آدرس کانال تلگرام ما :
@engclubs

آدرس سایت ما :
www.engclubs.net

دانلود جزوات رشته های مهندسی
درصد ها و منابع رتبه ها برتر کنکور ارشد
و ...

دانشکده فنی دانشگاه تهران

مجموعه مطالب کلاسی درس

دینامیک سازه‌ها

www.engclubs.net

دکتر خسرو برگی

عضو هیات علمی دانشکده فنی

دانشگاه تهران

توجه مهم

پیشگفتار

مجموعه پیوست در حقیقت کپی مطالب مورد بحث در کلاس دینامیک سازه ها می باشد که بصورت ترانسپران (کاغذ شفاف) بوده و برای صرفه جویی در وقت کلاس و افزایش راندمان آن در اختیار دانشجویان قرار می گیرد تا دانشجو با دقت بیشتر به مطالب توجه نماید و وقت وی صرف نوشتن مطالب از روی ترانسپرانها نشود.

بنابراین مجموعه این مطالب بصورت کلی و کلان بوده و همراه با مباحث شفاهی ایجاب در کلاس و توضیحات تکمیلی، کامل می باشد و به تنهایی دارای تمامی جزئیات نخواهد بود.

جهت کتب رفرنس (مرجع) و کتب تمرینات به کتابهای زیر مراجعه شود:

۱- دینامیک سازه ها چاپ ششم دانشگاه تهران تالیف خسروبرگی

۲- دینامیک سازه ها و شبیه سازی آلات چاپ اول دانشگاه تهران ترجمه خسروبرگی

* کتاب اول دارای تئوری دینامیک سازه ها و مثال های حل شده و حل نشده است و کتاب دوم نیز دارای مباحث دینامیک سازه ها (بسیاری از مباحث جدید و کاربردی) و همچنین تعداد زیادی مساله حل شده و تمرینات می باشد.

خسروبرگی

بسمه تعالی

دینامیک سازه ها - کارشناسی ارشد - ۳ واحد

کتاب مرجع : دینامیک سازه ها ، خسروبرگی - انتشارات دانشگاه تهران

اهم مطالب مورد بحث در طول سال

۱- ضرورت آموزش وارائه درس (امور تحصیلی - امور حرفه ای مهندسی وطراحی)

۲- یادآوری اصول دینامیک سازه ها (با توجه به درس اصول مهندسی زلزله در مقطع کارشناسی)

الف - خصوصیات (متغیر زمان - تفاوت تحلیل دینامیکی واستاتیکی - ارتعاش)

ب - درجه آزادی و روش های کاهش (جرم متمرکز - تغییر مکان تعمیم داده شده - اجزاء محدود)

ج - نیروهای مقاوم (الاستیک و میرایی - رفتار و مکانیزم هریک)

د - سختی و حالتهای مختلف برای سیستم های ساده و پیچیده

ه - روش های تعیین معادلات حاکم بر رفتار سازه (تعادل دینامیکی - دالامبر - کار مجازی - روش انرژی ...) در حالت سیستم های یک درجه آزادی

و - ارتعاش آزاد و حل معادله مربوط - حالتهای جرانی و زیرجرانی وفوق جرانی

ز - بررسی معادله حرکت وحل آن در بارگذاری هارمونیکی و نتایج آن - انتگرال دوهامل

۳- تحلیل سیستم های معادل یکدرجه آزادی در برابر بارگذاری ضربه ای و نتایج بحث

۴- روش های عددی تحلیل دینامیکی سازه ها برای سیستم های یک درجه آزادی

۵- رفتار غیرخطی سازه ها در حالت تحلیل دینامیکی برای سازه های یکدرجه آزادی

۶- روش رایله در تحلیل دینامیکی سازه ها وکاربرد آن در تعیین خصوصیات دینامیکی

۷- تعیین معادله حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی و بررسی ارتعاش آزاد آنها و سیستم های پیوسته

۸- تحلیل دینامیکی سازه های چند درجه آزادی به روش آنالیز مودال ونتایج حاصل

۹- روش تبدیل فوریه در تحلیل دینامیکی سازه ها وکاربرد نتایج آن

۱۰- روش های عددی تحلیل دینامیکی برای سازه های چند درجه آزادی و پایداری آنها - رفتار غیرخطی

فصل اوّل - ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

در رشته مهندسی عمران اکثر سازه ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدّت)، جهت و احتمالاً نقطه اثر آنها با زمان تغییر می کنند و البته نرخ تغییرات فوق به حدّی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی است در سازه بوجود می آید. $P(t)$

ابنیه مهم و بارگذاری دینامیکی وارد

انواع سدها - زلزله، هیدرودینامیک (پدیده اندرکنش سازه - خاک - آب)
ارتعاش تجهیزات و ماشین های نیروگاه

انواع پل ها - زلزله، ترافیک، ترمز، باد، ضربه، جریان رودخانه

سیلوها - ویبراتور (تخلیه سریع مواد ذخیره شده)، زلزله، حرکت تسمه ها

برج آب - زلزله، هیدرودینامیک، باد

اسکله و موج شکن - امواج دریا، زلزله، برخورد کشتی، جریانهای دریایی، باد

دکل و دودکش و برج ها خنک کننده - زلزله، باد

استحکامات و پناهگاهها - انفجار (دور - نزدیک - مجاور - برخورد مستقیم)، زلزله

تأسیسات هسته ای - انفجار هسته ای، زلزله، برخورد هواپیما

ورزشگاه ها - تشویق تماشاچیان، زلزله

لوله ها - زلزله، عبور سیال

برج های ساختمانی - زلزله، باد

تونل ها - عبور و ترافیک قطار، زلزله

هدف : تطبیق و سازگاری تحلیل با رفتار واقعی (دینامیکی)

روش برخورد در گذشته : به دلیل پیچیدگی و سختی ← حالت معادل استاتیکی

تغییر و تحول اخیر : پیشرفت چشمگیر در فن آوری سخت افزاری و نرم افزاری
(کامپیوترها)

روش امروزی : بکارگیری روش های تحلیل دینامیکی در حد امکانات

اصلاح آئین نامه های طراحی مطابق با نتایج حاصل

تغییرات آتی : در نظر گرفتن حالتهای واقعی بارگذاری (اتفاقی و تصادفی)
حالت های تحلیل تصادفی (تحلیل ریسک و قابلیت اعتماد)
بارگذاری منفرد و معین ← طیف بارگذاری

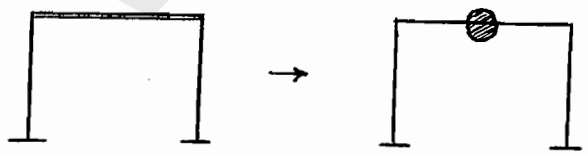
فصل دوم - یادآوری اصول دینامیک سازه ها

- قانون حاکم : اصل دوم نیوتن $\Sigma \vec{F} = m\vec{\ddot{u}}$

u : تغییر مکان $\dot{u}$: سرعت $\ddot{u}$: شتاب

- درجه آزادی و روش های کاهش آن متناسب با امکانات در دسترس

الف - روش تمرکز جرم Lumped-mass Procedure

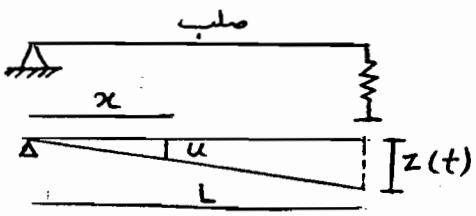


ب - روش تغییر مکان ها تعمیم داده شده Generalized Displacement

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\ \phi_i(x)$$

$a_i(t)$ تابع زمانی

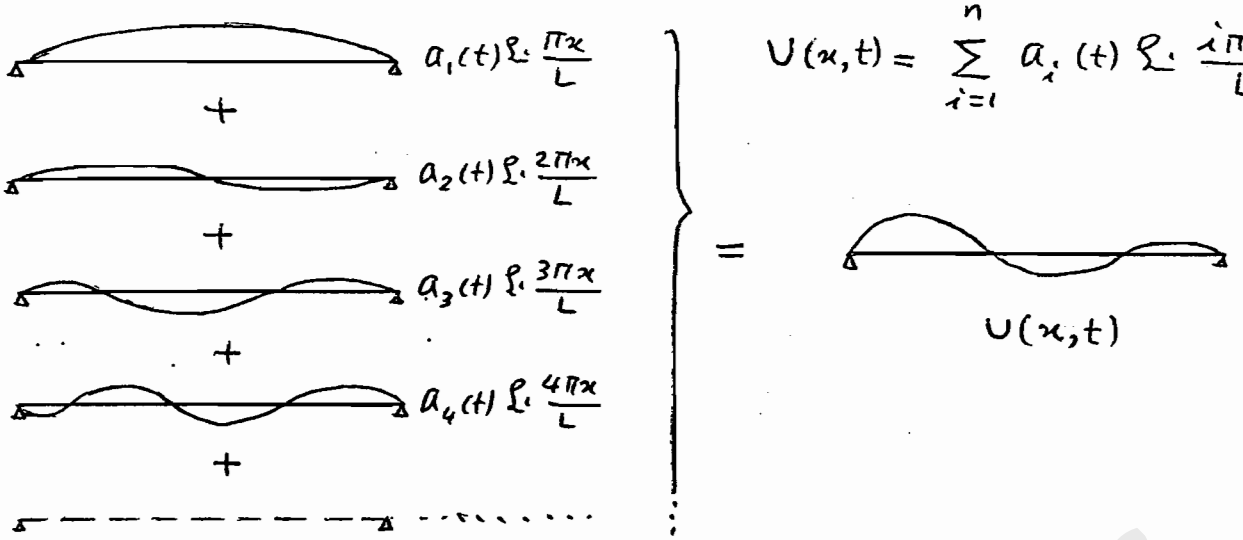
$\phi_i(x)$ تابع مکانی (شرایط حدی و سازگاری)



$u(x,t) = \frac{x}{L} \cdot z(t)$ ← تشابه مثلث

فرض : تیر صلب ← $n=1$

www.tnar.ir



ج - روش اجزاء محدود Finite Element concept

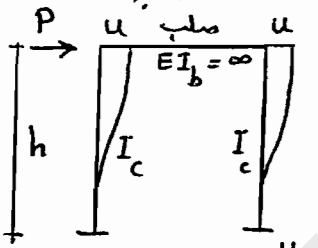
- مبانی خاص خود در تمرکز خواص رفتاری سازه در تعداد محدود گره (درجه آزادی)

د - روش اجزاء مرزی

- تمرکز خواص رفتاری محیط مورد نظر در نقاطی در مرز با محیط (سازه) دیگر

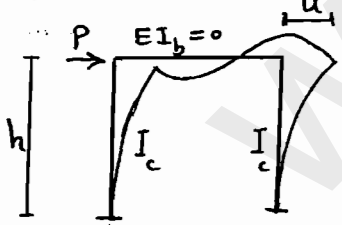
- پیرو های مؤثر در رفتار دینامیکی

الف - پیروی سختی (فنر، ارتجاعی، الاستیک ...) f_s بعنوان پیروی مقاوم در برابر حرکت

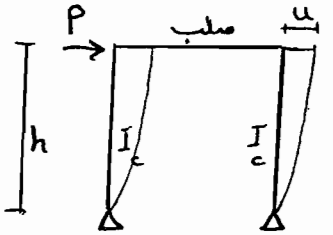


از تحلیل سازه‌ها $\rightarrow P=\frac{24EI_cu}{h^3} \rightarrow u=1 \rightarrow P=K=\frac{24EI_c}{h^3}$

$P=f_s=Ku$

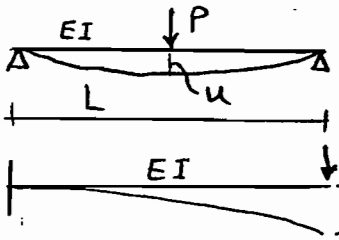


$$K=\sum_{\text{تعداد ستون}}\frac{3EI_c}{h^3}=\frac{6EI_c}{h^3}$$



حالت خطی (رفتاری) مدنظر است.

$$K=\sum\frac{3EI_c}{h^3}=\frac{6EI_c}{h^3}$$



$P=\frac{48EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K=\frac{48EI}{L^3}$

$P=\frac{3EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K=\frac{3EI}{L^3}$

www.ttnar.ir

* در تعیین سختی ، جهت و نقطه مورد نظر باید معلوم باشد (درجه آزادی)
* در حالت چند درجه آزادی ← ماتریس سختی با عناصر K_{ij}

K_{ij} یعنی در درجه آزادی j وقتی تغییر مکان یا جابجایی واحد در درجه آزادی j اعمال می‌شود و سایر درجات آزادی گرفته می‌شوند،

در تعیین سختی : مدل سازی و تعیین درجات آزادی خیلی مهم است،

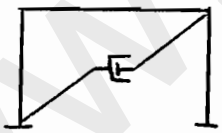
ب - نیروی میرایی (استهلاک) f_D یعنی نیروی متقاوم در برابر حرکت

این نیرو از مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی در حرکت (ارتعاش) ناشی می‌شود،
اصطکاک در اتصالات ، ترک ها ، مصالح و .....
مکانیزم های پیچیده و نامعلوم ← روش مناسب لحاظ کردن در معادلات
رفتاری آنه است که معادل میرایی لزجی فرض شوند،

حالت خطی مدنظر است.

Viscous damper $\rightarrow$ $f_D = c\dot{u}$

پدیده میرایی به ابعاد و هندسه سازه ارتباطی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصالات وابسته است ،
تبدیل مکانیزم های واقعی اتلاف انرژی به مکانیزم لزجی از طریق آزمایش روی مدل



مدل damper
(کمک فنر)

ضریب میرایی c یا درصد میرایی در عمل بصورت تجربی تعیین می‌شود

ج - نیروی اینرسی (لختی) f_I از قانون دوم نیوتن بدست می‌آید

$$\Sigma \vec{F} = m\ddot{\vec{u}} \rightarrow \Sigma \vec{F} - m\ddot{\vec{u}} = 0$$

علامت منفی : متقاوم در برابر حرکت

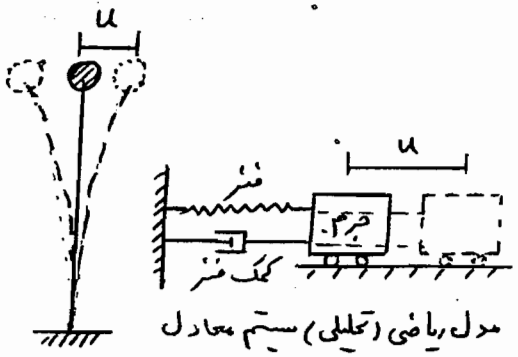
$$f_I = m\ddot{u}$$

چون از قانون ناشی می‌شود ، ارائه مدل فیزیکی بی معنی است

---

www.tfnar.ir

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش



مدل ریاضی (تحلیلی) سیستم معادل
جرم - فنر - کمک فنر

در سیستم مرتعش ارتجاعی، وقتی جرم به اندازه u جابجا شود، کشش آمدگی ارتجاعی ستون (کشیدگی فنر) بکار می آید تا جرم به موقعیت اولیه برگردد، این نیرو در ستون یا فنر که تابع تغییرمکان u می باشد، بنام نیروی فنر (سختی) موسوم است (f_s). البته اگر u کوچک باشد، این نیرو تابع خطی u است. جرم مورد نظر با یک سرعت مشخص به موقعیت اولیه برگشته و به سمت دیگر پرت خواهد شد و بنابراین مرتعش می شود.

چنانچه سیستم ارتجاعی باشد و اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، جرم برای همیشه مرتعش خواهد بود، ولی در عمل، اصطکاک با هوا، اصطکاک بین ذرات سیستم یا در اتصالات، تسلیم مصالح و بوجود آمدن ترک ها و اصطکاک بین آنها و غیره، باعث اتلاف انرژی ارتعاش شده، به طریکه طی زمان، ارتعاش مستهلک شده و از بین می رود. نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می شوند بنام نیروهای میرایی (استهلاک) Damping موسوم هستند.

اگر نیروی میرایی متناسب با سرعت حرکت جرم باشد، به آن میرایی لزجی گفته می شود، اگرچه در عمل، میرایی بطور خالص لزجی نمی باشد ولی فرض می گردد که چنین باشد که این امر به دلیل سهولت حل معادلات حرکت می باشد. معمولاً برای میرایی غیر لزجی می توان میرایی لزجی معادل آنرا که دارای تأثیر مشابه در حرکت باشد، بدست آورد که این امر کاملاً تجربی است.

همانطوریکه قبلاً گفته شد، میرایی یک سازه بستگی به مصالح آن، ماهیت اتصالات، کیفیت ساخت، نوع پی و ... دارد. نیروی میرایی لزجی معادل $f_D = C\dot{u}$

انتخاب میرایی در یک سیستم، معمولاً دلخواه است بویژه به این دلیل که میرایی با کرنش مصالح و طبیعت و جزئیات ساخت، متغیر است.

میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها بصورت درصد میرایی بکار می رود: $\xi = \frac{C_{موجود}}{C_{cr}}$

حدود درصد میرایی برای مصالح مختلف به شرح زیر است:

بتن	5 - 10٪	افزایش با کرنش
فولاد	2 - 5٪	" "
بنائی	4 - 10٪	" "
خاک	10 - 30٪	" "

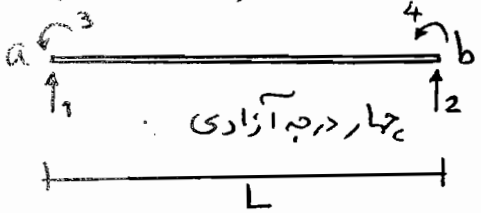
به دلیل تفاوت زیاد 2-10٪ چوب تغییرات در کیفیت چوب، مقادیر نامطمئن است.

www.tfnar.ir

محاسبه سختی یک تاب خمشی

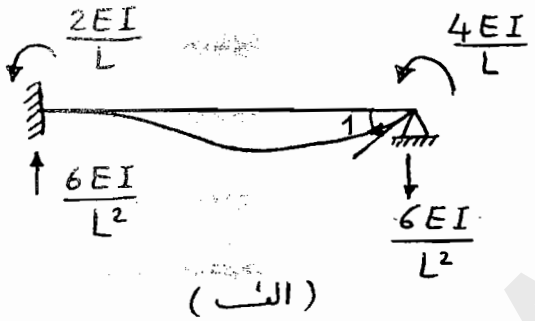
یادآوری : برای محاسبه لنگر و برش در یک المان سازه‌ای (تیر یا ستون) ، ضرایب سختی برای المان مورد نیاز است . موضوع برای یک المان همگن بطول L و ممان اینرسی I و مدول ارتجاعی E ، بطور شماتیک ارائه می شود .

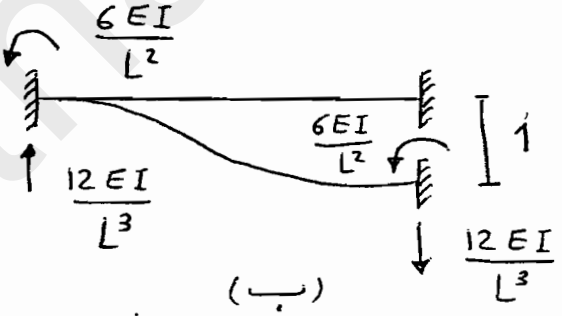
ضرایب سختی برای چرخش گره در شکل الف و برای انتقال گره در شکل ب نشان داده شده است .



به جهت ها و شماره گذاری توجه شود .

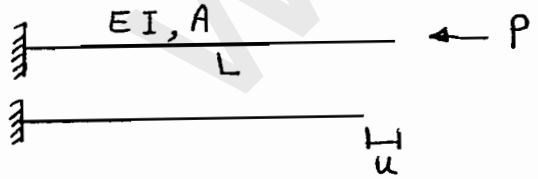
K_{ij} (ضرایب سختی) طبق تعریف : نیروی در i وقتی تغییرمکان واحد در j داده می شود .





برای محاسبه ضرایب سختی ، در درجه آزادی مربوط تغییرمکان یا چرخش واحد اعمال می شود در حالی که سایر درجات آزادی مقید و گرفته می شوند .

درجه آزادی محوری به دلیل صلبیت زیاد درنظر گرفته نشده است .



$$\sigma = E\varepsilon$$

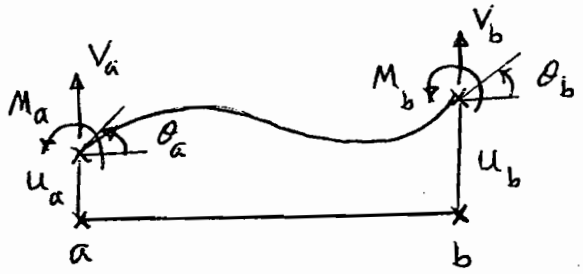
$$\frac{P}{A} = E\,\frac{u}{L} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{EAu}{L}$$

→ تعریف ضریب سختی

$$u = 1 \longrightarrow P \to K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{EA}{L}$$ عدد بزرگ

بنابراین برای المان تیر و با توجه به چهار درجه آزادی نشان داده شده مربوط به تغییرمکان های u_a ، u_b و چرخش های θ_a و θ_b ، لنگر خمشی و نیروی برشی در گره ها برابر خواهد بود با :

www.ttnar.ir



تغییر شکل کلی میله خمشی

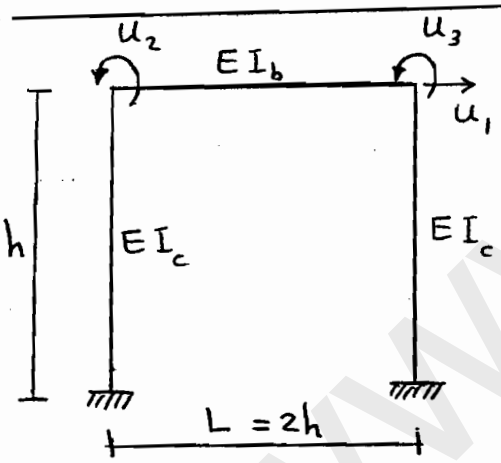
$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

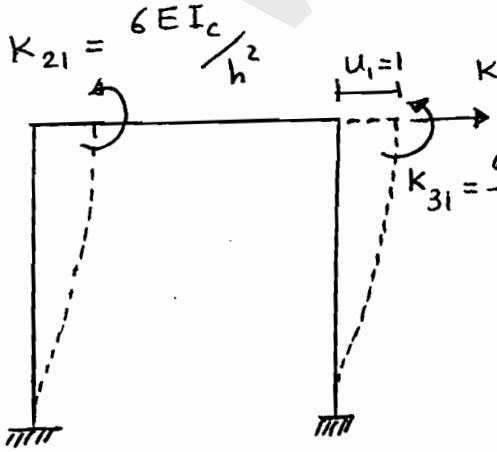
$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

مثال - مطلوبست محاسبه سختی جانبی تاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر؟



از روش های مختلف تحلیل سازه از جمله بخش لنگر و غیره می توان مسأله را حل نمود. در اینجا از تعریف ضرایب تأثیر سختی استفاده می شود.

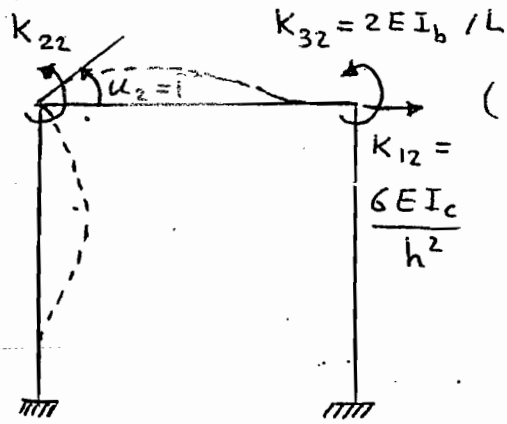
سه درجه آزادی داریم ← ماتریس سختی 3×3 خواهد بود.



برای بدست آوردن ضرایب ستون اول ماتریس، در تغییر مکان u_1، تغییر مکان واحد اعمال می شود در حالی که سایر تغییر مکانهای درجات آزادی گرفته می شوند یعنی: $u_1 = 1$ و $u_2 = u_3 = 0$

نیروهای K_{i1} (ضرایب سختی) و تغییر شکل مربوط در شکل روبرو نمایش داده شده است (از تحلیل سازه ای یادآوری):

www.tmar.ir



برای تعیین ضرایب ستون دوم ماتریس سختی (K_{i2}) خواهیم داشت : $u_1 = u_3 = 0$ ، $u_2 = 1$

$$K_{22} = \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{L}$$

برای ضرایب K_{i3} (ستون سوم ماتریس) مشابه حالت دو عمل می شود : $u_1 = u_2 = 0$ ، $u_3 = 1$

اگر در حالت خاص $I_b = I_c$ و $L = 2h$ باشد ، ماتریس سختی بصورت زیر خواهد بود :

$$[K] = \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

اگر تاب تحت اثر نیروی جانبی (مثلاً f_s) قرار داشته باشد ، معادله حاکم برای تغییر شکل تاب بصورت زیر خواهد بود ($[K]\{u\} = \{f_s\}$) :

$$\frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از معادلات ردیف ۲و۳ خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6h \\ 6h \end{Bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_1$$

رابطه اخیر در معادله حاکم رفتاری قرار گیرد ، خواهیم داشت :

$$f_s = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3} \frac{6}{7h} \langle 6h \quad 6h \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) u_1$$

$$f_s = \frac{96}{7} \left(\frac{EI_c}{h^3} \right) u_1$$

$u_1 = 1 \rightarrow f_s \rightarrow K \Rightarrow$ سختی جانبی تاب

$$\boxed{K = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3}}$$

این روش که همراه با حذف چرخش های گره هاست ، به عنوان روش حذف استاتیکی معروف است ،

www.tnar.ir

- با توجه به مباحث پایه‌ای مطرح در حالت سازه‌های معادل یک درجه آزادی مطالب بعدی در این حالت خواهد بود.

SDOF

Single - Degree - of - Freedom Systems

- نوشتن معادلات رفتاری (معادله حرکت)

الف - کاربرد مستقیم اصل دوم نیوتن

$\Sigma F = m\ddot{u}$

$P(t) - f_s - f_D = m\ddot{u}$

$m\ddot{u} + f_D + f_s = P(t)$

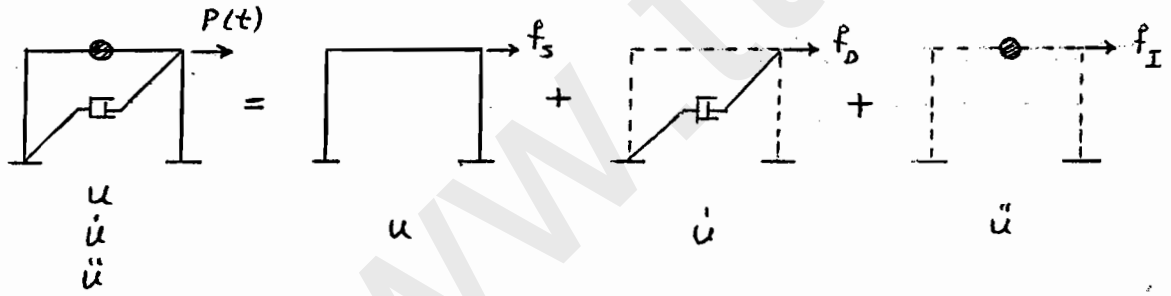
$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P(t)$

ب - تعادل دینامیکی (اصل دالامبر) (D'Alembert's Principle)

مشابه حالت اول با بیان متفاوت: نیروی $m\ddot{u}$ از ابتدا نیروی مقاوم است.

ج - ترکیب مولفه های نیروهای سختی، میرایی و جرم

در حالت رفتار خطی و در اصول مشابه حالتهای الف و ب

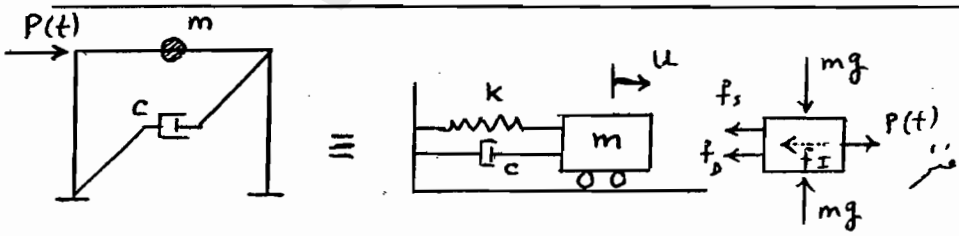


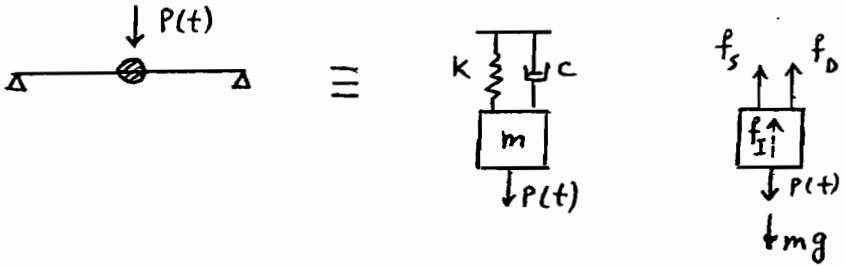
د - روش کار مجازی: تصور تغییر مکان کاذب و صفر بودن کار انجام شده

هـ - اصل انرژی: اصل بقای انرژی (جنبشی و پتانسیل)

مدل سازی رفتاری

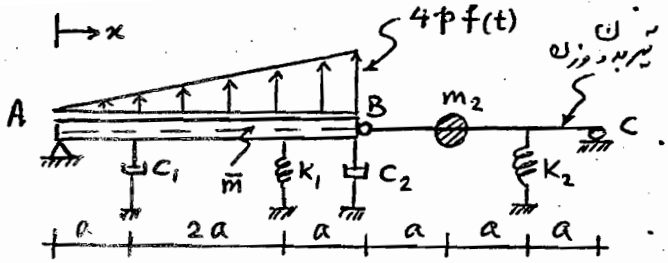
سیستم جرم - فنر - کمک فنر





www.tnari.ir

* مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم داده شده در روبرو ؟

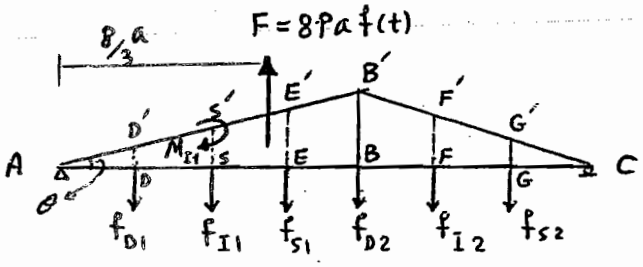


حل :

از روش متعارف تعادل استفاده می کنیم :

ارتعاش در دامنه ی کوچک است (رفتار خطی) .

سیستم را در یک لحظه (مثلاً t) در حالت تغییر شکل نشان می دهیم (به همراه نیروی مؤثر) :



سیستم معادل یک درجه آزادی ← نقطه شاخص

یا درجه آزادی شاخص را $Z(t) = BB'$ انتخاب می کنیم .

$$DD' = \frac{Z}{4} \quad , \quad EE' = \frac{3}{4}Z \quad , \quad FF' = \frac{2}{3}Z \quad , \quad GG' = \frac{1}{3}Z \quad , \quad SS' = \frac{Z}{2}$$

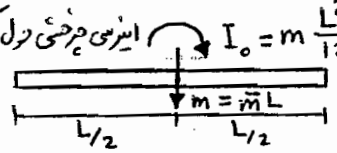
تعیین نیروی مؤثر :

$$f_{D1} = C_1(DD') = C_1\frac{1}{4}\dot{Z}(t) \quad , \quad f_{S1} = K_1(EE') = K_1\frac{3}{4}Z(t) \quad , \quad f_{S2} = K_2(GG') = K_2\frac{1}{3}Z(t)$$

$$f_{D2} = C_2\dot{Z}(t) \quad , \quad f_{I1} = m_1(SS') = m_1\frac{\ddot{Z}(t)}{2} = \bar{m}\,2a\,\ddot{Z}(t) \quad \leftarrow AB \text{ اینرسی انتقالی المانِ}$$

$$f_{I2} = m_2(FF'') = m_2\frac{2}{3}\ddot{Z}(t)$$

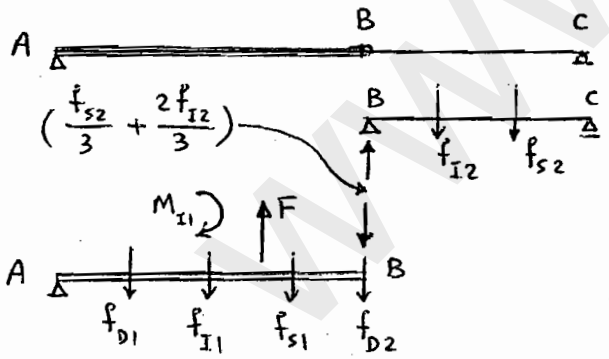
اینرسی چرخشی حول مرکز $I_o = m\frac{L^2}{12}$



المانِ تیری شکل

$$\begin{cases} M_{I1} = I_o\ddot{\theta} = \left[4a\bar{m}\times\frac{(4a)^2}{12}\right]\frac{\ddot{Z}(t)}{4a} = \frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{Z}(t) \\ \theta = \frac{BB'}{4a} = \frac{Z}{4a} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \end{cases}$$

دسترسی به معادله حرکت از روش تعادل ← $\sum M_{/A} = 0$



$$\sum M_{/A} = 0$$

$$\underbrace{f_{I1}\times 2a + M_{I1} + \frac{2f_{I2}}{3}\times 4a}_{\text{اینرسی جرمی}} + \underbrace{f_{D1}\times a + f_{D2}\times 4a}_{\text{میرایی}} + \underbrace{f_{S1}\times 3a + \frac{f_{S2}}{3}\times 4a}_{\text{سختی}} = \underbrace{8pa\,f(t)\times\frac{2}{3}a}_{\text{نیروی خارجی تحمیلی}}$$

پس از جاگذاری عبارت ها و ساده کردن روابط در نهایت خواهیم داشت :

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2\right)}_{\text{جرم مؤثر}}\ddot{Z}(t) + \underbrace{\left(\frac{C_1}{16} + C_2\right)}_{\text{میرایی مؤثر}}\dot{Z}(t) + \underbrace{\left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9}\right)}_{\text{سختی مؤثر}}Z(t) = \underbrace{\frac{16}{3}pa\,f(t)}_{\text{نیروی مؤثر}}$$

$$m^*\ddot{Z}(t) + C^*\dot{Z}(t) + K^*Z(t) = P^*(t)$$

معادله سیستم معادل یکدرجه آزادی

با جرم مؤثر ، میرایی مؤثر ، سختی مؤثر و نیروی مؤثر

www.tfnar.ir

توجه : با توجه به ارائه درس مهندسی زلزله در نیمسال بعدی ، حالتهای حرکت زمین بعنوان عامل ارتعاش در سازه ها در مدل سازی و تحلیل ها در درس دینامیک سازه ها ارائه نمی شود .

