www.engclubs.net

A site for all Engineers

به نام خدا

مثلثات

ارائه ی تمام نکات تستی و کنکوری

همراه با تست های سراسری و سنجش و خارج از کشور

(1380-92)

ویژه ی داوطلبان رشته ی ریاضی و تجربی

مولف : ابراهیم پناهی

دانشجوی دکتری مهندسی برق-مخابرات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دبیر دبیرستان های تهران و

مدرس کنکور آموزشگاه های تهران

Email : panahisaeed59@yahoo.com

My Phon : 09196025850

مرداد ماه 1392

توضیحات :

جزوه تهیه شده در واقع بخشی از کتاب کمک آموزشی اینجانب است که زمستان سال 92 وارد بازار خواهد شد.این کتاب کمک آموزشی که اکنون در مرحله ی ویرایش نهایی است , به مرور زمان و طی 2 سال اخیر و به صورت شبانه روزی تهیه شده است.

یکی از مهم ترین عواملی که باعث شد به نگارش این کتاب دست بزنم , این بود که در اکثر کتاب های کمک آموزشی و شاید بشه گفت همه ی آنها تست های ارائه شده به صورت مخلوط و غیراستاندارد است.

عدم استاندارد بودن تست ها یکی از عواملی است که در تمرکز داوطلبان کنکور نقشی بسیار منفی دارد.

من که به نوبه ی خودم هرگز به شاگردای خصوصی خودم طی چند سال اخیر اجازه ندادم که به جز تست های سراسری و سنجش و خارج از کشور , تست دیگری را مطالعه کنند؛موفقیت آنها طی سال های اخیر در آزمون کنکور نیز گواه درستی این ادعاست. شاید برخی از شماها بگید که در این صورت ممکنه با کمبود تست مواجه شوید.اما می تونید یک تست رو چندین بار حل کنید خوب.تکرار و تمرین خودش یکی از عوامل موفقیت طی هر فرایندی ست.

در کتاب آموزشی که پیش روی شماست , تمام سعی اینجانب بر این بوده است که برای همه ی مباحث روش هایی و راهکارهایی سریع که شما داوطلبان را در کوتاه ترین زمان ممکن به پاسخ صحیح می رساند ارائه شده است.البته خیلی از این راهکارها و ترفندها در سایر مباحث درسی ارائه شده است.

توصیه ی بنده به همه ی داوطلبان عزیز این است که برای اینکه به بهترین رتبه های کنکور نائل شوید فقط یادگیری مطالب و حتی تسلط کامل بر مباحث نیز نمی تواند ضامن موفقیت شما در کنکور باشد.اگر قصد دارید جزو رتبه های برتر کنکور باشید سعی کنید علاوه بر تسلط کافی بر مباحث یک سری فاکتورها را در وجود خود تقویت کنید.فاکتورهایی مانند (افزایش قدرت محاسباتی – پرهیز از نوشتن تا حد ممکن –تکنیک های محاسباتی و ...).

امیدوارم که جزوه های تهیه شده که در خدمت شما داوطلبان عزیز و گرامی قرار می گیرد موجب رضایت شما داوطلبان عزیز قرار گرفته باشد.

شما داوطلبان عزیز می توانید برای تهیه ی جزوات کنکوری و کلاس های خصوصی به صورت موضوعی با اینجانب تماس بگیرید.

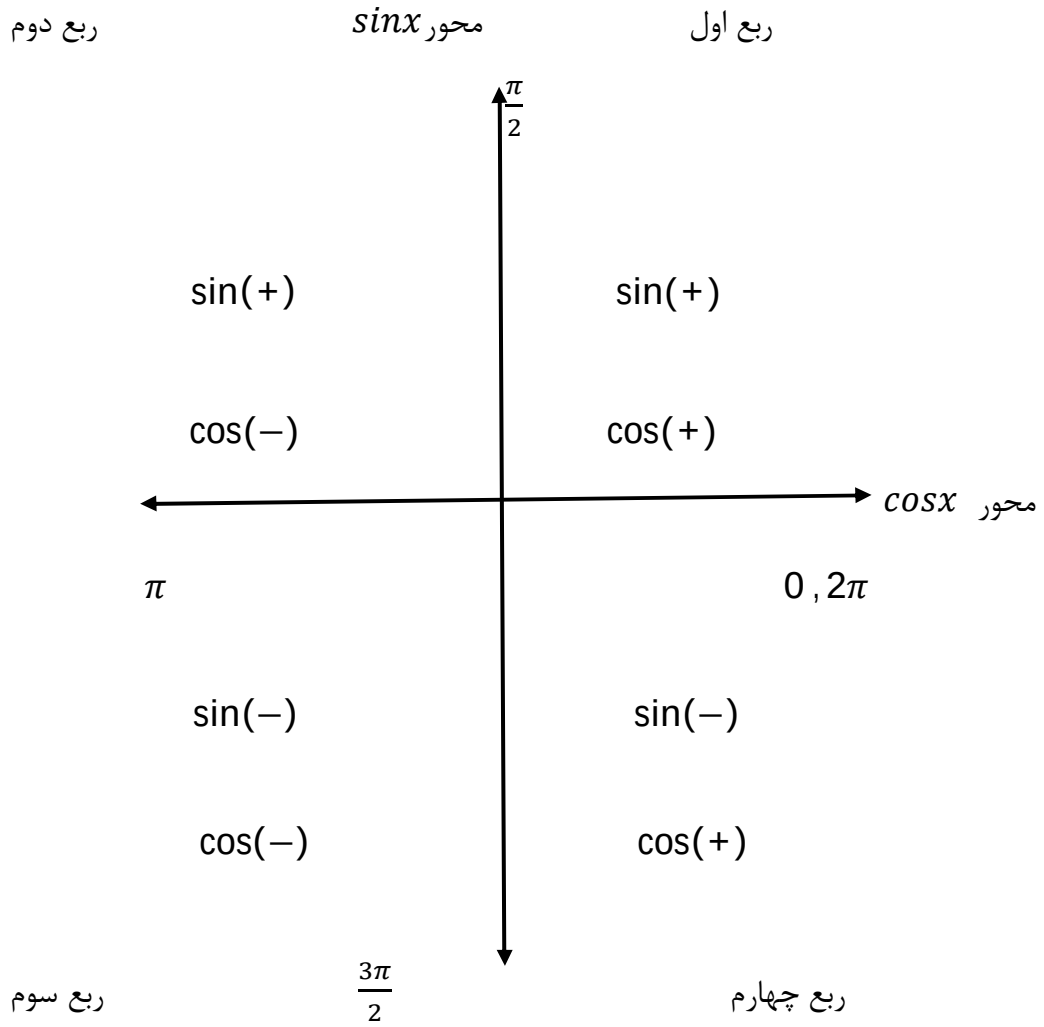
موفق باشید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

*** مثلثات**

توابع مثلثاتی همیشه یک پای ثابت تست های کنکورهای سراسری بوده است. با وجود اینکه خیلی از دانش آموزان مبحث مثلثات را به مثابه یک غول پنداشته و کلا بی خیال آن می شوند , اما در واقعیت اینگونه نیست و اتفاقا یکی از تست هایی که به راحتی آب خوردن می توان از پس آن براومد تست مثلثات است.البته به شرطی که تمام چیزاییو که در این بخش خدمت شما داوطلبان عزیز ارائه خواهد شد را به صورت دقیق یاد بگیرید.

* اولین چیزی که در مبحث مثلثات یک دانش آموز به آن باید تسلط داشته باشد , دایره ی مثلثاتی است.در واقع شما داوطلبان گرامی با تسلط کافی روی دایره ی مثلثاتی نیمی از راه را پیموده اید.



