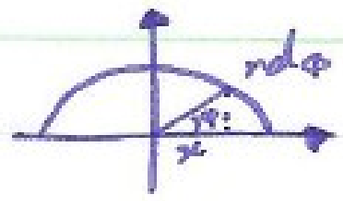
eg:



$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int x\,dl = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} r\cos\varphi\, r\,d\varphi$$

$$= \frac{r^2}{L}\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{r^2}{L}\sin\varphi\Big]_0^{\pi} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{L}\int y\,dl = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} r\sin\varphi\, r\,d\varphi = \frac{r^2}{L}(-\cos\varphi)\Big]_0^{\pi} =$$

$$\frac{r^2}{L}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2r^2}{L} \quad , L = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$$

$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

eg: محاسبه‌ی مرکز جرم نیم قرص دایره‌ای:

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\int x\,dA$$

$$dA = r\,d\varphi\,dr = r\,dr\,d\varphi$$

$$0 \le r \le a \ , \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\int r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\left(\frac{r^3}{3}\Big]_0^a\right)\left(\sin\varphi\Big]_0^{\pi}\right) = 0$$

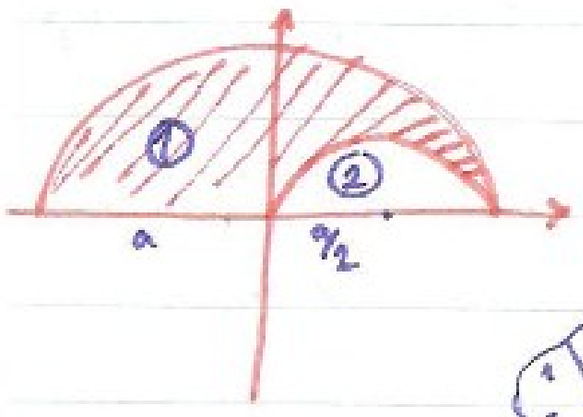
$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int y\,dA$$

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{A}\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{A}\cdot\frac{r^3}{3}\Big]_0^a \; -\cos\varphi\Big]_0^{\pi} = \frac{a^3}{3}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2a^3}{3A}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(\pi a^2) \quad \Rightarrow y_{cm} = \frac{2a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

eg: مرکز جرم سطح هاشور خورده در کجا قرار دارد؟



مرکز جرم یک جسم مرکب برابر محاسبه مرکز جرم تک تک شکل.

$$x_{Acm} = \frac{m_1 x_{1cm} + m_2 x_{2cm} + m_3 x_{3cm}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$\frac{4a}{3\pi} = a$ مرکز جرم نیم قرص به شعاع

$y_2 = \frac{4(a/2)}{3\pi}$ مرکز جرم نیم قرص به شعاع $\frac{a}{2}$

$$y_{Acm} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 y_{2cm}}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{4a}{3\pi} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 y_{2cm}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 (\frac{2a}{3\pi})}{m_1 + m_2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{m_1}{A_1} = \frac{m_2}{A_2} \Rightarrow \frac{m_1}{A - A_2} = \frac{m_2}{A_2} \Rightarrow \frac{m_1}{\frac{1}{2}(\pi a^2) - \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2} = \frac{m_2}{\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{m_2}{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

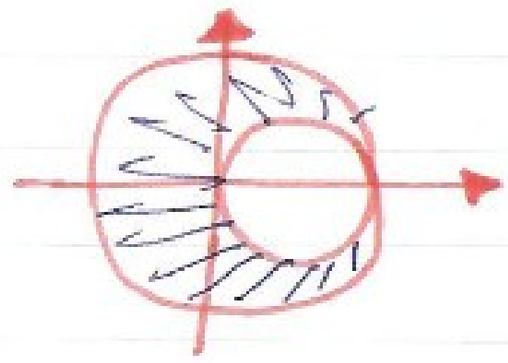
$A_1 =$ کل جسم

$A_2 =$ نیم قرص حذف شده از جسم

$$\frac{4a}{3\pi} = \frac{m_2(3y_1 + \frac{2a}{3\pi})}{4m_2} \Rightarrow 3y_1 + \frac{2a}{3\pi} = \frac{16a}{3\pi}$$

