یک باغچه ، تشکیل یک مجموعه را می دهند .

اشیاء

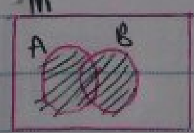
۳. انسان های باهوش در ایران تشکیل یک مجموعه را نمی دهند .

مجموعه ی تهی : مجموعه ای که دارای هیچ عضوی نباشد را مجموعه ی تهی می گویند .

$\varnothing$ یا $\{\ \}$

عملیات روی مجموعه ها :

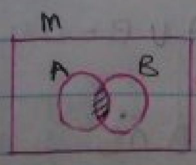
اجتماع :



یا $\cup$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

اشتراک :

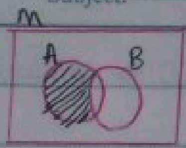


$\cap$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

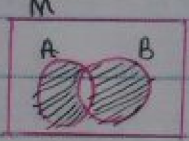
Year: Month: Date: Subject.

تفاضل:



$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

تفاضل متقارن:



$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

نمودار ون:

نمایش هندسی مجموعه ها را نشان میدهند.

مجموعه ی مرجع: برای هر بحث علمی، یک مجموعه را به نام مجموعه ی مرجع (جهانی) به عنوان مرجع قرار داده می پذیرند و با زیر مجموعه های آن کار می کنند. و آن را با

M یا U نمایش میدهیم.

خواص مجموعه ها:

۱- خاصیت جابه جایی:

$$\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{cases}$$

Year: Month: Date: Subject.

۲_ خاصیت انجمنی:

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$

۳_ خاصیت توزیع پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b \cdot c = (a+b) \cdot (a+c) \\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \end{cases}$$

۴_ خاصیت همانی دهی:

$$\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap M = A \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 0 = a \\ b \cdot 1 = b \end{cases}$$

یا $a \cdot 1 = 0$

۵_ خاصیت متمم:

$$\begin{cases} A \cup A' = M \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases} \qquad \begin{cases} a + a' = 1 \\ a \cdot a' = 0 \end{cases}$$

Year: Month: Date: Subject.

مثال: با استفاده از خاصیت های قبل ثابت کنید.

1) $A \cup (A \cap B) = A$

$(A \cap M) \cup (A \cap B) =$

$A \cap (M \cup B) =$

$A \cap M = A$

2) $A \cup (A - B) = A$

3) $A \cup (A \cap B) = A$

Year: Month: Date: Subject.

جبر بولی:

۱) $a+a=a$ $a \cdot a=a$

۲) $(a')'=a$

۳) $a+ab=a$

۴) $(a+b)'=a' \cdot b'$ $(a \cdot b)'=a'+b'$

۵) $a+1=a$ $a \cdot 0=0$

تمرین:

$a \cdot b+a \cdot b'+a' \cdot b$

$=a \cdot \overbrace{\cancel{(b+b')}}^{1}+a' \cdot b$

$=\overbrace{\cancel{a \cdot 1}}^{a}+a' \cdot b$

$=a+a' \cdot b$

$=(a+a') \cdot (a+b)$

$=1 \cdot (a+b)$

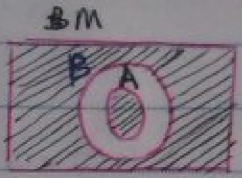
$=(a+b)$

کهکی

یادآوری

$A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B'$

زیرمجموعه



متمم

خاصیت بازتابی:

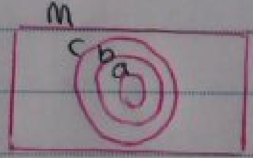
$A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$ مجموعه‌ها

$a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a + b = b$ جبر بول

خاصیت تعدی:

جبر بول $a \preccurlyeq b \,,\, b \preccurlyeq c \Longrightarrow a \preccurlyeq c$

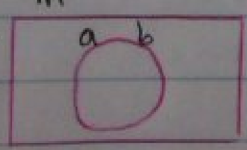
مجموعه‌ها



خاصیت پادتقارنی:

جبر بول $a \preccurlyeq b \,,\, b \preccurlyeq a \Longrightarrow a = b$

مجموعه‌ها



Year: Month: Date: Subject.

عمل ۲: روی جبر بول با سه خاصیت پادتقارنی، بازتابی و تعدی رابطه‌ی ترتیب می‌نامند. عبارات زیر یک جبر بولی مرتب است.

مثال: جدول ارزش‌های عبارت بولی زیر را بنویسید و همچنین ساده کنید.