- روش های حل معادلات حرکت

الف - روش کلاسیک و متعارف (مستقیم) Classical Solution رفتار خطی

حل معادله دیفرانسیل - حل عمومی و جواب خصوصی با اعمال شرایط اولیه

ب - روش انتگرال دوهامل Duhamel's Integral رفتار خطی

ج - روش های تبدیل Transform Methods رفتار خطی

تبدیل لاپلاس و فوریه ← تحلیل در میدان فرکانس

* مناسب برای تحلیل های اندرکنش محیط های غیر یکپارچه

* روش عددی قوی و سریع FFT

د - روش های عددی Numerical Methods رفتار خطی و غیرخطی

الگوریتم های مختلف و پایداری روش

- پاسخ ، واکنش سازه Response

از حل معادله حرکت ← $u(t)$ بدست می آید

مفهوم پاسخ شامل همه نوع مجهول محاسباتی و طراحی می تواند باشد

تغییر مکان ، سرعت ، شتاب ، تنش ، نیرو ، ...

معمولاً در طراحی u_{max} و پاسخ های حداکثر بکار گرفته می شوند ،

- نیروهای اجزاء Element Forces

از حل معادله حرکت (دینامیکی) ← $u(t)$ حاصل می شود و برای تیر و ستونها می توان لنگر خمشی و نیروی برشی حاصل شود .

$$f_s(t) = K\,u(t)$$

توجه : برای طراحی ، از تنش های مجازی استفاده می شود که از آزمایش استاتیکی مصالح بدست می آید و کافی است از f_s برای ارزیابی نیروها استفاده شود .

www.ttnar.ir

برای بدست آوردن پاسخ کامل باید از جواب دینامیکی و استاتیکی (ترکیب) استفاده شود. تغییر مکان تحت اثر وزن باید ملحوظ شود.

$$u^t(t) = u_p(t) + u_s$$

دستگاه واحد (مقیاس)

رابطه اساسی $f = ma$

شتاب × جرم = نیرو

دستگاه SI →

- واحد نیرو = N نیوتن
- شتاب = m/s^2 متر بر ثانیه توان ۲
- جرم = kg کیلوجرم kg mass
  $= N.S^2/m$

دستگاه MKS →

- واحد نیرو = kgf
- شتاب = m/s^2
- جرم = $kgf.S^2/m$

$$1\ kgf = 9.81\ N$$

شتاب ثقل $g = 9.81\ m/s^2 = 981\ cm/s^2$

$= 386\ in/s^2 = 32.2\ ft/s^2$

$1\ kip = 1000\ lbf = 453.4\ kgf = 4448.2\ N$

$1\ PSi = 6894.8\ N/m^2 = 0.7\ t/m^2$

$1\ kip/in = 175126\ N/m$

$1\ in = 2.54\ cm$

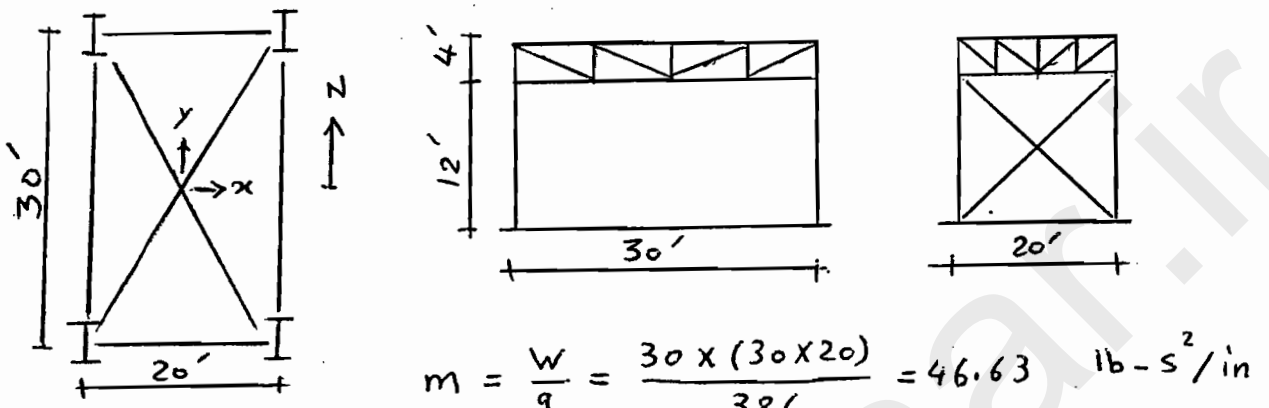
برای بکارگیری جرم (m)، مناسب است در فرمول ها از $m = \frac{W}{g}$ استفاده شود (W وزنه).

* وزنه مانند نیرو است.

www.tmar.ir

مثال - یک ساختمان صنعتی یک طبقه $20' \times 30'$ - در جهت شمال جنوب تاب خمشی و در جهت شرقی - غربی بصورت مهاربندی شده است. وزن در سقف $30\ lb/ft^2$ و مهارهای افقی در سقف زیر فرپای سقف است. مهاربندی ها قائم میلگرد به قطر 1" ، $E = 29000\ ksi$ ، مطلوبست تعیین معادله حرکت در جهات شمال جنوب - غرب شرق

$$\begin{cases} I_x = 82.8\ in^4 \\ I_y = 18.3\ in^4 \end{cases}$$



$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times (30 \times 20)}{386} = 46.63\ lb\text{-}s^2/in$$

* با توجه به ضربدری های افقی سقف می توان عملکرد سقف را بصورت دیافراگم فرض نمود،

الف - جهت شمال - جنوب : سختی جانبی دو قاب خمشی عبارت است از

$$K_{N-S} = 4\left(\frac{12 E I_x}{h^3}\right) = 4\,\frac{12(29 \times 10^3)(82.8)}{(12 \times 12)^3} = 38.58\ kips/in$$

معادله حرکت N-S : $\underline{m\ddot{u} + K_{N-S}\,u = 0}$

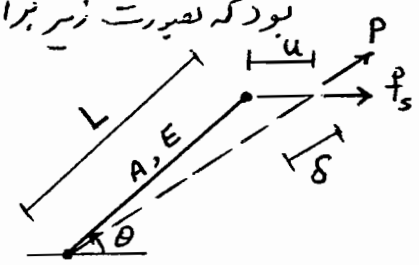
ب - جهت شرقی - غربی : معمولاً وقتی از مهار استفاده می شود، فرض می گردد که قاب ها صلب بوده و برای انتقال نیروی قائم (بار مرده و زنده) هستند و بار جانبی توسط مهارها تحمل می شود (با انتقال مفصلی)، بنابراین سختی جانبی جمع سختی هریک از مهارها خواهد بود که بصورت زیر بدست آورده می شود:

$$P = \frac{AE}{L}\delta \quad (1)$$

$$f_s = P\cos\theta\ ,\ u = \delta/\cos\theta$$

$$P = f_s/\cos\theta\ ,\ \delta = u\cos\theta \xrightarrow{\text{در معادله (1)}}$$

$$\begin{cases} A = 0.785\ in^2 \\ L = 23.3\ ft \end{cases}$$



$$f_s = K_{مهار}\,u \rightarrow K_{مهار} = \frac{AE}{L}\cos^2\theta \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{12^2+20^2}} = 0.8575$$

$$K_{مهار} = \frac{0.785(29 \times 10^3)}{23.3 \times 12}(0.8575)^2 = 59.8\ kips/in$$

www.itnar.ir

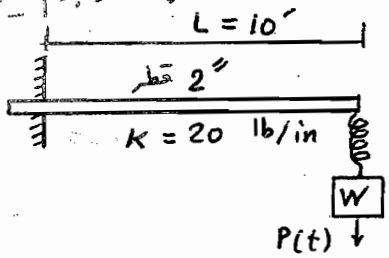
هرتاب دارای دو مهار است ولی یکی در کشش است که مقاومت جانبی را ایجاد می نماید و دیگری در فشار کار می کند که فرض می شود به کمانش برسد (در اثر لرزه محدود) و بسیار کم در مقاومت جانبی مشارکت می نماید. چون دو تاب مهار بود پس:

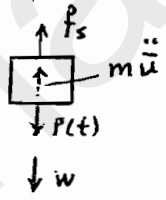
$$K_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \quad kips/in$$

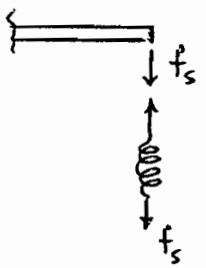
معادله حرکت : $\underline{m\ddot{u} + K_{E-W}\, u = 0}$

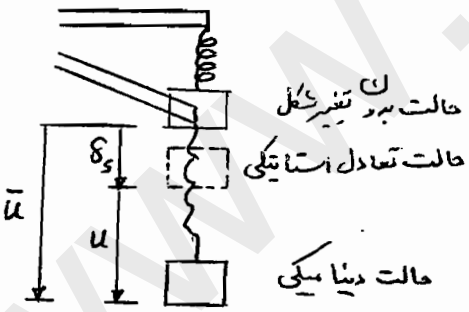
توجه: سختی یک ستون در جهت شرق-غرب $K_{ستون} = \frac{12 E I_y}{h^3} = 2.13 \ kips/in$ است که بهرحال از نظر نسبی قابل توجه نمی باشد (پس صرفنظر شد).

مثال - با توجه به سیستم زیر که وزنه W توسط میله ای از انتهای یک تیر طره آویزان است، معادله حرکت وزنه W را بنویسید. تیر فلزی است ($E = 29000$ ksi) و از جرم تیر و میله صرفنظر می شود.









$$m\ddot{\bar{u}} + f_s = W + P(t)$$

$$f_s = K_e\, \bar{u}$$

$$m\ddot{\bar{u}} + K_e \bar{u} = W + P(t)$$

$$\bar{u} = \delta_s + u$$

$$\ddot{\bar{u}} = 0 + \ddot{u}$$

δ_s تغییر مکان در اثر W (استاتیکی)

u " " " $P(t)$ (دینامیکی)

$$K_e\, \delta_s = W \quad \rightarrow \quad \underline{m\ddot{u} + K_e u = P(t)}$$

معادله حرکت K_e باید محاسبه شود.

ملاحظه می شود وقتی معادله برحسب تغییر مکان دینامیکی u است، وزنه در معادله اثر ندارد. معمولاً معادله حرکت از حالت استاتیکی به بعد نوشته و حل می شود پس اثر حالت استاتیکی ملحوظ می شود (اگر رفتار خطی باشد).

www.ttnar.ir

محاسبه سختی مؤثر

$$f_s = k_e \bar{u} \quad (1)$$

$$\bar{u} = \delta_{\text{فنر}} + \delta_{\text{تیر}} \quad (2)$$

δ تیر عبارت از تغییرشکل انتهای تیر طره است

δ فنر " " " " " فنر است.

با توجه به شکل کوچک صفحه قبل: (3)

$$f_s = k\delta_{\text{فنر}} = k_{\text{تیر}}\delta_{\text{تیر}}$$

در معادله (2) بجای $\bar{u}$ از (1) و بجای δ ها از (3) قرار دهید:

$$\frac{f_s}{k_e} = \frac{f_s}{k} + \frac{f_s}{k_{\text{تیر}}} \quad \text{یا} \quad k_e = \frac{k\,k_{\text{تیر}}}{k + k_{\text{تیر}}}$$

$k = 20$ lb/in ←, $k_{\text{تیر}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29\times10^6)[\pi(1)^4/4]}{(10\times12)^3} =$

39.54 lb/in

$$\Rightarrow \underline{k_e = 13.28 \text{ lb/in}}$$

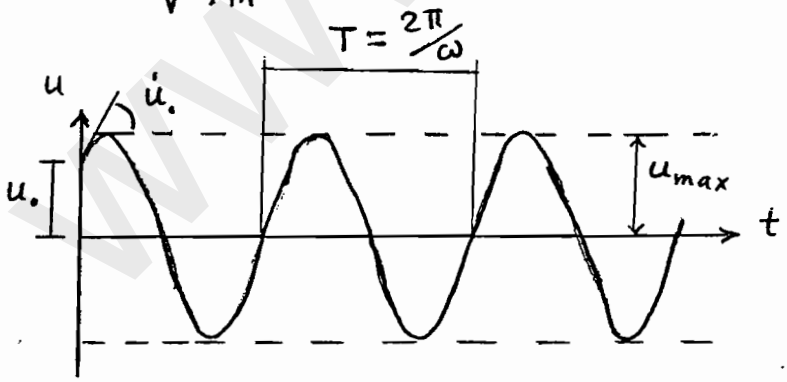
ارتعاش آزاد SDoF

الف - بدون میرایی

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

شرایط اولیه u_0 , $\dot{u}_0$ → $u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

پریود، فرکانس و فرکانس زاویه‌ای طبیعی سیستم

$$\delta_s = W/k = mg/k \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{g/\delta_s}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s}, \quad T = 2\pi\sqrt{\delta_s/g}$$

دامنه حرکت $u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$

www.itnar.ir

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$f_I + f_s = 0$

$m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$

فرض: شرایط اولیه $\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{cases}$

$m \neq 0 \,,\ k \neq 0 \leftarrow k/m = \omega^2$ ← فعلاً ω مفهوم فیزیکی ندارد.

① $\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \longrightarrow$ برای حل $\rightarrow$ پاسخ فرضی $u(t) = \bar{c}\, e^{st}$

$\dot{u} = \bar{c}\, s\, e^{st} \rightarrow \ddot{u} = \bar{c}\, s^2 e^{st} \Rightarrow$ در معادله ① $\bar{c}\, e^{st}(s^2 + \omega^2) = 0$

$s^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\omega \quad (i = \sqrt{-1}) \leftarrow \bar{c}\, e^{st} \neq 0$

$\Rightarrow$ پاسخ معادله $u(t) = \bar{c}_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega t}$ ②

ترجیح می دهم، رابطه از حالت تابع اکسپوانسیل به حالت هارمونیک نوشته شود.

از رابطه مُلتانی اولر استفاده می کنم: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$

$\Rightarrow$ ② $\rightarrow u(t) = \bar{c}_1 \cos\omega t + i\bar{c}_1 \sin\omega t + \bar{c}_2 \cos\omega t - i\bar{c}_2 \sin\omega t$

$u(t) = \underbrace{(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)}_{A} \cos\omega t + \underbrace{(i\bar{c}_1 - i\bar{c}_2)}_{B} \sin\omega t$

$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

برای تعیین ضرایب ثابت A و B از شرایط اولیه استفاده می کنم:

$u(t=0) = u_0 = A \times 1 + B \times 0 \rightarrow A = u_0$

$\dot{u}(t) = -A\omega \sin\omega t + B\omega \cos\omega t$

$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -A\omega \times 0 + B\omega \times 1 \rightarrow B = \dot{u}_0/\omega$

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t}$$

به کمک روابط مُلتانی $u(t) = \rho \sin(\omega t + \alpha)$

$$\begin{cases} \rho = u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \\ \alpha = \text{Arc tg}\ \frac{\omega u_0}{\dot{u}_0} \end{cases}$$

پاسخ نهایت تابع هارمونیکی است با دامنه ρ (u_{max}) و سیکل تناوب با فاصله زمانی T (پریود تابع). فاصله زمانی T عبارت است از مدتی که آرگومان تابع یعنی $(\omega t + \alpha)$ با مقدار 2π افزایش می یابد:

$(\omega t + \alpha) + 2\pi = \omega(t + T) + \alpha \Rightarrow T = 2\pi/\omega$

f فرکانس: تعداد سیکل در یک ثانیه

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$

پس ω تعداد سیکل تناوب در 2π ثانیه که به فرکانس زاویه ای موسوم است.

www.tnar.ir

مثال - در ساختمان صنعتی مثال های قبل مطلوبست برآورد ω ، T ، f در دو جهت؟

$$\omega_{N-S} = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{38.58}{0.04663}} = 28.73 \quad Rad/sec$$

$$T_{N-S} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28.73} = 0.219 \quad sec$$

$$f_{N-S} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.219} = 4.57 \quad Hz$$

$$\omega_{E-W} = \sqrt{\frac{119.6}{0.04663}} = 50.64 \quad Rad/sec$$

$$T_{E-W} = \frac{2\pi}{50.64} = 0.124 \quad sec \quad , \quad f_{E-W} = \frac{1}{0.124} = 8.06 \quad Hz$$

$$\omega_{N-S} < \omega_{E-W}$$

مثال - در مثال های قبل (طره با وزنه در انتها) ، مطلوبست تعیین f و T

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s} \quad , \quad \delta_s = \frac{W}{K_e} = \frac{20}{13.28} = 1.494 \quad in$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56 \quad Hz \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 0.391 \quad sec$$

ارتعاش آزاد SDoF

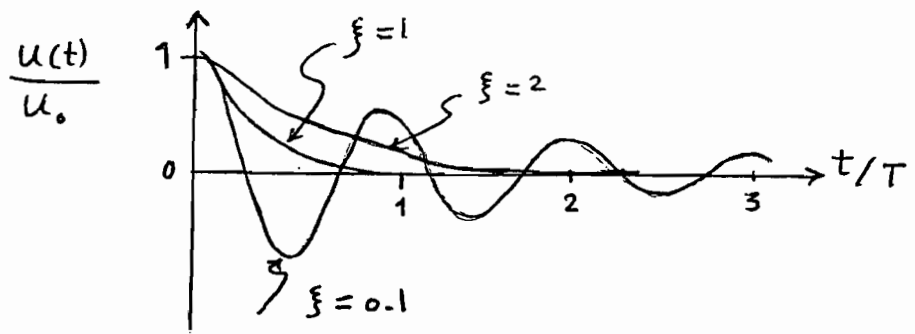
ب - حالت با میرایی

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\begin{cases} K/m = \omega^2 \\ C_{cr} = 2m\omega \quad \text{میرایی بحرانی} \\ \xi = \dfrac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr}} \quad \text{درصد میرایی بحرانی} \end{cases} \Rightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\begin{cases} C = C_{cr} \rightarrow \xi = 1 & \text{حالت بحرانی} \\ C > C_{cr} \rightarrow \xi > 1 & \text{حالت فوق بحرانی} \end{cases}$$

در عمل (واقعیت) : حالت زیر بحرانی $C < C_{cr}$ یا $\xi < 1$



برای ساختمانها ، پل ، سد ، تأسیسات هسته ای ، سازه های دریایی و .... $\xi < 0.1$

www.tnar.ir

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرائی

$f_I + f_D + f_s = 0$

$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$ ①

جواب فرضی : $u(t) = \bar{c}e^{st}$, $\dot{u} = \bar{c}se^{st}$, $\ddot{u} = \bar{c}s^2e^{st} \rightarrow$ ① ,>

$\bar{c}e^{st}(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2) = 0 \rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \Rightarrow$

$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \omega^2}$ → سه حالت برای زیر رادیکال متصور است

اگر $\frac{c}{2m} = \omega \rightarrow$ مقدار c را میرائی نامند $\Rightarrow \boxed{c_{cr} = 2m\omega}$

اگر از درصد استهلاک استفاده شود $\xi = \frac{c_{موجود}}{c_{cr}} \rightarrow s = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

$\frac{c}{2m} = \frac{c\omega}{2m\omega} = \frac{c\omega}{c_{cr}} = \xi\omega$ ←

تابع پاسخ اکسپوانسیل ← جواب s عدد حقیقی ← حالت میرائی 100% یا $\xi = 1$ ← زیر رادیکال صفر

" " ← جواب s دو عدد حقیقی ← حالت فوق میرائی $\xi > 1$ ← زیر رادیکال مثبت

که در عمل ، ارتعاش آزاد کلیه ابنیه (سازه های متعارف عمرانی) دارای میرائی خیلی کمتر از میرائی ۱ است و تابع پاسخ دارای حالت نوسانی (ارتعاش) است : 100% یا $\xi \ll 1$, $c_{موجود} \ll c_{cr}$

برای بدست آوردن تابع پاسخ :

$s = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$, $\omega\sqrt{1-\xi^2} = \omega_D$ فرض می کنیم $\Rightarrow$

$s = -\xi\omega \pm i\omega_D \Rightarrow u(t) = \bar{c}_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$

$u(t) = e^{-\xi\omega t}(\bar{c}_1 e^{i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega_D t})$

عبارت داخل پرانتز شبیه پاسخ ارتعاش آزاد بدون میرایی است فقط ω به ω_D تبدیل شده است ، پس می توان به کمک رابطه اویلر مثلثاتی ، پاسخ را بصورت هارمونیک نوشت :

$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$

u_0 , $\dot{u}_0$ از شرایط اولیه $\Rightarrow A = u_0$, $B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}$

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega t}(u_0\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t)}$$

می توان دو تابع هارمونیک را تبدیل به یک تابع نمود :

$u(t) = e^{-\xi\omega t}\rho\sin(\omega_D t + \alpha) = e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega_D t - \theta)$

$\rho = \sqrt{A^2+B^2}$, $\alpha = \text{Arc}\tan A/B$, $\theta = \text{Arc}\tan B/A$ که

www.tmar.ir

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[u_0 \cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right]$$

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ فرکانس زاویه‌ای میرایی

$\omega_D \# \omega$ برای $\xi < 0.2$

$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$ پریود طبیعی میرایی

دامنه حرکت در ارتعاش آزاد با میرایی در هر سیکل حرکت کاهش می‌یابد و پوش آنها :

$$\pm \rho e^{-\xi\omega t} \quad , \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \rightarrow \delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \simeq 1 \Rightarrow \delta \simeq 2\pi\xi$$

کاهندگی لگاریتمی

معمولاً بهتر است بجای دو سیکل متوالی از چند سیکل فاصله برای کاهندگی لگاریتمی استفاده شود ،

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} \simeq 2\pi\xi$$

رابطه بیان کننده تعداد سیکل لازم برای کاهش 50٪ دامنه حرکت :

$$j_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi}$$

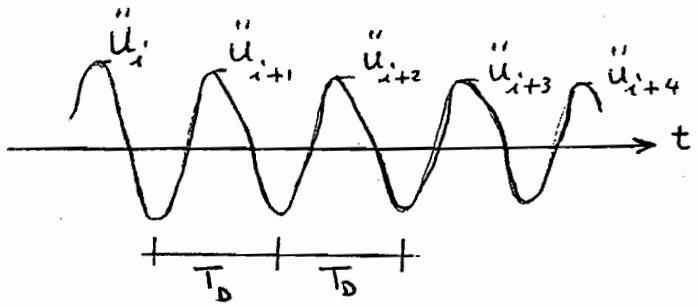
تعیین تحلیلی درصد میرایی ممکن نیست لذا از روش های تجربی استفاده می شود . یکی از این روش ها ، حالت ارتعاش آزاد سازه واقعی است ،

$$\xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_i}{u_{i+j}} \qquad \text{یا} \qquad \xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

اگر آزمایش اجازه ثبت شتاب را بدهد — اگر آزمایش اجازه ثبت u را بدهد

معمولاً در عمل حالت ثبت شتاب سازه در آزمایش ارتعاش آزاد سهل‌تر است .

www.tinar.ir



شتاب نگاشت ارتعاش آزاد سازه

از شتاب می توان ارتعاش آزاد را بررسی و پریود واقعی را محاسبه نمود و از روش تحلیلی و کاربرد سختی و جرم نیز محاسبه و مقایسه کرد تا دقت یکسی سختی و جرم ارزیابی شود.

مثال - مطلوبست یکسی پریود طبیعی و درصد میرایی یک قاب (مدل) که تحت آزمایش ارتعاش آزاد قرار گرفته است. نتیجه آزمایش بصورت زیر است:

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ sec}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi(10)} \ln \frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 \text{ یا } 3.96\%$$

مثال - یک مخزن آب هوایی که خالی است در نظر گرفته می شود، یک کابل به مخزن متصل بوده و نیروی افقی 16.4 kips اعمال شده که باعث 2" تغییر مکان افقی مخزن شده است، کابل بصورت ناگهانی قطع و ارتعاش آزاد رخ می دهد، در پایان چهار سیکل کامل، زمان ۲ ثانیه و دامنه حرکت 1" می باشد، با اطلاعات فوق مطلوبست محاسبه: الف) درصد میرایی ب) پریود طبیعی بدون میرایی ج) سختی موثر سیستم د) وزن موثر سیستم ه) ضریب میرایی و) تعداد سیکل لازم برای اینکه دامنه حرکت به 0.2" کاهش یابد.

الف) در ۴ سیکل دامنه از ۲ به ۱ رسیده $\quad \beta_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi} \rightarrow \xi = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\%$

ب) $T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5 \text{ sec}$, $T \simeq T_D = 0.5 \text{ sec}$, ج) $K = \frac{16.4}{2} = 8.2 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$

د) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57 \text{ Rad/s}$

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 \text{ kip-sec}^2/\text{in}$$

www.tnar.ir

$$w = mg = (0.0519)\,386 = 20.03 \quad kips$$

ب) $$c = \xi\,(2\sqrt{km}) = 0.0275\left[2\sqrt{8.2\,(0.0519)}\right] = 0.0359 \quad kip\text{-}sec/in$$

و) $$\xi \simeq \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_1}{u_{1+j}} \quad \rightarrow j \simeq \frac{1}{2\pi(0.0275)}\ln\frac{2}{0.2} = 13.32 \sim 13$$ سیکل

مثال - وزنه آب لازم برای پر کردن مخزن آب هوایی در مثال قبل برابر 80 kips می‌باشد. مطلوبست پریود طبیعی و درصد میرایی مخزن پر؟

$$w = 20.03 + 80 = 100.03 \quad kips$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 \quad kip\text{-}s^2/in$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.12 \quad sec$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0359}{2\sqrt{8.2\,(0.2591}} = 0.0123 = 1.23\%$$

انرژی ارتعاش آزاد

انرژی یک سیستم SDoF در اثر ارتعاش آزاد (شرایط اولیه u_0 و $\dot{u}_0$) در لحظه شروع:

$$E_1 = \frac{1}{2}k(u_0)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}_0)^2$$

در هر لحظه از ارتعاش آزاد، انرژی کل از جمع دو انرژی است: انرژی جنبشی E_K و انرژی پتانسیل از کرنش E_s:

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(t) \quad , \quad E_s = \frac{1}{2}ku^2(t)$$

بجای $u(t)$ از معادلش در حالت ارتعاش بدون میرایی قرار می‌دهیم:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k\left[u_0\cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t\right]^2$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left[-u_0\sin\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\cos\omega t\right]^2$$

انرژی کل:

$$E_K(t) + E_s(t) = \frac{1}{2}ku_0^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_0^2$$

مقدار کل انرژی در هر لحظه مستقل از زمان بوده و برابر انرژی لحظه ابتدایی است (میرایی صرفنظر شده).

www.itnar.ir

واکنش سیستم های SDoF در بارگذاری هارمونیک

این بخش از مباحث کلاسیک و پایه‌ای دینامیک سازه هاست. چرا؟
از یک طرف اکثر بارها بصورت هارمونیکی بیان می شوند (نیروی نامتعادل ماشین‌های چرخان، امواج دریا، زلزله، بارهای پریودیک و ...)،
از طرف دیگر، درک رفتار سازه ها در برابر نیروهای هارمونیک کمک فراوانی به درک واکنش سازه در برابر سایر نیروها می نماید.
در ضمن نوع تابع هارمونیک و نتایج حاصل از تحلیل و تفسیر آنها ساده می باشد.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

الف - حالت بدون میرایی:

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$u(t) = \left[u_0 \cos\omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{P_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin\omega t\right] + \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد: $u_0 = \dot{u}_0 = 0$

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\Omega t - \beta \sin\omega t)$$

پایدار — گذرا

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} \qquad \text{ضریب رفتار} \qquad \leftarrow \quad u_{st} = \frac{P_0}{k}$$

$$R_{max}(t) = D = \frac{u_{max}(t)}{u_{st}} = \frac{\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t}{P_0/k} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

ضریب بزرگنمایی تغییر مکان

حالت بسیار (رزونانس) $\Omega = \omega \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{0} = \infty$

$u(t) \nearrow \infty$: با رفع ابهام

$$u(t) = -0.5\frac{P_0}{k}(\omega t \cos\omega t - \sin\omega t)$$

www.tnar.ir

اگر میرایی درنظر گرفته شود، برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل باید از $u(t)$ حالت ارتعاش آزاد با میرایی استفاده نمود.

انرژی کل در این حالت دارای تابع کاهشی در زمان خواهد بود چون مقداری از انرژی بصورت انرژی اتلاف مستهلک میشود که در مدت زمان صفر تا t برابر:

$$E_D = \int_0^u f_D(t)\,du = \int_0^u c\dot{u}\,du = \int_0^t c\dot{u}^2\,dt$$

مقدار انرژی کل اولیه (لحظه اول شروع ارتعاش) به مرور مستهلک خواهد شد.

www.ttnar.ir

ب- حالت با میرایی :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) + M\sin\Omega t + N\cos\Omega t$$

$$M = \frac{P_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

A و B از شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$N = \frac{P_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

اگر از جواب گذرا صرفنظر شود :

$$u(t) \simeq u_p(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\rho = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\alpha = \text{Arc}\tan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$D = \frac{\rho}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

در رزونانس $\beta \to 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi}$

توجه : حداکثر D در مقادیری کمتر از $\beta = 1$

$$\frac{dD}{d\beta} = -4\beta(1-\beta^2) + 8\xi^2\beta = 0 \rightarrow \beta^2 = 1-2\xi^2$$

برای مثال $\xi = 15\%$ ← حداکثر D به ازای $\beta = 0.977$ حاصل می‌شود.

اگر از جواب گذرا صرفنظر نشود (با شرایط اولیه صفر $u_0 = \dot{u}_0 = 0$) :

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega t\right]$$

ترم $\sin$ در عبارت بالا کوچک است (صرفنظر می‌شود) ، $\omega_D \simeq \omega$:

$$u(t) \simeq \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi\omega t} - 1\right)\cos\omega t$$

www.tfnar.ir

برای حالت حدّ جواب گذرا :

۱- اگر $\beta \ll 1$ (تغییرات نیرو آهسته است) ، ضریب بزرگنمایی D کمی بزرگتر از یک است و مستقل از میرایی ، پس $u_{max} \simeq \rho \simeq \frac{P_0}{k}$

رفتار دینامیکی مانند تغییر شکل استاتیکی است ،

* سختی سیستم کنترل کننده است . $D \simeq 1$

۲- اگر $\beta \gg 1$ (تغییرات نیرو سریع است) ، با افزایش β مقدار D به سمت صفر میل می‌کند و میرایی اثر زیادی ندارد . برای مقادیر بزرگ β ، ترم β^4 در بیان عبارت D تعیین کننده است و تقریباً داریم :

$$D = \frac{\rho}{P_0/k} \simeq \frac{1}{\beta^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

* جرم کنترل کننده است . $\rho \simeq \frac{P_0}{k}\frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{P_0}{m\Omega^2}$ دامنه حرکت

۳- اگر $\beta \simeq 1$ (فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی سیستم تقریباً برابراست) ، مقدار D بسیار به درصد میرایی حساس است . تغییر شکل دینامیکی خیلی از تغییر شکل استاتیکی بزرگتر است .

$$\rho = \frac{P_0/k}{2\xi} = \frac{P_0}{C\omega}$$

* میرایی کنترل کننده است .