$$\Rightarrow 3y_1 = \frac{14a}{3\pi} \Rightarrow y_1 = \frac{14a}{9\pi}$$

e.g

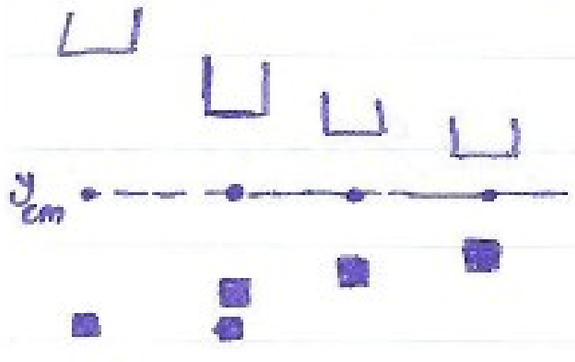


تعیین مولفه‌ی x_{cm} را به عهده‌ی شما گذاشتیم.

نکته: اگر جسم ساکن باشد ← مرکز جرم هم ساکن بوده است.

اگر هیچ نیروی خارجی به جسم وارد نشود مرکز جرم همچنان ساکن می‌ماند اگرچه ممکن است در اثر نیروهای داخلی اجزای داخلی جسم حرکت کنند.

eg: شخصی به جرم m و بالونی به جرم M در هوا ساکنند اگر شخص با سرعت v نسبت به بالن از نردبان بالا برود بالن با چه سرعتی حرکت می‌کند؟



بدلیل اینکه هیچ نیروی خارجی وجود ندارد پس مرکز جرم جابجا نمی‌شود یعنی $v_{cm} = 0$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (I)$$