خوب علامت سینوس و کسینوس در چهار ناحیه ی مثلثاتی را به خاطر بسپارید.

* قدم بعدی دانستن مقدار سینوس و کسینوس یکسری زوایاست.

	0	$\frac{\pi}{6}(30)^\circ$	$\frac{\pi}{4}(45)^\circ$	$\frac{\pi}{3}(60)^\circ$	$\frac{\pi}{2}(90)^\circ$	$\frac{2\pi}{3}(120)^\circ$	$\pi(180)^\circ$	$\frac{3\pi}{2}(270$	$2\pi(360)^\circ$
Sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نشده	$-\sqrt{3}$	0	تعریف نشده	0
$cotx$	تعریف نشد	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده

*** مهم ترین و پرکاربردترین روابط مثلثاتی مورد نیاز در کنکور**

1). $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2). $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$

3). $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

4). $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

5). $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

6). $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

7). $-1 \leq \sin x \leq 1 \ , -1 \leq \cos x \leq 1$

8). $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

9). $\sin k\pi = 0$ (سینوس مضارب صحیحی از π همواره صفر است .)

10). $\cos 2k\pi = 1$ (کسینوس مضارب زوجی از π همواره یک است .)

11). $\cos(2k + 1)\pi = -1$ (کسینوس مضارب فردی از π همواره یک منفی است .)

12). $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ (ربع سوم سینوس منفی است .)

13). $\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$ (ربع دوم سینوس مثبت است .)

14). $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ (ربع چهارم سینوس منفی است .)

15). $\sin(2\pi + \alpha) = +\sin\alpha$ (ربع اول سینوس مثبت است .)

16). $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (ربع سوم کسینوس منفی است .)

17). $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ (ربع دوم کسینوس منفی است .)

18). $\cos(2\pi - \alpha) = +\cos\alpha$ (ربع چهارم کسینوس مثبت است .)

19). $\cos(2\pi + \alpha) = +\cos\alpha$ (ربع اول کسینوس مثبت است .)

20). $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

21). $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin\alpha$

22). $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

23). $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha \quad , \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

* دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که دیگر نیازی به اشاره ی این روابط برای توابع تانژانت و کتانژانت نیست.روابط یادشده را با استفاده از رابطه ی مثلثاتی ذکر شده در شماره ی 2 می توانید برای توابع تانژانت و کتانژانت نیز به دست آورید.باز هم اکیدا توصیه می کنم به هیچ وجه در صدد حفظ روابط یاد شده برنیایید و فقط به علامت آنها در دایره ی مثلثاتی توجه داشته باشید.

24). $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

25). $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

26). $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

27). $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

28). $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

29). $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

30). $\sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

31). $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

32). $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

33). $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

34). $\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

35). $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

36). $\sin2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

37). $\cos2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

38). $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$

39). $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

40). $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

*** حل معادلات مثلثاتی**

هر معادله ای را که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله ی مثلثاتی نامیده و برای حل آن باید معادله ی داده شده را به یکی از حالت های زیر درآورده و آنرا حل کنیم.

منظور از حل یک معادله ی مثلثاتی آن است که زوایایی که به ازای آنها آن رابطه ی مثلثاتی برقرار است را بدست آوریم.

1). $\sin\alpha = \sin\beta \rightarrow \alpha = 2k\pi + \beta \quad , \quad \alpha = 2k\pi + \pi - \beta$

2). $\cos\alpha = \cos\beta \rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \beta$

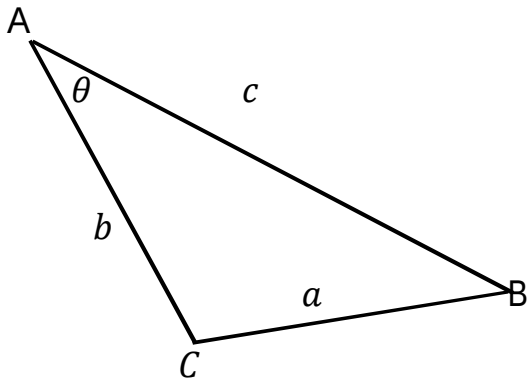
3). $\tan\alpha = \tan\beta \rightarrow \alpha = k\pi + \beta$

به یاد داشته باشید که β کوچکترین زاویه ای است که به ازای آن رابطه ی مثلثاتی داده شده برقرار است.

*** کاربرد مثلثات در هندسه**

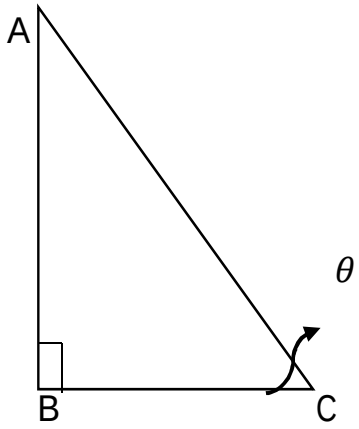
مثلثات در هندسه کاربرد فراوانی دارد.در ذیل و به ترتیب مهم ترین کاربردهای مثلثات در هندسه را که بسیار در کنکور پرکاربرد می باشد را ارائه خواهیم کرد.

الف – قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\theta$$

ب – نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه



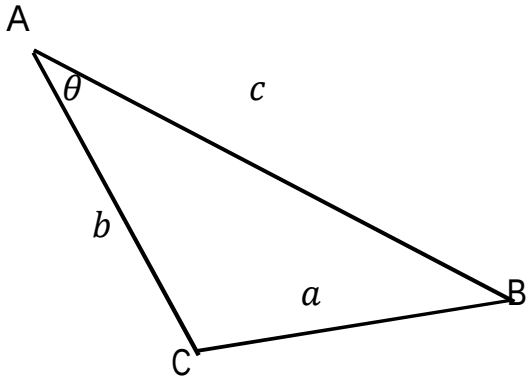
$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{BC}{AB}$$

ج) – تبدیل رادیان به درجه و بالعکس

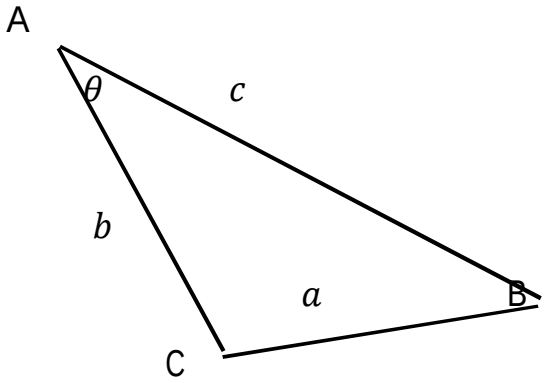
$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

د) – محاسبه ی مساحت یک مثلث با دانستن اندازه ی دو ضلع و زاویه ی بین آنها



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin\theta$$

ه) – قضیه ی سینوس ها در یک مثلث



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

تذکر :

* قبل اینکه شروع کنیم به حل تست های مربوط به مثلثات , ذکر مطالبی در مورد حل تست های مثلثاتت ضروری است.در حل تست ها سعی کردم که آنها را هم به روش تشریحی و هم به روش تستی حل کنم.اما به یاد داشته باشید که گاهی روش تستی و گاهی هم روش تشریحی برای حل تست های مثلثات مناسب است و شما فقط می توانید با تسلط کامل روی این موضوع تشخیص دهید چه زمان هایی تست را باید از روش تشریحی رفت , چه وقت هایی با روش تستی و چه وقت هایی ترکیبی از این 2 روش.