مثال - دامنه حرکت (یا تقریب ρ) یک سیستم معادل یک درجه آزادی تحت اثر دو حالت بارگذاری هارمونیکی بصورت زیر است ؛ مطلوبست تخمین درصد میرایی سیستم ؟

$\Omega = \omega \leftarrow \rho = 5''$ ، $\Omega = 5\omega \leftarrow \rho = 0.02''$

$\omega = \Omega$:

$$\rho = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\xi} = 5$$

$\Omega = 5\omega$

$$\rho \simeq \frac{P_0}{k}\frac{1}{\beta^2} = \frac{P_0/k}{25} = 0.02 \rightarrow \frac{P_0}{k} = 0.5''$$

$$\downarrow \quad \xi = 0.05 = 5\%$$

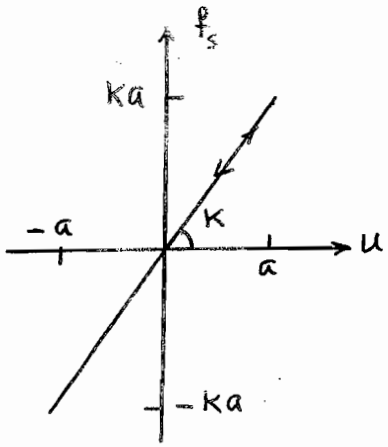
www.tmar.ir

برآورد درصد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

تئوری: نوسان کنندهٔ سادهٔ مستهلک شونده با فرکانس زاویه‌ای ω

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \qquad , \Omega = \omega \rightarrow \beta = 1$$

$$u(t) = u_p(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(2\xi\beta)^2} (-2\xi\beta \cos\omega t)$$



$$u(t) = -\frac{P_0}{2K\xi} \cos \omega t$$

الف ـ نیروی f_s در فنر $\quad f_s = K u(t)$

دامنه $\quad a = P_0 / 2K\xi$

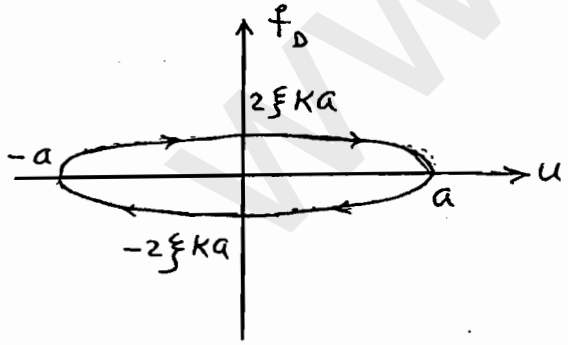
ب ـ نیروی f_D در میراگر $\quad f_D = c.\dot{u}(t)$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \rightarrow \quad c = 2m\xi\omega \rightarrow \quad f_D = 2m\xi\omega\dot{u}$$

$$u(t) = -a\cos\omega t \rightarrow \dot{u}(t) = a\omega\sin\omega t$$

$$f_D = 2m\xi\omega a\omega \sin\omega t = 2m\xi\omega^2 a \sin\omega t$$

$$\omega^2 = K/m \rightarrow \omega^2 m = K \rightarrow \quad f_D = 2K\xi a \sin\omega t$$



$$\frac{f_D}{2K\xi a} = \sin\omega t \rightarrow \left(\frac{f_D}{2K\xi a}\right)^2 = \sin^2\omega t$$

$$\sin^2\omega t = 1 - \cos^2\omega t = 1 - u^2/a^2$$

$$f_D^2/(2K\xi a)^2 = 1 - u^2/a^2$$ تابع بیضی

در یک سیکل کامل، مقدار انرژی پتانسیل در فنر تماماً پس داده می‌شود ولی انرژی استهلاک شده در میراگر مصرف می‌شود و مقدار آن برابر سطح زیر بیضی است:

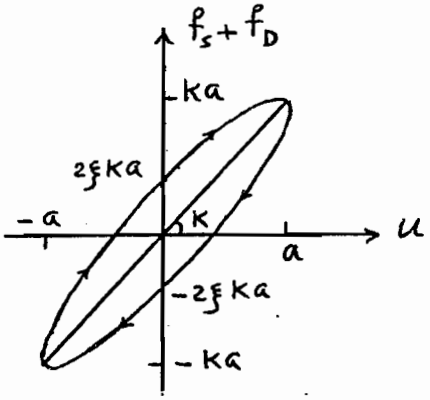
$$A = 2\pi a^2 K\xi \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{A}{2\pi a^2 K}$$

www.ttnar.ir

رابطه بین مجموع دو نیروی f_s و f_D و تغییرمکان u :

شکل بدست آمده برای حالت تک‌درجه‌آزادی

بوده است ،



از شکل مساحت بیضی ، مقدار a و K

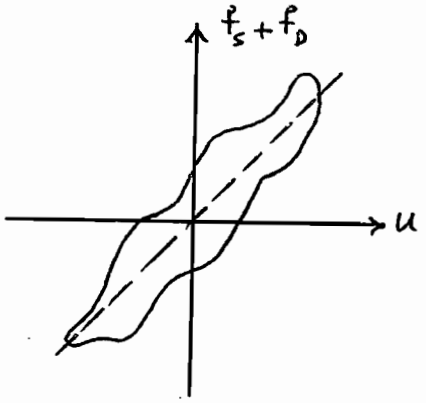
محاسبه و درصد میرایی نسبی تخمین زده می‌شود

$$\xi = A / 2\pi a^2 K$$

بتن مسلح 7٪ بتن پیش‌تنیده 5٪

فولادی پیچ و مهره 7٪ فولادی جوش شده 4٪

(توصیه سازمان انرژی اتمی آمریکا)



(مشابه در حالت واقعی)

مقدار انرژی مستهلک شده یک سیستم SDoF در یک سیکل تحت اثر $P(t) = P_0 \sin\Omega t$

(جواب پایدار) :

$$E_D = \int f_D\, du = \int_0^{2\pi/\Omega} (c\dot{u})\dot{u}\, dt = \int_0^{2\pi/\Omega} c\dot{u}^2 dt$$

$$= c\int_0^{2\pi/\Omega} [\Omega\rho\cos(\Omega t-\alpha)]^2 dt = \pi c\Omega\rho^2$$

توجه از قبل داشتیم : $u(t) \simeq u_p(t) = \rho\sin(\Omega t-\alpha)$

مثال - نیروی مقاوم برای حرکت جسمی در یک سیال با توان دو سرعت رابطه دارد $f_D = \pm b\dot{u}^2$

مطلوبست تعیین ضریب میرایی معادل لزجی C_{eq} برای چنین نیرویی که بر سیستم مرتعش تحت اثر

نیروی هارمونیکی با دامنه حرکت ρ و فرکانس زاویه‌ای Ω و همچنین تخمین ρ در حالت $\Omega = \omega$ ؟

حل : اگر زمان از حالت تغییرمکان حداکثر منفی در نظر باشد : $u(t) = -\rho\cos\Omega t$

$$E_D = \int f_D\, du = \int_0^{2\pi/\Omega} f_D\,\dot{u}\, dt = 2\int_0^{\pi/\Omega} f_D\,\dot{u}\, dt = 2\int_0^{\pi/\Omega} (b\dot{u}^2)\dot{u}\, dt =$$

$$2b\Omega^3\rho^3\int_0^{\pi/\Omega} \sin^3\Omega t\, dt = \frac{8}{3} b\Omega^2\rho^3$$

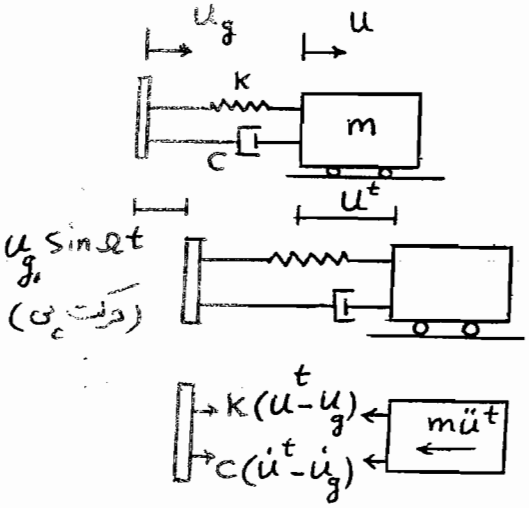
$$\pi C_{eq}\Omega\rho^2 = 8/3\, b\Omega^2\rho^3 \rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{8}{3\pi} b\Omega\rho}$$

از قبل $\rightarrow \Omega=\omega \rightarrow \rho = \frac{P_0}{c\omega} \rightarrow$

$$\boxed{\rho = \left(\frac{3\pi}{8b}\frac{P_0}{\omega^2}\right)^{1/2}}$$

www.tmar.ir

کاهندگی ارتعاش



الف - انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه

ماشین آلات - عبور قطار - انفجار - زلزله ...

$u_g(t)=u_{g_0}\sin\Omega t \rightarrow \dot{u}_g=u_{g_0}\Omega\cos\Omega t$

برای سادگی u^t را با u نشان می دهیم.

$$m\ddot{u}+c(\dot{u}-\dot{u}_g)+k(u-u_g)=0$$

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=\underbrace{ku_{g_0}\sin\Omega t+c\Omega u_{g_0}\cos\Omega t}_{P_0\sin(\Omega t+\alpha)}$$

$$\frac{c\Omega}{k}=\frac{2c\Omega}{2m\omega^2}=\frac{2c\Omega}{\underbrace{2m\omega\times\omega}_{c_{cr}}}=2\xi\beta$$

$$P_0=u_{g_0}\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}=u_{g_0}k\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}\quad,\ \tan\alpha=\frac{c\Omega}{k}=2\xi\beta$$

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P_0\sin(\Omega t+\alpha)\rightarrow u_{max}=\frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

حداکثر تغییرمکان متقله از پی سازه به خود سازه وقتی پی نسبت $u_{g_0}\sin\Omega t$ ارتعاش می کند.

مساله مهم در کاهندگی ارتعاش: حفاظت سیستم از ارتعاشات مزاحم ناشی از حرکت تکیه گاه است.

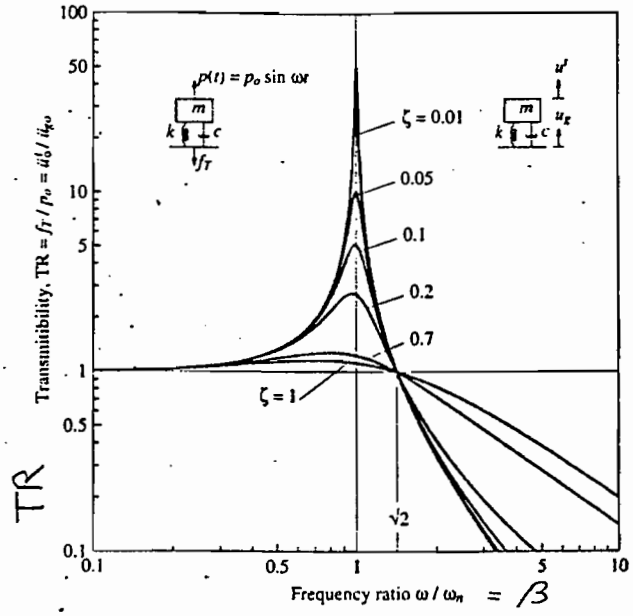
ضریب قابلیت انتقال: معیاری جهت تعیین میزان انتقال حرکت از پی به دستگاه

$$TR=\frac{u_{max}}{u_{g_0}}=\frac{\frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}{P_0/k\ \frac{1}{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}}=\frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\Leftarrow\quad D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\leftarrow \text{در بارگذاری } \sin$$

$$\boxed{TR=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}$$

www.tnari.ir



- به ازای $\beta = \sqrt{2}$ همه منحنی ها از یک نقطه عبور و TR=1 (حداکثر تغییرمکان مستقل از سیستم برابر حداکثر (دامنه) ارتعاش پی).
- هرچه β از $\sqrt{2}$ بزرگتر باشد، ضریب انتقال کاهش پیدا می کند، بنابراین تغییرمکان مستقل کمتر می شود.
- هرچه عمر کمتر باشد، ضریب انتقال کمتر می شود! تأثیر نیروی میرایی هم و هرچه کمتر باشد، بهتر است.

تنش نیروی میرایی ؟ نامطلوب !

u_{max} تغییرمکان حداکثر سیستم است ولی برای نیروی داخلی سازه در اثر حرکت تکیه گاهی باید تغییرمکان نسبی معلوم باشد: u_r

$$u_r = u - u_g$$

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_g = mu_{g_0}\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g$$

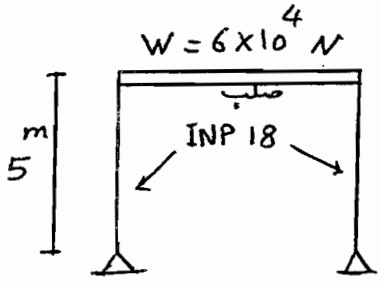
$$u_{r\,max} = \frac{mu_{g_0}\Omega^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{m\Omega^2}{k} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \beta^2 \rightarrow \frac{u_{r\,max}}{u_{g_0}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{r\,max} = u_{g_0} D \beta^2$$

www.tnar.ir

مثال - الف) تغییرمکان وارد به پی $u_g(t) = 0.4 \sin 4t$ cm



$E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$

$I = 1450 \ cm^4$

$\xi = 5\%$

$TR = ?$

حداکثر تنش موجود در ستون‌ها ؟

$$K = \frac{6EI}{h^3} = 146.2 \ kgf/cm = \frac{6 \times 2.1 \times 10^6 \times 1456}{(500)^3}$$

$$K = 146.2 \times 9.8 \times 100 = 143276 \ N/m \ , \ u_{g_0} = 0.4 \ cm$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{143276 \times 9.8}{6 \times 10^4}} = 4.84 \ Rad/s$$

$$\Omega = 4 \ Rad/s \rightarrow \beta = 4/4.84 = 0.826$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.826^2)^2 + (2 \times 0.05 \times 0.826)^2}} = 3.046$$

$$TR = 3.046 \sqrt{1 + (2 \times 0.05 \times 0.826)^2} = 3.056$$

$$u_{r\,max} = u_{g_0} D \beta^2 = 0.4 \times 3.046 \times (0.826)^2 = 0.83 \ cm$$

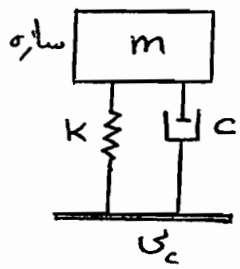
نیروی هر ستون $= \frac{146.2 \times 0.83}{2} = 60.67 \ kgf$

ب) لنگر در انتهای ستون $M_{max} = 60.67 \times 500 = 30335 \ kgf-cm$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I/h} = \frac{30335}{1450/9} = 188.3 \ kgf/cm^2$$

INP 18 → h = 9

ب - انتقال نیرو از سازه به تکیه‌گاه



در طراحی پی های ماشین‌های مرتعش بکار می‌رود.

سازه مرتعش است و هدف تعیین مقدار نیروی منتقله از سازه به تکیه‌گاه است.

www.tfnar.ir

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

جواب پایدار $u(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$

$$\rho = P_0/k \; \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k} \times D$$

برآیند نیروهای انتقال یافته از سازه به پی برابر مجموع نیروهای فنر و کمک فنر است.
در استاتیک فقط نیروی ku منتقل می‌شود اما در دینامیک، ku و $c\dot{u}$ منتقل می‌شود:

$$R = f_s + f_D = ku + c\dot{u}$$

$$R = \rho \left[k \sin(\Omega t - \alpha) + c\Omega \cos(\Omega t - \alpha) \right] = \rho \sqrt{k^2 + c^2\Omega^2} \sin(\Omega t - \alpha + \gamma)$$

$$\gamma = \text{Arc}\tan\left(\frac{c\Omega}{k}\right) = 2\xi\beta$$

$(\alpha - \gamma) = \theta$ زاویه فاز $\rightarrow$ $\tan\theta = \dfrac{\tan\alpha - \tan\gamma}{1 + \tan\alpha \tan\gamma} = \dfrac{2\xi\beta}{1 - \beta^2 + 4\xi^2\beta^2}$

$$R = \rho k \sqrt{1 + \left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2} \sin(\Omega t - \theta) = \rho k \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \sin(\Omega t - \theta)$$

$$R_{max} = \frac{P_0 \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

TR: قابلیت انتقال در این حالت عبارت از نسبت حداکثر نیروی انتقال یافته به تکیه‌گاه به حداکثر نیروی هارمونیکی وارد بر سازه است.

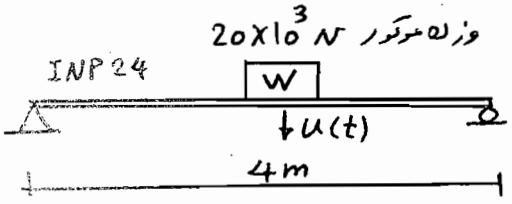
$$TR = \frac{R_{max}}{P_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

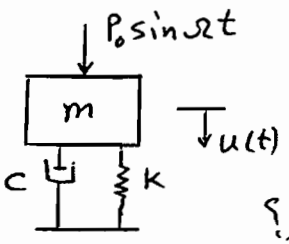
شبیه حالت الف

انتقال حرکت از تکیه‌گاه به سازه و انتقال نیرو از سازه به تکیه‌گاه از یک قانون پیروی می‌کنند.
(منحنی تغییرات TR مشابه است).

www.ttnar.ir

مثال -





$\xi = 10\%$

میزوری استتال یافته از موتور به سر؟

$P(t) = (3\times10^4) \sin 40t \quad N$ از وزنه نیز صرفنظر می شود.

$I_x = 4250 \ cm^4$, $E = 2.1\times10^6 \ kg/cm^2$

حل:

$$K = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48\times2.1\times10^6\times4250}{(400)^3} = 6694 \quad kgf/cm$$

$$K = 6694\times9.8\times100 = 6560120 \quad N/m$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{6560120\times9.8}{20\times10^3}} = 56.7 \quad Rad/s$$

$$\beta = \Omega/\omega = 40/56.7 = 0.7$$

$$U_{st} = P_0/K = \frac{3\times10^4}{6560120}\times100 = 0.46 \ cm$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.7^2)^2 + (2\times0.1\times0.7)^2}} = 1.89$$

$$\rho = \frac{P_0}{K} D = 0.46\times1.89 = 0.87 \ cm$$ حداکثر تغییر مکان

$$TR = D\sqrt{1+(2\xi/\beta)^2} = 1.89\sqrt{1+(2\times0.1\times0.7)^2} = 1.91$$

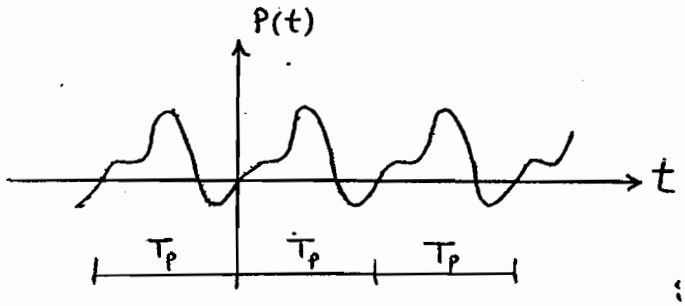
$$P_{max} = P_0 \times TR = 3\times10^4\times1.91 = 5.73\times10^4 \quad N$$

تأثیر میزوری دینامیکی

www.tnar.ir

پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک — Periodic Excitation

نیروی پریودیک نیرویی که تابع آن پس از یک پریود ثابت، عیناً تکرار شود (پریود T_p).



نیروی پروانه کشتی، امواج روی سکوهای دریایی،

نیروی گردابی باد برساختمانهای بلند و لاغر و

خیلی نیروهای دیگر، پریودیک یا نزدیک به آن هستند؛

شبیه‌سازی زلزله و حرکت اتومبیل روی دهانه بلند پل‌ها به دلیل اثر بلند مدت خزش از آن جمله می‌باشند،

با کمک بسط سری فوریه، نیروی پریودیک به ترم‌های هارمونیک تبدیل می‌شود (رفتارسازه خطی).

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad \text{پریودیک}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt \quad \text{مقدار متوسط } P(t) \text{ در یک پریود} \qquad \begin{cases} \Omega = \dfrac{2\pi}{T_p} \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos(n\Omega t)\,dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin(n\Omega t)\,dt$$

در تئوری ∞ ترم ولی در عمل چند ترم اول برای همگرایی کافی است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{\frac{2\pi n}{T_p}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \quad , \quad \Omega_n = n\Omega_1$$

حل معادله برای هر ترم بارگذاری $\Rightarrow u(t)$

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \Big\{ \left[2\xi\beta_n a_n + (1-\beta_n^2) b_n\right] \sin\Omega_n t +$$

$$+ \left[(1-\beta_n^2) a_n - 2\xi\beta_n b_n\right] \cos\Omega_n t \Big\}$$

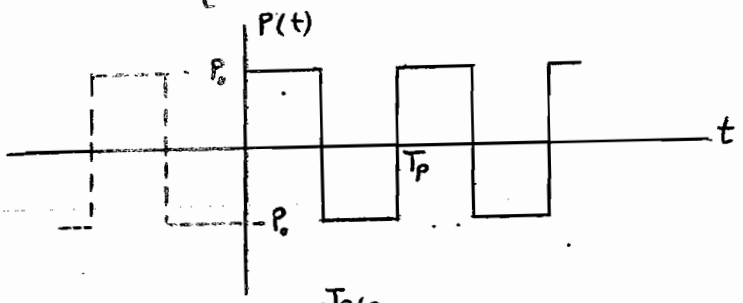
$u(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T_p

تأثیر نسبی هر ترم بستگی مستقیم به مقدار a_n و b_n از مولفه نیرو $P(t)$ و همینطور ضریب β_n دارد.

www.ttnar.ir

مثال - مطلوبست تحلیل یک SDOF تحت اثر نیروی پریودیک

$$P(t)=\begin{cases} P_0 & 0\le t\le T_P/2 \\ -P_0 & T_P/2\le t\le T_P \end{cases}$$



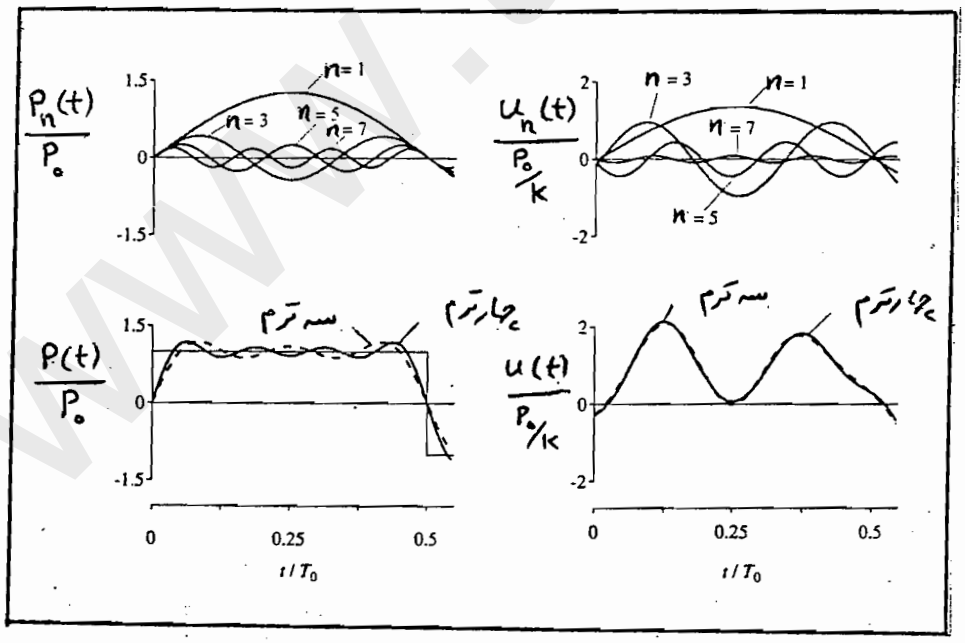
$$a_0=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\,dt = 0$$

$$a_n=\frac{2}{T_P}\left[P_0\int_0^{T_P/2}\cos(n\Omega t)\,dt+(-P_0)\int_{T_P/2}^{T_P}\cos(n\Omega t)\,dt\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_P}\left[P_0\int_0^{T_P/2}\sin(n\Omega t)\,dt+(-P_0)\int_{T_P/2}^{T_P}\sin(n\Omega t)\,dt\right]=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ 4P_0/n\pi & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$P(t)=\sum P_n(t)=\frac{4P_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(1-\beta_n^2)^2\sin(n\Omega t)-2\xi\beta_n\cos(n\Omega t)}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}$$

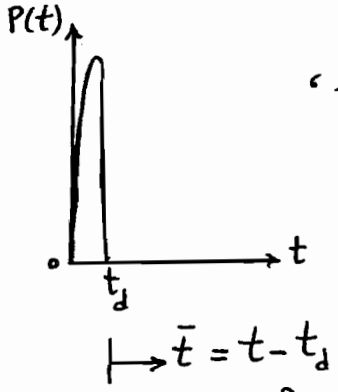


www.ttnar.ir

تحلیل دینامیکی SDF در بارگذاری اختیاری و کلّی (انتگرال دو هامل)

Duhamel's integral (Response to ARBITRARY Force)

قبل از پرداختن به بارگذاری کلی (بدون محدودیت خاص)، تحلیل دینامیکی در برابر بار آنی دیده می شود. مدت زمان اعمال بار بقدری کوتاه که سیستم فرصت عکس العمل ندارد، بنابراین تغییرمکان در زمان بارگذاری تقریباً صفر است. میرایی در این نوع بارگذاری اثر بسیار ناچیز دارد. جواب سیستم در زمان ارتعاش آزاد خواهد بود: $t > t_d$



$\longmapsto \bar{t} = t - t_d$

شرایط اولیه در لحظه t_d بر آورد شده و رابطه ارتعاش آزاد (بدون میرایی) نوشته می شود.

ضربه = اندازه مقدار حرکت $\Rightarrow \int_0^{t_d} P(t)\,dt = m\Delta\dot{u} = m(\dot{u}_{t_d} - \dot{u}_0) = m\dot{u}_{t_d}$

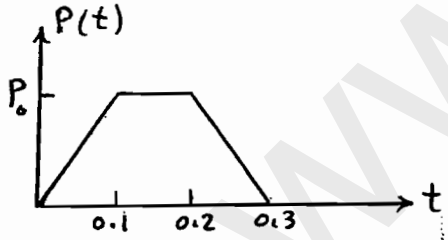
$$\dot{u}_{t_d} = \frac{\int P(t)dt}{m} \qquad \text{و} \qquad u_{t_d} \neq 0$$

رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\sin\omega\bar{t} + u_{t_d}\cos\omega t = \frac{\int_0^{t_d} P(t)\,dt}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$

معمولاً اگر $t_d \leq \frac{T}{4}$ باشد، جواب تقریبی فوق، قابل قبول خواهد بود.

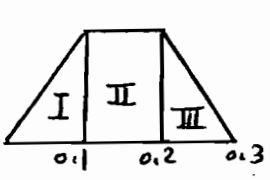
مثال - یک سیستم SDF با $T = 0.4$ Sec تحت بار ذوزنقه‌ای شکل است.

$u(t=1.8) = ?$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.7 \ \text{Rad/s}, \quad t_d = 0.3 > \frac{T}{4}$$

روش مستقیم یا ...



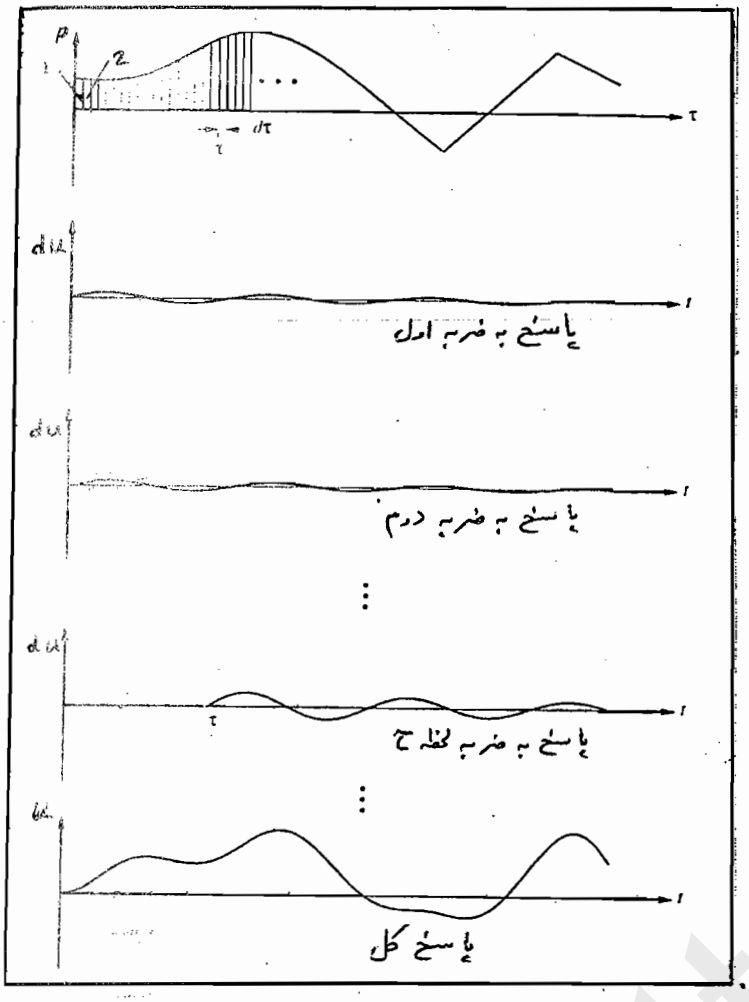
I فقط فاز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_1(\bar{t}=1.7) = \frac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.7\omega)$

II فقط فاز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_2(\bar{t}=1.6) = \frac{0.1P_0}{m\omega}\sin(1.6\omega)$

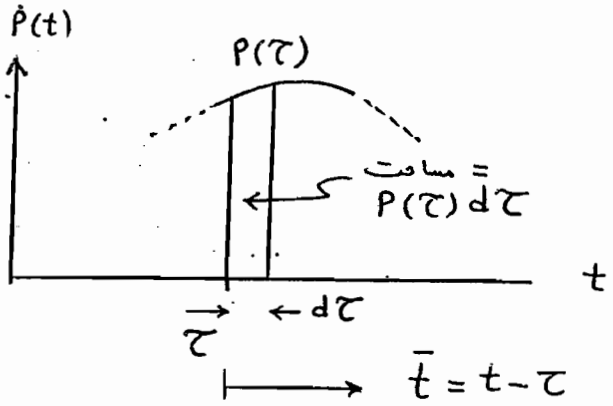
III فقط فاز $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_3(\bar{t}=1.5) = \frac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.5\omega)$

سیستم خطی $\rightarrow u(t=1.8) = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{0.1P_0}{2m\omega}(\sin 1.7\omega + 2\sin 1.6\omega + \sin 1.5\omega)$

www.itnar.ir



این یک روش انتگرال دوهامل تشریح می شود:



$$du(\bar{t}) = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$$

$$\int_0^t du = u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

انتگرال دیوهامل برای حالت بدون میرایی

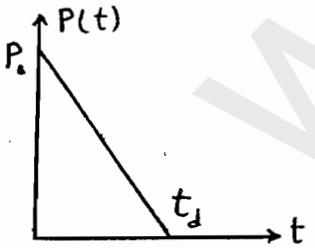
جواب خیلی دقیق است چون $d\tau \ll \frac{T}{4}$

پاسخ انتگرال دوهامل برای حالت با میرایی

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

اگر تابع $P(t)$ پیچیده باشد یا شکل خاصی نداشته باشد، از روش برآورد عددی استفاده می شود،

در عمل، روش های عددی انتگرال دوهامل از کارایی خوبی برخوردار نمی باشند.



مثال - مطلوبست تحلیل یک SDF با روش انتگرال دوهامل برای بارگذاری زیر:

حالت بدون میرایی:

$$P(t) = P_0\left(1 - \frac{t}{t_d}\right) \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

پس از عملیات پر حجم انتگرال گیری (شرایط اولیه صفر طرفی شده است):

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - \frac{t}{t_d} - \cos\omega t + \frac{1}{\omega t_d}\sin\omega t\right] \qquad 0 \le t \le t_d$$

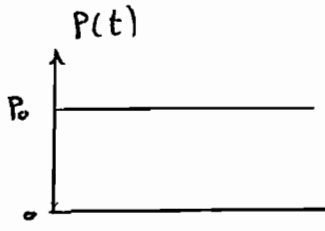
برای $t > t_d$ (ارتعاش آزاد):

باید u و $\dot{u}$ در لحظه t_d برآورد شود و در رابطه ارتعاش آزاد قرار گیرد.

www.tinar.ir

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بارگذاری خاص

الف - STEP Force



$$m\ddot{u} + ku = P(t) = P_0$$

جواب بدون میرایی

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

در این حالت $u(t)_{max} = 2\frac{P_0}{k}$ به ازای لحظه‌ای که پاسخ حداکثر می‌شود.

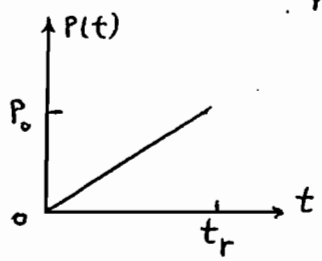
حالت با میرایی:

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

تحلیل بالا از روش مستقیم (حل معادله دیفرانسیل) یا انتگرال دوهامل قابل حصول است.