سرعت شخص نسبت به زمین = سرعت بالن نسبت به زمین + سرعت شخص نسبت به بالن

$$v_1 = v_2 + v$$

$v_1 =$ سرعت شخص نسبت به زمین

$m_1 =$ جرم شخص

$m_2 =$ جرم بالن

$v_2 =$ سرعت بالن نسبت به زمین

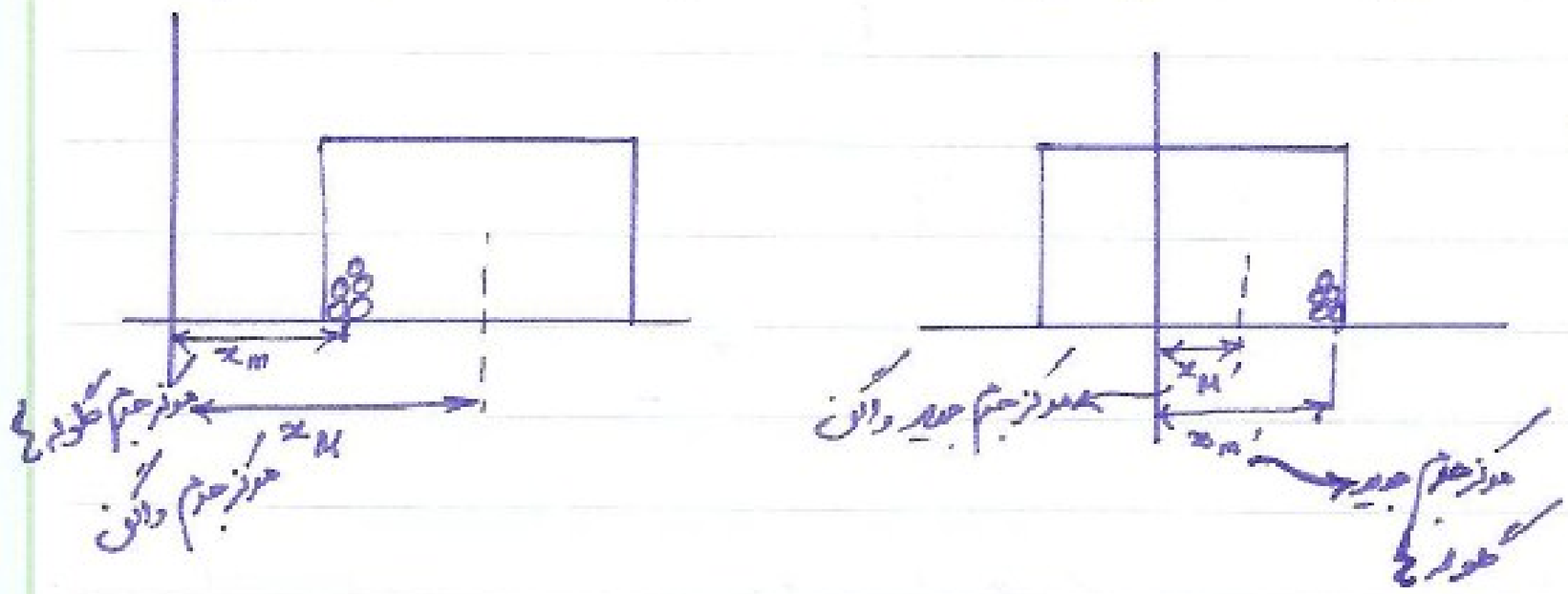
$v_{cm} =$ سرعت مرکز جرم

$$I \Rightarrow v_{cm} = 0 \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2} = \frac{-m_1}{m_2}(v_2 + v) = \frac{-m_1 v_2}{m_2} - \frac{m_1 v}{m_2}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v \quad \Rightarrow v_2 = \frac{-m_1 v}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \text{If: } m_1 \gg m_2 \quad v_2 \simeq -v$$

eg: گلوله‌هایی با جرم m در داخل واگونی به طول L و جرم M قرار دارند. گلوله‌ها به انتهای واگن شلیک می‌شوند و در انتهای واگن جمع می‌شوند. اگر واگن در ابتدا ساکن باشد نشان دهید گلوله‌ها به هر نحوی شلیک شوند واگن نمی‌تواند بیشتر از طول خودش L جابجا شود.



$$x'_m = x_m + L - L'$$
$$x'_M = x_M - L'$$

$$x_{cm} = x'_{cm}$$
$$\frac{Mx_M + mx_m}{M+m} = \frac{Mx'_M + mx'_m}{M+m}$$

$$M(x_M - L') + m(x_m + L - L') = mx_m + Mx_M$$
$$\cancel{Mx_M} - ML' + \cancel{mx_m} + mL - mL' = \cancel{mx_m} + \cancel{Mx_M}$$

$$L' = \frac{m}{m+M} L \quad \Rightarrow L' < L$$

پایستگی تکانه خطی:

اگر برایند نیروهای خارجی صفر باشد $F_{ext} = 0$ در آن صورت تکانه برداری کل دستگاه ثابت می‌ماند

$$p = mv \xrightarrow[\text{نسبت به } t]{\text{مشتق}} \frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} mv \quad \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F_{ext}$$

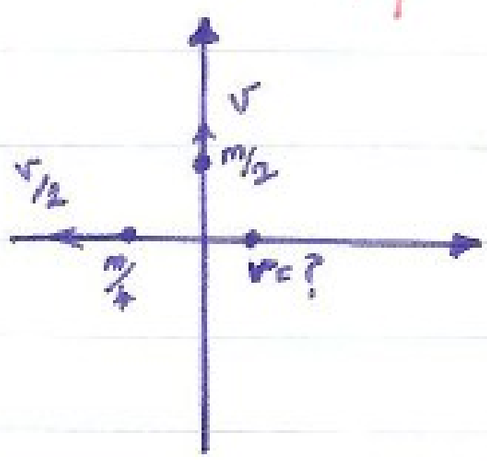
$$\xRightarrow{F_{ext}=0} \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = \text{Constant} = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = p_0 = \text{Const}$$

eg نکته: ممکن است تکانه تک تک ذرات تغییر کند اما تکانه کل ثابت می‌ماند [به صورت کلی وجود نیروهای خارجی]

نکته: اگر جسمی سقوط آزاد دارد در راستای z پایستگی تکانه نداریم اما در دو بعد دیگر بخاطر $F_{ext}=0$ پایستگی تکانه وجود دارد.

eg: جسمی ساکن در اثر انفجار به ۳ قطعه تقسیم می‌شود. با توجه به شکل سرعت قطعه سوم چقدر است؟



$m_3 = m/4$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0$$

$$\frac{m}{2}\vec{v}\hat{j} + \frac{m}{4}\left(\frac{-\vec{v}}{2}\right)\hat{i} + \frac{m}{4}\vec{v} = 0$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{-v}{4}\hat{i} + \vec{v}\hat{j}\right) = -\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{v}}{2}\right)$$

$$-\frac{v}{4}\hat{i} + \vec{v}\hat{j} = \frac{-\vec{v}}{2} \Rightarrow \vec{v} = \frac{v}{2}\hat{i} - 2v\hat{j}$$

که یک بردار است و به صورت برداری و مؤلفه‌ای نوشته می‌شود. مؤلفه‌های x با هم و مؤلفه‌های y با هم در جهت‌های اولیه و نهایی برابرند.

فصل دهم: برخورد:

۱. حضور یک دستگاه یا چند جسم لازم است.