امیدورارم روش رد گزینه (تستی) که خدمت شما دانش آموزان و داوطلبان گرامی کنکور ارائه خواهم کرد باعث شود شما به این روش در سایر مباحث نیز توجه داشته باشید.

مطمئنا از روش رد گزینه در همه ی مباحثی که امکان استفاده از آن باشد بحث خواهیم کرد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

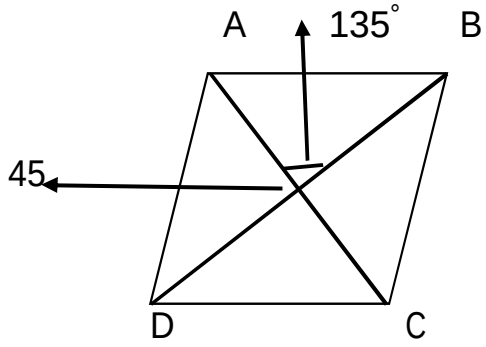
" تست های سراسری و سنجش مثلثات "

1- در متوازی الاضلاعی , اندازه ی دو قطر 12 و 8 واحد و زاویه ی بین دو قطر 135 درجه است.مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟(سراسری تجربی – 92)

1) 18 2) 24 3) 32 4) 36

گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم در یک متوازی الاضلاع , قطرها یکدیگر را نصف می کنند.یعنی با چهار مثلث که اندازه ی دو ضلع هرکدام از مثلث ها و زاویه ی بینشان مشخص است مواجه هستیم :



اگر نقطه ی تقاطع قطرها را O بنامیم , خواهیم داشت :

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{ODC} + S_{OBC} + S_{OAD} = \frac{1}{2}0A.\,OB.\,Sin\,135 + \frac{1}{2}OD.\,OC.\,sin135 +$$

$$\frac{1}{2}OB.\,OC.\,sin45 + \frac{1}{2}OA.\,OD.\,sin45 = \frac{1}{2}(6)(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}(4)(6)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}(4)(6)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(6)(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

2-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟(سراسری ریاضی – 92)

1) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ **2)** $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ **3)** $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ **4)** $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$2\sqrt{2}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \xrightarrow{\sin 2x = 2\sin x.\cos x} \sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

دقت شود که از بین جواب های به دست آمده , گزینه ی 3 صحیح تر و در واقع کلی تر است.

3-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 92)

1) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ **2)** $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **3)** $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ **4)** $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$(1)(-\cos 2x) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

4-اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ باشد , حاصل $(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta)$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) 3 2) 2 3)4 4) 1

گزینه ی 2 صحیح است.

روش تشریحی :

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ربع سوم علامت tan مثبت است}} 1$$

$$\xrightarrow{\text{با طرفین وسطین کردن عبارت}} \tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha.\tan\beta$$

$$(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta) = 1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha.\tan\beta = 1 + 1 - \tan\alpha.\tan\beta +$$

$$\tan\alpha.\tan\beta = 2$$

خوب گرچه تست چندان دشواری نبود , اما شاید برخی از داوطلبان عزیز کنکور به هر دلیلی یا رابطه ی مثلثاتی یادشده رو بلد نباشند و به ذهنشون نرسیده باشه یا اینکه ممکنه طرفین وسطین کردن عبارت باعث حل تست بشه به ذهنشون تداعی نکرده باشه...خوب نظرتون در مورد راه حل زیر چیه؟!

البته قبلش یه چیزیو بگم! یهو یکی نیاد بگه من تو جمع و تفریق کمان های مثلثاتی مشکل دارم.! اگه اینجوریه هرچه سریع تر این نقیصه رو برطرف کنین.

راه حل تستی :

خیلی ساده ست؛تمام کمان هایی رو که جمع شون $\frac{5\pi}{4}$ است در نظر می گیریم...البته باید توجه داشته باشیم که این کمان ها مقدار تانژانت شان برای ما معلوم باشد یا تعریف شده باشد؛

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \ , \ \beta = \pi \quad \rightarrow \quad (1 + 1)(1 + 0) = 2$$

$\alpha = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow tan\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده , $\beta = \frac{3\pi}{4}$ $\rightarrow$ نیازی به بررسی نیست

5-اگر $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ باشد , مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) 0.3 2) 0.4 3) 0.6 4) 0.8

گزینه ی 4 صحیح است.

حتما رابطه ی 34 را در روابط مثلثاتی به یاد دارید...

$$\sin 2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 + tan^2\alpha} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

6-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سنجش جامع تجربی92)

1). $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ 4) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha \rightarrow \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{2\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$$

با طرفین وسطین کردن نتیجه ی به دست آمده خواهیم داشت :

$$\sin^2\alpha = \sqrt{3}sin\alpha.cos\alpha$$

قبل اینکه به ادامه ی حل تست بپردازیم ذکر یک نکته ضروری است و آن اینکه در حل یک معادله ی مثلثاتی به هیچ عنوان حق ندارین که چیزی را از طرفین ساده کنید.!

$$\sin^2\alpha - \sqrt{3}sin\alpha.cos\alpha = 0 \rightarrow sin\alpha(sin\alpha - \sqrt{3}cos\alpha) = 0$$

در نتیجه :

$$sin\alpha = 0 \rightarrow \alpha = k\pi$$

$$tan\alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

چون جواب کلی مورد نظر است کاملا مشخص است که گزینه ی 2 صحیح است.

7-در مثلثی $c^{\circ} = 60$, $b = 4$, $a = 5$ است , اندازه ی ضلع c کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) $2\sqrt{7}$ 2) $2\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{21}$ 4) $3\sqrt{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با توجه به قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث داریم :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos c \rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 60 = 25 + 16 - 40(0.5)$$

$$c^2 = 41 - 20 = 21 \rightarrow c = \sqrt{21}$$

8-نمودار تابع $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ روی بازه ی $[-1 \text{ و } 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟(سراسری تجربی – 91)

1.(1 2.(2 3.(3 4.(4

گزینه ی 3 صحیح است.

گرچه تست مطرح شده را می توان با استفاده از مشتق نیز حل نمود , اما در واقع تست رو از طریق مثلثات نیز می توان حل نمود:

کاملا مشخص است که برای آنکه تابع داده شده بیشترین مقدار را در بازه ی مذکور داشته باشد این است که عبارت $\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ کمترین مقدار را به خود بگیرد...و همانطور که می دانیم کمترین مقداری که یک تابع کسینوسی می تواند داشته باشد مقدار 1- است:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -1 = \cos\pi \xrightarrow{\cos\alpha=\cos\beta \rightarrow \alpha=2k\pi\pm\beta} \frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi \pm \pi$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - 3x = 2k + 1 \rightarrow -3x = 2k + \frac{3}{4} \rightarrow x = -\frac{2k}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - 3x = 2k - 1 \rightarrow -3x = 2k - \frac{5}{4} \rightarrow x = -\frac{2k}{3} + \frac{5}{12} \end{cases}$$

- با یکی از جواب های به دست آمده نیز می توان تعداد جواب ها را مشخص نمود.

با توجه به اینکه $-1 \leq x \leq 1$ ؛ داریم :

$$-1 \leq -\frac{2k}{3} - \frac{1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\text{به طرفین اضافه } \frac{1}{4}} -\frac{3}{4} \leq -\frac{2k}{3} \leq \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{طرفین نامعادله ضربدر } -\frac{3}{2}} -\frac{15}{8} \leq k \leq \frac{9}{8}$$

پس چون سه مقدار صحیح 1 , 0 , k=-1 قابل قبول است پس عبارت یاد شده در بازه ی داده شده نیز در سه نقطه از آن بازه بیشترین مقدار را دارد.