$F = x + x'y + y'$

x	y	x'	$x'y$	y'	$x'y + y'$	$x + x'y$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1

$$x + x' \cdot y + y' = \overbrace{(x + x')}^{1} \cdot (x + y) + y'$$
$$= (x + y) + y'$$
$$= x + (y + y')$$
$$= x + 1 = 1$$

تمرین: جدول ارزشی عبارت بولی زیر را بنویسید و ساده کنید.

$F = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$

Year: Month: Date: Subject.

ترکیب: A و B دو مجموعه هستند. حاصل ضرب دکارتی آن برابر است با:

$$A \cdot B = \{(a,b) \mid a \in A , b \in B\}$$

تعداد اعضای A برابر است با: $|A| = n(A)$

مثال: اگر $A = \{a , b , c\}$ تعداد زیرمجموعه‌های آن را بنویسید.

تعداد اعضا: ۳ $\Longrightarrow$ $۲^۳$ حالت

ترکیب $P(A) = \{\{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\} , \{\}\}$

اصل ضرب: اگر مجموعه A، m عضو داشته باشد ($|A| = m$) و مجموعه B، n عضو داشته باشد ($|B| = n$) اصل ضرب برابر است با:

$$|A \times B| = |A| \times |B| = m \times n$$

مثال: دو سؤال چهارگزینه‌ای موجود است، تعداد راه‌هایی را که می‌توان به آن‌ها پاسخ داد را محاسبه کنید و تعداد زیرمجموعه‌های آن را رسم کنید.

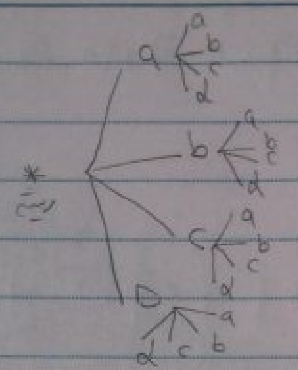
کهکی

Year: Month: Date: Subject.

$m=۴$

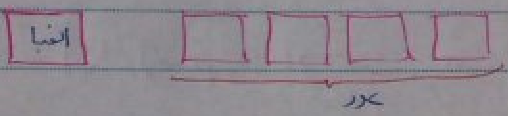
$n=۴$

$m \times n = ۱۶$



aa ab ac ad ba bb bc bd ca cb cc cd da db dc dd

مثال: الف) با ۳۲ حروف الفبا و ارقام ۱ تا ۹ می‌خواهیم ماشین‌ها را بدین صورت استفاده کنیم.



۳۲×۹×۹×۹×۹

ب) چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد که ارقام آن تکراری نباشد؟

۳۲×۹×۸×۷×۶

مثال: فرض کنید $A=\{a,b\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{3,4\}$ عبارت‌های زیر را بیابید.

$A\times(B\cup C) = A\times\{2,3,4\} = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,2),(b,3),(b,4)\}$

Year: Month: Date: Subject.

$(A\times B)\cup(A\times C)=\{(a,2),(a,3)\}\cup\{(a,3),(a,4),$

$(b,3),(b,4)\}=\{$

$A\times(B\cap C)=A\times\{3\}=\{(a,3),(b,3)\}$

$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}\cap$

$\{(a,3),(a,4),(b,3),(b,4)\}=\{(a,3),(b,3)\}$

تعریف افراز (تقسیم بندی): مجموعه ی n عبارت است از تقسیم جزییات n که

جدا از هم بوده و اجتماع آن‌ها معادل n می باشد.

مثال: مجموعه ی n را در نظر بگیرید.

$n=\{۱,۲,۳,...,۹\}$

$\times$ (i) $=\{(۱,۳),(۲,۵),(۶,۸),(۷,۹)\}$ $۴\notin i \Leftarrow$ افراز نمی باشد

مجموعه ی i افرازی از n نمی باشد - چون ۴ نداریم

$\checkmark$ (ii) $=\{(۱,۲,۳),(۶),(۴,۵),(۷,۸,۹)\}$ افراز می باشد

مجموعه ی ii افرازی از n می باشد.

Year: Month: Date: Subject.

مثال:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$A_1 = \{a, c, e\}$

$A_2 = \{b\}$

$A_3 = \{d, g\}$

آیا $\{A_1, A_2, A_3\}$ افرازی از Ω می‌باشد یا خیر؟

$f \in \Omega$ ولی $f \notin \{A_1, A_2, A_3\} \Longrightarrow$ افراز نمی‌باشد

مثال:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$B_1 = \{a, e, g\}$ $B_2 = \{b, c\}$

$B_3 = \{d\}$ $B_4 = \{f\}$

آیا $\{B_1, B_2, B_3\}$ افرازی از Ω می‌باشد یا خیر؟ بله

Year: Month: Date: Subject.