۲. دو یا چند جسم نیروهایی را در زمان کوتاه به هم وارد می‌کنند.

۳. این نیروها نیروهای داخلی هستند.

ضربه و تکانه:

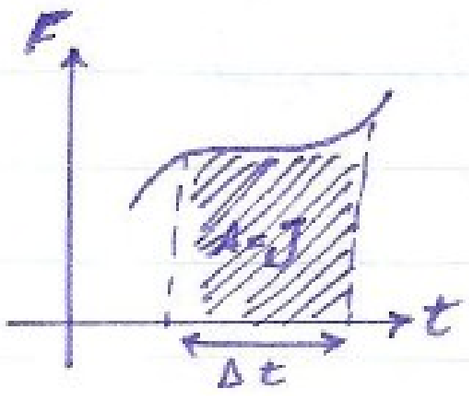
اگر دو جسم با یکدیگر برخورد داشته باشند و نیروی $F(t)$ را به یکدیگر وارد کنند این نیرو تکانه خطی دو جسم را تغییر می‌دهد.

رابطه‌ی تغییر تکانه با نیرو: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t)$

$$\int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \Rightarrow P_f - P_i = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\,dt$$

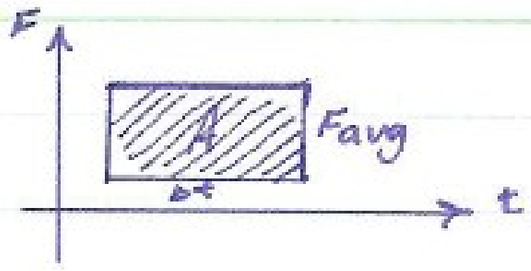
به حاصل انتگرال $J = \int \vec{F}(t)dt$ ضربه گویند.

$$\Delta p = P_f - P_i = J$$



ضربه برابر است با مساحت زیر نمودار F برحسب t

$A = J = F_{avg}\,\Delta t$



برخورد کشسان: انرژی جنبشی کل قبل از برخورد و بعد از برخورد تغییر نمی‌کند مثل برخورد دو توپ بیلیارد.

برخورد ناکشسان: انرژی جنبشی کل قبل و بعد از برخورد تغییر می‌کند مثل دو خودرو که با هم برخورد می‌کنند و متلاشی می‌شوند.

eg: توپ 1.2kg روی سطح صاف می‌شود با سرعت $v_1 = 25\ m/s$ برخورد کرده و با $v_2 = 10$ بالا می‌آید.

1. چه ضربه‌ای وارد شده است.

2. فرکانس 0.025 توپ چه نیرویی به سطح وارد کرده است.

$\Delta P = P_f - P_i = m(v_f - v_i) = 1.2(10+25) = +42\ kg.m/s$

$J = F_{avg}\Delta t \Rightarrow 42 = F_{avg} \times 0.02 \Rightarrow F_{avg} = 2100\ N$

نکته: برداری بودن P:

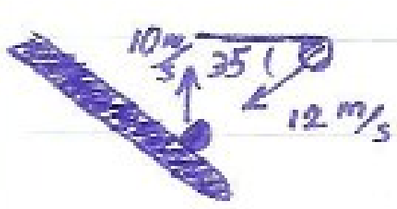
$\vec{\Delta P} = \vec{J}$

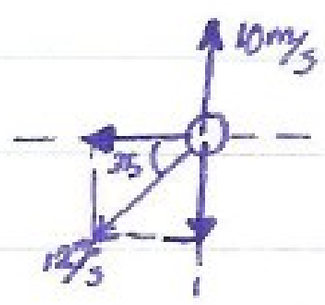
$\vec{P}_{fx} - \vec{P}_{ix} = \vec{J}_x$

$\vec{P}_{fy} - \vec{P}_{iy} = \vec{J}_y$

$\vec{P}_{fz} - \vec{P}_{iz} = \vec{J}_z$

eg: یک توپ بیلیارد 0.3kg در لحظه برخورد با چوب دارای سرعت $12\ m/s$ تحت زاویه 35° بر افق است گوی 2ms جدا با سرعت قائم $10\ m/s$ از چوب جدا می‌شود. مقدار نیروی متوسط را بیابید.