9-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟(سراسری تجری 91)

1). $\frac{k\pi}{3}$ 2) $\frac{2k\pi}{3}$ 3) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \rightarrow -cos2x = -cosx \rightarrow cos2x = cosx$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \beta \rightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

$$3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{جواب کلی تر}} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi \end{array}\right.$$

10-اگر $\tan\theta = 0.2$ باشد , مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 91)

1) -2 2) 1.2 3) 2 4) 3

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{sin\theta+cos\theta}{sin\theta+sin\theta}=\frac{sin\theta+cos\theta}{2sin\theta}\xrightarrow{\text{کل رابطه را بر } cos\theta \text{ تقسیم میکنیم}}$$

$$\frac{tan\theta+1}{2tan\theta}=\frac{0.2+1}{2(0.2)}=\frac{1.2}{0.4}=3$$

11-خلاصه شده ی کسر $\frac{\sin^2 7x-\sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{54}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 91)

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) 1 4) $\sqrt{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\frac{\sin^2 7x-\sin^2 2x}{\sin 5x}=\frac{(\sin 7x+\sin 2x)(\sin 7x-\sin 2x)}{\sin 5x}=\frac{(2\sin\frac{9x}{2}.\cos\frac{5x}{2})(2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{9x}{2})}{\sin 5x}$$

$$\frac{(2\sin\frac{9x}{2}.\cos\frac{9x}{2})(2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{5x}{2})}{\sin 5x}=\frac{\sin 9x.\sin 5x}{\sin 5x}=\sin 9x=\sin 9\left(\frac{\pi}{54}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

این دو رابطه را که بیشتر مخصوص بچه های رشته ی ریاضی است به یاد داشته باشید.

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

12-از معادله ی $tanx - cotx = 4$, مقدار $tan2x$ کدام است؟(سنجش جامع 91 تجربی)

1) -2 **2) $\frac{-1}{2}$** **3) $\frac{1}{2}$** **4) 2**

گزینه ی 2 صحیح است.

$$tanx - cotx = 4 \rightarrow \frac{sinx}{cosx} - \frac{cosx}{sinx} = \frac{sin^2x - cos^2x}{sinx.cosx} = \frac{-cos2x}{\frac{1}{2}sin2x} = -2cot2x = 4$$

$$cot2x = -2 \rightarrow tan2x = -\frac{1}{2}$$

13-بزرگترین زاویه از مثلثی به اضلاع 7 و 5 و 3 چند درجه است؟(سنجش جامع 91 تجربی)

1) 60 **2) 75** **3) 105** **4) 120**

گزینه ی 4 صحیح است.

طبق قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث می دانیم که بزرگترین زاویه , مربوط به زاویه ای است که در مقابل بزرگترین ضلع قرار داره...پس می توان نوشت :

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(3)(5)cos\alpha \rightarrow 49 = 25 + 9 - 30cos\alpha \rightarrow cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

و همانطور که می دانیم کسینوس زاویه ی 120 درجه جواب تست است.

تذکر :

داوطلبان گرامی توجه داشته باشند که اینگونه نباشد که هر فرایندی رو که طی حل یک تست طی می کنند روی کاغذ پیاده کنند...نوشتن بیش از حد در واقع به منزله ی سم برای یک داوطلب کنکور می باشد.پس سعی کنید در حل یک تست تا حتی الامکان از نوشتن پرهیز نموده و بیشتر و یا حداقل نصف محاسبات رو به صورت ذهنی انجام دهید.

مطمئن باشید که تمام داوطلبانی که به رتبه های برتر کنکور نائل می شوند کسانی هستند که قدرت محاسباتی بسیار بالایی دارند و تا حد امکان از نوشتن می زنند و خیلی از محاسبات رو تو ذهنشون انجام می دهند.پس اگه شما هم به دورنمایی اینگونه می اندیشید به نکات ذکر شده توجه داشته باشید.

اینجانب هم هر جا لازم بوده و در تمامی مباحث به مواردی که باعث بشه به شما کمک بشه و تکنیک های محاسباتی سریع اشاره کرده ام.

14-در مثلثی به اضلاع 7 و 5 و 3 واحد , تانژانت بزرگترین زاویه ی آن کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $-\sqrt{3}$ 2) $-\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{5}$ 4) $2\sqrt{2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

ابتدا با استفاده از قضیه ی کسینوس ها مقدار بزرگترین زاویه ی این مثلث را پیدا می کنیم؛

همانطور که در درس هندسه خواندیم , بزرگترین زاویه مربوط به زاویه ی مقابل به بزرگترین ضلع مثلث است.پس می توان نوشت:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha \rightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(3)(5)\cos\alpha \rightarrow 49 = 25 + 9 - 30\cos\alpha$$

$$49 = 34 - 30\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120 \rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3}$$

15-اگر $2a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد , حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $\cos b$ 2) $\cos a$ 3) $\frac{1}{\cos a}$ 4) $\frac{1}{\cos b}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b} \xrightarrow{b=\frac{\pi}{2}-2a} \frac{\sin(a+\frac{\pi}{2}-2a)}{\cos a.\cos b}$$
$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{\cos a.\cos b} = \frac{\cos a}{\cos a.\cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

16-اگر $a+b+c=\frac{\pi}{2}$ باشد حاصل $\tan a.\tan b+\tan b.\tan c+\tan c.\tan a$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)(مطالعه ی این سوال به داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود.!)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) 3

گزینه ی 2 صحیح است.

شاید خیلی از شما به این فکر کنین که بخواین همون روشی رو که تو حل تست قبلی به کار گرفتینو تو همین تست هم به کار ببندین...به هیچ وجه دست به این کار نزنین که دستیابی به جواب نهایی تست بسیار سخت بوده و شاید امکان ناپذیر باشد؛

$$a+b+c=\frac{\pi}{2} \rightarrow a+b=\frac{\pi}{2}-c \xrightarrow{\text{از طرفین تانژانت می گیریم}} \tan(a+b)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\cot c$$

$$\rightarrow \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}=\frac{1}{\tan c} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1-\tan a.\tan b=\tan a.\tan c+\tan b.\tan c$$

$$\tan a.\tan b+\tan b.\tan c+\tan a.\tan c=1$$

تست واقعا سختی بود و دانش آموز باید خیلی زرنگ و دارای چنین ذهنی قوی باشه تا به چنین راه حلی فکر کنه...البته قابل ذکر است که در طول سال های اخیر چند باری چند تستی به این گونه حل شده است.به هر حال تمرین و تکرار و تجربه در حل تست های گوناگون نیز یکی از عواملی است که باعث افزایش تمرکز و حضور ذهنی داوطلبان می شود.

17-مجموع جواب های معادله ی $\sin^2x - \cos x = \cos^2x$ در بازه ی $[\pi \text{ و } 2\pi]$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) 3π 2) $\frac{8\pi}{3}$ 3) $\frac{10\pi}{3}$ 4) $\frac{3\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\sin^2x - \cos x = \cos^2x \rightarrow 1 - \cos^2x - \cos x - \cos^2x = 0 \rightarrow 2\cos^2x + \cos x - 1 = 0$$

خوب حل یک معادله ی درجه ی 2 مد نظر است.

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \cos x = -1 \ , \frac{1}{2} \rightarrow x = \pi \ , \frac{5\pi}{3} \overset{+}{\rightarrow} \frac{8\pi}{3}$$

18-نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه ی $[\pi \text{ و } -\pi]$ در چند نقطه محور xها را قطع می کند؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

گزینه ی 3 صحیح است.