ب - RAMP Force (بارِ افزایندهٔ خطی)

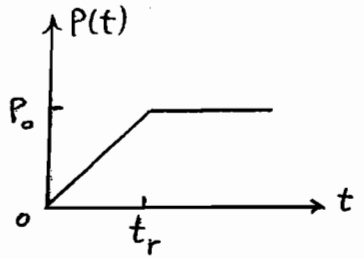
$$P(t) = P_0\,\frac{t}{t_r}$$



رفتار سازه خطی است و $\xi = 0$:

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right)$$

ج - STEP Force with FINITE RISE time (بدون میرایی)



$$P(t) = \begin{cases} P_0\,(t/t_r) & t \le t_r \\ P_0 & t \ge t_r \end{cases}$$

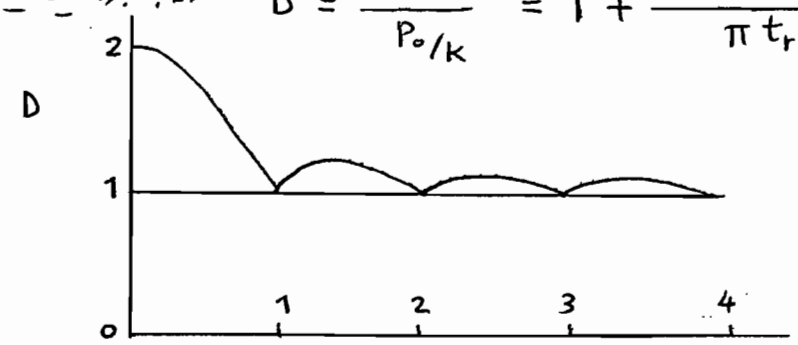
$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right) \qquad t \le t_r$$

$$u(t) = P_0/k\left\{1 - \frac{1}{\omega t_r}\left[\sin\omega t - \sin\omega(t - t_r)\right]\right\} \qquad t \ge t_r$$

$$u(t)_{max} = P_0/k\left\{1 + \frac{1}{\omega t_r}\sqrt{(1-\cos\omega t_r)^2 + (\sin\omega t_r)^2}\right\} \qquad t \ge t_r$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی

$$D = \frac{u_{max}}{P_0/k} = 1 + \frac{\left|\sin(\pi t_r/T)\right|}{\pi t_r/T}$$



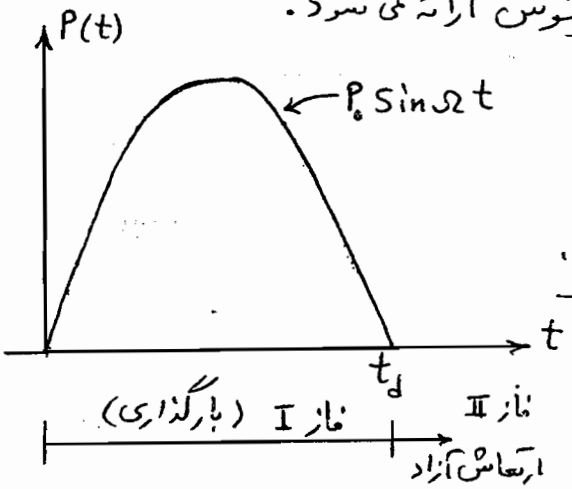
طیف جواب برای بارگذاری فوق حالت بدون میرایی

www.ttnar.ir

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه‌ای PULSE Excitation

انواع بارگذاری ضربه‌ای مثلثی ، مستطیلی ، نصف هارمونیک و... پرسازه‌ها اثر می‌کنند .

* جزئیات تحلیل برای نمونه در مورد بار ضربه‌ای نصف سینوس ارائه می‌شود .



موج انفجار، ترمز چرخیل های بزرگ ، افزایش ناگهانی نیروی موتور

از جمله بارهای ضربه‌ای هستند، معمولاً اثر میرایی خیلی کم است .

تحلیل در دو فاز انجام می‌شود : فاز I و فاز II

تحلیل فاز بارگذاری (I) $0 \le t \le t_d$

شرایط اولیه صفر است .

$$m\ddot{u} + Ku = P_0 \sin \Omega t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega t)$$

آیا u_{max} در فاز I است یا II ؟

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\Omega \cos \Omega t - \beta \omega \cos \omega t) = 0$$

$$\Omega \cos \Omega t - \Omega \cos \omega t = 0 \Rightarrow \cos \Omega t = \cos \omega t$$

$$\Omega t = 2\pi n \pm \omega t \rightarrow \text{لحظه پاسخ حداکثر} \quad t_{max} = \frac{2\pi n}{\Omega \pm \omega} = \frac{2\pi n}{\Omega (1 \pm \frac{2t_d}{T})}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi / 2t_d}{2\pi / T} = \frac{T}{2t_d}$$

برای اینکه حداکثر در فاز I باشه باید $t_{max} < t_d$

بارگذاری نصف Sin پس سیگنال اوّل ($n=1$) و اگر با علامت منفی ادامه دهیم خواهیم داشت

$\beta \le -1$ که معنی ندارد پس رابطه شرطی را با $n=1$ و علامت + بررسی می‌کنیم ،

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega (1 + \frac{1}{\beta})} = \frac{2\pi}{\Omega (1 + \frac{2t_d}{T})} \le t_d \Rightarrow \frac{2\pi}{1+\frac{1}{\beta}} \le \Omega t_d = \pi \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d} \rightarrow \Omega t_d = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \le 1 \text{ یا } \Omega \le \omega \text{ یا } \frac{T}{2} \le t_d}$$

www.tmar.ir

تحلیل فاز ارتعاش آزاد (II) $t > t_d$

برای رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(\bar{t}=0)}{\omega}\sin\omega\bar{t} + u(\bar{t}=0)\cos\omega\bar{t}$ باید تغییرمکان و سرعت در لحظه t_d تعیین شوند (لحظه $\bar{t}=0$ یعنی $t=t_d$).

از رابطه فاز I مقادیر u_{t_d} ، $\dot{u}_{t_d}$ محاسبه می شوند: $\Omega t_d = \pi \rightarrow \sin\Omega t_d = \sin\pi = 0$

$$u(t_d) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\sin\Omega t_d - \beta\sin\omega t_d)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \rightarrow \omega = \Omega/\beta \rightarrow \omega t_d = \frac{\Omega t_d}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow u(t_d) = -\frac{P_0}{k}\frac{\beta\sin\frac{\pi}{\beta}}{(1-\beta^2)}$$

برای محاسبه $\dot{u}(t_d)$:

$$\dot{u}(t_d) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\Omega\cos\Omega t_d - \Omega\cos\omega t_d)$$

$$\dot{u}(t_d) = -\frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{(1-\beta^2)}(1+\cos\pi/\beta)$$

پس:

$$u(\bar{t}) = -\frac{P_0}{k}\frac{\beta}{(1-\beta^2)}\left[(1+\cos\pi/\beta)\sin\omega\bar{t} + \sin\frac{\pi}{\beta}\cos\omega\bar{t}\right]$$

برآورد حداکثر تغییرمکان در فاز II:

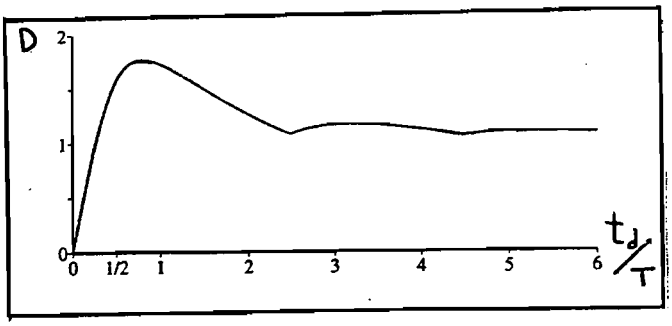
$$u(\bar{t}) = \rho\sin(\omega t + \alpha) \quad \text{که} \quad \rho = \sqrt{u_{t_d}^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\right)^2}$$

$u_{max}(\bar{t}) = \rho$ که اگر بجای u_{t_d} ، $\dot{u}_{t_d}$ از معادل آنها استفاده شود:

در فاز II $u_{max} = \frac{P_0}{k}\frac{2\beta}{(1-\beta^2)}\cos\pi/2\beta$

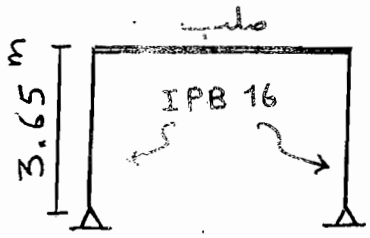
تهیه طیف پاسخ بارگذاری نصف سینوسی

با توجه به تعیین تغییرمکان حداکثر در فاز I و II می توان ضریب بزرگنمایی را محاسبه و برحسب $\frac{t_d}{T}$ های مختلف، منحنی مربوط ترسیم شود.



www.tnar.ir

مثال ـ تاب یک طبقه مطابق شکل مفروض است . پریود طبیعی تاب برابر 0.5^{Sec} و ستون ها از مقطع IPB 16 می باشد ($E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$) . مطلوبست تعیین پاسخ حداکثر تاب تحت اثر بار ضربه ای تیم سینوس با حداکثر مقدار 1.8^{ton} و $t_d = 0.25^{Sec}$. منظور از پاسخ در این مساله حداکثر تغییر مکان در بالای تاب ، و حداکثر تنش خمشی در ستون ها ؟



IPB 16 $\rightarrow I_x = 2492 \ cm^4$, $W_x = 311 \ cm^3$

$t_d/T = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \xrightarrow{\text{طیف مربوط}} D = 1.5$

K یک ستون $= \frac{3EI}{h^3} = \frac{3(2.1\times10^6)2492}{(3.65\times100)^3} = 322.85 \ kg/cm$

تاب $K = 2 \times 322.85 = 645.7 \ kg/cm$

$P_o/k = \frac{1800}{645.7} = 2.79 \ cm$

$u_{max} = \frac{P_o}{k} \times D = 2.79 \times 1.5 = 4.185 \ cm$

$M = \frac{3EI}{h^2} u_{max} = \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times 2492}{(365)^2} \times 4.185 = 493171.86 \ kg-cm$

$\# 4.93 \ t-m$

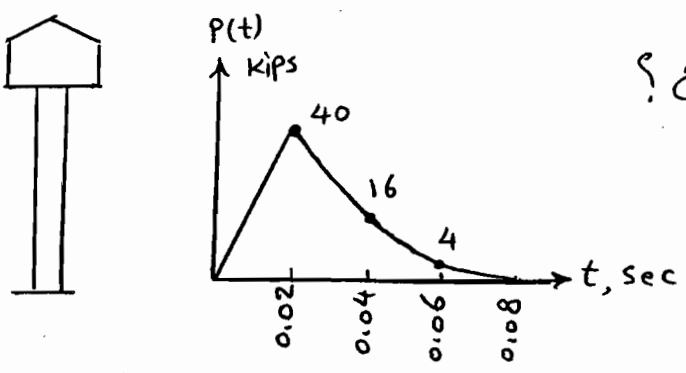
برآورد لنگر از روش دیگر :

$f_{s\,max} = K u_{max} = P_o \times D = 1.8 \times 1.5 = 2.7 \ ton$

$M = \frac{f_{s\,max}}{2} \times h = \frac{2.7}{2} \times 3.65 \ \# 4.93 \ ton-m$

$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4.93 \times 10^5}{311} = 1585 \ kg/cm^2$

مثال ـ برج آب مثال های قبل با ارتفاع 80' تحت اثر نیروی $P(t)$ ناشی از انفجار قرار می گیرد . مطلوبست تعیین حداکثر برش و لنگر خمشی در پای برج ؟



از مثال های قبل :

$\begin{cases} \text{برج } K = 8.2 \ kips/in \\ \text{پر } T = 1.12 \ sec \end{cases}$

www.itnar.ir

حل مثال - $t_d/T = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 < 0.25 \rightarrow$ روش تقریبی OK

از قانون ذوزنقه برای محاسبه انتگرال (مساحت منحنی بارگذاری) استفاده می شود :

$$\int_0^{0.08} P(t)\,dt = \frac{0.02}{2}\left[0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0\right] = 1.2 \text{ kip-Sec}$$

$$u(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega}\sin\omega t \rightarrow u_{max} = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

$$u_{max} = \frac{I}{K}\frac{2\pi}{T} = \frac{(1.2)\,2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \text{ in}$$

$$f_{smax} = K u_{max} = (8.2)(0.821) = 6.73 \text{ kips}$$

$\Rightarrow$ برش حداکثر $V_b = 6.73$ kips , $M_b = 6.73 \times 80 = 538$ kip-ft

---

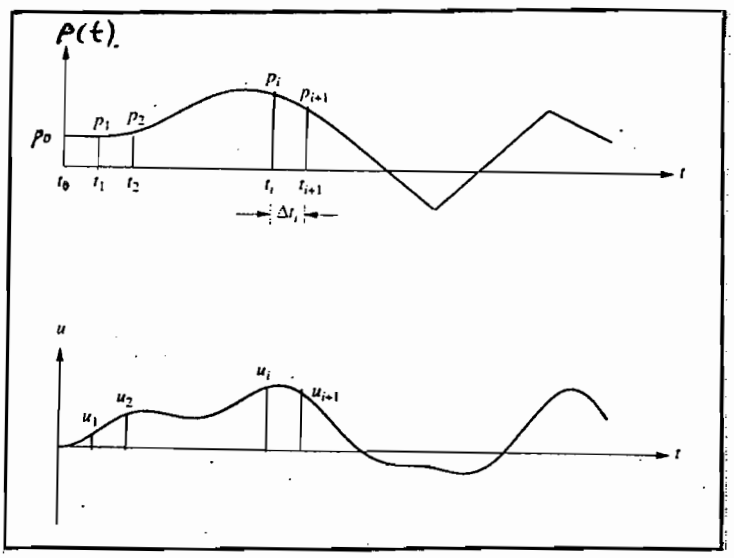
ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

برای انواع بارگذاری دینامیکی بویژه اگر $P(t)$ دارای تابع ریاضی مشخصی نباشد :

مسائل مهم : دقت ، همگرایی ، پایداری و نکات برنامه نویسی و اجرا در کامپیوتر در مورد روش عددی مورد نظر

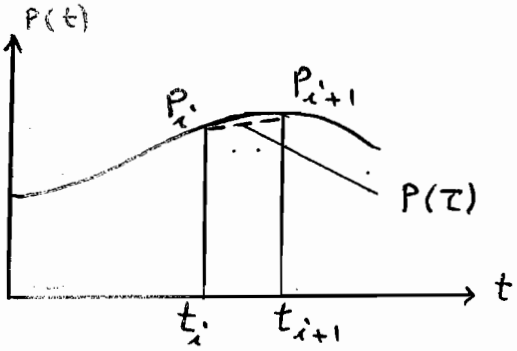
انواع روش : سه روش کلی عددی : درون یابی تابع بلوکی - تفاضل محدود در بیان سرعت و شتاب - فرض تغییرات مختلف شتاب



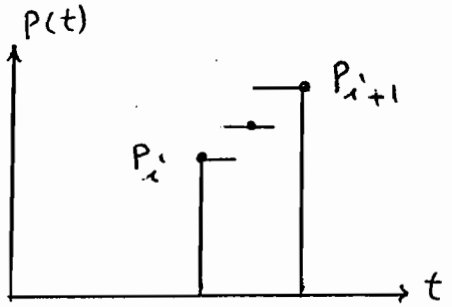
www.tmar.ir

الف - روش های عددی مبتکی بر درون یابی در تابع نیرو

Numerical Solution Based on interpolation of the Excitation



درون یابی خطی تابع نیرو



درون یابی ثابت تابع نیرو

$$\tilde{P}_i = P(\tau) = P_i \text{ یا } P_{i+1} \text{ یا } \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

$$P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

۱- درون یابی ثابت تابع نیرو

برای سادگی: از میرایی صرفنظر می کنیم - جواب کل از دو قسمت تشکیل شده است:

- جواب سیستم تحت اثر نیروی ثابت در فاصله زمانی Δt_i بدون شرایط اولیه
- جواب سیستم در حالتی که نیرو وجود ندارد و فقط شرایط اولیه وجود دارد (ارتعاش آزاد)

$$m\ddot{\tilde{u}} + k\tilde{u} = \tilde{P}_i \rightarrow \tilde{u}_p = \frac{\tilde{P}_i}{k} \qquad (1)$$

$$\tilde{u}_c = A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

$$\tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k} + A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau \quad (\tilde{u}(0) = \dot{\tilde{u}}(0) = 0)$$

$$A_1 = 0 \;,\; A_2 = -\tilde{P}_i/k \rightarrow \tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k}(1 - \cos\omega\tau)$$

(۲) ارتعاش آزاد ($\tilde{P}_i$ نیرو وجود ندارد):

$$\hat{u}(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau$$

$$u(\tau) = \tilde{u}(\tau) + \hat{u}(\tau)$$

$$u(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}(1 - \cos\omega\tau)$$

$$\dot{u}(\tau) = \omega\left[-u_i \sin\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}\sin\omega\tau\right]$$

www.tmar.ir

اگر در روابط قبلی $\tau = \Delta t_i$ قرار گیرد، تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} بدست می‌آید،

$$u_{i+1} = u_i \cos(\omega \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin(\omega \Delta t_i) + \frac{\tilde{P}_i}{K} [1 - \cos(\omega \Delta t_i)]$$

$$\dot{u}_{i+1} = \omega \left\{ -u_i \sin(\omega \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \cos(\omega \Delta t_i) + \frac{\tilde{P}_i}{K} \sin(\omega \Delta t_i) \right\}$$

---

۲ - دوره یا بی خطی تابع شروع

$$P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right) \tau$$

جزئیات حالت بدون میرایی ارائه می‌شود. جواب کل از سه قسمت تشکیل شده است:

پاسخ حالت ثابت P_i بدون شرایط اولیه + شرایط اولیه بدون بار (ارتعاش آزاد) + پاسخ خطی $\tau \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}$ بدون شرایط اولیه (جزئیات دو مورد اول در حالت ۱ دیده شد و اینجا جزئیات مورد سوم):

$$m\ddot{\bar{u}} + K\bar{u} = \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \qquad \left(\bar{u}(0) = \dot{\bar{u}}(0) = 0 \;,\; 0 < \tau < \Delta t_i\right)$$

$$\bar{u}_p = \frac{1}{K}\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \;, \quad \bar{u}_c = A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}_p + \bar{u}_c = \left(\frac{\Delta P_i}{K \Delta t_i}\right)\tau + A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0 \;, \quad \dot{\bar{u}}(0) = 0 \rightarrow A_1 = -\frac{\Delta P_i}{\omega K \Delta t_i}$$

$$\bar{u}(\tau) = \left(\frac{\Delta P_i}{K}\right)\left(\frac{1}{\omega \Delta t_i}\right)(\omega\tau - \sin\omega\tau)$$

اگر $\tau = \Delta t_i$ پاسخ در لحظات t_{i+1} بدست می‌آید (جواب ۲ مورد اول نیز لحاظ شده است):

$$u_{i+1} = u_i \cos\omega\Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\Delta t_i + \frac{P_i}{K}(1 - \cos\omega\Delta t_i) + \frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\Delta t_i - \sin\omega\Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \omega\left\{-u_i \sin\omega\Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\Delta t_i + \frac{P_i}{K}\sin\omega\Delta t_i + \frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(1 - \cos\omega\Delta t_i)\right\}$$

---

www.tnar.ir

روابط مربوط به دورن یابی خطی تابع پله در حالت سیرابی

$$\begin{cases} u_{i+1} = A P_i + B P_{i+1} + C u_i + D \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} = A' P_i + B' P_{i+1} + C' u_i + D' \dot{u}_i \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

$$C = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right) \qquad D = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$A' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

$$C' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right) \qquad D' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

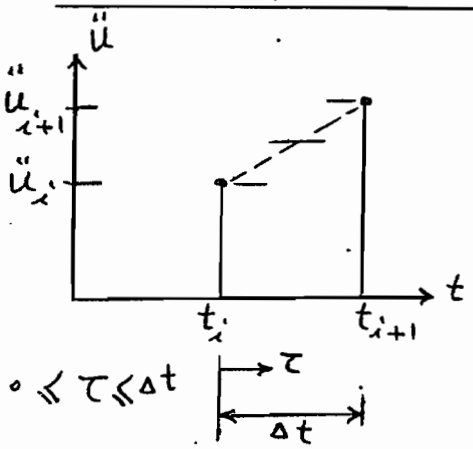
اگر Δt ثابت فرض شود، ضرایب A تا D' یکبار محاسبه می‌شود. دقت روش وابسته به Δt است که هرچه کوچکتر باشد، بهتر است. در حالت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ جوابها قابل قبول است، مساله در حالت خطی صادق است. مثال: جزئیات صورت مساله و جدول پاسخ در ورق جداگانه

www.ttnar.ir

ب - روش‌های عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تغییرات مختلف شتاب (گام به گام)

Numerical solution Based on Approximating Derivative

(Step - by - Step numerical integration)



اساس روش‌ها: در یک گام زمانی، تغییرات شتاب در حالتهای مختلف فرض می‌شود (ثابت، متوسط یا خطی) و با انتگرال گیری از رابطه شتاب، رابطه تغییر مکان حاصل می‌شود،

۱- روش عددی گام به گام با شتاب ثابت ابتدای گام

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \quad (1) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + A \rightarrow \tau = 0 \text{ اعمال شرایط اولیه}$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (2)$$

$$\tau = \Delta t \longrightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t\, \ddot{u}_i \quad (3)$$

$$(2) \text{ انتگرال رابطه} \rightarrow u(\tau) = \frac{1}{2}\ddot{u}_i \tau^2 + \dot{u}_i \tau + B \rightarrow \tau = 0,\ u(0) = u_i$$

$$\rightarrow B = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2}\ddot{u}_i \tau^2 \quad (4)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i \quad (5)$$

برای بدست آوردن $\ddot{u}_{i+1}$ و سرشکن کردن خطاها از رابطه اصلی تعادل کمک گرفته می‌شود:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (6)$$

بجای u_{i+1} از (5) و بجای $\dot{u}_{i+1}$ از (3) قرار می‌دهیم:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{p_{i+1} - ku_i - (c + k\Delta t)\dot{u}_i - \left(c\Delta t + \frac{k\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\} \quad (7)$$

www.itnar.ir

۲ـ روش عددی گام به گام با شتاب متوسط

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1})$$

انتگرال ← $\dot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) + A_1$ ← اعمال شرایط اولیه $\tau = 0 , \dot{u}(0) = \dot{u}_{i}$

$\rightarrow A_1 = \dot{u}_{i} \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_{i} + \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1})\tau \rightarrow \tau = \Delta t \rightarrow$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_{i} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \Delta\dot{u}_{i} = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) \quad (1)$$

انتگرال از $\dot{u}(\tau)$: $\rightarrow u(\tau) = \dot{u}_{i}\tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1})\tau^2 + A_2$

$$\tau = 0 \rightarrow u(0) = u_{i} \rightarrow A_2 = u_{i} \rightarrow u(\tau) = u_{i} + \dot{u}_{i}\tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1})\tau^2$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_{i} + \dot{u}_{i}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2)$$

$$u_{i+1} - u_{i} = \Delta u_{i} = \dot{u}_{i}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_{i}) = \dot{u}_{i}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_{i}) + \frac{\Delta t^2}{4}\Delta\ddot{u}_{i}$$

$$\Delta\ddot{u}_{i} = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta u_{i} - \dot{u}_{i}\Delta t) - 2\ddot{u}_{i} \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow \Delta u_{i} = \dot{u}_{i}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_{i} - \dot{u}_{i}\Delta t)$$

$$(1) \rightarrow \Delta\dot{u}_{i} = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i} + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_{i} - \dot{u}_{i}\Delta t) \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{u}_{i} = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\Delta u_{i} - 2\dot{u}_{i} \quad (4)$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad , \quad m\ddot{u}_{i} + c\dot{u}_{i} + ku_{i} = p_{i}$$

$$\Rightarrow m\Delta\ddot{u}_{i} + c\Delta\dot{u}_{i} + ku_{i} = \Delta p_{i} \quad (5)$$

در رابطه (5) بجای $\Delta\ddot{u}_{i}$ و $\Delta\dot{u}_{i}$ از روابط (3) و (4) استفاده می‌کنیم:

$$m\left[\frac{4}{\Delta t^2}\Delta u_{i} - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{u}_{i}\Delta t - 2\ddot{u}_{i}\right] + c\left[\frac{2}{\Delta t}\Delta u_{i} - 2\dot{u}_{i}\right] + k\Delta u_{i} = \Delta p_{i}$$

$$K_{i}^{*}\Delta u_{i} = \Delta p_{i}^{*} \leftarrow (6) \quad K_{i}^{*} = K + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}$$

$$\Delta p_{i}^{*} = \Delta p_{i} + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t}\right) + 2c\right]\dot{u}_{i} + 2m\ddot{u}_{i}$$

www.tnar.ir

بنابراین از رابطه ⑥ مقدار Δu_i و در حقیقت u_{i+1} و سپس از روابط ④ و ③ مقادیر $\Delta \dot{u}_i$ و $\Delta \ddot{u}_i$ که $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ را ارائه می دهند، حاصل می شوند.

برای سرشکن کردن خطاها در هر گام می توان $\ddot{u}_{i+1}$ را از رابطه تعادل محاسبه نمود:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - c\dot{u}_i - Ku_i\right)$$

روش فوق را روش NEWMARK'S β $\left(\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}\right)$ گویند.

۳- روش عددی گام به گام با شتاب خطی

$0 \leq \tau \leq \Delta t$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\tau \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{1}{2}\tau^2 + A_1$$

اعمال شرایط اولیه $\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}}{2\Delta t}\tau^2$

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + K\Delta u_i = \Delta P_i \quad ①$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u}_i = \ddot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\Delta \ddot{u}_i \quad ②$$

انتگرال از $\dot{u}(\tau) \rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6} + A_2$

$$u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6}$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2}\Delta t^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{6} \quad ③$$

$$\text{از رابطه ③} \Rightarrow \Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \quad ④$$

در رابطه ② بجای $\Delta \ddot{u}_i$ از ④ $\Leftarrow$

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \quad ⑤$$

در رابطه ① یعنی معادله جزئی حرکت بجای $\Delta \ddot{u}_i$ و $\Delta \dot{u}_i$ از معادل آنها از ④ و ⑤ قرار می دهیم:

www.itnar.ir

$$m\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i\right] + C\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right] +$$

$$+ K\Delta u_i = \Delta P_i \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{K}\,\Delta u_i = \Delta \tilde{P}_i \qquad (4) \rightarrow \tilde{K} = K + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}C$$

$$\Delta \tilde{P}_i = \Delta P_i + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 3\ddot{u}_i\right] + C\left[3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]$$

به این روش، روش NEWMARK's β گفته می‌شود. $\left(\beta = \frac{1}{6},\ \gamma = \frac{1}{2}\right)$

در هرگام می‌توان مقادیر C و K آن لحظه را قرار داد (برای رفتار غیر خطی).

در این روش نیز می‌توان برآیند سرشکن کردن خطاها، مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را از معادله حرکت محاسبه نمود.

مساله به Δt حساس است (از نظر پایداری و دقت):

اشاره: پایداری روش‌های Newmark بصورت زیر بیان می‌شود:

جزئیات در مباحث پیشرفته دینامیک سازه‌ها $\leftarrow$ $\dfrac{\Delta t}{T} \leq \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$

برای حالت شتاب متوسط $\leftarrow$ $\gamma = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{\Delta t}{T} < \infty$

یعنی روش شتاب متوسط به ازای هر مقدار Δt، پایدار است. البته در عمل مقادیر منطقی در نظر گرفته می‌شود.

برای حالت شتاب خطی $\leftarrow$ $\gamma = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{6}$ $\qquad \dfrac{\Delta t}{T} \leq 0.551$

یعنی پایداری روش مشروط است. البته در عمل، معمولاً Δt کوچک فرض می‌شود و این شرط برقرار است. برای مثال در حالت زلزله، برای در نظر گرفتن تغییرات شتاب زلزله ثبت شده معمولاً Δt برابر 0.02 یا 0.01 در نظر گرفته می‌شود که با توجه به پریود طبیعی سازه‌ها، این Δt کمتر از $0.551\,T$ خواهد بود.

معمولاً $\Delta t \leq \dfrac{T}{10}$ مناسب است.

www.tnar.ir

خلاصه نتایج روش های عددی گام به گام

۱- روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\, \ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t\, \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{P_{i+1} - K u_i - (c + K\Delta t)\,\dot{u}_i - \left(c\Delta t + \frac{K\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\}$$

۲- روش شتاب متوسط

$$u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2} u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + C\left(\frac{2}{\Delta t} u_i + \dot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K\right)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\, \dot{u}_i\right) - \ddot{u}_i$$

۳- روش شتاب خطی

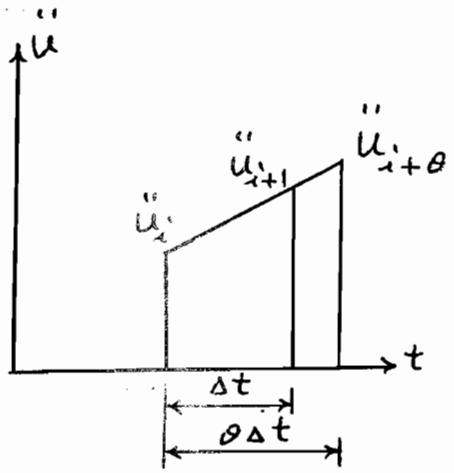
I $$u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2} u_i + \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + C\left(\frac{3}{\Delta t} u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K\right)$$

II $$\dot{u}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right) - 2\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i$$

III $$\ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i\right)$$

www.tttnar.ir

روش عددی گام به گام WILSON - θ



اساس روش مشابه روش گام به گام شتاب خطی است با این تفاوت که E.L. WILSON فرض می کند شتاب در فاصله زمانی کمی بزرگتر از Δt ، خطی است $(\theta \Delta t)$.

این امر برای تضمین پایداری روش شتاب خطی است و مقدار θ معمولاً بین 1.4 تا 2 در نظر گرفته می شود. روابط اصلی این روش مشابه روابط I ، II و III از روش شتاب خطی است و فقط بجای $i+1$ از $i+\theta$ و بجای Δt از $\theta \Delta t$ استفاده شده است.

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \left\{ u_{i+\theta} - u_i - \theta \Delta t \, \dot{u}_i - \frac{(\theta \Delta t)^2}{3} \ddot{u}_i \right\} \quad (a)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta \Delta t} \left(u_{i+\theta} - u_i \right) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \quad (b)$$

$$u_{i+\theta} = \left\{ P_{i+\theta} + m \left[\frac{6u_i}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i + 2\ddot{u}_i \right] + C \left[\frac{3}{\theta \Delta t} u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \right] \right\} \Big/ \left[\frac{6m}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{3C}{\theta \Delta t} + K \right] \quad (c)$$

چون فرض شده که شتاب بطور خطی از زمان $i\Delta t$ تا $(i+\theta)\Delta t$ تغییر می کند، بنابراین بیلروی مؤثر هم فرض می شود که در این فاصله زمانی، خطی تغییر می کند و $P_{i+\theta}$ بصورت:

$$P_{i+\theta} = P_i + \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} \right) \theta \Delta t = P_i (1-\theta) + P_{i+1} \theta \quad (d)$$

از رابطه (c) مقدار $u_{i+\theta}$ بدست آمده و آنرا در رابطه (a) قرار داده و $\ddot{u}_{i+\theta}$ محاسبه می شود، شتاب در گام زمانی معمولی Δt از رابطه زیر بدست می آید:

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \quad (e)$$

www.tmar.ir

(f) $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$ مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را در رابطه

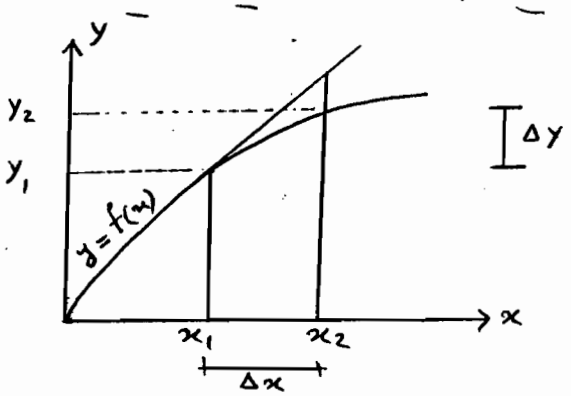
(g) $u_{i+1} = u_i + \Delta t\,\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{u}_{i+1}$ و همینطور در رابطه

از روابط شتاب خطی قرار داده و سرعت و تغییر مکان در لحظه t_{i+1} بدست می‌آید،

ج - روش عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تفاضل محدود سرعت و شتاب

CENTRAL DIFFERENCE METHOD (Finite Difference F.D.)

یکی از روش های حل دستگاه معادله دیفرانسیل آن است که به نحوی شتاب و سرعت را برحسب تغییر مکان بیان کرد، در این حالت مساله دینامیکی به صورت استاتیکی تبدیل می‌شود،

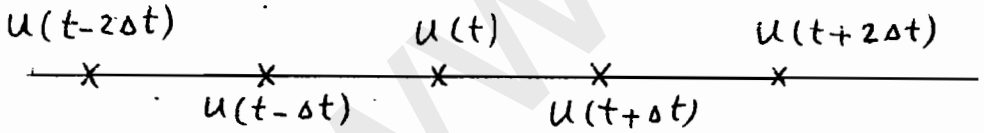


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{ریاضیات}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در ریاضیات کاربردی $\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq \frac{dy}{dx}$

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

مشکل مشکل برای حل — مشکل آسان برای حل



$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$ Forward F.D. تفاضل محدود پیش رونده

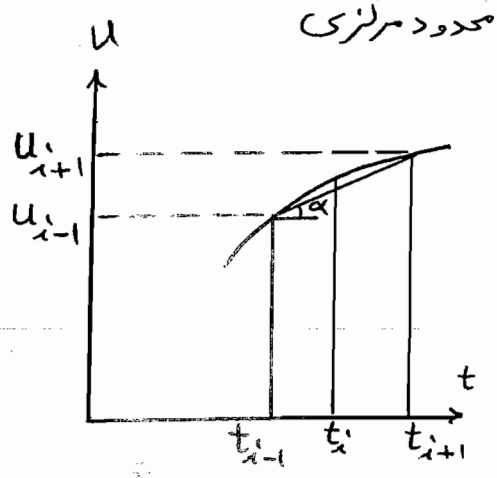
$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t) - u(t-\Delta t)}{\Delta t}$ Backward F.D. تفاضل محدود پس رونده

$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t}$ Central F.D. تفاضل محدود مرکزی

معمولاً در روش های عددی، روش تفاضل محدود مرکزی از خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است،

www.tmar.ir

جزئیات روش عددی تحلیل دینامیکی SDF از طریق تفاضل محدود مرکزی

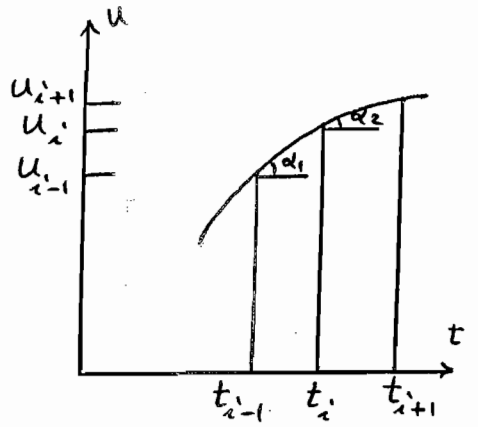


با توجه به اصول روش تفاضل محدود مرکزی :

$$\dot{u}_i = \alpha = \frac{1}{2\Delta t}(u_{i+1} - u_{i-1}) + R \quad \text{خطا} \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \;,\; \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$\frac{\text{تغییرات } \alpha \text{ (سرعت)}}{\text{زمان}} = \text{شتاب} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta t} = \ddot{u}_i$$



$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + R \quad (2)$$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + Ku_i = P_i \quad (3)$$

از خطا صرفنظر و از دو رابطه (1) و (2) در (3) قرار داده و u_{i+1} را محاسبه می کنیم :

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{i+1} = P_i + \left(-K + \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}\right)u_{i-1} \quad (4)$$

پس از تعیین u_{i+1} از روابط (1) و (2) می توان $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ را تعیین کرد،

با توجه به رابطه (4) و در شروع کار، نیاز به u_0 و u_{-1} می باشد. روابط 1 و 2 برای لحظه $t=0$ نوشته شده و بطور همزمان حل می شوند تا رابطه u_{-1} حاصل شود :

$$u_{-1} = u_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 - \Delta t\,\dot{u}_0 \quad (5)$$

در یک مساله واقعی ، دو پارامتر از سه پارامتر u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ کافی است.