$\Delta p = m\Delta v = F_{avg}\Delta t$

$0.3(12\cos 35\,\hat{i} + 12\sin 35 + 10\,\hat{j}) = F_{avg} \times 2\times10^{-3}$

$V_x = V\cos 35 = 12\times 0$

$V_y = V\sin 35 = 12\times 0$

راه حل:

$0.3(12\times 0.81\,\hat{i} + 16.88\,\hat{j}) = F_{avg} \times 2\times10^{-3}$

$P_{2x} - P_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x} = m(\cancelto{0}{v_{2x}} - v_{1x})$

در بعد از برخورد سرعت فقط در راستای y بوده و v_{2x} صفر است.

$= \underset{0.3}{m}(-(-12\cos 35)) = 2.95$

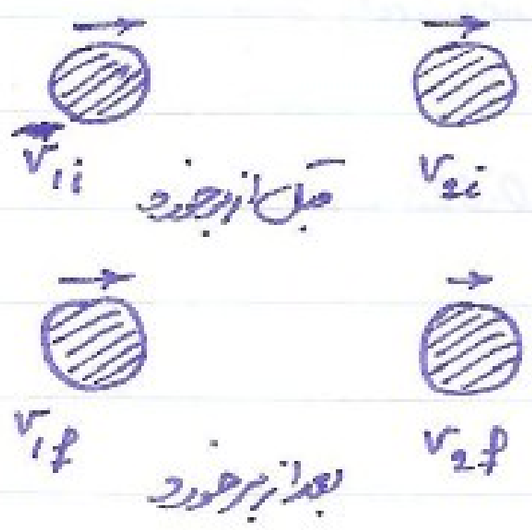
$P_{2y} - P_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y})$

$= m(10-(-12)\sin 35) = 5.06\ kg\,m/s$

$\vec{J} = 2.95\hat{i} + 5.06\hat{j}$

$|\vec{J}| = 5.86\ (kg\,m/s^2)^N$

برخورد ناکشسان یک بعدی:



$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

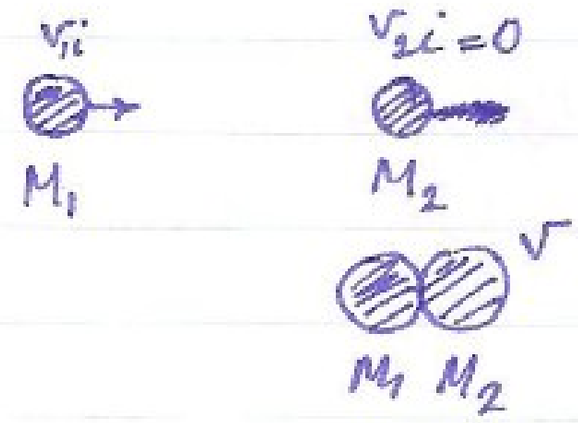
پایستگی تکانه برقرار است زیرا هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود با تقسیم رابطه بالا بر m_1+m_2 ⇐ $v_{icm} = v_{fcm}$

$$\frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_{1f} + m_2v_{2f}}{m_1+m_2}$$

⇐ سرعت مرکز جرم قبل و بعد از برخورد یکسان است.

برخورد ناکشسان کامل:

اگر دو جسم بعد از برخورد به یکدیگر بچسبند با سرعت برابر بعد از برخورد حرکت می‌کنند.



$m_1v_{1i} + m_2\cancelto{0}{v_{2i}} = (m_1+m_2)v$

$\Rightarrow v = \dfrac{m_1v_{1i}}{m_1+m_2}$

eg: گلوله‌ای 10gr با تندی 1000 m/s به یک چوب 5kg ساکن برخورد می‌کند و با تندی 400 m/s از آن خارج می‌شود چوب چه مقدار به بالا پرتاب می‌شود.

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

$10^{-2} \times 1000 = 10^{-2} \times 400 + 5v_{2f} \rightarrow v_{2f} = 1.2\ m/s$

$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y$

$1.44 = 2 \times 9.8\,\Delta y$

$\Delta y = 0.07\ m$

e.g: جسم $m_1=2kg$ روی میز بدون اصطکاک با تندی $10\,m/s$ می‌لغزد و جسم $m_2=5kg$ متصل به یک فنر $K=1120$ با تندی $3\,m/s$ هم جهت با جسم m_1 در حرکت است. جسم m_1 با آن برخورد می‌کند. بیشترین مقدار تراکم فنر چقدر است.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$= (m_1 + m_2) v$$
$$\Rightarrow 2\times 10 + 5\times 3 = 7v \Rightarrow v = 5\,m/s$$