اینکه گفته شده محور x ها را قطع می کند یعنی جواب ها ی معادله ی $y = 0$ مد نظر تست است.

$$y = 0 \rightarrow 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال با اختیار مقادیر صحیح برای k جواب های مورد قبول (نقاطی که محور xها را قطع می کند) به دست خواهد آمد:

غ ق ق $k = -2$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \qquad k = 1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} \qquad k = 2 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{8}$$

19-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1). $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ 3) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 4) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\tan\alpha=\tan\beta\rightarrow\alpha=k\pi+\beta} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

20-ساده شده ی کسر $\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

1) $8\cos^{-2}2\theta$ 2) $8\sin^{-2}2\theta$ 3) $16\cos^{-4}2\theta$ 4) $16\sin^{-4}2\theta$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta.\sin^2\theta} \xrightarrow{\sin 2\theta=2\sin\theta.\cos\theta} \frac{\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{16}}\sin^{-4}2\theta = 16\sin^{-4}2\theta$$

21-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\pi + x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی 90)

1). $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 2) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 3) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\sin(\pi + x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0 \rightarrow (-\sin x).(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0$$

$$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = (\sin x - 1)^2 = 0 \rightarrow \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

البته قابل ذکر است در چنین تست هایی خیلی راحت می توان با رد گزینه به پاسخ تست رسید.

با اختیار $k = 0$ 4 گزینه ی داده شده را بررسی می کنیم؛

گزینه ی 1 : $-\frac{\pi}{2}$ نادرست $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

گزینه ی 2 : $\frac{\pi}{6}$ نادرست $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

گزینه ی 3 : $\frac{\pi}{2}$ درست $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

گزینه ی 4 : $\pm\frac{\pi}{2}$ نادرست $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) \pm 1$

اکیدا به همه ی داوطلبان عزیز توصیه می شود که در تمامی تست های مثلثات از این روش استفاده کنند تا تسلط کافی بر آن پیدا کنند.این روش فقط نیازمند تسلط کافی شما بر دایره ی مثلثاتی بوده و مستلزم این نیست که شما بر فرمول های مثلثاتی حتما مسلط باشید.اما همانطور که قبلا هم اشاره شد استفاده ی درست و به جا بهترین روش برای حل تست های مثلثات است.گهگاه استفاده از این روش خوب است و برخی موارد هم استفاده از روابط مثلثاتی مناسب تر است.

22-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos5x.\cos3x-\sin3x.\sinx}{\cos2x}=1$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 90)

1). $\frac{k\pi}{3}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $\frac{2k\pi}{5}$ 4) $\frac{2k\pi}{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.(حل این تست نیز برای داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود.! البته این عدم توصیه به مثابه این نیست که داوطلبان رشته ی تجربی بی خیال اینگونه تست ها شوند؛ درسته که امکان طرح چنین تست هایی به علت دانستن روابطی از مثلثات که در کتب درسی دانش آموزان رشته ی تجربی دیده نمی شود است , تقریبا صفر است , اما یادگیری و تسلط بر چنین تست هایی نیز باعث میشه شما داوطلبان رشته ی تجربی به راحتی از عهده ی هرگونه تستی از مثلثات بر بیاین.

$$\frac{\cos5x.\cos3x-\sin3x.\sinx}{\cos2x}=1 \xrightarrow{\begin{cases}\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\\ sin\alpha.sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\end{cases}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(cos8x+cos2x)-\frac{1}{2}(cos2x-cos4x)}{cos2x}=1$$

$$\frac{1}{2}(cos8x+cos4x)=cos2x \xrightarrow{cosA+cosB=2cos\frac{A+B}{2}.cos\frac{A-B}{2}} \frac{1}{2}(2)cos6x.cos2x=cos2x \rightarrow$$

$$cos2x(cos6x-1)=0 \rightarrow \begin{cases}cos2x=0=cos\frac{\pi}{2} \rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\\ cos6x=1=cos2k\pi \rightarrow 6x=2k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{3}\end{cases}$$

کاملا مشخص است که $x=\frac{k\pi}{3}$ جواب کلی معادله است.

ذکر نکته ای در حل این تست الزامی است و آن این است که در حل یک معادله ی مثلثاتی هرگز حق ساده سازی ندارین...زیرا ممکن است که با این ساده سازی تعدادی از جواب های مورد نظر معادله حذف گردد و شما به پاسخ نادرست برسید.پس هرگز این کار را نکنین. با اینکه در اکثر کتاب های کمک آموزشی این کار موقع حل تست ها دیده می شود اما این حرکت کاملا اشتباه و نادرست می باشد.

23-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3$ به کدام صورت است؟(سنجش جامع 90 تجربی)

1) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 2) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ 3) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 4) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3\rightarrow -\cos 2x+5\cos x-3=0\rightarrow$$

$$-(2\cos^2 x-1)+5\cos x-3=0\rightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0\rightarrow \cos x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}$$

$$=\frac{5\pm 3}{4}\rightarrow \cos x=2,\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{جواب قابل قبول}}\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

24-حاصل $1-\sin^2 10-\sin^2 70$ برابر کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $\frac{1}{2}\sin 10$ 2) $\cos 10$ 3) $\frac{1}{2}\sin 20$ 4) $\cos 20$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\rightarrow 1-\frac{1-\cos 20}{2}-\frac{1-\cos 140}{2}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 20+\cos 140)-\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}(\cos 20+\cos 140)=\frac{1}{2}(2)\left(\cos\frac{140+20}{2}.\cos\frac{140-20}{2}\right)=\cos 80.\cos 60\rightarrow\frac{1}{2}\sin 10$$

25-از رابطه ی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ مقدار $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $\frac{1}{2}$ و -1 **2) 0 و $-\frac{1}{2}$** **3) $\frac{1}{2}$ و 1** **4) 0 و 1-**

گزینه ی 2 صحیح است.

با فرض : $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ خواهیم داشت:

$$\cos x.\cos\frac{\pi}{4} - \sin x.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = y \xrightarrow{\times 2} \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = -2y$$

$$2 - 2\sin 2x = 2(1 - \sin 2x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x.\cos x) = 2(\sin x - \cos x)^2 = 4y^2$$

در نتیجه معادله ی داده شده به معادله ی زیر منتهی می شود :

$$4y^2 + 2y = 0 \rightarrow 2y(2y + 1) = 0 \rightarrow y = 0, -\frac{1}{2}$$

26-اگر $\tan(15 + a) = \frac{3}{4}$ باشد آنگاه $\cot(30 - a)$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) 4 **2) 5** **3) 6** **4) 7**

گزینه ی 4 صحیح است.

زمانی که تستی رو می خواین حل کنین , باید ببینین که تست چی میخواد...

خوب...تست سختی که به نظر نمی آد؟چیزی که مشخصه اینه که از کمان 30-a , کمانی به اندازه ی 15+a دربیاوریم:

$$\xrightarrow{30-a=45-(15+a)} \tan\big(45 - (15 + a)\big) = \frac{tan45 - \tan(15 + a)}{1 + tan45.\tan(15 + a)} =$$

$$\tan(30 - a) \qquad \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} =$$

$$\frac{1}{7} \rightarrow \cot(30 - a) = \frac{1}{\tan(30 - a)} = 7$$

27-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3}$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 90)

1). $k\pi - \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3} \rightarrow (sinx - tanx).cotx = -\frac{1}{2} \rightarrow cosx - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$cosx = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

28-معادله ی مثلثاتی $\sin 3x - \sin x + 2\sin^2 x = 1$ در بازه ی $[0 \text{ و } 2\pi]$ چند جواب دارد؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

گزینه ی 2 صحیح است.

به داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود...البته نه اینکه اصلا نخونین!

$$\sin 3x - \sin x + 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin 3x - \sin x = 1 - 2sin^2 x \xrightarrow{\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$2\sin x.\cos 2x = \cos 2x \rightarrow \cos 2x(1 - 2\sin x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

29-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 89)

1). $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ 4) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x}$$

$$\frac{1 + \tan^2 x + 2\tan x - 1 - \tan^2 x + 2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\left(\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right) = 2\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

البته روش دیگری نیز برای حل این تست وجود دارد و در اکثر کتاب های آموزشی هم از این روش استفاده شده است.گرچه به نظر من این راه حل که اینجا استفاده شد بهتر بود.

روش دیگه اینه که هر دو تابع تانژانت رو به صورت نسبت سینوس بر کسینوس بنویسیم و ادامه ی حل که توصیه نمی شود!

30-عبارت $(\cos10-\cos70)(\tan70-\cot100)$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 89)

1) 1 2) $2\cos20$ 3) $-\sqrt{3}$ 4) $\sin80$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$(\cos10-\cos70)(\tan70-\cot100)=(\cos10-\cos70)(\tan70+\tan10)$$
$$=(-2\sin40.\sin(-30)\left(\frac{\sin70}{\cos70}+\frac{\sin10}{\cos10}\right)=$$
$$\sin40.\left(\frac{\sin70.\cos10+\cos70.\sin10)}{\cos70.\cos10}=\sin40\frac{\sin(70+10)}{\cos70.\cos10}=\sin40.\frac{\sin80}{\cos70.\cos10}\right.$$
$$=\sin40.\frac{\cos10}{\cos70.\cos10}=\frac{\sin40}{\cos70}=\frac{2\sin20.\cos20}{\sin20}=2\cos20$$

دیگه خودتون می دونین که سینوس و کسینوس زوایا متمم دیگه هستند.و ما در حل این تست خیلی از این خاصیت استفاده نمودیم.

31-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 89خارج از کشور)

1) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ 2) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 4) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

گزینه ی 4 صحیح است.

راه حل تشریحی:(دیوانگی محض)

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=(\frac{1}{4}\cos^2x$$
$$-\frac{3}{4}\sin^2x)=-\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{4}(1-\sin^2x)-\frac{3}{4}\sin^2x=\frac{1}{4}-\sin^2x=-\frac{1}{2}\rightarrow\sin^2x=\frac{3}{4}\rightarrow$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ یا } x = 2k\pi + \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \qquad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

لازم به توضیح است که بعضی وقتا حل تشریحی تست ها منجر به جواب های چهارگانه ای مانند همین تست می گردد.خدمتتون عرض کنم که نه اینکه این روش اشتباه باشه...نه! اما خداوکیلی طولانی بوده و تازه ممکنه که شما در انتها خیلی براتون سخت باشه که جواب کلی را بتونین از بین این چهار جواب بدست بیارین.

روش تیتی زیر که قبلا هم اشاره شد و شما می تونین در همه ی تست های مثلثات از این روش استفاده کنین به راحتی به تست فوق پاسخ می دهد.

پاسخ تستی:

واقعا اگه زرنگ باشین خیلی راحت و بدون اینکه مراحل فوق رو طی کنین می تونین به پاسخ صحیح تست برسین.من خودم اگه بخوام اینگونه به این تست پاسخ می دهم.

سریع در هر چهار گزینه به k مقدار عددی صفر می دهم:

$$k = 0 \quad 1)\ x = -\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0.\cos -\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$k = 0 \quad 2)\ x = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}.\cos 0 = -\frac{1}{2}$$

$$k = 0 \quad 3)\ x = \pm\frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}.\cos -\frac{\pi}{6} = 0$$

$$k = 0 \quad 3)\ x = \pm\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

توضیحات :

وقتی که گزینه ی یک رو چک کردین و جواب صحیح شد , مبادا فکر کنین که بله دیگه تموم شد و تو همون گزینه ی یک به پاسخ صحیح تست رسیدین...!

صورت سوالو حتما دقت کنین گفته شده جواب کلی!

گزینه ی 2 رو هم چک کردیم و صحیح دراومد...خوب این چه معنی میده؟یعنی هم گزینه ی یک غلطه هم گزینه ی دو!

البته نه اینکه غلط باشه...پاسخ صحیح و کلی تست نیست....گزینه ی 3 که تابلو غلط هستش و من جای شما بودم اصلا چک نمی کردم....

و کاملا مشخصه که گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست بوده و هر دو گزینه ی یک و دو را در بر دارد.

تذکر : به یاد داشته باشین که اگه بخواین از روش تستی استفاده کنین ممکنه مقدار $k = 0$ سه گزینه ی نادرست را برای ما مشخص نکنه...البته در بیشتر تست های مطرح شده در طول سال های گذشته با همون تست کردن اول به پاسخ صحیح می رسیم....اما اگه اینگونه نبود قدم بعدی چک کردن گزینه ها با مقدار عددی $k = 1$ **است.**

خوب زیادی حرف زدیم دیگه! به تست بعدی توجه فرمائید.

32-ساده شده ی $\frac{\sin^2 40 - \sin^2 10}{\cos 70 + \cos 10}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$** **3) $\sin 50$** **4) $\cos 50$**

گزینه ی 1 صحیح است.

به دانش آموزان رشته ی تجربی توصیه نمی شود.!

$$\frac{\sin^2 40 - \sin^2 10}{\cos 70 + \cos 10} = \frac{(\sin 40 + \sin 10)(\sin 40 - \sin 10)}{\cos 70 + \cos 10}$$

$$= \frac{(2\sin\frac{40+10}{2}\cos\frac{40-10}{2})(2\sin\frac{40-10}{2}\cos\frac{40+10}{2}}{2\cos\frac{70+10}{2}\cos\frac{70-10}{2}}$$

$$= \frac{(2\sin 25.\cos 15)(2\sin 15.\cos 25)}{2\cos 40.\cos 30} = \frac{(2\sin 25.\cos 25)(2\sin 15.\cos 15)}{2\cos 40.\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sin 50.\sin 30}{\sqrt{3}\cos 40} = \frac{\cos 40.(\frac{1}{2})}{\sqrt{3}\cos 40} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

خوب ویژگی هایی که در این تست استفاده شد رو مرور می کنیم...

1) سینوس و کسینوس زوایا متمم یکدیگر هستند. $\sin 50 = \cos 40$

2) تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

33-اگر $\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=1$ باشد , مقدار $\cos 2x$ کدام است؟(سراسری تجربی 88)

1) $\frac{-2}{3}$ 2) $\frac{-1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=1 \rightarrow \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=(-\sqrt{3}).(-\cos x)=1 \rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

34-اگر $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 88)

1) $\frac{3}{4}$ 2) $-\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $-\frac{1}{2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = \frac{2\sin\alpha.\cos 2\alpha}{2\sin\alpha.\sin 2\alpha} = \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

35-اگر $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟(سراسری خارج از کشور تجربی 88)

1) $-\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{5}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{1}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

36-اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}$ باشد آنگاه $\tan 2\alpha$ کدام است؟(سراسری خارج ریاضی 88)

1) 1.5 2) 1.8 3) 2.4 4) 2.8

گزینه ی 3 صحیح است.