توجه : در تمام روش ها ، یکی از سه رابطه اصلی بکار گرفته شده ، رابطه حرکت در لحظه t_{i+1} بوده بجز روش تفاضل محدود مرکزی که معادله حرکت در لحظه t_i بکار رفت .

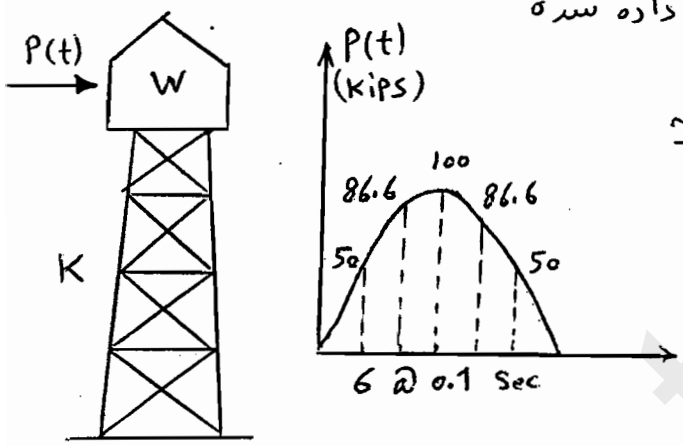
www.itnar.ir

روش هایی که معادله حرکت در لحظه $t+\Delta t$ را لازم دارند ، روش‌های ضمنی Implicit گویند.

و روش هایی که معادله حرکت در لحظه t را لازم دارند ، روش‌های صریح explicit گویند.

در تحلیل سیستم های چند درجه آزادی ، عملیات محاسباتی بیشتری در روش ضمنی نسبت به روش صریح وجود خواهد داشت ، در ضمن روش های صریح فقط بصورت مشروط پایدار خواهند بود در حالی که برخی روش‌های ضمنی بصورت غیر مشروط پایدار می باشند.

مثال - مطلوبست تحلیل دینامیکی برج آب داده شده



تحت بارگذاری سینوس مطابق شکل در یک ثانیه

با $\Delta t = 0.1$ sec ؟ $\xi = 10\%$

معادل $K = 100$ kips/in

یا

$W = 978.8$ kips

$$m = \frac{W}{g} = \frac{978.8}{386.4} = 2.533 \ \frac{\text{kips-s}^2}{\text{in}}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \ \text{Rad/s}$$

برای مقایسه ، از ۵ روش عددی شتاب ثابت ، متوسط ، خطی ، ویلسون و تفاضل محدود مرکزی استفاده می شود.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.283} \approx 1 \ \text{sec}$$

$$\Delta t = 0.1 = \frac{T}{10}$$

در مثال ها مقدار C لازم است :

$$C = 2\xi\omega m = 3.183 \ \text{kip-s/in}$$

شرایط اولیه صفر است :

$$u_0 = \dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$$

روابط اصلی ۵ روش به شرح زیر بدست می آید :

www.tnar.ir

الف ـ روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\dot{u}_i + 0.005\ddot{u}_i \quad (a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.1\ddot{u}_i \quad (b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{2.533}\left(P_{i+1} - 100u_i - 13.183\dot{u}_i - 0.8183\ddot{u}_i\right) \quad (c)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول اول

ب ـ روش شتاب متوسط

$$1176.9u_{i+1} = P_{i+1} + 1076.9u_i + 104.5\dot{u}_i + 2.533\ddot{u}_i \quad (d)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i \quad (e)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400(u_{i+1} - u_i) - 40\dot{u}_i - \ddot{u}_i \quad (f)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول دوم

ج ـ روش شتاب خطی

$$1715.3u_{i+1} = P_{i+1} + 1615.3u_i + 158.35\dot{u}_i + 5.225\ddot{u}_i \quad (g)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30(u_{i+1} - u_i) - 2\dot{u}_i - 0.05\ddot{u}_i \quad (h)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600(u_{i+1} - u_i) - 60\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \quad (i)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول سوم

د ـ روش WILSON-θ فرض می کنیم $\theta = 1.5$

از روابط روش که با حروف لاتین در جزئیات آنها بود استفاده می شود.

مقادیر m ، c ، k ، Δt ، θ را در رابطه (c) قرار می دهیم.

$$839.13\,u_{i+\theta} = P_{i+\theta} + 739.13\,u_i + 107.69\,\dot{u}_i + 5.305\,\ddot{u}_i$$

$\ddot{u}_{i+\theta} = 266.7(u_{i+\theta} - u_i) - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$. $P_{i+\theta}$ ازرابطه ⓓ محاسبه می‌شود.

↑ رابطه ⓐ

$\ddot{u}_{i+1} = 0.6667\,\ddot{u}_{i+\theta} + 0.3333\,\ddot{u}_i$ ← ازرابطه ⓔ

درنهایت رابطه اخیر را در معادلات ⓕ و ⓖ قرارداده :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.05\,(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\,\dot{u}_i + 0.00333\,\ddot{u}_i + 0.00167\,\ddot{u}_{i+1}$$

نتایج مراحل گام به گام دریک ثانیه در جدول چهارم

* - روش تفاضل محدود مرکزی

مقادیر m ، c ، k و Δt را در رابطه ⓔ قرارداده خواهیم داشت :

$$269.21\,u_{i+1} = P_i + 406.6\,u_i - 237.39\,u_{i-1}$$

روابط ① و ② :

$$\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1})$$

$$\ddot{u}_i = 100\,(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

برای شروع از رابطه ⑤ مقدار u_{-1} محاسبه می‌شود، چون درمسأله u_0 ، $\dot{u}_0$ ، $\ddot{u}_0$ صفراست پس u_{-1} هم صفراست.

نتایج مراحل گام به گام دریک ثانیه در جدول پنجم

توجه شود در جداول بجای i از n استفاده شده است.

www.tnar.ir

روابط مربوط به محاسبه نتایج دقیق تحت اثر بار نصف Sin :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{2\pi}{2\times 0.6} = \frac{\pi}{0.6} = 5.236 \quad Rad/s$$

$$P_o = 100 \quad kips \qquad P(t) = P_o \sin \Omega t = 100 \sin(5.236t)$$

$$\omega = 6.283 \rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.833$$

برای $t > 0.6$ (ارتعاش آزاد) باید شرایط اولیه آن در $t = 0.6$ برآورد شود.

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 6.283\sqrt{1-0.1^2} = 6.2515 \quad Rad/s$$

پاسخ سازه برای حالت بارگذاری (میرایی)

$$u(t) = \frac{P_o}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{(1-\beta^2)\sin\Omega t - 2\xi\beta\cos\Omega t\right\} +$$

$$\frac{P_o}{K}\frac{e^{-\xi\omega t}}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{2\xi\beta\cos\omega_D t + \frac{\Omega}{\omega_D}\left(1+\beta^2-2\frac{\omega_D^2}{\omega^2}\right)\sin\omega_D t\right\}$$

در رابطه $t = 0.6$ قرارداده و $u(t=0.6)$ تعیین می شود.

از مشتق $u(t)$ مشتق گرفته و در لحظه $t = 0.6$ سرعت $\dot{u}(t=0.6)$ به دست می آید.

رابطه ارتعاش آزاد بصورت زیر است :

$$u(t) = e^{-\xi\omega(t-0.6)}\left\{\frac{\dot{u}(0.6)+u(0.6)\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D(t-0.6) + u(0.6)\cos\omega_D(t-0.6)\right\}$$

نتایج شتاب متوسط و خطی خوب است ولی شتاب ثابت خوب نیست.

برای شتاب ثابت باید از Δt خیلی کوچکتر استفاده شود.

www.ttnar.ir

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش های عددی

Stability & Computational Error of Numerical Procedures

* پایداری روش عددی یعنی الگوریتم روش طوری باشد که با تغییر کوچک در گام زمانی Δt جوابهای مساله زیاد تغییر نکند (در روش های ناپایدار به ازای برخی Δt ، جوابها اشتباه و خیلی دور از جواب واقعی خواهد بود).

* با بررسی معیار خطا بر حسب Δt های مختلف برای یک روش عددی ، می توان شرط پایداری را تعیین نمود (روش های پایدار غیر مشروط - روش های پایدار مشروط).

روش عددی شتاب متوسط پایدار غیر مشروط - شتاب خطی و تفاضل محدود مرکزی پایدار مشروط

* در سیستم های معادل یک درجه آزادی ، مساله پایداری روش عددی معمولاً مطرح نیست چون Δt بطور محسوسی کوچکتر از حد پایداری خواهد بود (به دلیل T کوچک این سیستم ها).

در سیستم های چند درجه آزادی به دلیل نقش پریود های مودهای بالاتر ، مناسب و لازم است از روش های غیر مشروط استفاده کنیم.

خطاهای محاسباتی از چند طریق وارد روش عددی می شود :

الف - Round-off error ناشی از گرد کردن اعداد تولید شده بوسیله محاسبات تکراری

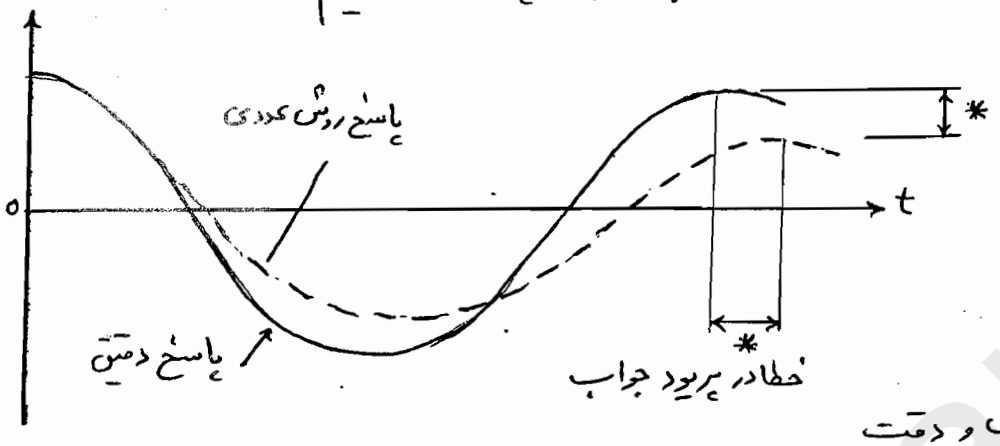
$\frac{1}{3} = 0.333\ldots\ldots$ ، $\frac{1}{5} = 0.2$

ب - Propagated error خطای پخشیدگی تولید شده در اثر جایگزینی معادله دیفرانسیل بوسیله تفاضل محدود معادل

ج - Truncation error تولید شده در اثر بیان u_{i+1} یا $\dot{u}_{i+1}$ توسط تعداد محدود عبارت در بسط سری تیلور

$$u_{i+1} = \sum_{l=i-K}^{i} A_l u_l + \sum_{l=i-K}^{i+1} B_l \dot{u}_l + \sum_{l=i-K}^{i+1} C_l \ddot{u}_l + R \quad \text{خطا}$$

A_l ، B_l و C_l ضرایب ثابت که برخی صفر می شوند. در روش های عددی با توجه به الگوریتم روش، فقط برخی عبارات از سری کلی بالا وجود دارد، پس خطا خواهیم داشت.



نکته کلی در مسائل متعارف

رعایت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ پایداری و دقت

تمایل سیستم را باعث می شود.

تحلیل دینامیکی سیستم های غیرخطی Analysis of Nonlinear Response

از دو طریق رفتار سیستم ها از حالت خطی به غیر خطی تبدیل می شود: هندسی و فیزیکی

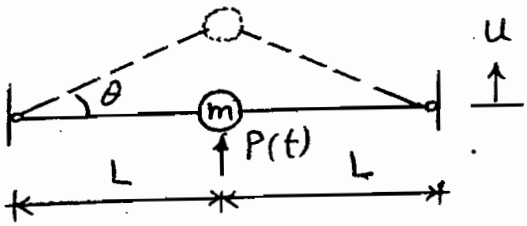
تغییر مکانهای بزرگ (غیر خطی هندسی) و عدم پیروی اجزاء و مصالح از قانون هوک (غیر خطی فیزیکی).

اساس روش های تحلیل دینامیکی، صادق بودن قانون جمع آثار خواهد بوده است که در رفتار خطی مصداق دارد و در حال حاضر تنها روش تحلیل دینامیکی برای سیستم های غیرخطی، روش های عددی می باشد.

دلایل دیگری برای بکارگیری روش های عددی وجود دارد: اندرکنش خاک - سازه - آب که تحلیل در میدانه مرکانش را ضروری می سازند، ضربه های خیلی ناگهانی (انفجار) که باعث تحریک مود های بالا می شود و روش مناسب، روش عددی است.

www.itnar.ir

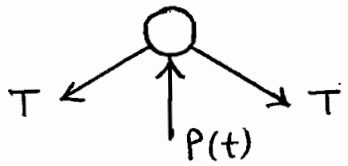
مثال - سیستم ساده جرم که توسط دو کابل کشیده نگهداشته شده است، معادله حرکت؟



T_0 : کشش اولیه در حالت بدون تغییر مکان (سیال)

اجزاء سازه از قانون هوک پیروی می کنند : $\sigma = E\varepsilon$

تغییر طول کابل $\delta = \sqrt{L^2+u^2} - L$



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \;,\; \sigma = \frac{T}{A} \Rightarrow T = \frac{EA}{L}\delta$$

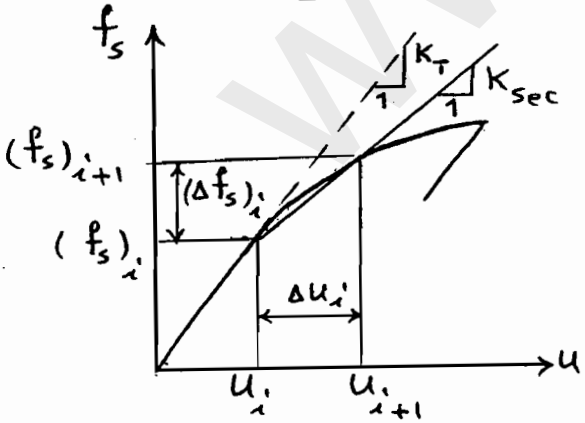
$$\Sigma F = m\ddot{u} \rightarrow P(t) - 2T\sin\theta = m\ddot{u}$$

$$\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} \Rightarrow m\ddot{u} + 2\left\{T_0 + \frac{EA}{L}\left[(L^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - L\right]\right\}\frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} = P(t)$$

رابطه غیرخطی هندسی رفتار جرم m

اگر $u \ll L$ → $m\ddot{u} + 2T_0\frac{u}{L} = P(t)$ ← رابطه خطی

رفتار غیرخطی مبتنی بر متغیر بودن جرم، میرایی و سختی وارد مساله می شود. معمولاً جرم با زمان تغییر نمی کند و با توجه به عدم قطعیت در تعیین دقیق میرایی، خطی در نظر گرفته آنرا دور از واقعیت نخواهد بود. بنابراین منشاء اصلی رفتار غیرخطی در سیستم های متعارف همانا عدم پیروی از قانون هوک در اجزاء و مصالح سازه خواهد بود. این رفتار توسط مبانی علم تئوری پلاستیسیته تعیین می شود :



(منحنی رفتاری سازه)

در فاصله زمانی i و i+1 معادله جزئی حاکم :

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta P_i \qquad (1)$$

$$(\Delta f_s)_i = (K_i)_{sec}\,\Delta u_i \qquad (2)$$

سختی سکانت Secant stiffness در فاصله گام زمانی به دلیل اینکه u_{i+1} مشخص نمی باشد نمی توانند بکار رود چون معلوم نیست. اگر فاصله زمانی Δt کوچک باشد، می توان از سختی مماسی K_T استفاده کرد :

$$(\Delta f_s)_i \simeq (K_i)_T\,\Delta u_i \qquad (3)$$

www.tfnar.ir

بنابراین در الگوریتم روش‌های عددی قبلی تغییر کلی رخ نمی دهد بلکه فقط مقدار K در هر گام ثابت بوده و مقدار آن برابر K_T (سختی مماسی ابتدای گام) خواهد بود.

برای نمونه کلیات روش نیومارک (شتاب خطی) در این حالت بیان می شود:

ازقبل داشتیم: ④ $\Delta u = \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6} \Delta\ddot{u}$

$u_{i+1} = u_i + \Delta u$ ، $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}$

از رابطه ④ ← $\Delta\ddot{u} = \frac{6}{(\Delta t)^2} \left(\Delta u - \Delta t\, \dot{u}_i - \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i \right)$ ⑤

در روش نیومارک ← $\Delta\dot{u} = \Delta t\, \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \Delta\ddot{u}$ ⑥

که $\Delta\dot{u} = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ با بکارگیری ⑤ در ⑥:

$\Delta\dot{u} = \frac{3}{\Delta t} \Delta u - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i$ ⑦

حال اگر ③، ⑤ و ⑦ را در ① قرار دهیم:

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T \right) \Delta u = \Delta P + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i \right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right)$$

یا $K_T^* \Delta u = \Delta P^*$ ⑧

که

$$\begin{cases} K_T^* = \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T \\ \Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i \right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right) \end{cases}$$

پس از تعیین Δu از رابطه ⑧، مقدار آن را در ⑥ قرار داده و $\Delta\dot{u}$ محاسبه می شود.

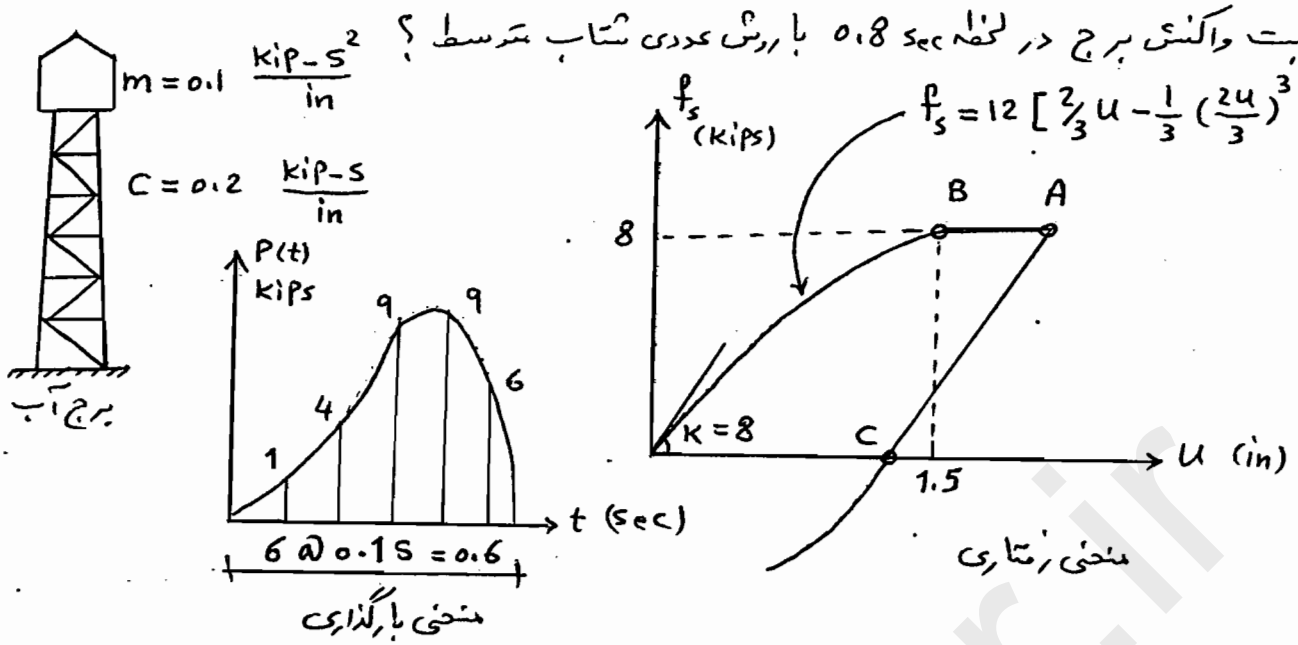
و بنابراین با داشتن Δu و $\Delta\dot{u}$ می توان u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ را تعیین نمود.

مقدار شتاب می تواند از رابطه ⑤ یا برای سرشکن کردن خطای سختی مماسی از رابطه تعادل کلی در زمان $i+1$ تعیین شود:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - f_s(t+\Delta t) - c\dot{u}_{i+1} \right\} \quad ⑨$$

مثال - برج آب با جرم m و میرایی c تحت انفجار قرار می‌گیرد، منحنی رفتاری $f_s - u$ داده شده است،

مطلوبست واکنش برج در لحظه $0.8\ sec$ با روش عددی شتاب متوسط ؟



حل :

از الگوریتم روش شتاب متوسط :

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i\right)$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t}\Delta u - 2\dot{u}_i = 20\,\Delta u - 2\dot{u}_i \quad , \quad K^*\Delta u = \Delta P^*$$

$$K^* = \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T\right) = 44 + K_T$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{4\dot{u}_i}{\Delta t} + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta P + 4.4\,\dot{u}_i + 0.2\,\ddot{u}_i$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}_{\text{اولیه}} = 0.702\ sec \quad , \quad \Delta t = 0.1 \simeq \frac{1}{7}T$$

جدول مربوط تکمیل می شود، به نکات زیر توجه شود :

* برای $u > 1.5\ in$ ، نیروی f_s برابر $8\ kips$ می باشد،

* در فاصله زمانی 0.4 به 0.5 تغییر مکان از 1.1128 به 1.7093 می رسد (بزرگتر از 1.5) و f_s از رابطه خود به مقدار ثابت 8 تغییر کند ولی چون Δt بزرگ است، محل و زمان دقیق این تغییر نامشخص،

* در فاصله زمانی 0.5 به 0.6، سرعت تغییر علامت داده، یعنی صفر شده سپس تغییر علامت، بنابراین سختی از صفر باید به 8 تبدیل شود (پس از نقطه A منحنی رو به پایین است) ولی محل دقیق مشخص نیست،

* در گام های بعد از 0.6، K_T به 8 تغییر می کند و نیروی فنر در بخش تنزلی منحنی رفتار قرار دارد، مثلاً در ثانیه 0.7 :

$$f_s = 8 + 8\Delta u = 8 - 8 \times 0.3459 = 5.2328\ kips$$

* جدول حل مثال در صفحه ۶۲ بالای صفحه جدول الف

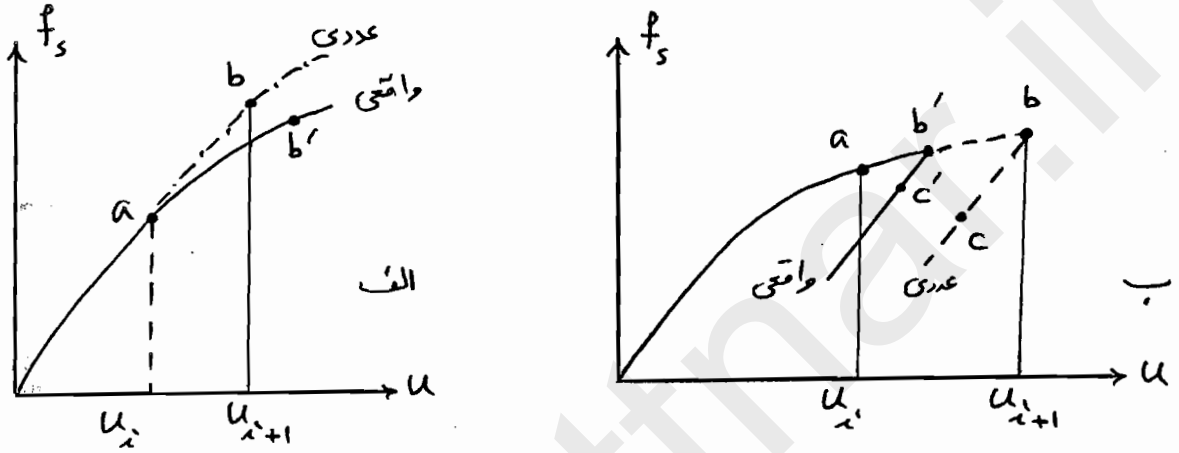
www.tnar.ir

خطا در تحلیل غیرخطی دینامیکی سیستم ها

علاوه بر خطاهای رایج روش های عددی ، خطاهای دیگری که مختص حالت غیرخطی است ، بوجود می آید (در بکارگیری سختی از رابطه ومنحنی نیرو - تغییرمکان) :

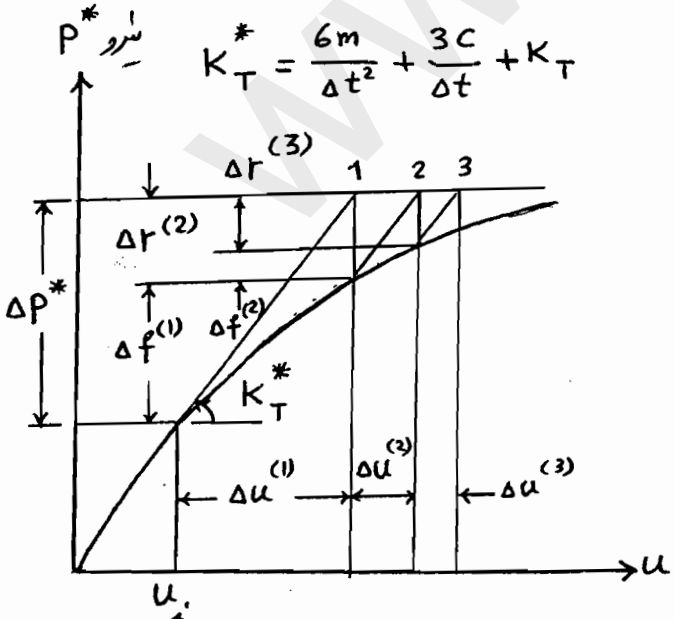
الف - خطای ناشی از استفاده سختی مماسی ابتدای گام به جای سختی واقعی

ب - تأخیر در آشکار سازی گذرای رابطه نیرو - تغییرمکان

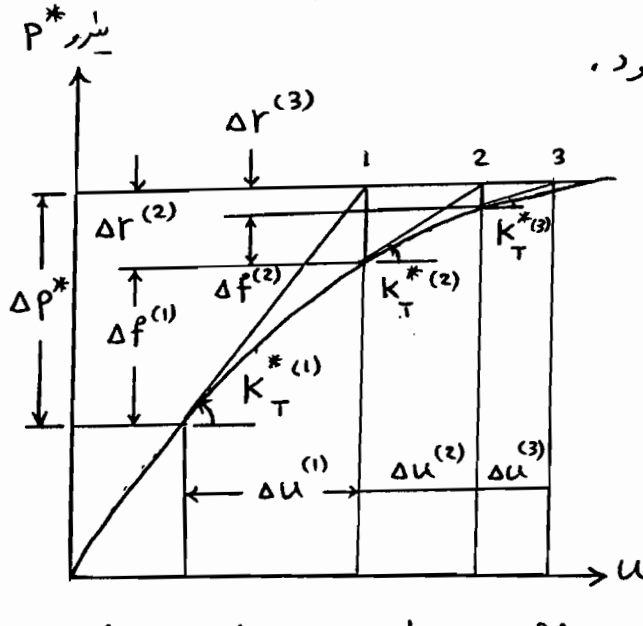


برای کاهش اثر خطاهای حالت ب می توان در محل های تغییر جهت منحنی ، از Δt کوچکتر استفاده شود که معمولاً از $\frac{\Delta t}{4}$ استفاده می شود (کنترل و اعمال توسط کامپیوتر) ،

خطای ناشی از بکارگیری سختی مماسی با بکارگیری روش تکراری در هرگام ، می تواند حداقل شود .



(tangent Stiffness)



(current tangent Stiffness)

Modified NEWTON - RAPHSON ITERATION | original N. - R. method

www.tmat.ir

با توجه به شکل $f_s - u$ برای خطای مورد نظر و جهت دسترسی به نقطه t واقعی از طریق نقطه t ، روش تکراری Iteration در یک گام بکار می رود (به شرح زیر) :

$$K_T^* \Delta u^{(1)} = \Delta p^* \qquad (8)$$

رابطه ۸ روش نیومارک شتاب خطی

در حالت غیرخطی که سختی ثابت با افزایش تغییرمکان ، کاهش می یابد ، نیروی ثابت معادل ناشی از تغییرمکان $\Delta u^{(1)}$ کمتر از مقداری است که رابطه (8) ارائه می دهد ، بعنوان نتیجه ، یک نیروی اضافی باقی می ماند که در شکل ملاحظه می شود و آنرا با $\Delta r^{(2)}$ نشان داده ایم . تغییرمکان اضافی در اثر این نیروی باقی مانده بصورت زیر است :

$$K_T^* \Delta u^{(2)} = \Delta r^{(2)} = \Delta p^* - \Delta f^{(1)} \qquad (9)$$

از این تغییرمکان اضافی ، نیروی باقی مانده جدید پیدا شده و مسأله به همین ترتیب ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود ، مراحل تکرار در یک گام زمانی به شرح زیر است :

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)}$$

$$u_{i+1}^{k} = u_{i+1}^{k-1} + \Delta u^{(k)} \qquad (10)$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{k-1} + \frac{6m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{3c}{\Delta t} \Delta u^{(k)} \qquad k = 1, \hat{k}$$

$$\Delta r^{k+1} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

از رابطه (8) مشخص است که مرحله تکرار با $\Delta r^{(1)} = \Delta p^*$ شروع می شود . وقتی مراحل تکرار ، همگرا شد یعنی $\Delta r^{(k)}$ یا $\Delta u^{(k)}$ به اندازه کافی کوچک شد ، تغییرمکان کل نموی از رابطه $\Delta u = \sum_{k=1}^{\hat{k}} \Delta u^{(k)}$ حاصل می شود .

نرخ همگرایی می تواند بهتر شود چنانچه بجای سختی مماسی اولیه از جریانه مماسی سختی استفاده شود که البته برآورد سختی مماسی جدید مستلزم محاسبات بیشتر است .

www.tinar.ir

مثال - برج آب مثال قبل مورد نظر است تحت اثر همان بارگذاری، منتهی این بار در منحنی رفتار غیرخطی از روش تکراری استفاده شود. قسمت انتقال A نیز با دقت بیشتری بررسی شود. روش عددی شتاب متوسط بکار می رود با $\Delta t = 0.1$ که در مرحله تغییر فاز از Δt کوچکتر استفاده خواهد شد.

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)} \quad , \quad u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(k)}$$

$$K_T^* = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T = 44 + K_T \quad \text{که} \quad \Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

$$\Delta p^* = \Delta p + m\left(\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta p + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i \quad \text{و}$$

نتایج 0.8 ثانیه و مراحل تکرار در قسمت غیرخطی در جدول ارائه شده است.

برای نمونه مراحل مربوط به فاصله زمانی 0.3 تا 0.4 به شرح زیر خواهد بود:

$$\Delta u^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta r^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta p^* = \frac{31.3839}{51.0968} = 0.6142$$

پس:

$$u^{(1)}(0.4) = u^{(1)}(0.3) + 0.6142 = 1.1182$$

$$\Delta f^{(1)} = f_s(1.1182) - f_s(0.5040) + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(1)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(1)}$$

$$= 7.2885 - 3.8803 + 44 \times 0.6142 = 30.4330$$

$$\Delta r^{(2)} = 31.3839 - 30.4330 = 0.9509$$

$$\Delta u^{(2)} = \frac{0.9509}{51.0968} = 0.0186 \rightarrow u^{(2)}(0.4) = 1.1182 + 0.0186 = 1.1368$$

$$\Delta f^{(2)} = f_s(1.1368) - f_s(1.1182) + 44 \times 0.0186$$

$$= 7.3532 - 7.2885 + 44 \times 0.0186 = 0.8831$$

www.tmar.ir

$$\Delta r^{(3)} = \Delta r^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 0.9509 - 0.8831 = 0.0678$$

$$\Delta u^{(3)} = \frac{0.0678}{51.0968} = 0.0013 \longrightarrow \quad \text{و ادامه ...}$$

* بین 0.6 و 0.7 ثانیه ، سرعت از مثبت به منفی تبدیل می شود . بوسیله محاسبات تکراری ، زمان $t_1 = 0$ برابر 0.60339 ثانیه است ، بعد از این لحظه ، سختی به 8 kips/in برمی گردد .