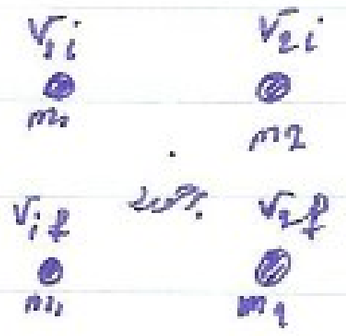
$$\frac{1}{2} k d^2 = -\Delta K$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(7)25 - \left(\frac{1}{2}\times 2\times 100 + \frac{1}{2}\times 5\times 9\right)$$
$$= 87.5 - (100 + 22.5) = -35$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 = 35 \Rightarrow d^2 = 0.06 \Rightarrow d = 0.24\,m$$

انواع برخوردها:

۱. کشسان: انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد یکسان است

کشسان یک بعدی: اما انرژی جنبشی هر یک ذره ممکن است تغییر کند.



$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 \\ P_{i_1} = P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases}$$

معلوم — مجهول

الف : v_{1i} وجود دارد و $v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

از حل دستگاه :

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

ب) هر دو جسم دارای سرعت اولیه باشند :

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

از حل دستگاه :

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

2. نقشه‌ای : کامل | یک بعدی

بحث در مورد سرعتهای ثانویه حالت الف:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

1. $m_1 \gg m_2$ ⇐ $v_{1f} = v_{1i}$

$v_{2f} \simeq 2v_{1i}$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

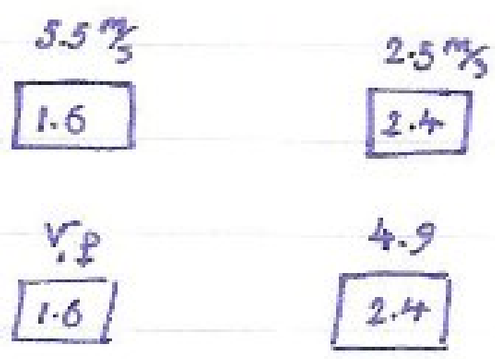
2. $m_1 \ll m_2$ ⇐ $v_{1f} = -v_{1i}$ (اگر جسم 2 سنگین‌تر باشد جسم m_1 برمی‌گردد)

$$v_{2f} \simeq \frac{2m_1}{m_2} v_{1i}$$

3. $m_1 = m_2$ $\quad v_{1f} = 0$ $\quad$ جسم اول متوقف شده و جسم دوم حرکت می‌کند.

$v_{2f} = v_{1i}$

eg: مطابق شکل سرعت جسم 1.6kg پس از برخورد چقدر است؟ آیا برخورد کشسان است یا نه؟



در صورتی از این فرمول استفاده می‌کنیم برخورد کشسان باشد:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$P_{1i} = P_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.6)(5.5) + (2.4)(2.5) = (1.6) v_{1f} + (2.4)(4.9) \Rightarrow v_{1f} = 1.9 \ m/s$$

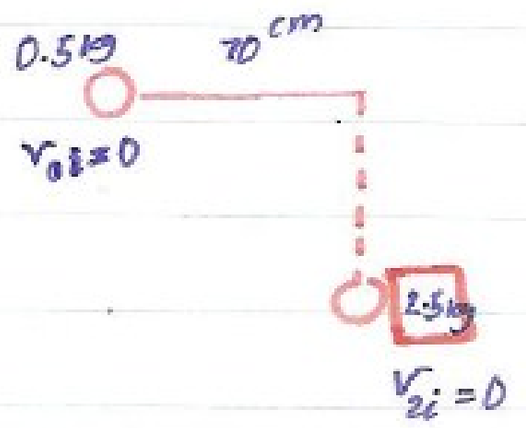
ب: $K_i \overset{?}{=} K_f$ $\quad K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = 31.7 J$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = 31.7 J$$

$\Rightarrow$ برخورد کشسان است

باید دید که برآیند نیروهای خارجی صفر هست یا نه $\Leftarrow$ پایستار بودن یک نیرو.

eg: مطابق شکل مقدار v_{1f} و v_{2f} را بیابید.



$E_1 = E_2$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{1i}^2$$

$$\Rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.7} = 3.7 \ m/s$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \underbrace{\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}\right)}_{\text{صفر}} = -2.5 \ m/s$$

گلوله به سمت بالا برمی‌گردد.