مشابه تست قبلی است.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}\rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha\rightarrow$$

$$6\tan\alpha=4\rightarrow\tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\rightarrow\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=$$

$$\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2.4$$

37-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos5x.\cos3x=\cos^2x$ کدام است؟(سراسری خارج ریاضی 88)

1). $\frac{k\pi}{4}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$ 4) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\cos5x.\cos3x=\cos^2x\rightarrow\frac{1}{2}(\cos8x+\cos2x)=\cos^2x\rightarrow\cos8x+\cos2x=2\cos^2x$$

$$=1+\cos2x\rightarrow\cos8x=1\rightarrow8x=2k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

38-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x.\sin(\pi + x) = 0$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 87)

1). $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ 2) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$2\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x.\sin(\pi + x) = 0 \rightarrow 2\sin x.\sin x + 3\cot x.(-\sin x)$$
$$= 2\sin^2 x - 3\cos x = 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 2 - 2\cos^2 x - 3\cos x$$
$$\xrightarrow{\times -1} 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow$$
$$= 0$$
$$\cos x = -2\ ,\frac{1}{2}$$

غ ق ق $\cos x = -2$

اگه با همون روش رد گزینه ادامه بدیم, خیلی راحت به جواب مورد نظر تست خواهیم رسید...

$$k = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

کاملا مشخصه که گزینه ی 2 و 4 نادرست است.حال بین گزینه ی 1 و 3 , گزینه ی 3 درست است.زیرا کلی تر است.

کلی تر که میدونین یعنی چی؟(یعنی اینکه $x = -\frac{\pi}{3}$ جواب تست است اما در گزینه ی یک وجود ندارد اما در گزینه ی 3 وجود دارد.)

39-حاصل عبارت $2 + \frac{1}{\cos 20}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 87)

1) $2\sin 40$ 2) $4\cos 40$ 3) $2\cos 40$ 4) $4\sin 40$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\frac{1}{\cos 20} + 2 = \frac{1 + 2\cos 20}{\cos 20} = \frac{2(\frac{1}{2} + \cos 20)}{\cos 20} = \frac{2(\cos 60 + \cos 20)}{\cos 20}$$
$$= 2\left(\frac{2\cos\frac{60 + 20}{2}\cos\frac{60 - 20}{2}}{\cos 20}\right) = \frac{4\cos 40.\cos 20}{\cos 20} = 4\cos 40$$

40-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\sin(\pi + x) = 0$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی87)

1). $k\pi + \frac{\pi}{4}$ 2) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 4) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\sin(\pi + x) = 0 \to \frac{1}{2} + \cos x.(-\sin x) = 0 \overset{\times 2}{\to} 1 - 2\sin x.\cos x = 0$$
$$\sin 2x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \to 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

41-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 3x.\sin(3\pi - x) - \sin 3x.\cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟(سراسری تجربی 87 خارج از کشور)

1) $\frac{k\pi}{4}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ 4) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\cos 3x.\sin(3\pi - x) - \sin 3x.\cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos 3x.\sin x - \sin 3x.(-\cos x)$$
$$= \sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x$$
$$\xrightarrow{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta} \sin(x + 3x) = \sin 4x = 0 = \sin k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

42-در معادله ی $2\sin x.\cos 3x = 1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$ مجموعه ی جواب ها به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 87 خارج از کشور)

1) $\frac{k\pi}{4}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ 4) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$2\sin x.\cos 3x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \rightarrow 2\sin x.\cos 3x = 1 - \sin 2x$$
$$\rightarrow 2(\frac{1}{2}(\sin(x + 3x) + \sin(x - 3x)) = \sin 4x - \sin 2x = 1 - \sin 2x \rightarrow$$
$$\sin 4x = 1 \rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

43-حاصل عبارت $\cos 20 . \cos 40 + \cos^2 80$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی86)

1) $\cos 10$ 2) $\sin 70$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{3}{4}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\cos 20 . \cos 40 + \cos^2 80 \xrightarrow{\begin{cases} \cos A.\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B)) \\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}} \frac{1}{2}(\cos 60 + \cos 20) + \frac{1 + \cos 160}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 20\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 20 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 20 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 20 = \frac{3}{4}$$

44-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin^2 x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 86)

1). $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$2\sin^2 x = 3\cos x \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0 \rightarrow 2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2 \text{ ,} \frac{1}{2}$$

$\cos x = -2$ غ ق ق

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

می توان با روش رد گزینه حل تست را ادامه داد؛اما وقتی جواب به این راحتی به دست می آید نیازی به این کار نیست...این جاست که مشخص می شود شما داوطلب گرامی به تناسب و بر حسب موقعیت از یکی از روش ها باید استفاده کنین.

45-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\tan x.\cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج 86)

1). $k\pi - \frac{\pi}{4}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ 3) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ 4) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$2\tan x.\cos^2 x = 1 \to 2\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x = 2\sin x.\cos x = \sin 2x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \to$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

46-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

1). $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 2) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ 3) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 4) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

به دانش آموزان رشته ی تجربی توصیه نمی شود!

داوطلبان رشته ی ریاضی حتما این سوال رو در تمرین کتاب درسی حسابان دیده اند.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\to (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x \xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} \left(2\sin\frac{x+3x}{2}.\cos\frac{x-3x}{2}\right)$$

$$+ \sin 2x = 0 \to 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \sin 2x = 0 \to 2x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

که جواب گزینه ی 2 یک پاسخ صحیح و کلی تر بوده و جواب دیگر را نیز در بر می گیرد.

47-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 85)

1) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 2) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ 3) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 4) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)\rightarrow\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=1+\cos x\rightarrow\cos x-\sin x=1+\cos x\rightarrow\sin x=-1\rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

48-ساده شده ی عبارت $\cos 50(\tan 70+\tan 10)$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی85)

1) $\sin 20$ 2) $\cos 20$ 3) $2\sin 20$ 4) $2\cos 20$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\cos 50(\tan 70+\tan 10)=\cos 50\left(\frac{\sin 70}{\cos 70}+\frac{\sin 10}{\cos 10}\right)=$$

$$\cos 50\left(\frac{\sin 70.\cos 10+\cos 70.\sin 10}{\cos 70.\cos 10}\right)=\cos 50\left(\frac{\sin(70+10)}{\cos 70.\cos 10}\right)=\cos 50.\frac{\sin 80}{\cos 70.\cos 10}$$

$$=\cos 50.\frac{\cos 10}{\cos 70.\cos 10}=\frac{\cos 50}{\cos 70}=\frac{\sin 40}{\sin 20}=\frac{2\sin 20.\cos 20}{\sin 20}=2\cos 20$$

49-اگر α زاویه ی منفرجه و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ باشد , مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج 85)

1) -7 2) $-\frac{1}{7}$ 3) $\frac{1}{7}$ 4) 7

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{زاویه منفرجه}} \cos x$$

$$= -\frac{4}{5} \text{ ق ق} \rightarrow \tan x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}$$

$$= \frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

50-حاصل عبارت $4\cos 40 - \frac{1}{\cos 20}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 85)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) 2

گزینه ی 4 صحیح است.

$$4\cos 40 - \frac{1}{\cos 20}$$

$$= \frac{4\cos 40.\cos 20 - 1}{\cos 20}$$

$$\xrightarrow{\cos A.\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)(\cos 60 + \cos 20) - 1}{\cos 20} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \cos 20\right) - 1}{\cos 20} =$$

$$\frac{1 + 2\cos 20 - 1}{\cos 20} = 2$$

51-اگر $\tan 20 = 0.36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160 - \cos 200}{\cos 110 + \sin 70}$ کدام است؟(سراسری تجربی 84)