محاسبات بین 0.6 و 0.60339 با $\Delta t = 0.00339$ انجام شده است ، بطور مشابه محاسبات بین 0.60339 و 0.7 ثانیه با $\Delta t = 0.09661$ انجام گردید ، بعد از لحظه $t = 0.60339$ ، نیروی فنر f_s درقسمت تنزلی به طرف پایین می افتد طوریکه نیروی فنر به $8\Delta U$ کاهش می یابد (درهرگام زمانی) ،

با مقایسه نتایج دو جدول در دو مثال اخیر ، ملاحظه می شود اگر در فاصله زمانی که تغییر مکان و نیرو در منحنی رفتار ، غیرخطی است ، از روش تکراری استفاده نشود ، در اصلاح نتایج و ملحوظ داشتن مساله غیرخطی در محاسبات ، اشتباه قابل توجهی خواهیم داشت ،

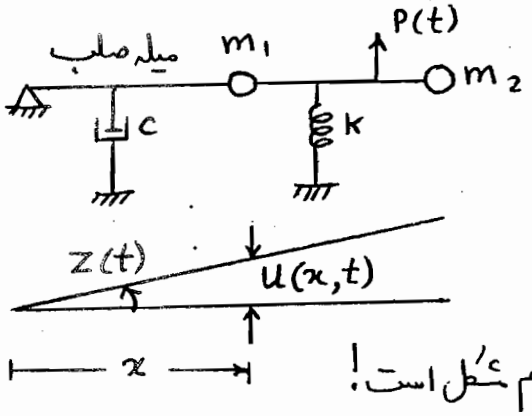
تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

Dynamic Analysis of Generalized SDF systems

سیستم های پیچیده تر از حالت های یک درجه آزادی که مشابه حالت SDF تحلیل می شوند ، اگر سیستم از اجزاء صلب سرهم بندی شده تشکیل شده باشد و فقط در یک حالت تغییر شکل بدهد بطور دقیق و اگر سیستم با جرم گسترده و انعطاف پذیر باشد ، بطور تقریبی تحلیل خواهد شد ،

www.tinar.ir

در حالت تقریبی (انعطاف پذیر) دقت فرکانس زاویه ای بستگی به شکل ارتعاشی مفروض خواهد داشت.

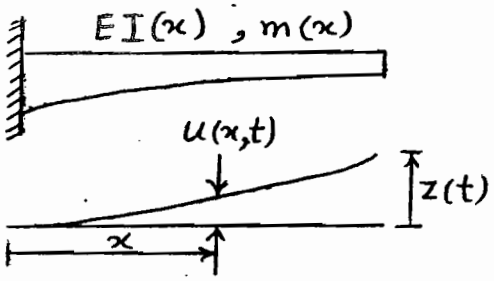


سیستم روبرو: صلب ← $u(x,t) = \psi(x) z(t)$

مختصات شاخص SDF: می تواند چرخش $z(t)$ باشد

تابع تغییر شکل، چوله میله صلب ← $\psi(x) = x$

چوله دو جرم متمرکز وجود دارد ← سیستم معادل SDF یک جرم شکل است!



سیستم روبرو: جرم و سختی گسترده متغیر (انعطاف پذیر)

دارای بینهایت درجه آزادی ـ فرکانس اصلی (اوّل) در ارتعاش بسیار مهم ـ بطور تقریبی می توان تابع تغییر شکل حالت ارتعاش اصلی (مود اوّل) را (فقط) درنظر گرفت $\psi(x)$ و در این حالت یک مختصات شاخص را انتخاب نمود $z(t)$، مثلاً انتهای سرطره.

هردو سیستم حالت تعمیم داده شده دارند چون تغییر مکان هر نقطه با رابطه $u(x,t) = \psi(x) z(t)$ مشخص می شوند.

$$m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + k^* z = P^*(t)$$

جرم، میرایی، سختی و نیروی تعمیم داده شده (علامت ستاره). حل معادله از روش های متعارف امکان پذیر است. مرحله اصلی تحلیل سیستم جدید تعمیم داده شده، همانا ارزیابی مشخصات تعمیم داده شده می باشد.

حالت الف ـ سیستم های صلب سرهم بندی شده

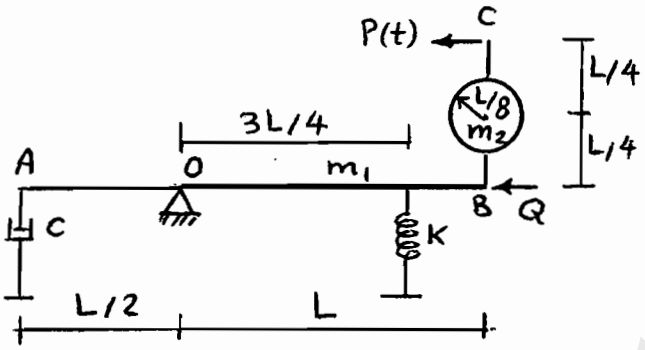
در این نوع سیستم، اجزاء صلب همراه جرم گسترده و جرم متمرکز و سختی و میرایی متمرکز وجود دارند که تحت اثر نیروی دینامیکی قرار می گیرند. برای تشکیل معادله حرکت، روش تعادل دوم نیوتن مشکل بوده و بهتر است از روش دالامبر استفاده شود (نیروهای اینرسی در پیکره آزاد سیستم لحاظ شوند).

www.tnar.ir

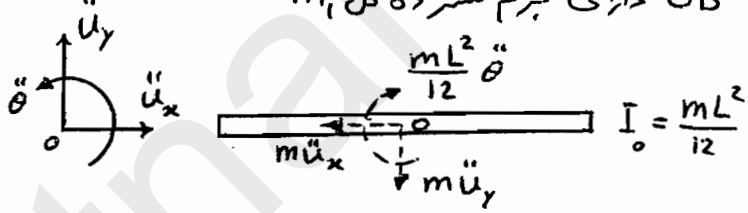
نیروی اینرسی گسترده برای یک جسم صلب با جرم گسترده با دو مولفه جابجایی (پیاده) می‌شود:

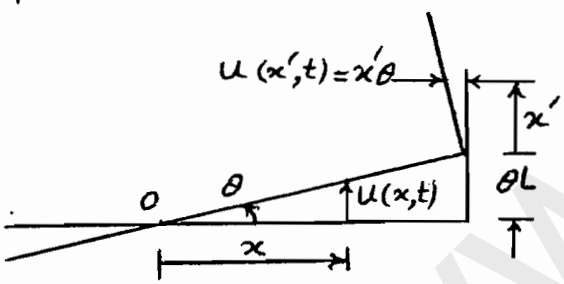
نیروی اینرسی متمرکز کل جرم در مرکز ثقل و ممان اینرسی جسم.

مثال - در سیستم سرهم بندی شده زیر مطلوبست تعیین: ۱- معادله حرکت ۲- فرکانس طبیعی ۳- درصد میرایی ۴- پاسخ سیستم بدون میرایی تحت اثر ناگهانی نیروی P_0 ۵- اصلاح معادله حرکت وقتی نیروی افقی Q در میله افقی اثر می‌کند ۶- نیروی بحرانی (کمانش). تغییر مکانها کوچک و مختصات شاخص، چرخش حول نقطه O در نظر است.



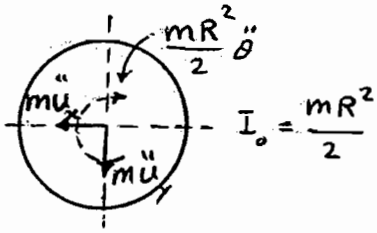
حل: سیستم صلب - OA و BC بدون جرم - OB دارای جرم گسترده کل m_1



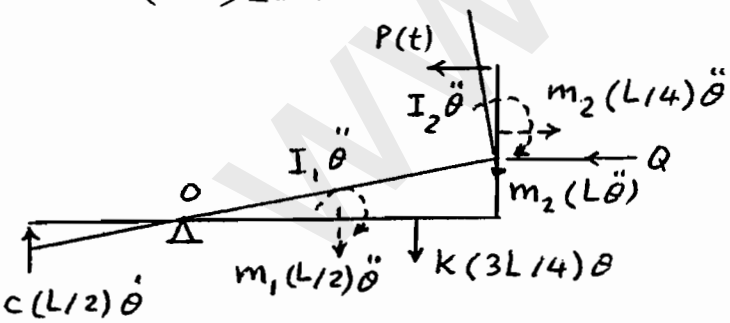


(تغییر مکانها)

$u(x,t) = x\,\theta(t)$



با توجه به نیروها، نسبت به نقطه O لنگر می‌گیریم:



(نیروها)

$$I_1\ddot{\theta} + \left(m_1\frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2} + I_2\ddot{\theta} + (m_2L\ddot{\theta})L + \left(m_2\frac{L}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{4} + \left(c\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\frac{L}{2} + \left(k\frac{3L}{4}\theta\right)\frac{3L}{4} = P(t)\frac{L}{2}$$

$$I_1 = m_1L^2/12 \;,\; I_2 = m_2(L/8)^2/2 = m_2L^2/128$$

$$\left(\frac{m_1L^2}{3} + \frac{137}{128}m_2L^2\right)\ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4}\dot{\theta} + \frac{9kL^2}{16}\theta = P(t)\frac{L}{2}$$

معادله حرکت ←

$$m^*\ddot{\theta} + c^*\dot{\theta} + k^*\theta = P^*(t)$$

www.ttnar.ir

$$m^* = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2\right) L^2 \quad , \quad C^* = \frac{cL^2}{4} \quad , \quad K^* = \frac{9kL^2}{16} \quad , \quad P^*(t) = P(t)\frac{L}{2}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*} \quad , \quad \xi = \frac{C^*}{C_{cr}} = \frac{C^*}{2m^*\omega^*} = \frac{C^*}{2\sqrt{K^* m^*}}$$

از حل معادله حرکت :

$$P^*(t) = \frac{P(t)L}{2} = \frac{P_0 L}{2} \equiv P_0^*$$

$$\theta(t) = \frac{P_0^*}{K^*}(1-\cos\omega t) = \frac{8P_0}{9kL}(1-\cos\omega t)$$

$$u(x,t) = x\,\theta(t) \quad , \quad u(x',t) = x'\theta(t)$$

اگر نیروی افقی Q باشد ؛ در لنگرگیری : $QL\theta$

$$m^*\ddot{\theta} + C^*\dot{\theta} + (K^* - QL)\theta = P^*(t)$$

نیروی افقی فشاری ، سختی را کاهش می دهد .

$$K^* - QL = 0$$

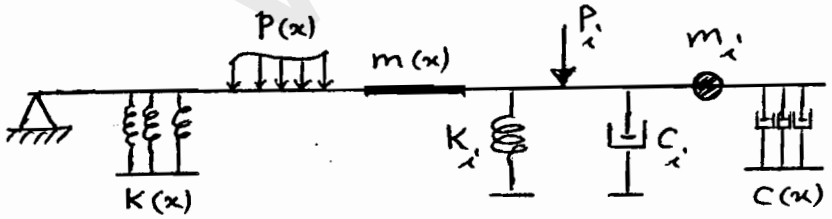
$$Q_{cr} = \frac{K^*}{L} = \frac{9kL}{16}$$

حالت ب سیستم های انعطاف پذیر

سیستم با بینهایت درجه آزادی با سختی و جرم گسترده در حالت مرتعش (غیر صلب)

دقت مساله بستگی به تابع شکل $\Psi(x)$ دارد $\quad u(x,t) = \Psi(x)\,Z(t)$

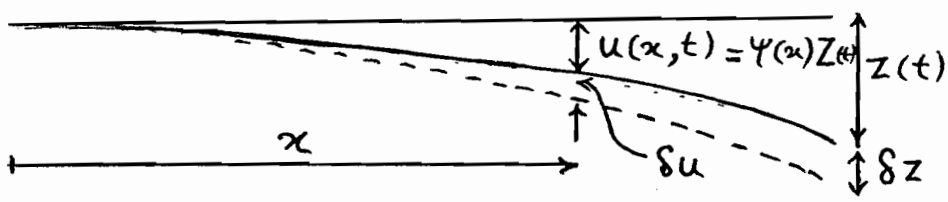
که تا چه حدی شرایط مرزی (هندسی) و شرایط فیزیکی مساله را ارضاء می نماید .



حالت کلی :

کاربرد اصل کار مجازی :

کار نیروها برابر صفر



www.tnar.ir

کار مجازی الاستیک $W_S = -\int \overbrace{k(x)u(x,t)dx}^{\text{نیروی فنر گسترده}} \cdot \delta u - \sum_i K_i u_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} u(x,t) = \psi(x) z(t) \rightarrow \delta u = \psi(x)\delta z \\ u_i = \psi_i z(t) \rightarrow \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_S = -\left\{ \int k(x)\psi^2(x)dx + \sum_i K_i \psi_i^2 \right\} z\,\delta z$$

کار مجازی نیروهای میرایی $W_D = -\int c(x)\dot{u}(x,t)dx \cdot \delta u - \sum_i c_i \dot{u}_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) = \psi(x)\dot{z}(t) \rightarrow \delta u = \psi(x)\delta z \\ \dot{u}_i = \psi_i \dot{z}(t) \rightarrow \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_D = -\left\{ \int c(x)\psi^2(x)dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \right\} \dot{z}\,\delta z$$

به همین ترتیب؛ کار مجازی نیروی اینرسی:

$$W_I = -\left\{ \int m(x)\psi^2(x)dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \right\} \ddot{z}\,\delta z$$

کار مجازی نیروهای خارجی:

$$W_P = \int p(x)dx \cdot \delta u + \sum_i P_i \delta u_i$$

$$W_P = \left\{ \int p(x)\psi(x)dx + \sum_i P_i \psi_i \right\} \delta z$$

با توجه به جهت نیروها و جهت تغییر مکان مجازی و علامت کارها، خواهیم داشت: $\delta z \neq 0$

معادله حرکت سیستم معادل SDF:

$$m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + k^* z = P^*(t)$$

$$m^* = \int m(x)\psi^2(x)dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \qquad k^* = \int k(x)\psi^2(x)dx + \sum_i K_i \psi_i^2$$

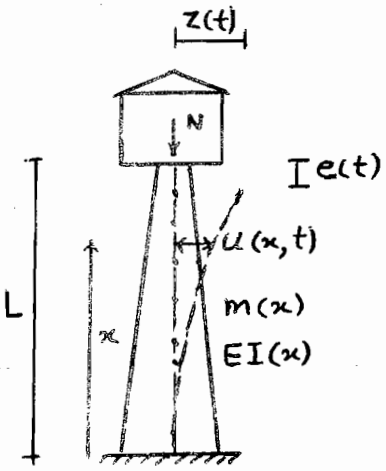
$$c^* = \int c(x)\psi^2(x)dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \qquad P^* = \int p(x)\psi(x)dx + \sum_i P_i \psi_i$$

جرم، میرایی، سختی و نیروی مؤثر معادل سیستم SDF تعمیم داده شده با تابع $\psi(x)$

www.tnar.ir

جزئیات بیشتر در یک حالت خاص

$u(x,t) = \psi(x) Z(t)$



از مبانی انرژی استفاده می‌کنیم (انرژی جنبشی و پتانسیل) :

انرژی جنبشی $T = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \dot{u}^2(x,t)\, dx =$

$$\frac{1}{2}\int_0^L m(x)\,[\psi^2(x)\,\dot{z}^2]\,dx \equiv \frac{1}{2} m^* \dot{z}^2 = T$$

جرم مؤثر معادل $m^* = \int_0^L m(x)\,\psi^2(x)\,dx$

برای بیان سختی معادل مؤثر K^* از اصول مقاومت مصالح (انرژی پتانسیل تغییر شکل) :

انرژی یا کارلنگر (ممان) $V = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx$ ، $u''(x,t) = \frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

$M = EI\,u''$ ، $u'' = \psi''(x)\,z(t)$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(EI)^2}{EI}(u'')^2\,dx \Rightarrow V = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\psi''(x)\,z(t)\right)^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} K^* z^2 \quad \text{که} \quad K^* = \int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx$$

سختی هندسی معادل مؤثر ؛ نیروی محوری (قائم) N ← افت راس برج آب e

از مقاومت مصالح :

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u'^2(x,t)\,dx$$

انرژی پتانسیل آن $V_N = -\frac{N}{2}\int_0^L u'^2(x,t)\,dx$

انرژی پتانسیل نیروی N در اثر افت $e(t)$ کم می‌شود ← علامت منفی

اگر وزنه متغیر پایه مدنظر باشد ، $N(x)$

$$V_N = -\frac{1}{2}\int_0^L N(x)\,u'^2(x,t)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^L N(x)\,[\psi'(x)\,z]^2\,dx$$

$$V_N = -\frac{1}{2} K_G^* z^2 \quad \text{که} \quad K_G^* = \int_0^L N(x)\,\psi'^2(x)\,dx$$

---

www.tnar.ir

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx - N_{cr}\int_0^L \psi'^2(x)\,dx = 0$$

بحرانی (کمانش) $N_{cr} = \dfrac{\int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx}{\int_0^L \psi'^2(x)\,dx}$

محاسبه فرکانس زاویه‌ای معادل مؤثر $\omega^* = \sqrt{K^*/m^*}$

مثال - در برج آب قبلی $EI(x)$ و $m(x)$ در طول ارتفاع ثابت فرض می‌شود. مطلوبست برآورد ω^* برای توابع مختلف شکل $\psi(x)$ (جرم گسترده m).

الف - اگر از مُدال اولر در پایداری سازه‌ها استفاده کنیم $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$m^* = \int_0^L m\,\psi^2(x)\,dx = m\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,mL$$

$$K^* = \int_0^L EI\,\psi''^2(x)\,dx = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*} = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32\,L^3 \times 0.228\,mL}} = \frac{3.653}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ب - اگر شکل ارتعاش برج را سهمی فرض کنیم: $\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$

$$m^* = 0.2\,mL,\quad K^* = \frac{4EI}{L^3},\quad \omega^* = \sqrt{\frac{4EI}{L^3 \times 0.2\,mL}} = \frac{4.472}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

---

* جواب دقیق از حل سیستم پیوسته:

$$\omega^* = \frac{3.517}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

در حالت ب، $\psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$ ← $\dfrac{d^2u}{dx^2} = Z\psi'' = Z\dfrac{2}{L^2}$ (عدد ثابت)، $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{M}{EI} = Z\dfrac{2}{L^2}$

یعنی لنگر در طول ارتفاع ثابت است در صورتیکه در انتهای برج صفر و در تکیه‌گاه حداکثر است پس تابع مد نظر $\psi(x)$ یکی از شرایط فیزیکی را ارضاء نکرده و جواب از واقعیت دور است.

www.ttnar.ir

ج - در این حالت سعی می شود با ارضاء شرایط مرزی و فیزیکی بیشتر، به یک تابع شکل $\psi(x)$ بهتر دست یابیم. یک تابع درجه ۳ (چند جمله ای) فرض می کنیم:

$\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ چهار ضریب پس چهار شرط لازم است.

۱- تغییر مکان در تکیه‌گاه صفر است:

$u = 0 \rightarrow \psi(x=0) = 0$

۲- ضریب زاویه در تکیه‌گاه گیردار صفر است:

$u' = 0 \rightarrow \psi'(x=0) = 0$

۳- لنگر در انتهای برج صفر است:

$u'' = 0 \rightarrow \psi''(x=L) = 0$

۴- همیشه در نقطه شاخص (مختصات شاخص):

$u(x,t) = z(t) \rightarrow \psi(L) = 1$

اعمال شرایط $\Rightarrow a = -\frac{1}{2L^3}$, $b = \frac{3}{2L^2}$, $c = d = 0$ $\Rightarrow$

$$\psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2} \quad , \quad \psi''(x) = \frac{3}{L^2}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$K^* = \frac{3EI}{L^3} \quad , \quad m^* = 0.2357mL \Rightarrow \omega^* = \frac{3.568}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

برآورد سختی هندسی و نیروی N_{cr}:

حالت الف $\rightarrow \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L} \rightarrow K_G^* = \int_0^L N\,\psi'^2(x)\,dx$

$$K_G^* = N\int_0^L \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N\pi^2}{8L} \rightarrow N_{cr} = 2.467\,\frac{EI}{L^2}$$

حالت ب $\rightarrow \psi(x) = x^2/L^2 \rightarrow K_G^* = \frac{4}{3}\frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$

حالت ج $\rightarrow \psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2} \rightarrow K^* = \frac{6}{5}\frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = 2.5\,\frac{EI}{L^2}$

حالت واقعی $\rightarrow$ $N_{cr} = 2.67\,\frac{EI}{L^2}$

---

www.tnar.ir

RAYLEIGH'S Method for ω تعیین فرکانس زاویه‌ای بوسیله روش رایله

در سال ۱۸۷۳ با استفاده از اصل بقای انرژی، روش ساده برای برآورد ω (ارتعاش آزاد)

الف - سیستم جرم و فنر (سختی و جرم مؤثر معادل)

$$u(t) = u_0 \sin \omega t$$

$$\dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \quad , \quad u_{max} = u_0 \quad , \quad \dot{u}_{max} = u_0 \omega$$

حداکثر انرژی پتانسیل $V_{max} = \frac{1}{2} k u_{max}^2 = \frac{1}{2} k u_0^2$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{u}_{max}^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2$

$$T_{max} = V_{max} \Rightarrow \omega^2 = k/m$$

ب - سیستم با جرم و سختی گسترده بطول L

$$u(x,t) = \psi(x)\, z(t)$$

تغییرمکان نقطه شاخص $z(t) = z_0 \sin \omega t$

$$u(x,t) = \psi(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u_{max} = \psi(x) z_0$$

$$\dot{u}(x,t) = \psi(x) z_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = \psi(x) z_0 \omega$$

$$u''(x,t) = \psi''(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u''_{max} = \psi''(x) z_0$$

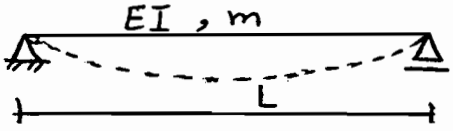
انرژی پتانسیل $V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) u''^2 dx \rightarrow V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI(x) \psi''^2(x) dx$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \dot{u}^2 dx \rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \omega^2 = \int_0^L EI(x) \psi''^2(x) dx \Big/ \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx = K^*/m^*$$

خارج قسمت رایله Rayleigh's quotient

مثال - مطلوبست تعیین ω یک تیرساده خمشی به روش رایله؟ مود اصلی مدنظراست.



الف - $\psi(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$ ب - $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$

الف ـ $\psi''(x) = \frac{2}{L^2}$, $V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 EI \int_0^L (\frac{2}{L^2})^2 dx = \frac{1}{2} z_0^2 \frac{4EI}{L^3}$

$T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 m \int_0^L [\frac{x}{L}(\frac{x}{L} - 1)]^2 dx = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \frac{mL}{30}$

$T_{max} = V_{max} \rightarrow \omega = \frac{10.95}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$

ب ـ $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$

$V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 EI \int_0^L (-\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L})^2 dx = \frac{1}{2} z_0^2 EI \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$

$T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 m \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$

$T_{max} = V_{max} \rightarrow EI \frac{\pi^4}{L^4} = \omega^2 m \rightarrow \omega = \frac{9.87}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$

انتخاب تابع شکل $\psi(x)$ ـ پیشنهاد رایلی

ارتعاش آزاد بدون میرایی

$f_I + f_s = 0$

تشریح حالت : تغییرمکان u در اثر اعمال نیروی اینرسی :

$m\ddot{u} = -ku$

$u(x,t) = \psi(x) z(t) \rightarrow f_I = -m(x) \psi(x) z_0 \omega^2 \sin \omega t$

$f_I \propto m(x) \psi(x)$ دقت نتایج بستگی به درستی $\psi(x)$ دارد .

* پیشنهاد رایلی : فرض می‌کنیم شکل تغییرمکان تحت اثر وزن سیستم mg بوجود می‌آید ؛ با اینکار پارامتر اصلی (جرم) اثر کرده و شرایط تکیه‌گاهی نیز ارضاء می‌شود .

اساس روش رایلی : نیرو $p(x)$ $\xrightarrow{\text{باعث}}$ تغییرمکان $u(x)$

حداکثر انرژی پتانسیل حاصل $V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) u_{max}(x) dx$

$u(t) = u_0 \sin \omega t \rightarrow u_{max} = u_0$, $\dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = u_0 \omega$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{u}_{max}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L m u_{max}^2 \omega^2 dx$

www.tmar.ir

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^L m u_{max}^2 \omega^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L p(x) u_{max} dx$$

فرض رایلی $\quad p(x) = m(x) g \quad \Rightarrow$

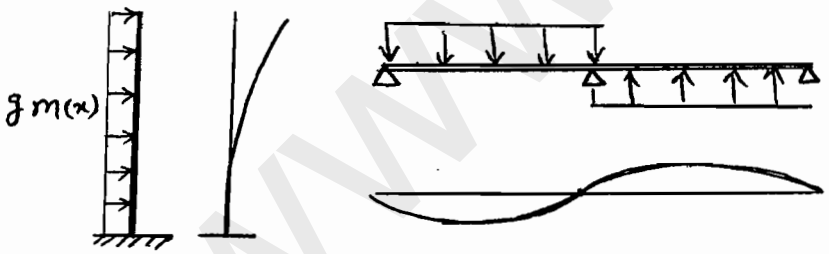
$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^L m(x) u^2(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^L m(x) g u(x) dx$$

$$\omega^2 = \frac{g\int_0^L m(x) u(x) dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx} = \frac{g\int_0^L m(x)\psi(x) dx}{Z_0\int_0^L m(x)\psi^2(x) dx}$$

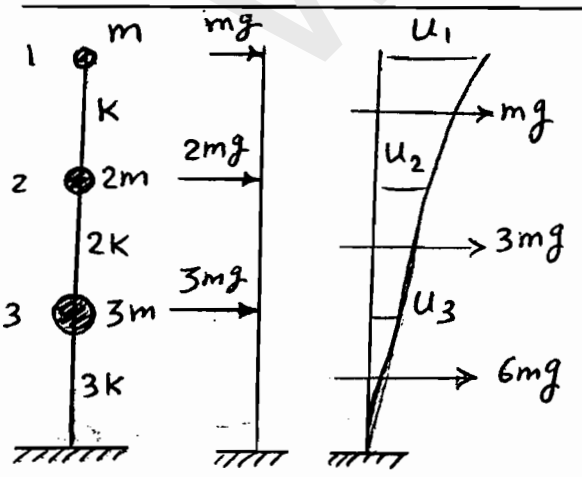
در حالت سیستم با جرم های متمرکز (تاب های برشی) داریم :

$$\omega^2 = \frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2}$$

توجه : در فرض رایلی ، وزنه گسترده یا متمرکز در جهت ارتعاش و بصورتی که باعث تغییر شکل در مود ارتعاشی مورد نظر باشد ، در نظر گرفته می شود ،



رعایت شرایط مرزی و سازگاری و شکل ارتعاشی :



مثال - مطلوبست تغییر مکان اصلی سیستم سه جرمی روبرو ؟

$$\Delta u_3 = \frac{F_3}{k_3} = \frac{6mg}{3K}$$

$$u_3 - \cancel{u_{\text{زمین}}} = u_3 = \frac{2mg}{K}$$

$$\Delta u_2 = u_2 - u_3 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{3mg}{2K}$$

$$u_2 = \frac{3mg}{2K} + \frac{2mg}{K} = \frac{7mg}{2K} = 3.5\,\frac{mg}{K}$$

www.ttnar.ir

$$\Delta u_1 = u_1 - u_2 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{mg}{k} \rightarrow u_1 = \frac{mg}{k} + \frac{3.5mg}{k} = 4.5\,\frac{mg}{k}$$

$$\omega^2 = \frac{g\sum_1^3 m_i u_i}{\sum_1^3 m_i u_i^2} = \frac{g\times(\frac{mg}{k})(1\times4.5 + 2\times3.5 + 3\times2)}{(\frac{mg}{k})^2(1\times4.5^2 + 2\times3.5^2 + 3\times2^2)} =$$

$$\frac{k}{m}\ \frac{17.5}{56.25} = 0.312\ k/m \rightarrow \underline{\omega = 0.56\sqrt{k/m}}$$

روش رایلی اصلاح شده

یک روش ساده با تکرار مراحل (Iteration) و مناسب برای ساختمانهای برشی

فرض تغییرمکان اولیه برای شکل ارتعاشی یا محاسبه آن از طریق اعمال وزن سازه: $u^{(0)}(x,t)$

$$V_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\int EI(x)\,u^{(0)''}\,dx \text{ یا } \frac{1}{2}\sum K_i\,\Delta u_i^{(0)2}$$

$$T_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\int m(x)\,\dot{u}^{(0)2}\,dx = \frac{1}{2}\omega^2\int m(x)\,u^{(0)2}\,dx$$

$T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)}$ ، ω_{R00} معلوم

نیروی $P_i^{(0)} = K_i u_i^{(0)}$ که باعث ایجاد تغییرمکان $u^{(0)}$ می‌شود یا $\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i u^{(0)2}$

$$K_i = m_i\omega^2 \rightarrow P_i^{(0)} = m_i\omega^2 u_i^{(0)}$$

تحت اثر نیروی اخیر، تغییرمکان جدید $u_i^{(1)}$ را محاسبه می‌کنیم، سپس انرژی پتانسیل جدید

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int P^{(0)}u^{(1)}\,dx \text{ یا } \frac{1}{2}\sum P_i^{(0)}u_i^{(1)}$$

$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \omega_{R01}$ معلوم

اگر انرژی جنبشی جدید را نیز از طریق تغییرمکان جدید $u^{(1)}$ محاسبه کنیم:

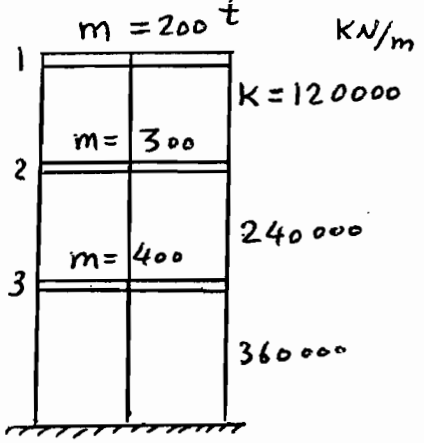
$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int m(x)\,\dot{u}^{(1)2}\,dx \text{ یا } \frac{1}{2}\sum m_i\omega^2 u_i^{(1)2}$$

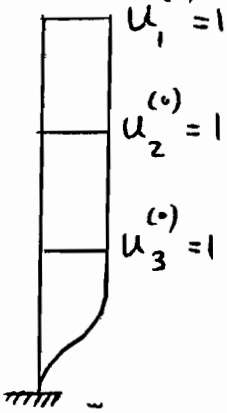
$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \omega_{R11}$ معلوم $\xrightarrow[\text{ادامه}]{\text{به همین ترتیب}}$ $P_i^{(1)} = m_i\omega^2 u_i^{(1)}$

---

www.tnar.ir

مثال - مطلوبست تعیین ω تقریبی تاب سه طبقه به روش رایلی اصلاح شده؟ (سقف‌ها صلب)





فرض اولیه

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 1$$

$$\dot{u}^{(0)} = \omega u^{(0)}$$

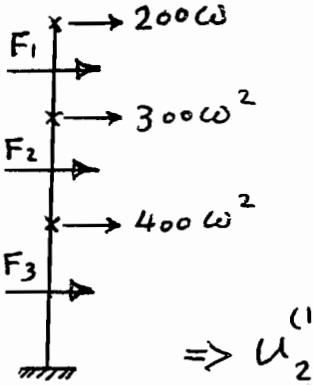
$$T_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{u}_i^{(0)2} = \frac{1}{2}\omega^2(900)$$

$$V_{max}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum K_i \Delta u_i^{(0)2} =$$

$$\frac{1}{2}\left[K_1(1-1)^2 + K_2(1-1)^2 + K_3(1-0)^2\right] = \frac{1}{2}(360000)$$

$$T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)} \rightarrow \omega^2 = \frac{360000}{900} = 400 \rightarrow \omega_{R00} = 20 \ Rad/s$$

$$P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)} \rightarrow P_1^{(0)} = 200\omega^2,\ P_2^{(0)} = 300\omega^2,\ P_3^{(0)} = 400\omega^2$$



برش طبقات: $F_1 = 200\omega^2,\ F_2 = 500\omega^2,\ F_3 = 900\omega^2$

محاسبه $u_i^{(1)}$:

$$\Delta u_3^{(1)} = u_3^{(1)} - u_{\text{تکیه}} \rightarrow \frac{F_3}{K_3} = u_3^{(1)} - 0 \Rightarrow$$

$$u_3^{(1)} = 900\omega^2/360000 = 0.0025\omega^2$$

$$\Rightarrow u_2^{(1)} = 0.004583\omega^2,\ u_1^{(1)} = 0.006253\omega^2$$

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum P_i^{(0)} u_i^{(1)} = \frac{1}{2}\omega^4(3.625)$$

$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2}(3.625)\omega^4 = \frac{900}{2}\omega^2 \rightarrow \omega_{R01} = 15.75 \ Rad/s$$

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 u_i^{(1)2} = \frac{1}{2}\omega^6(0.01661)$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2}\omega^6(0.01661) = \frac{1}{2}\omega^4(3.625) \Rightarrow \omega_{R11} = 14.77 \ Rad/s$$

جوابها به سمت همگرایی میل می‌کند. برای دقت بیشتر می‌توان

$$P_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)} \ \ldots\ldots$$

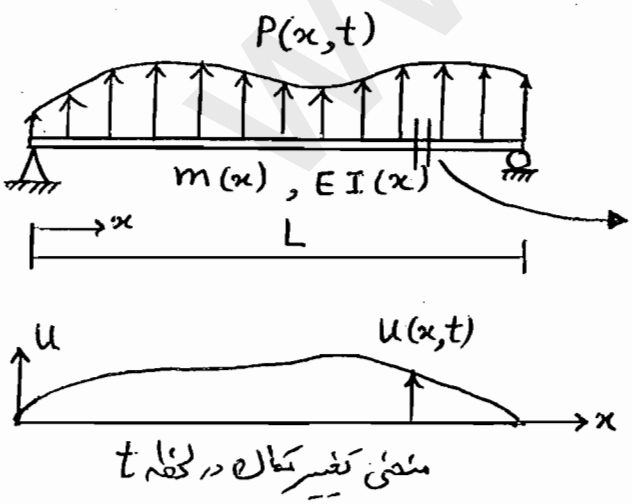
www.ftnar.ir

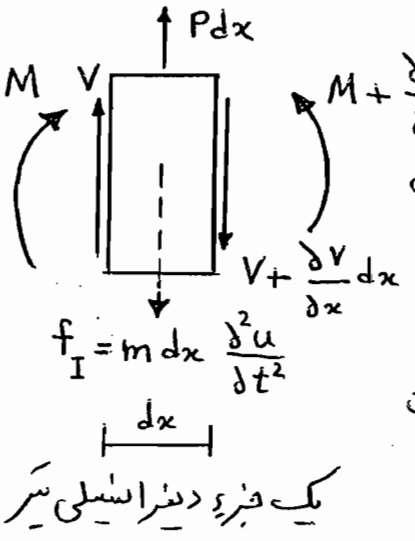
معادلات سیستم‌های پیوسته با جرم و سختی گسترده

Systems with Distributed Mass and Elasticity

اکثر سازه ها می‌توانند بصورت جرم متمرکز (در یک یا چند نقطه) مدل شوند (ساختمانهای چند طبقه با کف صلب و ساختمان هایی با اجزاء پیرو ستون با جرم ناچیز). بخش بزرگی از درس به تجزیه و تحلیل این نوع مدل ها پرداخته و می پردازد، به دو دلیل؛ اوّل اینکه چنین مدل هایی بصورت بسیار مناسب و مؤثر رفتار دینامیکی سازه را بیان می دارد بویژه ساختمانهای چند طبقه، و دوّم اینکه روش های محاسباتی مناسب با کامپیوتر جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی حرکت این سازه ها به تعداد زیاد موجود است. با این حال برای برخی سازه ها با جرم و سختی گسترده نظیر دودکش ها، سدهای قوسی و سازه رآکتورهای هسته‌ای و ... روش فوق مناسب نیست و باید از روش تحلیل سیستم های پیوسته کمک گرفت.