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \underbrace{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}\right)}_{\text{صفر}} = 1.2 \ m/s$$

وی: جسمی به جرم m_1 با جسم دیگری که در حال سکون است به طور کشسان برخورد کرده و در همان جهت با تندی $\frac{1}{4}v_{1i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد.

1. جرم جسم دیگر چقدر است.

2. اگر v_{2i} باشد سرعت مرکز جرم چقدر است.

$$P_i = P_f$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \Rightarrow m_2 = 0.4kg \qquad v_{1f} = \frac{1}{4} v_{1i}$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{8}{2.4}$$

برخورد دوبعدی:

$$P_i = P_f$$

$$P_{xi} = P_{xf}$$

$$P_{yi} = P_{yf}$$

$$\Rightarrow (m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2)\hat{i}$$

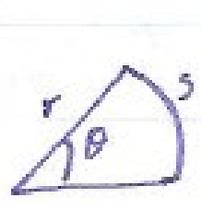
$$m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \hat{j} + m_1 v_{1f} \sin\theta_1 \hat{j} = 0$$

فصل ۱۱ - دوران:

شرایط حرکت دورانی:

1. جسم صلب باشد
2. محور دوران ثابت باشد
3. مقدار زاویه جاروب شده توسط هر نقطه و جسم یکسان است.

1. مکان زاویه‌ای: اگر طولی از کمان s باشد آنگاه:



$\theta = \frac{s}{r}$ برحسب رادیان

2. جابجایی زاویه‌ای:

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

* جابجایی زاویه‌ای در جهت ساعتگرد منفی و در جهت پادساعتگرد مثبت است.

3. سرعت زاویه‌ای:

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ متوسط

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ لحظه‌ای $\left(\frac{Rad}{s}\right)$

4. شتاب زاویه:

$$\alpha_{avg} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$ متوسط

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ لحظه‌ای $\left(\frac{Rad}{s^2}\right)$

* معادلات مربوط به حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$$

eg: قرصی در ابتدا در حالت دورانی با تندی $120\frac{Rad}{s}$ با شتاب زاویه‌ای $-4\frac{Rad}{s^2}$ کند می‌شود:

1. پس از چه مدت متوقف شده است؟

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-120}{-4} = 30s$$

2. قرص در این مدت چند دور زده است؟

$$\Delta\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2}t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{120}{2} \times 30 = 1800\,Rad \Rightarrow n = \frac{1800\,Rad}{2\pi}$$

eg رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و دورانی:

$$s = r\theta \quad , v = r\omega$$

$a_t = r\alpha$ شتاب مماسی , $a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

eg: چرخ ماشینی با سرعت $150\frac{rev}{min}$ می‌چرخد و پس از ترمز در مدت 3min متوقف می‌شود.

1. شتاب زاویه‌ای
2. تا توقف چند دور زده است.
3. در لحظه‌ای که چرخ با سرعت $100\frac{rev}{min}$ می‌چرخد شتاب نقطه‌ای در فاصله 10cm از محور چقدر است؟

$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\alpha = \frac{-150}{3} = -50 \frac{rev}{min^2}$

$\Delta\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2} t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{150}{2} \times 3 = 225\ rev \times 2\pi$

~~$a_t = r\alpha \Rightarrow a_t = 0.1 \times +100 = +10$~~

~~$a_r = \frac{v^2}{r}$~~

$a_t = r\alpha = 0.1 \times -50 = -5$

$a_r = r\omega^2 = 0.1 \times 100 = 1000$

$a = \sqrt{(1000)^2 + (5)^2}$

انرژی جنبشی دورانی:

$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2$

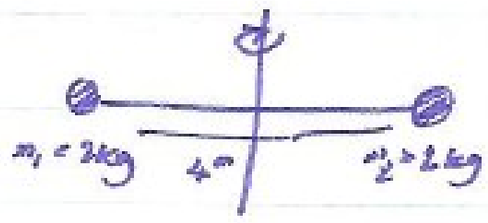
$v_i = r_i \omega \qquad K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$

به کمیت $I = \sum m_i r_i^2$ گشتاور لختی یا لختی دورانی می‌گویند. (ویژگی است)

$K = \frac{1}{2} I \omega^2$

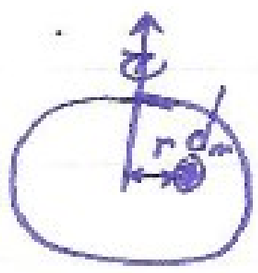
گشتاور لختی I: چگونگی توزیع جرم جسم حول محور دورانی توضیح می‌دهد.