مثال: فرض کنید پلاک ماشین با دو حرف انگلیسی متمایز که تکراری نشده و سه عددی که برای
حرف های پلاک ماشین سه رقم در نظر گرفته شده با این شرط که رقم اول صفر
نباشد.

حرف	حرف	عدد	عدد	عدد

۲۶ × ۲۵ × ۹ × ۱۰ × ۱۰

اگر تکراری نباشد

۲۶ × ۲۵ × ۹ × ۹ × ۸

استقرای ریاضی: فرض کنید P(n) یک گزاره تعریف شده باشد، در مجموعه‌ی
اعداد طبیعی که در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف: P(1) درست باشد.

ب: اگر P(k) درست باشد (فرض) آنگاه P(k+1) نیز درست باشد (حکم)

در این صورت P(n) برای همه عدد طبیعی n درست است.

مثال: با استفاده از استقرا ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n رابطه‌ی زیر
صدق می‌کند.

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a,2),(a,3)\} \cup \{(a,3),(a,4),$

$(b,3),(b,4)\} = \{$

$A \times (B \cap C) = A \times \{3\} = \{(a,3),(b,3)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\} \cap$

$\{(a,3),(a,4),(b,3),(b,4)\} = \{(a,3),(b,3)\}$

تعریف افراز (تقسیم بندی): مجموعه‌ی n عبارت است از تقسیم جزئیات n که

مجزا از هم بوده و اجتماع آنها معادل n می باشد.

مثال: مجموعه‌ی n را افراز بگیرید.

$n = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$

$\times$ (i) $= \{(۱,۳),(۲,۵),(۴,۸),(۷,۹)\}$ $۴ \notin i \Rightarrow$ افراز نمی باشد

مجموعه‌ی i افرازی از n نمی باشد - چون ۴ نداریم

$\checkmark$ (ii) $= \{(۱,۲,۳),(۹),(۴,۵),(۷,۸,۹)\}$ افراز می باشد

مجموعه‌ی ii افرازی از n می باشد

Year: Month: Date: Subject.

$$1+\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)!$$

$P(1) = ?\quad 1+\sum_{i=1}^{1} i(i!) = (1+1)! \Rightarrow 1+1(1!) = ۲!$

$۲! = ۲! \Rightarrow ۲ = ۲$

فرض $P(k) = ?\quad P(k) = 1+\sum_{i=1}^{k} i(i!) = (k+1)!$

حکم $P(k+1) = ?\quad P(k+1) = 1+\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = (k+۲)!$

$$1+\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = \underbrace{1+\sum_{i=1}^{k} i(i!)}_{} + (k+1)(k+1)!$$

$(k+1)\quad (k+1)!$

$P(3) = 1+\sum_{i=1}^{3} i(i!) \overset{?}{=} 1+1(1!) +$

$1+2(2!) +$

$1+\sum_{i=1}^{2} i(i!) + \longrightarrow \boxed{1+3(3!)}$

$(k+1)! + (k+1)(k+1)! = \underset{\text{فاکتورگیری}}{(k+1)!}(1+k+1) =$

$(k+1)!(k+۲) = (k+۲)!$

مثلاً: $۴! \times ۵ = ۵!$

$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

Year: Month: Date: Subject.

مثال: با الگ استقرا ثابت کنید که برای هر n متعلق به اعداد طبیعی رابطه ی زیر برقرار باشد.

$$(2n)! = 2^n \times n! \, [1\times 3\times 5\times \dots \times (2n-1)]$$

$$P(1) = ? \quad (2\times 1)! = 2^1 \times 1! \, [1\times 3\times 5\times \cancel{\dots (2\times 1 - 1)}]^{[1]} =$$

$$2! = 2\times 1! \, [1] = 2! = 2 \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$$

فرض $P(k) = ? \quad (2k)! = 2^k \times k! \, [1\times 3\times 5\times \dots \times (2k-1)]$

حکم $P(k+1) = ? \quad 2(k+1)! = (2k+2)! = 2^{k+1} \times (k+1)!$

$$[1\times 3\times 5\times \dots \times (2k+1)]$$

$$2(k+1)-1 \longrightarrow 2k+2-1 \longrightarrow 2k+1$$

طرف دوم $= 2k \times k! \, [1\times 3\times 5\times \dots \times (2k-1)] (2(k+1))(2k+1)$

$$= (2k)! \times (2k+1)(2k+2) = (2k+2)!$$

$$\boxed{(k+1)! = (k+1)\times k!}$$

Year: Month: Date: Subject.

دنباله های بازگشتی: اگر دنباله ی عددی F_n را بتوان به صورت یک تابع از n تعریف کنیم، می گوییم دنباله ی F_n دارای یک تعریف بسته است.

مثال: تعریف عددهای صحیح مثبت به صورت دنباله ی زیر تعریف شده است.