در این بخش به مسائل یک بُعدی با جرم گسترده نظیر تیرها و برج ها و تحلیل آنها پرداخته می شود. معادله حرکت (حالت بدون میرایی) برای تیر اویلری اعمالی بصورت زیر بیان می شود:





یک تیر منشوری با ارتعاش جانبی و با شرایط تکیه گاهی خود.

از تعادل نیروها در جهت قائم داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

* در رابطه روبرو، اگر نیروی اینرسی نبود، رابطه کلاسیک بین برش و بار گسترده در تیرهای تحت بار گسترده حاصل می شد،

در مقاومت مصالح اگر از لنگر اینرسی مرتبط (وابسته) به شتاب زاویه‌ای جزء صرفنظر کنیم،

ازتعادل چرخشی المان رابطه استاندارد روبرو را داریم $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ ②

باز هم در مقاومت مصالح اگر از تغییر شکل های برشی صرفنظر کنیم، داریم: $M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ③

اگر روابط ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار دهیم، معادله حاکم بر تغییر مکان (ارتعاش) جانبی $u(x,t)$ تیر حاصل می شود:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t) \quad ④$$

برای حل معادله نیاز به دو شرط مرزی در هریک از انتهای تیر و تغییر مکان و سرعت اولیه داریم.

معمترین بخش حل معادله، مرحله ارتعاش آزاد آن است؛ برای سادگی m, EI

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \quad ⑤$$

برای حل فرض می کنیم پاسخ بصورت روبرو باشد: $u(x,t) = \phi(x) \cdot q(t)$ ⑥

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x) \cdot \ddot{q}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x) q(t) \quad ⑦$$

با بکارگیری روابط ۷ در ۵:

$$\phi(x) \ddot{q}(t) + \frac{EI}{m} q(t) [\phi''(x)]'' = 0$$

$$\phi(x) \ddot{q}(t) + \frac{EI}{m} \phi^{IV}(x) q(t) = 0 \quad ⑧$$

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EI}{m} \cdot \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = \text{مقدار ثابت} = \omega^2$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad ⑨ \leftarrow \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \text{ رابطه کلاسیک ارتعاش آزاد} \\ \phi^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EI}\phi(x) = 0 \quad , \quad \frac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4 \end{cases}$$

بدوله برابر

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4 \phi(x) = 0 \quad ⑩ \text{ یا } [EI \phi''(x)]'' - \omega^2 m \phi(x) = 0$$

از معادله ۹ به ازای هر ω با توجه به شرایط اولیه، تابع $q(t)$ مشخص خواهد شد:

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + q_0 \cos \omega t \quad ⑪$$

www.tmar.ir

برای حل معادله ۱۰

$$\phi(x) = \bar{C} e^{sx} \rightarrow (s^4 - \lambda^4)\, \bar{C} e^{sx} = 0$$

$$s^4 - \lambda^4 = 0 \rightarrow \quad s = \pm\lambda \;,\; \pm i\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\phi(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}$$

یا (۱۲)

$$\phi(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos\lambda x + B_4 \sin\lambda x$$

با اعمال شرایط مرزی در تکیه گاه ها به معادلاتی مشکاتی خواهیم رسید که ما را به بینهایت ω هدایت خواهد کرد (سیستم پیوسته پس بینهایت درجه آزادی) . بنابراین جواب ارتعاش آزاد جمع کلیه جوابها خواهد بود :

$$\omega_i \rightarrow \phi_i(x) \;,\; q_i(t) \quad \Rightarrow$$

$$u_c(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \qquad (۱۳)$$

با توجه به شرایط تکیه گاهی و شرایط مرزی در انتهای آزاد تیرها داریم :

لنگر خمشی صفر	$\dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0$	تغیرمکان صفر	$\phi(x) = 0$
برش صفر	$\dfrac{d^3\phi}{dx^3} = 0$	شیب صفر	$\dfrac{d\phi}{dx} = 0$

در انتهای آزاد ، لنگر و برش صفر - در تکیه گاه گیردار ، تغیرمکان و شیب صفر - در تکیه گاه غلتکی ، تغیرمکان و لنگر صفر پس در هر انتها به هرحال دو شرط مرزی خواهیم داشت .

روش ساده شده :

$$\cosh \equiv Ch \;,\; \sinh \equiv Sh$$

$$ch(\lambda x) + \cos(\lambda x) = S \rightarrow S' = \lambda(sh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) = \lambda V$$

$$sh(\lambda x) + \sin(\lambda x) = T \rightarrow T' = \lambda(ch(\lambda x) + \cos(\lambda x)) = \lambda S$$

$$ch(\lambda x) - \cos(\lambda x) = U \rightarrow U' = \lambda(sh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) = \lambda T$$

$$sh(\lambda x) - \sin(\lambda x) = V \rightarrow V' = \lambda(ch(\lambda x) - \cos(\lambda x)) = \lambda U$$

www.tinar.ir

رابطه (۱۲) را بصورت ادیروی می‌نویسیم:

$$\phi(x) = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$

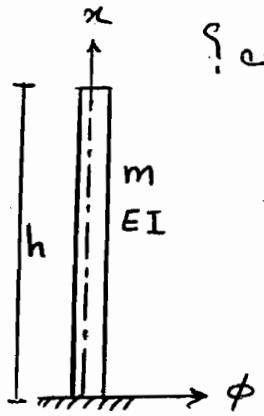
$$\frac{d\phi}{dx} = C_1 S' + C_2 T' + C_3 U' + C_4 V' = \lambda (C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda^2 (C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \qquad\qquad = \lambda^3 (C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S)$$

با توجه به شرایط مرزی و استفاده از روابط ساده بین ضرایب C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 می‌توان این ضرایب را محاسبه نمود.

مثال - مطلوبست برآورد فرکانس های طبیعی یک تیر (تیره) طره یکنواخت همگن؟



$$(\phi)_{x=0} = 0 \quad (1)' \qquad \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x=h} = 0 \quad (3)'$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (2)' \qquad \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_{x=h} = 0 \quad (4)'$$

از شرایط مرزی بالا $C_1 = C_2 = 0$ و

$$\begin{cases} C_3 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] + C_4 [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)] = 0 & (5)' \\ C_3 [sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] + C_4 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] = 0 & (6)' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) & sh(\lambda h) + \sin(\lambda h) \\ sh(\lambda h) - \sin(\lambda h) & ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)'$$

C_3 و C_4 نمی‌توانند صفر باشند چون در آنصورت ارتعاشی وجود نخواهد داشت پس دترمینان ماتریس ضرایب صفر است، از آنجا داریم:

$$[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)]^2 - [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)][sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] = 0$$

www.tmar.ir

$$ch^2(\lambda h) + \cos^2(\lambda h) + 2ch(\lambda h)\cos(\lambda h) - sh^2(\lambda h) + \sin^2(\lambda h) = 0$$

$$1 + 1 + 2ch(\lambda h)\cos(\lambda h) = 0 \rightarrow \underline{ch(\lambda h)\cos(\lambda h) + 1 = 0} \quad (8)$$

از روش ساده امکان حل معادله بالا وجود ندارد پس به کمک روش عددی حل شده و داریم :

$$\lambda_i h = 1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.996, 14.137, 17.279, \ldots$$

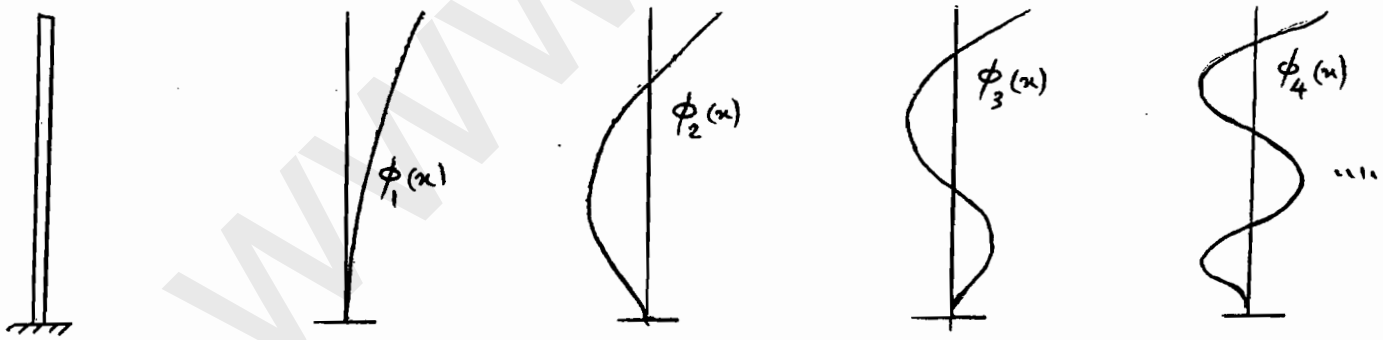
برای $i > 4$ تقریباً $\lambda_i h \simeq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ با توجه به $\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{m}$

$$\omega_1 = \frac{3.516}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22.03}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_3 = \frac{61.70}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \underline{\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

اگر C_3 را برحسب C_4 بنویسیم (رابطه ۵) و آنرا در رابطه (۱۲ درس) قرار دهیم و از روابط بدست آمده در شرایط مرزی کمک بگیریم ، تابع $\phi_i(x)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\phi_i(x) = C_4\left[ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \frac{ch(\lambda_i h) + \cos(\lambda_i h)}{sh(\lambda_i h) + \sin(\lambda_i h)}\left(sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)\right)\right]$$

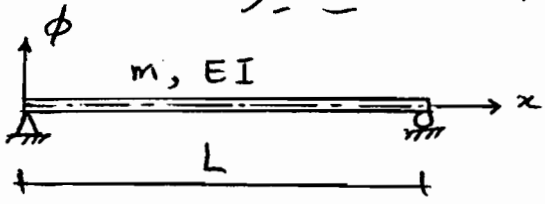


مود ۱ — ω_1 | مود ۲ — ω_2 | مود ۳ — ω_3 | مود ۴ — ω_4

$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow T_i = \frac{2\pi h^2}{(\lambda_i h)^2}\sqrt{\frac{m}{EI}}$$

www.tnar.ir

مثال - مطلوبست تعیین فرکانس ها و شکل تغییرمکانی ارتعاش آزاد یک تیر ساده.



در دو انتها با توجه به تکیه گاه ها، تغییرمکان و لنگر صفر است.

$$u(0)=0 \rightarrow \phi(0)=0 \rightarrow B_3 + B_1 = 0$$

$$M(0)=0 \rightarrow EI\phi''(0)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_3+B_1)=0 \Rightarrow B_1=B_3=0 \Rightarrow$$

$$\phi(x) = B_4 \sin(\lambda x) + B_2 \sh(\lambda x)$$

$$x=L \rightarrow u(L)=0 \rightarrow \phi(L)=0 \rightarrow B_4 \sin(\lambda L) + B_2 \sh(\lambda L) = 0$$

$$M(L)=0 \rightarrow EI\phi''(L)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_4 \sin(\lambda L) + B_2 \sh(\lambda L)) = 0$$

از جمع دو رابطه اخیر $\leftarrow B_2 \sh(\lambda L)=0$ در اینحالت $\sh(\lambda L)$ نمی تواند صفر شود چرا که

صفر می شود که در ارتعاش بی معنی است پس $B_2=0 \rightarrow B_4 \sin(\lambda L)=0$

اگر $B_4=0$ داریم $\phi(x)=0$ که معنی ندارد پس $\Leftarrow \sin(\lambda L)=0$

$$\lambda L = n\pi \quad \text{برای } n=1,2,3,\ldots \Rightarrow$$

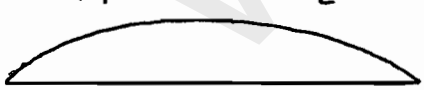
$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad n=1,2,3,\ldots \leftarrow \lambda^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$$ با توجه به

اگر $\lambda L = n\pi$ را در رابطه $\phi(x)$ بکار ببریم:

$$\phi_n(x) = B_4 \sin\frac{n\pi x}{L}$$

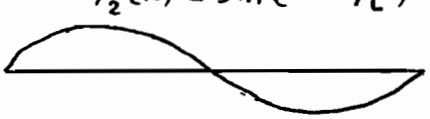
که B_4 مقدار اختیاری است.

$\phi_1(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$



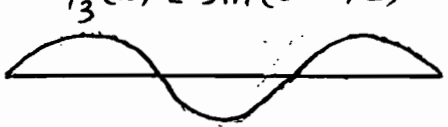
$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$ نصف سینوس

$\phi_2(x) = \sin(2\pi x/L)$



$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 4\omega_1$$ یک سینوس

$\phi_3(x) = \sin(3\pi x/L)$



$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 9\omega_1$$ یک و نیم سینوس

www.tnar.ir

رابطه ارتعاش آزاد سیستم پیوسته براساس تئوری تیر تیموشنکو

اگر از لنگر اینرسی چرخشی تیر صرفنظر نشود و تغییرشکل حاصل از تنش برشی ملحوظ شود (تئوری تیر تیموشنکو)، معادله ارتعاش آزاد بصورت زیر در می آید :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - mr^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 t^2} + \frac{m^2 r^2}{kGA}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$$

G مدول ارتجاعی برشی ، $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون مقطع ، A سطح مقطع ، k ضریب شکل مقطع (مربوط به غیرکنواخت بودن تنش برشی در مقطع) که مثلاً برابر $\frac{5}{6}$ در مقطع مستطیلی و $\frac{9}{10}$ در مقطع دایروی است (مقاومت مصالح) ،

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته — Modal ORTHOGONALITY

در این بخش خاصیت ممود بودن مودهای ارتعاش آزاد در سیستم های پیوسته ملاحظه می شود. برای سهولت بیان از یک تیر یک دهانه با انتهای مفصلی ، گیردار یا آزاد و بدون جرم متمرکز در انتها استفاده می شود ، برای شروع رابطه ۱۰ (معادله دیفرانسیل تفکیک شده تابع شکلی ϕ) برای مود r ام بازنویسی می شود $\left(\frac{m\omega^2}{EI}=\lambda^4\right)$ ⑩

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4\phi(x) = 0$$

$$\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]'' = \omega_r^2\, m(x)\,\phi_r(x) \qquad ⑭$$

طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب نموده و از صفر تا L انتگرال می گیریم :

$$\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''dx = \omega_r^2\int_0^L m(x)\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad ⑮$$

طرف چپ را بصورت بخش بخش انتگرال می گیریم (روش های انتگرالگیری) :

$$\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]''dx = \left\{\phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'\right\}_0^L -$$

$$\left\{\phi_n'(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]\right\}_0^L + \int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx \qquad ⑯$$

www.tmar.ir

به سادگی ملاحظه می‌شود ، مقادیر داخل آکولادها در $x=0,L$ (انتهای تیر بصورت آزاد، ساده یا گیردار) برابر صفر هستند . زیرا اگر گیردار باشد داریم $\phi=0$ و $\phi'=0$ و اگر ساده باشد داریم $\phi=0$ و به دلیل لنگر صفر $\phi''=0$ و اگر آزاد باشد ، لنگر و برش صفر پس $\phi''=0$ و $\phi'''=0$

در این مرحله مقدار رابطه ۱۶ را در ۱۵ قرار می‌دهیم :

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (17)$$

اینک مجدداً از ابتدا شروع کرده و رابطه ۱۰ را برای مود n ام می‌نویسیم و طرفین را در $\phi_r(x)$ ضرب کرده و از صفر تا L انتگرال می‌گیریم که مشابه حالت قبل خواهیم داشت :

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (18)$$

رابطه ۱۷ را از رابطه ۱۸ تفریق می‌کنیم :

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (19)$$

در نتیجه با توجه $\omega_n \neq \omega_r$ خواهیم داشت :

$$\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (20)$$

با استفاده از رابطه ۲۰ در رابطه ۱۵ داریم :

$$\int_0^L \phi_n(x)\,[EI(x)\,\phi_r''(x)]''\,dx = 0 \qquad (21)$$

روابط ۲۰ و ۲۱ روابط تعامد مودها نامیده می‌شوند .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

MODAL Analysis of Forced Dynamic Response

رابطه (معادله) حرکت سیستم پیوسته را می‌نویسیم (رابطه ۴) :

$$m(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t)$$

www.tnar.ir

اگر سیستم را برای حالت ارتعاش آزاد حل کرده باشیم و ω_r و ϕ_r معلوم باشند جواب (واکنش) بصورت روبرو خواهد بود (رابطه ۱۳) : $u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\, q_r(t)$

ترکیب خطی مودها که در حقیقت جمع جوابهای حاصل از معادله دیفرانسیل است.

بنابراین، پاسخ $u(x,t)$ از جمع آثار هریک از مود هاست (ترم r‌ام در سری بالا مقدار مشارکت (تأثیر) مود r‌ام در کل پاسخ است).

ϕ را مود و q را مختصات مودال می‌نامند که مجهول است. البته مجهول اصلی $u(x,t)$ است. جواب مفروض (رابطه ۱۳) را در معادله ۴ قرار می‌دهیم :

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x)\,\phi_r(x)\,\ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]'' q_r(t) = p(x,t)$$

اینک هرترم را در $\phi_n(x)$ ضرب و در طول تیر انتگرال می‌گیریم :

$$\sum_{r=1}^{\infty} \ddot{q}_r(t) \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx + \sum_{r=1}^{\infty} q_r(t) \int_0^L \phi_n(x) \left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]'' dx = \int_0^L p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

با توجه به خاصیت تعامد مودها (روابط ۲۰ و ۲۱) همه ترم‌ها در ترکیب عبارات سمت چپ برابر صفر است بجز ترم مربوط $r=n$ که خواهیم داشت :

$$\ddot{q}_n(t) \int_0^L m(x)\left[\phi_n(x)\right]^2 dx + q_n(t) \int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_n''(x)\right]'' dx = \int_0^L p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

که بصورت ساده روبرو می‌نویسیم : $M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)$ (۲۲)

که : $M_n = \int_0^L m(x)\left[\phi_n(x)\right]^2 dx$, $K_n = \int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_n''(x)\right]'' dx$ (۲۳)

$$P_n(t) = \int_0^L p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

با توجه به روابط بخش خاصیت تعامد مودها : $K_n = \int_0^L EI(x)\left[\phi_n''(x)\right]^2 dx$ (۲۴)

www.tmar.ir

M_n و K_n عبارت از جرم و سختی تعمیم داده شده (Generalized) برای مود nام می باشد که رابطه کلی فرکانس میانه آنها برقرار است $\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \rightarrow K_n = \omega_n^2 M_n$

رابطه اخیر با نوشتن معادله ۱۴ برای مود nام و ضرب طرفین رابطه در $\phi_n(x)$ (۲۵) و انتگرال گیری از صفر تا L و استفاده از بیان M_n و K_n (روابط ۲۳) بدست می آید.

$P_n(t)$ نیروی تعمیم داده شده برای مود nام است. معادله ۲۲ یک معادله دیفرانسیل معمولی است که مجهول آن $q_n(t)$ می باشد (مشابه SDF) و فقط به مود nام یعنی $\phi_n(x)$ ارتباط دارد. بنابراین می توانیم بینهایت معادله مشابه معادله ۲۲ برای هریک از مود ها داشته باشیم. در حقیقت معادله دیفرانسیل اولیه (معادله ۴) که بصورت Partial بود و مجهول آن $u(x,t)$ است تبدیل به بینهایت معادله دیفرانسیل معمولی (رابطه ۲۲) با مجهول $q_n(t)$ می شود که هرکدام مستقل می باشد و بصورت مجزا و کلاسیک قابل حل می باشند (با توجه به نوع بارگذاری $P(x,t)$). وقتی $q_n(t)$ معلوم باشد (مود nام) می توان میزان مشارکت مود nام در تغییرمکان $u(x,t)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$u_n(x,t) = \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۶)$$

کل تغییرمکان از جمع آثار هریک از مود ها حاصل می شود

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۷)$$

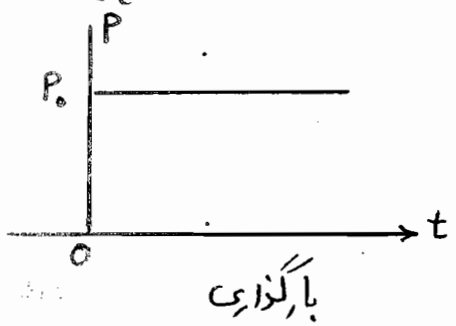
لنگر خمشی و نیروی برشی در هر مقطع از تیر ناشی از تغییرمکان آن نقطه در لحظه t بصورت زیر می باشد:

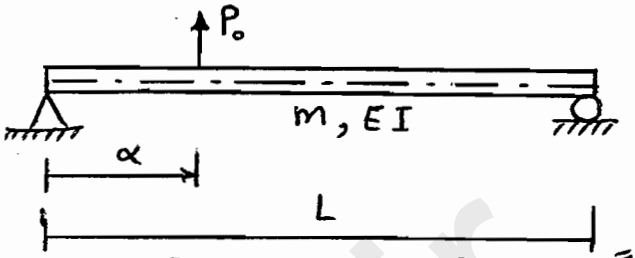
$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} EI(x)\, \phi_n''(x)\, q_n(t) \qquad (۲۸)$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[EI(x)\, \phi_n''(x) \right]' q_n(t) \qquad (۲۹)$$

www.tnar.ir

مثال - یک تیرساده تحت بارگذاری داده شده مدنظراست ، مطلوبست واکنش تیر (تغییرمکان و لنگر خمشی) وقتی که نیروی متمرکز در فاصله α از تکیه‌گاه سمت چپ اثر می‌کند . حالت خاص وقتی نیرو در وسط دهانه اثر می‌کند.





قبلاً ارتعاش آزاد تیر ساده را تحلیل نموده بودیم :

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} \\ \phi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases} \quad (a)$$

مقدار $\phi_n(x)$ را در روابط ۲۳ قرار می دهیم :

$$M_n = \frac{mL}{2} \quad , \quad K_n = \frac{n^4\pi^4 EI}{2L^3} \quad (b)$$

$$P(x,t) = P_0\,\delta(x-\alpha)$$ ← $\delta(x-\alpha)$ دلتای دیراک متمرکز در α

$$P_n(t) = P_0\,\phi_n(\alpha) \quad (c)$$

$$M_n\ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_0\phi_n(\alpha) \quad (d)$$ ← معادله مودال nام

قبلاً حل یک سیستم SDF در بارگذاری پله ای (Step) ملاحظه شده بود فقط پارامتر $q_n(t)$ به $u(t)$ و $u_{st} = P_0\phi_n(\alpha)/K_n$ جداگانه خواهد بود :

$$q_n(t) = \frac{P_0\phi_n(\alpha)}{K_n}(1-\cos\omega_n t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\frac{\phi_n(\alpha)}{n^4}(1-\cos\omega_n t) \quad (e)$$

رابطه e را در معادله ۲۷ قرار داده و توجه شود که $\phi_n(x)$ از رابطه a معلوم است ، پس $u(x,t)$ بدست می‌آید.

در حالت خاص $\alpha = \frac{L}{2}$ ، مقدار فوق را در معادله e قرار می دهیم سپس در رابطه ۲۷ :

$$u(x,t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(L/2)}{n^4}(1-\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (f)$$

www.tnar.ir

که

$$\phi_n\left(\frac{L}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \cdots \\ 1 & n = 1, 5, 9, \cdots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \cdots \end{cases} \quad (g)$$

مقدار g را در f قرار داده :

$$u(x,t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \right.$$

$$\left.(h)\ \frac{1-\cos\omega_3 t}{81}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right)$$

تغییر مکان در وسط تیر :

$$u\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \frac{1-\cos\omega_3 t}{81} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401} + \cdots\right) \quad (i)$$

ضرایب 1 ، 81 ، 625 ، 2401 و بقیه در مخرج کسر نشان می دهد که مشارکت و تأثیر مود اول بقیه کننده است و سری سریعاً همگرا می شود ،

لنگر خمشی از قرار داده رابطه h در ۲۸ بدست می آید :

$$M(x,t) = -\frac{2P_0L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} + \right.$$

$$\left.\frac{1-\cos\omega_5 t}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{49}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right) \quad (j)$$

لنگر خمشی در وسط دهانه :

$$M\left(\frac{L}{2},t\right) = -\frac{2P_0L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \right.$$

$$\left.\frac{1-\cos\omega_3 t}{9} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{25} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{49} + \cdots\right) \quad (k)$$

در مجموعه اخیر با توجه به n^2 در مخرج کسر ، همگرایی کند است البته نسبت به رابطه (i) که در مخرج n^4 دارد . از این مطلب درمی یابیم که مشارکت (تأثیر) مودهای بالاتر در نیرو بیشتر است نسبت به تغییر مکان .

---

* توضیح مختصر در خصوص مشکلات تحلیل سیستم های پیوسته در عمل

مشکل متغیر بودن $m(x)$ ، $EI(x)$ در روابط و انتگرال گیری مشکل - ارضاء مشکل شرایط مرزی در تیرهای سرتاسری (انکاه پذیر و لی پیچیده و طولانی) - گره های ارتباطی تیر و ستونه در قابها

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس

Dynamic Analysis in the Frequency Domain

به چند دلیل ، تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس بر تحلیل در حوزه زمانی ترجیح دارد :

۱ـ در بارگذاری زلزله (توابع غیرمشخص ـ شکل انتگرال دو هامل ـ طیف طرح ـ FFT)

۲ـ اندرکنش خاک و سازه (مدل سازی خاک ـ FE ، BE ـ امپدانس خاک)

۳ـ پدیده های تصادفی (آمار و احتمالات ـ ارتعاشات تصادفی ـ تحلیل رسک)

شکل نمایی سری فوریه برای بارگذاری دینامیکی (پریودیک)

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{T_p} + \sum_1^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n t}{T_p}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi/T_p}{2\pi/T} = T/T_p$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} = T/T_p \quad , \quad \beta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega} = \frac{2\times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{2T}{T_p} = \frac{2\Omega_1}{\omega}$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{n\times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \Rightarrow \Omega_n = n\Omega_1$$

$$\sin\Omega_n t = \sin n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} - e^{-in\Omega_1 t}}{2i}$$

$$\cos\Omega_n t = \cos n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} + e^{-in\Omega_1 t}}{2}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t}$$

ضرایب $\bar{P}_n$ مجهول است ، مانند ضرایب a_n و b_n باید معلوم شوند .

خاصیت تعامد توابع اکسپونانسیل

$$\int_0^{T_p} e^{in\Omega_1 t}\, e^{-im\Omega_1 t}\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_p & n = m \end{cases}$$

با توجه به خاصیت تعامد ، طرفین رابطه ① را در عبارت $e^{-im\Omega_1 t}$ ضرب و از صفر تا T_p انتگرال می گیریم :

www.tnar.ir

$$\begin{cases} \bar{P}_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\, e^{-in\Omega_1 t}\, dt & n \text{ سایر مقادیر} \quad (۲) \\ \bar{P}_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\, dt & n=0 \quad (۳) \end{cases}$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \quad (۴)$$

از جواب گذرا صرفنظر می شود - برای سهولت ، جزئیات برای $n=1$ ارائه می شود:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = \bar{P}_1\, e^{i\Omega_1 t}$$ چون $\bar{P}_1$ ضریب و ثابت است (دامنه)

پس برای سهولت بیشتر در انتها در نظر گرفته می شود $\leftarrow$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = e^{i\Omega_1 t}$$

$$u(t) = \bar{H}\, e^{i\Omega_1 t},\quad \dot{u} = \bar{H} i\Omega_1 e^{i\Omega_1 t},\quad \ddot{u} = -\bar{H}\Omega_1^2 e^{i\Omega_1 t} \qquad (i^2=-1)$$

$$e^{i\Omega_1 t}\,\bar{H}\left[-\Omega_1^2 m + c\Omega_1 i + K\right] = e^{i\Omega_1 t} \qquad \swarrow e^{i\Omega_1 t} \neq 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-\Omega_1^2 m + i\Omega_1 c + K} = \frac{1}{K\left(-\frac{\Omega_1^2 m}{K} + \frac{i\Omega_1 c}{K} + 1\right)}$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega},\quad \xi = \frac{c}{c_{cr}},\quad c_{cr} = 2m\omega$$

$$\frac{\Omega_1 c}{K} = \frac{\Omega_1}{K} \times \frac{c}{c_{cr}} c_{cr} = \frac{\Omega_1}{K}\xi(2m\omega) = \frac{\Omega_1}{\omega^2}\xi 2\omega = 2\beta_1\xi$$

$$\bar{H}(\Omega_1) = \frac{1}{K\left(-\beta_1^2 + 2i\beta_1\xi + 1\right)}$$

در حالت کلی Ω_n :

$$\bar{H}(\Omega_n) = \bar{H}(n\Omega_1) = \frac{1}{K\left(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1\right)} \quad (۵)$$

www.itnar.ir

بنابراین در حالت کلی با توجه به فاکتور ثابت $\bar{P}_n$ در تابع نیرو و ترکیب بار از جملات تابع اکسپوناسیل ، جواب معادله مورد نظر بصورت زیر خواهد بود :

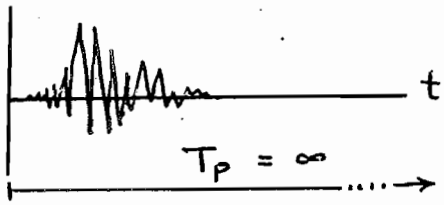
زنگار سازه باید خطی باشد.

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{H}(n\Omega_1)\, \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \qquad (۶)$$

تحلیل سیستم SDF در بارگذاری غیر تناوبی - تبدیل فوریه

نیروهایی که تابع آنها شکل خاصی ندارد و پریودیک نمی باشند (زلزله - امواج تکی) .

فرض : یک نیروی پریودیک با زمان تناوب $T_p = \infty$



تغییر متغیر زمان به فرکانس $t \to \Omega$

برای حل معادله دیفرانسیل تعادل دینامیکی از تغییر متغیر استفاده می شود ؛ چند تعریف :

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_p} = \Delta\Omega \quad , \quad n\Omega_1 = \Omega_n$$

$$\bar{P}(\Omega_n) = T_p \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Omega_1} \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Delta\Omega} \bar{P}_n$$

$$\bar{P}_n = \bar{P}(\Omega_n) \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n) e^{in\Omega_1 t} \Delta\Omega$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega \qquad (۷)$$

برای یافتن عبارت $\bar{P}(\Omega_n)$ ، طرفین عبارت $\bar{P}_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t)\, e^{-in\Omega_1 t}\, dt$ را که از قبل داشتیم در T_p ضرب می کنیم :

$$\bar{P}_n T_p = \bar{P}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} P(t)\, e^{-in\Omega_1 t}\, dt$$

www.tmart.ir

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T_p} \qquad T_p \to \infty \text{ اگر} \Rightarrow \Delta\Omega \to d\Omega$$

Ω_n که به ازای n های مختلف دارای مقدار منفرد (نقطه‌ای) بود، حالا بصورت متغیر پیوسته‌ای از Ω در می‌آید. در همین شکل بیانی $P(t)$ که بصورت $\sum$ بود، به شکل انتگرال در می‌آید که به آن انتگرال فوریه می‌گویند:

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t}\, \Delta\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \qquad (8)$$

که در این انتگرال فوریه مقدار $\bar{P}(\Omega)$ ← (9)

$$\bar{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

دو رابطه اخیر (8) و (9) را زوج تبدیل فوریه گویند.