1) $\frac{4}{9}$ **2) $\frac{15}{8}$** **3) $\frac{17}{8}$** **4) $\frac{31}{16}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\frac{\sin 160 - \cos 200}{\cos 110 + \sin 70} = \frac{\sin(180 - 20) - \cos(180 + 20)}{\cos(90 + 20) + \sin(90 - 20)}$$

$$= \frac{\sin 20 + \cos 20}{-\sin 20 + \cos 20} \xrightarrow{\text{همه ی جملات را بر } \cos 20 \text{ تقسیم می کنیم}} \frac{\frac{\sin 20}{\cos 20} + \frac{\cos 20}{\cos 20}}{\frac{-\sin 20}{\cos 20} + \frac{\cos 20}{\cos 20}} = \frac{\tan 20 + 1}{-\tan 20 + 1}$$

$$= \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{136}{64} = \frac{68}{32} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$$

52-عبارت $\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟(سراسری ریاضی 84)

1) $2\sin 4x . \sin^2 \frac{x}{2}$ **2) $-2\sin 4x . \sin^2 \frac{x}{2}$**

3) $4\sin 4x . \sin^2 \frac{x}{2}$ **4) $-4\sin 4x . \sin^2 \frac{x}{2}$**

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x$$

$$= (\sin 3x + \sin 5x) - 2\sin 4x \xrightarrow{\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}} \left(2\sin \frac{3x + 5x}{2} . \cos \frac{3x - 5x}{2}\right)$$

$$-2\sin 4x = (2\sin 4x . \cos x) - 2\sin 4x$$

$$= -2\sin 4x(1 - \cos x) \xrightarrow{1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = -2\sin 4x . \left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = -4\sin 4x . \sin^2 \frac{x}{2}$$

53-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 83)

1). $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (2 $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (3 $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (4 $k\pi - \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = 0 \rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)} = \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)} = \cos x + \sin x = 0$$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \tan x = 0 \rightarrow \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

54-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است.مجموعه ی مقادیر i کدام است؟(سراسری ریاضی 83)

1) 7 و 9 2) 1 و 3 و 5 3) 1 و 4 و 7 4) 1 و 5 و 9

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\cos 2x = \sin x \rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{3\pi}{6} = 2k\pi + 2\pi - \frac{3\pi}{6} = 2k\pi + \underline{\frac{9\pi}{6}} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{2} \end{cases} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \underline{\frac{\pi}{6}} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \underline{\frac{5\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$$

55-اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos(\frac{\pi}{2} - b)$ کدام است؟(سراسری ریاضی83)

1) $\sin 4a$ 2) $\cos 4b$ 3) $\sin^2 2a$ 4) $\cos^2 2a$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 8\cos a.\cos b.\sin a.\sin b =$$

$$2(2\sin a.\cos a)(2\sin b.\cos b) = 2\sin 2a.\sin 2b = 2\sin 2a.\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) =$$

$$2\sin 2a.\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = 2\sin 2a.\cos 2a = \sin 4a$$

56-خلاصه شده ی عبارت $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha).\cos(-\alpha)$ کدام است؟(سراسری تجربی 82)

1) $-\sin 2\alpha$ 2) $\sin 2\alpha$ 3) $\cos 2\alpha$ 4) 0

گزینه ی 1 صحیح است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha).\cos(-\alpha) = \cos a.(-\sin a) - \sin a.\cos a$$

$$= -2\sin a.\cos a = -\sin 2a$$

57-حاصل عبارت $\cos 165.\cos 105$ کدام است؟(سراسری ریاضی 82)

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\cos165.\cos105 = \cos(180-15).\cos(90+15) = (-\cos15)(-\sin15) = \sin15.\cos15$$
$$= \frac{1}{2}\sin30 = \frac{1}{4}$$

58-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin3x+\sinx}{\sinx} = 1$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 82)

1). $\frac{k\pi}{3}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ 3) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$\frac{\sin3x+\sinx}{\sinx} = 1 \xrightarrow{\sinA+\sinB=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \frac{2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}{\sinx} = 1 \rightarrow \frac{2\sin2x.\cosx}{\sinx} = 1$$
$$\frac{2(2\sinx.\cosx)(\cosx)}{\sinx} = 1 \rightarrow 4\cos^2x = 1 \rightarrow \cos^2x = \frac{1}{4} \rightarrow \cosx = \pm\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \cosx = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cosx = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

دقت شود که مبادا به اشتباه گزینه ی 4 را به عنوان پاسخ صحیح انتخاب کنید.درسته که موقع محاسبات به جواب هایی که در صورت آنها کمانی به صورت $2k\pi$ ظاهر می شود ؛ اما ما پاسخ و جواب کلی تست مد نظرمان است.جوابی که کلی باشه و همه ی حالت های ممکن رو دربر بگیره...پس با یک حساب سرانگشتی به راحتی متوجه می شوید که گزینه ی 3 صحیح است.

در سال 1382 خیلی از داوطلبان رشته ی ریاضی به این سوال پاسخ نادرست داده بودند.

59-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟(سراسری تجربی 81)

1). $k\pi$ 2) $2k\pi + \pi$ 3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 4) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

گزینه ی 2 صحیح است.

$$\cos x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} = \frac{3}{2}\ , -1$$

کاملا مشخص است که $cosx = \frac{3}{2}$ نادرست است.زیرا همانطور که می دانیم مقدار سینوس و کسینوس هرگز از دو مقدار مثبت یک و منفی یک تجاوز نمی کند.

$$\cos x = -1 = \cos\pi \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

60-ساده شده ی عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 81)

1) $\cos\alpha - \sin\alpha$ 2) $\cos 2\alpha$ 3) $1 + \sin 2\alpha$ 4) $1 - \sin 2\alpha$

گزینه ی 4 صحیح است.

روش های مختلفی برای حل این تست در کتاب های کمک آموزشی ارائه شده است, اما بهترین و آسانترین روش حل این تست همان استفاده از ویژگی تبدیل ضرب به جمع است.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \xrightarrow{\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))} 2\left(\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(-2\alpha)\right)\right)$$

$$= 1 - \sin 2\alpha$$

61-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 3x)$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 81)

1). $\frac{k\pi}{6}$ 2) $\frac{k\pi}{3}$ 3) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 3x)$$

$$\xrightarrow{\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \sin 4x + \sin(-2x) = \cos 3x \rightarrow 2\sin\frac{4x - 2x}{2}\cos\frac{4x + 2x}{2} = \cos 3x \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{حق ساده سازی ندارید}} 2\sin x.\cos 3x - \cos 3x = 0 \rightarrow \cos 3x(2\sin x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$2\sin x.\cos 3x = \cos 3x \quad \begin{cases} \cos 3x = 0 \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{matrix} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix} \end{cases}$$

62-اگر $a + b = \frac{\pi}{2} - a$ باشد , حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟(سراسری ریاضی 80)

1) $\sin b$ 2) $\cos a$ 3) $\frac{1}{\sin a}$ 4) $\frac{1}{\cos b}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - a)}{\cos a.\cos b} = \frac{\cos a}{\cos a.\cos b}$$

$$= \frac{1}{\cos b}$$

63-یکی از جواب های معادله ی $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟(سراسری تجربی 80)

1) $\frac{2\pi}{3}$ **2)** $\frac{5\pi}{6}$ **3)** $\frac{7\pi}{6}$ **4)** $\frac{4\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{3 \pm 5}{4} = 2\ , -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

«موفق باشید»

تهیه و تنظیم : ابراهیم پناهی

مرداد ماه 92

www.engclubs.net