$F_n = 2n + 1 \qquad n \geq 0$ دنباله ی فرم بسته

مثال: تعریف عددهای صحیح مثبت

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 + F_{n-1} & n \geq 0 \end{cases}$$

این یک تعریف بسته نیست بلکه یک تعریف بازگشتی است. در واقع هر جمله از جمله ی قبل از خود محاسبه می گردد.

برخی از دنباله ها تنها دارای یک تعریف بسته است و برخی دیگر دارای تعریف بازگشتی می باشند. البته دنباله هایی وجود دارند که هم تعریف بسته دارند و هم تعریف بازگشتی.

تعریف فاکتوریل به صورت فرم بازگشتی :

$$F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ nF_{n-1} & n>0 \end{cases}$$

این معادله را به فرم بسته تبدیل کنید.

$$n! = n(n-1)!$$

$$n! = n(n-2)(n-1)!$$

$$= n(n-3)(n-2)(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\times 3\times 2\times 1!$$

مثال: تصاعد حسابی به فرم دنباله‌ای بازگشتی به صورت زیر تعریف شده است.

$$F_n = \begin{cases} a & n=0 \\ F_{n-1}+d & n>0 \end{cases}$$

فرم بازگشتی

تصاعد حسابی برابر است با عدد قبلی + مقدار ثابت

$$F_0 = a$$

$$F_1 = F_0 + d \Rightarrow a+d$$

$$F_2 = F_1 + d \Rightarrow (a+d)+d \Rightarrow a+2d$$

$$F_3 = F_2 + d \Rightarrow (a+2d)+d \Rightarrow a+3d$$

$$\boxed{F_n = a+nd}$$

تصاعد هندسی: دنباله‌ی بازگشتی آن به صورت زیر تعریف شده به صورت فرم بسته آن را تبدیل کنید.

$$F_n = \begin{cases} a & n=0 \\ r(F_{n-1}) & n>0 \end{cases}$$

$F_0 = a$

$F_1 = ra$

$F_2 = r^2 a$

$F_3 = r^3 a$

$$\boxed{F_n = r^n a}$$

مثال: مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی به فرم بازگشتی زیر تعریف شده است. فرم بسته‌ی آن را محاسبه کنید.

$$s_n = \begin{cases} a & n=0 \\ s_{n-1} + (a+nd) & n>0 \end{cases}$$

$s_0 = a$

$s_1 = a + (a + 1d) = 2a + d$

$s_2 = (2a + d) + (a + 2d) = 3a + 3d$

$s_3 = 3a + 3d + (a + 3d) = 4a + 6d$

Year: Month: Date: Subject:

$$S_4 = 4a + 6d + (a + 4d) = 5a + 10d$$

$$S_5 = 5a + 10d + (a + 5d) = 6a + 15d$$

$$S_n = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} d$$

نمونه سوال های استقراء

عبارت های زیر را به روش استقراء ساده کنید.

$$1)\ 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$P(1):\ 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1 \quad ✓$$

فرض $P(k):\ 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad ✓$

حکم $P(k+1):\ 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left[\overset{k^2+4k+4}{k^2 + 4(k+1)}\right]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

کهکی

Year: Month: Date: Subject.

2) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ $\quad n\geq ۱$

$P(۱): ۱^۲=\frac{۱(۱+۱)(۲\times ۱+۱)}{۶}=\frac{۱(۲)(۳)}{۶}=\frac{۶}{۶}=۱$ ✓

فرض $P(k): ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$ ✓

حکم $P(k+۱): \underbrace{۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+k^۲}+(k+۱)^۲=$

$\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$ $=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)+۶(k+۱)^۲}{۶}=$

$\frac{(k+۱)[k(۲k+۱)+۶(k+۱)]}{۶}=\frac{(k+۱)[۲k^۲+\overbrace{k+۶k}^{۷k}+۶]}{۶}=$

$\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$

3) $۱^۲+۳^۲+۵^۲+\dots+(۲n-۱)^۲=\frac{n(۲n-۱)(۲n+۱)}{۳}$

$P(۱): ۱^۲=\frac{۱(۲\times ۱-۱)\overbrace{(۲\times ۱+۱)}^{۳}}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱$ ✓

۳۰

Year: Month: Date: Subject.

فرض $P(k): 1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$

حکم $P(k+1): \underbrace{1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2}+(2k+1)^2=$

$\frac{(k+1)(2k+1-1)+(2k+1+1)}{3}=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$

$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+\frac{3(2k+1)^2}{3}=\frac{(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]}{3}$

$=\frac{(2k+1)[2k^2-k+6k+3]}{3}=\frac{(2k+1)[2k^2+5k+3]}{3}$