$\bar{P}(\Omega)$ را تبدیل فوریه $P(t)$ و $P(t)$ را تبدیل معکوس فوریه $\bar{P}(\Omega)$ می‌نامند.

شرط لازم وجودی تبدیل فوریه آن است که $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt$ موجود باشد که البته اکثر توابع فیزیکی نظیر نیروها چنین خصوصیتی را دارند.

خلاصه نتایج روش برای متغیر مرکانس $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ بصورت زیر می‌شود:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \quad (10), \qquad \bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-i(2\pi f t)}\, dt \quad (11)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}(f)\,\bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \qquad (12)$$

یا بصورت دیگر زیر:

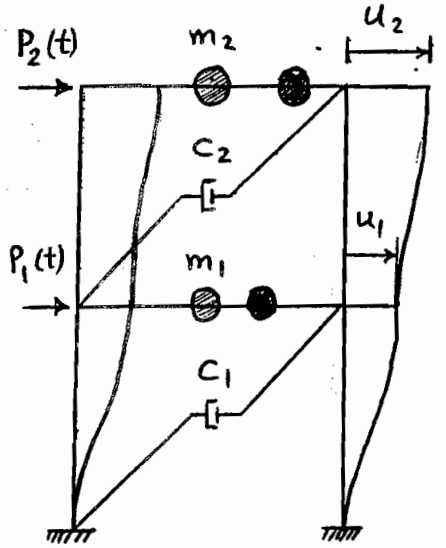
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(f)\, e^{i(2\pi f t)}\, df \quad (13) \quad \text{که} \quad \bar{U}(f) = \bar{H}(f)\,\bar{P}(f) \qquad (14)$$

تعیین انتگرال اخیر احتیاج به محاسبه انتگرال سرزی در صفحه مختلط دارد.

برنامه FREQ-RESP در کتاب - در حالت زلزله برای انتگرال‌ها از روش عددی (9)	$P(t) \xrightarrow{(11)} \bar{P}(f)$ $\bar{P}(f) \xrightarrow{(14)} \bar{U}(f)$ $\bar{U}(f) \xrightarrow{(12)} u(t)$	کاربرد مطالب در تهیه طیف فوریه بارگذاری (زلزله ...)

www.tmar.ir

سیستم های چند درجه آزادی Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

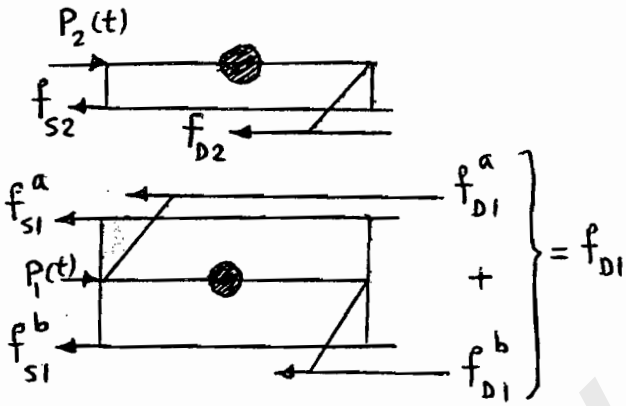


سیستم ساده (قاب برشی دو طبقه)

برای سادگی فرض می شود تیرها و کف صلب هستند.

از تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها و از اثر نیروی محوری در سختی ستون ها صرفنظر می شود، رفتار خطی است.

تعداد درجات آزادی مستقل برابر دو است (u_1 و u_2).



قانون دوم نیوتن برای حرکت هریک از جرم ها:

$$P_i - f_{Si} - f_{Di} = m_i \ddot{u}_i \qquad (i=1,2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + f_{S1} + f_{D1} = P_1 \\ m_2\ddot{u}_2 + f_{S2} + f_{D2} = P_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

معادله برداری حرکت MDF:

$$[m]\{\ddot{u}\} + \{f_D\} + \{f_S\} = \{P\}$$

نیروی سختی $\{f_S\}$ بستگی به بردار تغییرمکان طبقات $\{u\}$ دارد، سختی جانبی هر طبقه K_i که بستگی به برش طبقه V_i داشته و رابطه بین آن و تغییرمکان طبقه است: $V_i = K_i \Delta_i$

$\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ و سختی هر طبقه (در قاب برشی) برابر سختی جانبی کل ستون های طبقه می باشد:

نیروی سختی مؤثر در سقف طبقه اول از دو بخش تشکیل می شود: f_{S1}^a از طبقه بالا و f_{S1}^b از طبقه پائین:

$$K_i = \sum_{\text{ستون‌ها}} \frac{12 E I_c}{h^3}$$

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a$$

www.tnar.ir

$$\Delta_1 = u_1 \quad , \Delta_2 = u_2 - u_1 \rightarrow f_{s1} = K_1 u_1 + K_2 (u_1 - u_2)$$

توجه شود که f_{s1}^a و f_{s2} هردو بیانگر نیروی درونی در طبقه

$$f_{s2} = K_2 (u_2 - u_1)$$

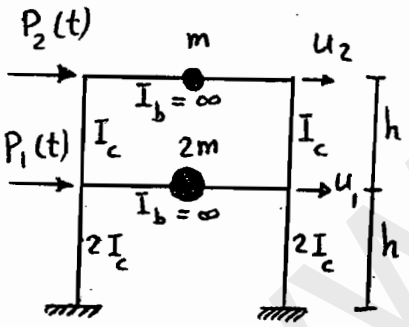
دوم هستند پس در مقدار مساوی ولی مختلف العلامت می باشند. پس:

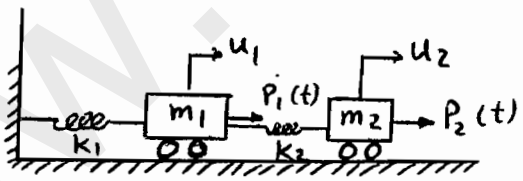
$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{f_s\} = [K]\{u\}$$

ماتریس سختی

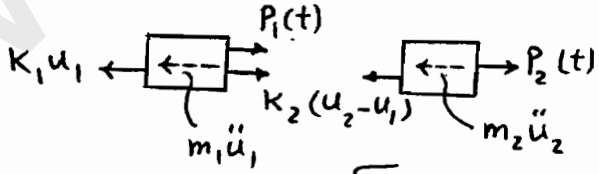
بطور مشابه می توان برای نیروی میرایی نیز اقدام نمود که البته به دلیل مسائل مطرح در تعیین میرایی در عمل، معمولاً بصورت درصد میرایی و در معادلات تفکیک شده اعمال می گردد.

درنهایت معادله حرکت بصورت معادله دیفرانسیل برداری نوشته می شود که مجهولات u_1 و u_2 بوده و معادله بصورت وابسته (coupled) که بنابراین معادله باید بصورت همزمان حل شود. مثال - مطلوبست تعیین معادله حرکت قاب برشی زیر؟ مدول الاستیسیته E





مدل تحلیلی



$m_1 = 2m \quad , \quad m_2 = m$

پیکره آزاد

$$K_1 = 2\,\frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3} \qquad K_2 = 2\,\frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

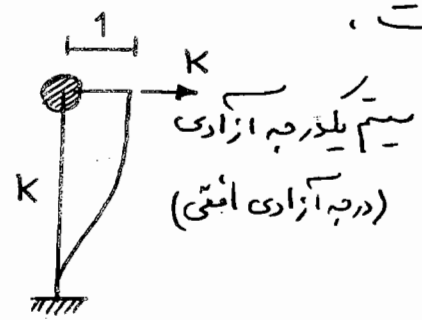
$$[m] = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [K] = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24\frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

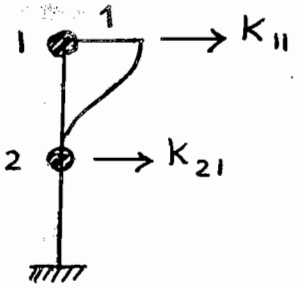
www.tmar.ir

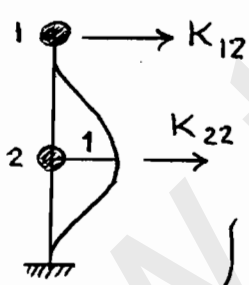
با استفاده از مدل جرم متمرکز، ماتریس جرم همیشه قطری خواهد بود (قانون دوم نیوتن)، برای تشکیل ماتریس سختی، چگونگی استفاده از سختی طبقه در سازه‌های برشی ملاحظه شد، البته در حالت کلی از ضرایب سختی برای تشکیل ماتریس سختی استفاده می‌شود که در ابتدای شروع درس، اشاراتی به آنها شد (جلسات اول درس دینامیک سازه‌ها). یادآوری خلاصه:

K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییرمکان واحد در j اعمال می‌شود و سایر درجات آزادی گرفته (قفل) شده است،



$$f_s = K\underbrace{(u-0)}_{\text{تغییرمکان نسبی}} = Ku$$





$$f_{s1} = K_{11}u_1 + K_{12}u_2$$

$$f_{s2} = K_{21}u_1 + K_{22}u_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

جزئیات تشکیل ماتریس سختی در دروس تحلیل سازه‌ها تشریح می‌شود،

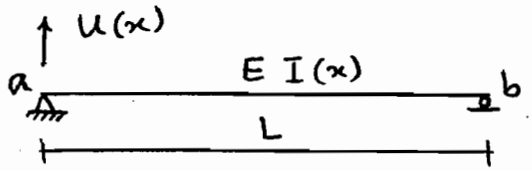
طریقه تعیین ضرایب ماتریس‌های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

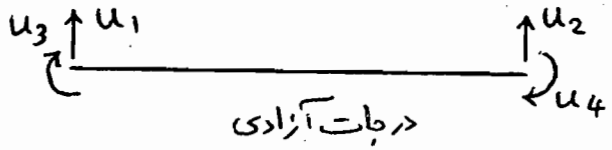
اساس: شبکه بندی، عناصر انتخابی، گره‌ها، توابع شکلی (Shape Function) $\psi(x)$ با توجه به حالت بارگذاری (صفر یا ...) چند جمله‌ای هرمیتی یا لاگرانژی ...

خواص چند جمله‌ای‌ها: ارضاء شرایط تغییر شکلی مورد نظر در المان مورد بررسی

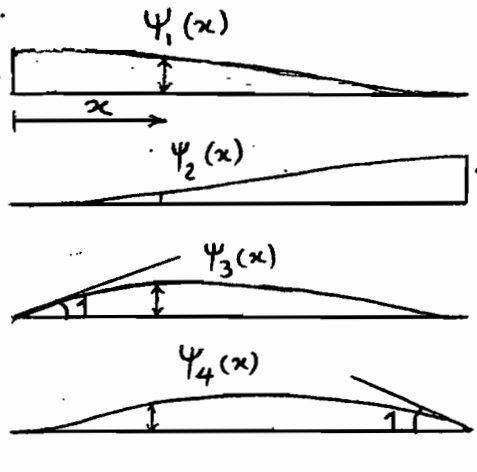
جزئیات روش اجزاء محدود در درس مربوط بوده و اینجا فقط به نحوه تعیین K_{ij} و m_{ij} پرداخته می‌شود.

www.tmar.ir





درجات آزادی



$u_a = u_1 = 1 \rightarrow \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$

$u_b = u_2 = 1 \rightarrow \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$

$\theta_a = u_3 = 1 \rightarrow \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$

$\theta_b = u_4 = 1 \rightarrow \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$

توابع چند جمله ای هرمیت

در حالت کلی تغییر مکان یک نقطه از تیر بصورت زیر خواهد بود :

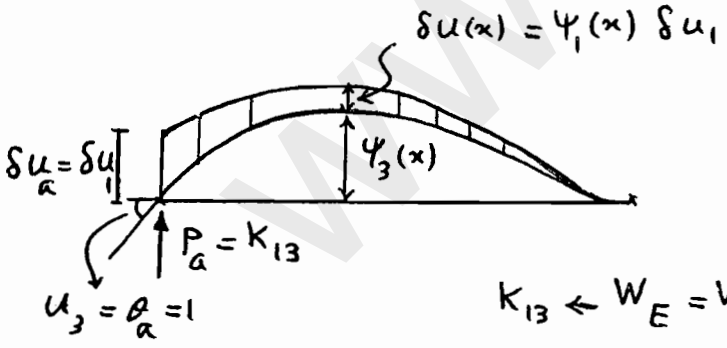
$$u(x) = \psi_1(x)\,u_1 + \psi_2(x)\,u_2 + \psi_3(x)\,u_3 + \psi_4(x)\,u_4$$

برای تعیین ضرایب می توان از روش تعادل و انرژی و کار مجازی استفاده کرد . اینجا کار مجازی :

تساوی کار نیرو های خارجی با کار نیرو های داخلی در یک تغییر مکان مجازی

برای نمونه جزئیات مراتب برای ضریب K_{13} ارائه می شود ، نیروی تمام ایجاد شده در گره a

بر اثر جرخش واحد در همان نقطه ،



در تیر جرخش واحد در a اعمال شده و

یک تغییر مکان تمام مجازی در a در نظر می گیریم ،

تساوی کار نیرو های داخلی با کار نیرو های خارجی $K_{13} \leftarrow W_E = W_I$

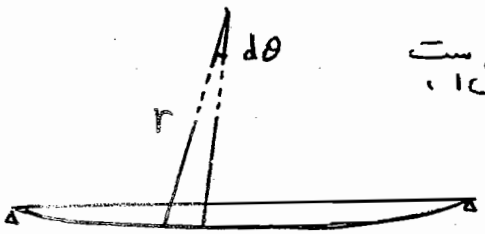
در این حالت کار خارجی فقط توسط مولفه تمام نیرو در نقطه a انجام می شود زیرا تغییر مکان های

مجازی در گره های دیگر صفر است ،

$$W_E = \delta u_a P_a = \delta u_1 K_{13}$$

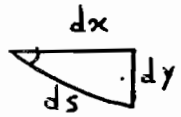
کار مجازی داخلی توسط لنگر های داخلی ناشی از $\theta_a = 1$ بر روی انحناهای مجازی انجام می شود ،

www.tmar.ir



در یک تیر تحت خمش ؛ $\frac{1}{r}$ انحناء ، $\frac{1}{r}dx=d\theta$ مقدار چرخش است ،

$M\,d\theta$ کار مربوطه می باشد



$$ds \# dx \quad , \quad d\theta = \frac{ds}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{از طرفی} \rightarrow d\theta = \frac{dy}{dx}$$

مقدار انحناهای مجازی با درنظر گرفتن اثرات ناشی از تغییر شکل برشی عبارت از :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

در حالت مورد نظر در اینجا، تغییر مکان مجازی δu می باشد : $y = \delta u$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\delta u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\psi_1(x)\,\delta u_1\right) = \psi_1''(x)\,\delta u_1$$

لنگر داخلی ناشی از چرخش $\theta_a = 1$ با توجه به $\frac{M}{EI} = y''$ ، $y = \psi_3(x)$ ⇐

$$M\,d\theta = M\frac{dx}{r} \rightarrow \text{کار داخلی} \quad M(x) = EI(x)\,\psi_3''(x)$$

$$W_I = \delta u_1 \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

$$W_I = W_E \Rightarrow K_{13} = \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

در حالت کلی ضرایب سختی مربوط به خمش تیر :

$$\boxed{K_{ij} = \int_0^L EI(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_j''(x)\,dx}$$

در حالت کلی با تعیین ضرایب دیگر

ماتریس سختی به روش فوق برای تیر $[K] = \frac{2EI}{L^3}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

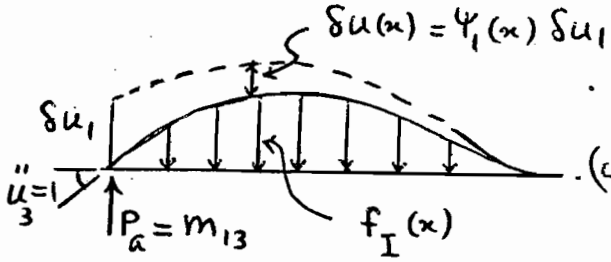
→ مورد نظر خواهیم داشت .

ماتریس کل یک سازه از سرهم بندی ماتریس اجزاء

www.tmar.ir

Consistent mass matrix

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (پر)



مشابه حالت K_{ij} عمل می شود (تساوی کار های داخلی و خارجی).

برای محاسبه m_{13} مدنظر است،

اگر تیر تحت اثر شتاب زاویه ای واحد در انتهای چپ قرار گیرد $\ddot{u}_3 = \ddot{\theta}_a = 1$ (بقیه صفر)

شتاب هائی در طول تیر ایجاد می شود :

$$u(x) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3 + \psi_4 u_4$$

$$\ddot{u}(x) = 0 + 0 + \psi_3(x)\ddot{u}_3 + 0 \Rightarrow \quad \underline{\ddot{u}(x) = \psi_3(x)\ddot{u}_3}$$

نیروی اینرسی (طبق اصل دالامبر) متناسب در برابر این شتاب :

$$f_I(x) = m(x)\ddot{u}(x) = m(x)\psi_3(x)\ddot{u}_3$$

ضرایب تأثیر جرم مربوط به این شتاب به عنوان نیرو های اینرسی گره ای ناشی از آن تعریف می شوند. این نیرو ها به کمک اصل تغییر مکانهای مجازی از نیروی اینرسی گسترده معادله محاسبه می شوند، مثلاً با ایجاد تغییر مکان مجازی تمام و مساوی قرار داده کار انجام شده توسط نیروی گره ای خارجی P_a با کار انجام شده توسط نیرو های اینرسی گسترده $f_I(x)$ ، نیروی تمام در انتهای چپ محاسبه می شود (همانه m_{13}) :

$$W_E = W_I \rightarrow P_a \delta u_a = \int_0^L f_I(x)\,\delta u(x)\,dx$$

$$m_{13}\delta u_1 = \int_0^L \underbrace{\left(m(x)\psi_3(x)\times 1\right)}_{f_I(x)} \times \underbrace{\psi_1(x)\delta u_1}_{\delta u(x)}\,dx$$

$$m_{13} = \int_0^L m(x)\psi_1(x)\psi_3(x)\,dx \rightarrow \boxed{m_{ij} = \int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\,dx}$$

www.tmarir

با تعیین سایر ضرایب از تلاقی شکلی خود در نهایت ماتریس جرم سازگار المان تیری بصورت زیر:

$m(x) = \bar{m}$

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

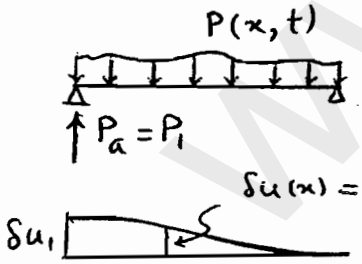
برای ماتریس میرایی نیز بطور مشابه می‌توان عمل کرد $C_{ij} = \int_0^L c(x)\,\psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx$

ولی مشکل ارزیابی $c(x)$ که بیانگر مشخصه استهلاک ویسکوز پیوسته برای هر المان است می‌باشد

در عمل اثر میرایی بصورت درصد میرایی در معادلات نهایی درنظر گرفته می‌شود،

بردار بارگذاری

برای تعیین بردار بارگذاری مربوط به درجات آزادی مربوط، ساده‌ترین روش استفاده از اصل ساده استاتیک است که بار پیوسته گره‌ها را بطور ساده به درجات آزادی گره‌ها تقسیم و انتقال می‌دهد، البته می‌توان از بار های گره‌ای سازگار نیز استفاده کرد، مثلاً تعیین نیروی سازگار متناظر با u_1 با استفاده از اصل کار مجازی:



نتیجه: $P_1(t) = \int_0^L P(x,t)\,\psi_1(x)\,dx$

در حالت کلی: $P_i(t) = \int_0^L P(x,t)\,\psi_i(x)\,dx$

معادله حرکت در حالت کلی $[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P(t)\}$

① معادله ارتعاش آزاد بدون میرایی $[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$

اگر تعداد درجات آزادی N باشد پس N معادله دیفرانسیل همزمان وابسته Coupled خواهیم داشت. حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی امکان پذیر است ولی مستلزم داشتن (تعیین) ماتریس میرایی [c] می باشیم!

② $\{u(t)\} = q_i(t)\{\phi\}_i$ جواب معادله بصورت روبرو در نظر گرفته می شود

$\{\phi\}_i$ بردار تغییر شکل که وابسته به زمان نمی باشد و متغیر زمان با تابع $q_i(t)$ وارد مساله می شود: $q_i(t) = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t = D_i \sin(\omega_i t + \varphi)$

A_i و B_i ضرایب ثابت که از شرایط اولیه بدست می آید.

③ $\{u(t)\} = \{\phi\}_i (A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t)$

توجه شود که ω_i و $\{\phi\}_i$ مجهول هستند. رابطه (جواب) ② در معادله ① !

④ $\left[-\omega_i^2 [m]\{\phi\}_i + [k]\{\phi\}_i\right] q_i(t) = \{0\}$

پس $q_i(t) \neq 0$:

⑤ یا $[k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i$ $\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right]\{\phi\}_i = \{0\}$

پس ④ : $\det\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] = 0$ معادله مشخصه : $\{\phi\}_i \neq \{0\}$

$\Rightarrow \omega_i^2$ چند جمله ای مرتبه N برحسب ω_i $\Rightarrow$ معلوم N تا $i = 1$

ریشه های معادله مشخصه یعنی ω_i : مقادیر مشخصه، eigenValues، فرکانس زاویه ای

از رابطه ⑤ می توان بردار $\{\phi\}_i$ را به ازای ω_i ها بدست آورد (البته مقادیر نسبی دامنه حرکت و نه مقادیر مطلق آنها).

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}$$

بردار مود طبیعی، شکل مود ارتعاش، eigenVectors

بردار مشخصه، ...

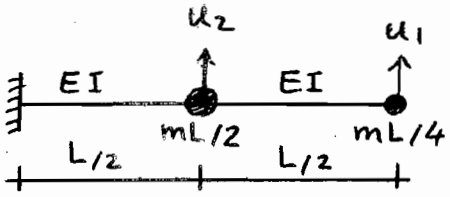
$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \ldots < \omega_N$$

ترتیب شماره گذاری فرکانس ها و پریودها

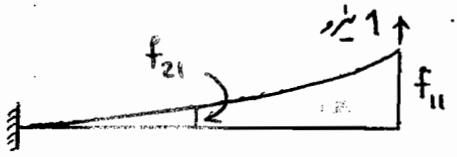
$$T_1 > T_2 > \ldots\ldots$$

www.tmar.ir

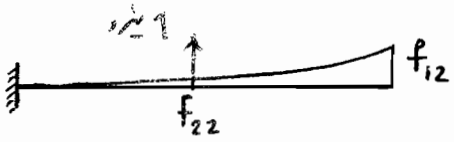
مثال - مطلوبست تعیین فرکانس زاویه‌ای و مود شکل های سیستم زیر؟



ابتدا باید معادله حرکت نوشته شود (ماتریس سختی وجرم)!
از روش ماتریس نرمی استفاده می شود (اعمال نیروی واحد ومحاسبه تغییر مکانهای حاصل در درجات آزادی) از تحلیل سازه:



ماتریس نرمی $[f] = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix}16 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

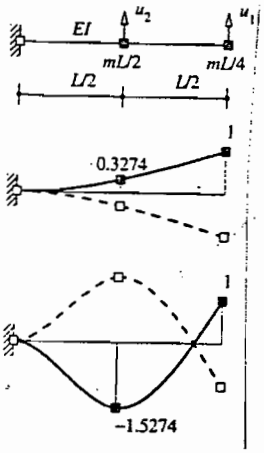


$$[k] = [f]^{-1} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix}mL/4 & 0\\ 0 & mL/2\end{bmatrix} \rightarrow [m]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

برای سادگی $\lambda = \frac{7mL^4}{192EI}\omega^2$

$$[[k] - \omega^2[m]] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix}$$



$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.36319\ ,\ \lambda_2 = 9.6368 \rightarrow \begin{cases}\omega_1 = 3.15623\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\\ \omega_2 = 16.2580\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\end{cases}$$

$$\left[[K] - \omega_i^2[m]\right]\{\phi\}_i = \{0\}$$

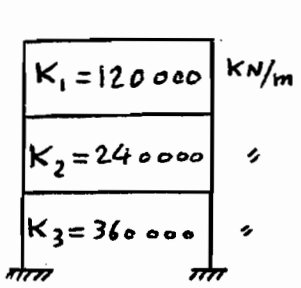
$$\left[[K] - \omega_1^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{21} = 0.3274$$

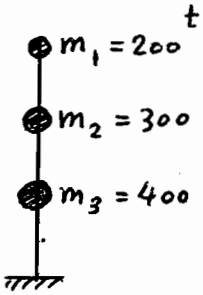
$$\left[[K] - \omega_2^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{22} = -1.5274$$

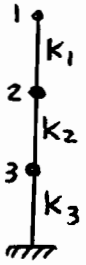
$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ 0.3274\end{Bmatrix}\ ,\ \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ -1.5274\end{Bmatrix}$$

www.tnar.ir

مثال - در قاب سه طبقه داده شده مطلوبست تعیین ω_i و $\{\phi\}_i$ ؟



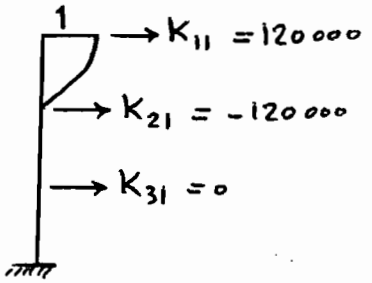


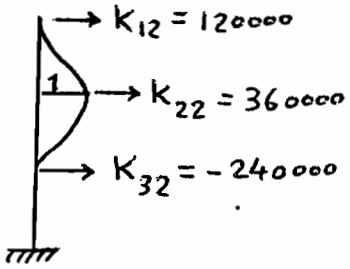


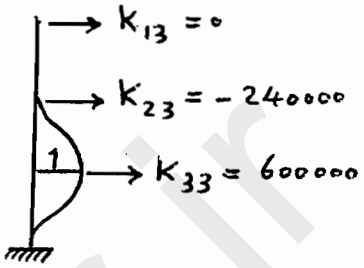
$$f_{s1} = k_1(u_1 - u_2)$$

$$f_{s2} = k_2(u_2 - u_3) - k_1(u_1 - u_2)$$

$$f_{s3} = k_3 u_3 - k_2(u_2 - u_3)$$







$u_1 = 1 \;,\; u_2 = u_3 = 0$ $\qquad$ $u_2 = 1 \;,\; u_1 = u_3 = 0$ $\qquad$ $u_3 = 1 \;,\; u_1 = u_2 = 0$

$$[K] = 120 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad [m] = 200 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

برای سادگی $\lambda_i = \omega_i^2 / 600$

$$[[K] - \omega^2 [m]] = 120 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس اخیر صفر ←

$$\lambda_i^3 - 5.5\,\lambda_i^2 + 7.5\,\lambda_i - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.351 \;,\; \lambda_2 = 1.61 \;,\; \lambda_3 = 3.54$$

$$\omega_1^2 = 210 \;,\; \omega_2^2 = 966 \;,\; \omega_3^2 = 2124$$

$$\omega_1 = 14.5 \text{ Rad/s} \;,\; \omega_2 = 31.1 \;,\; \omega_3 = 46.1$$

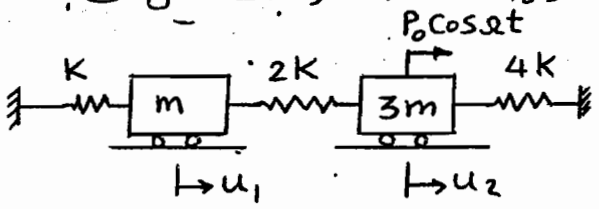
$$[[K] - \omega_i^2 [m]]\{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ \hline -1 & 3-1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \phi_1 = 1 \\ \hline \phi_2 \\ \phi_3 \end{array}\right\}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

www.ttnar.ir

مثال - یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \ , \ m = 0.5 \\ \xi = 2\% \quad \text{واحدها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \ , \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[K] - \omega^2 [m]\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \ , \quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \ , \quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32 \ \text{Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319\,m \ , \quad M_2 = 1.4314\,m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212K \ , \quad K_2 = 5.3798K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \ , \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468) -$$

اثر مود اول

$$\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)$$

اثر مود دوم

www.ttnar.ir

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T\{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & & 0 \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_{NN}\end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\\ \vdots\\ \phi_{N1}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\\ \vdots\\ \phi_{N2}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1N}\\ \phi_{2N}\\ \vdots\\ \phi_{NN}\end{Bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_N\end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}_{M_i}\ddot{q}_i + \cdots$$

برای درنظرگرفتن میرایی معمولاً با روش رایلی عمل می‌شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می‌شود:

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i = C_i$$

در نهایت:

$$M_i\ddot{q}_i + C_i\dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T[k]\{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T\{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بیه جرم، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل $i = 1$ تا N

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i/M_i$$

$\Rightarrow$ q_i معلوم

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می‌توان چند مود اول را درنظر گرفت

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r}\{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

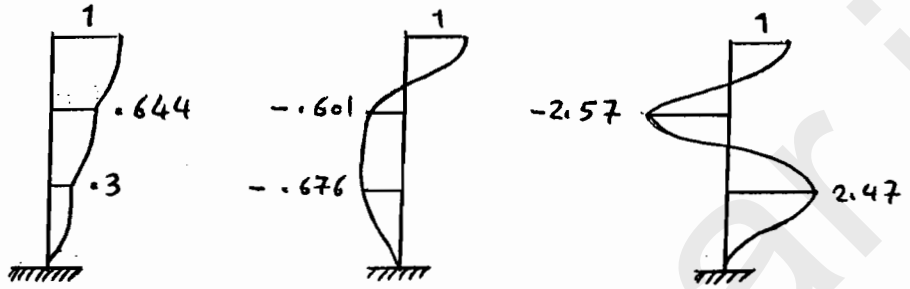
www.itnar.ir

$$\begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.351 \rightarrow \begin{bmatrix} 2.475 & -2 \\ -2 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{21} = 0.644 \\ \phi_{31} = 0.300 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 1.61 \rightarrow \phi_{22} = -0.601 \;,\; \phi_{32} = -0.676$

$\lambda_3 = 3.54 \rightarrow \phi_{23} = -2.57 \;,\; \phi_{33} = 2.47$



مود اوّل　　مود دوّم　　مود سوّم

ORTHOGONALITY OF MODES　　خاصیت تعامد مودها

معادله مشخصه $[[K] - \omega_i^2 [m]]\{\phi\}_i = \{0\}$ را برای مود شماره r می نویسیم:

$$[K]\{\phi\}_r - \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r = \{0\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_s^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r - \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \qquad (1)$$

حال معادله را برای مود S ام می نویسیم:

$$[K]\{\phi\}_s - \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s = \{0\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_r^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s - \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \qquad (2)$$

چون $[K]$ و $[m]$ متقارن است، رابطه (۲) ←

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r - \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \qquad (3)$$

رابطه (۱) − رابطه (۳) $= (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \Rightarrow$

$$\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \;,\; \{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = 0$$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی و جرم

www.tmar.ir

NORMALIZATION OF MODES — مقیاس کردن مودها

الف - با تقسیم مولفه های بردار مود بر بزرگترین عدد آنها، بردار مود به عدد یک مقیاس می شود.

$$\{\phi\}_i \qquad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

ب - مقیاس عددی بر حسب ماتریس جرم به طریقه

$$\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i = 1$$

$$\{\phi\}_i'^T [m] \{\phi\}_i' = M_i \rightarrow \{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \{\phi\}_i'$$

ماتریس مودال

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \ldots \{\phi\}_N]$$

ماتریس مقادیر مشخصه (فرکانس ها)

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

در مثال قبل:

$$\{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1' = M_1 = 360.2$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 / \sqrt{M_1} \\ 0.644 / \sqrt{M_1} \\ 0.3 / \sqrt{M_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0527 \\ 0.0339 \\ 0.0158 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 1$$

MODAL ANALYSIS — تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}$$

از تحلیل ارتعاش آزاد مقادیر ω_i و $\{\phi\}_i$ معلوم است ($i = 1$ تا N).

تغییر متغیر از مجهول فیزیکی $\{u\}$ به مجهول مودال:

$$\{u\} = [\Phi]\{q\}$$

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi\}_i \, q_i(t)$$

www.itnar.ir

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T\{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0 \\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & m_{NN}\end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\\ \vdots\\ \phi_{N1}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\\ \vdots\\ \phi_{N2}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \vdots\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1N}\\ \phi_{2N}\\ \vdots\\ \phi_{NN}\end{Bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_N\end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}_{M_i}\ddot{q}_i + \cdots$$

برای در نظر گرفته میرایی معمولاً با روش رایلی عمل می‌شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می‌شود:

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i = C_i$$

در نهایت:

$$M_i\ddot{q}_i + C_i\dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T[k]\{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T\{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بیه جرم، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل $i = 1$ تا N

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i/M_i$$

$$\Rightarrow \quad q_i \text{ معلوم}$$

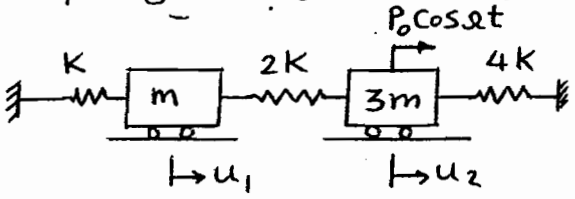
$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می‌توان چند مود اول را در نظر گرفت

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r}\{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

www.itnar.ir

مثال - یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است. مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \ , \ m = 0.5 \\ \xi = 2\% \quad \text{واحدها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \ , \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[K] - \omega^2 [m]\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \ , \quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \ , \quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32 \ \text{Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319\,m \ , \quad M_2 = 1.4314\,m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212K \ , \quad K_2 = 5.3798K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \ , \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792\,P_0 \cos\Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468) -$$

اثر مود اول

$$\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)$$

اثر مود دوم