خطی	دورانی
x	θ
v	ω
a	α
m	I
$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
$F = ma$	$\tau = I\alpha$

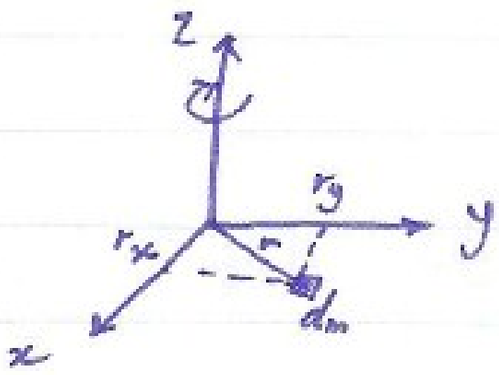


$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 2(2)^2 + 2(2^2) = 16$$

محاسبه لختی دورانی در حالت پیوسته:



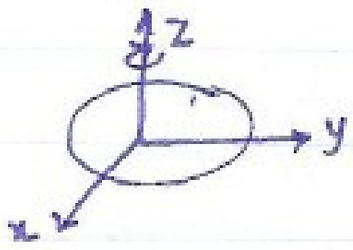
$$I = \int r^2 dm$$



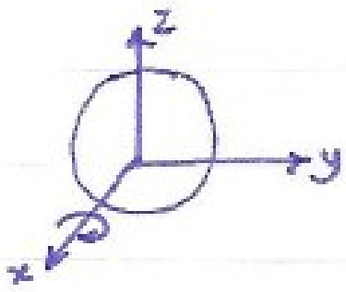
$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$$= I_x + I_y$$

مجموع لختی های دورانی حول دو محور عمود بر هم (x و y) برابر است با لختی دورانی حول محور عمود بر دو محور دیگر (z)

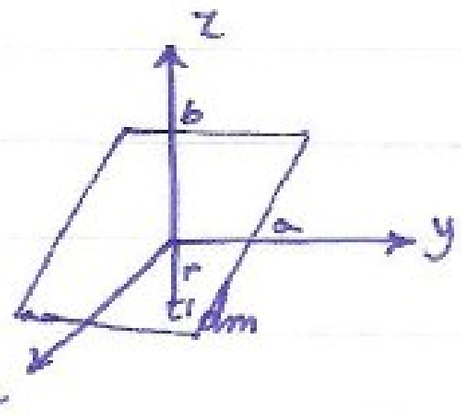


$$I_z = I_x + I_y$$



$$I_x = I_y + I_z$$

eg: گشتاور لختی دورانی یک مربع مستطیل را حول محور z بدست آورید.



$$I_z = \int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y$$

$$\sigma = \frac{m}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \sigma dA$$

$$I_z = \int x^2 dm + \int y^2 dm = \int x^2 \sigma dA + \int y^2 \sigma dA$$

یادآوری: کارتزین: $dA = dx\,dy = dx\,dz = dy\,dz$

استوانه‌ای: $dA = r\,dr\,d\theta$

کروی: $dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$I_z = \int x^2 \sigma\, dA + \int y^2 \sigma\, dA = \sigma\left[\int x^2\, dx\,dy + \int y^2\, dx\,dy\right]$$

$$I_z = \sigma\left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx\right) = \sigma\left(\frac{x^3}{3}\Big]_{-a/2}^{a/2} y\Big]_{-b/2}^{b/2} + \frac{y^3}{3}\Big]_{-b/2}^{b/2} x\Big]_{-a/2}^{a/2}\right)$$

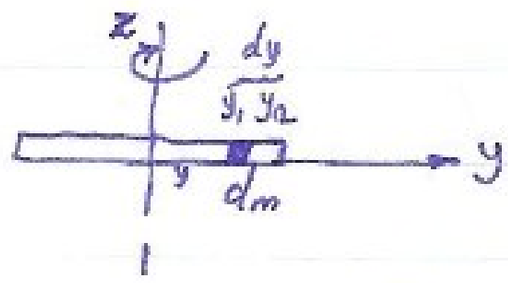
$$= \sigma\left(b\left(\frac{(a/2)^3}{3} - \frac{(-a/2)^3}{3}\right) + a\left(\frac{(b/2)^3}{3} - \frac{(-b/2)^3}{3}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{b^3 a}{12}\right) = \sigma\left(ab\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right)\right) = \sigma\left(A\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)\right)$$

$$= \sigma A\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

$$k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M(a^2+b^2)\right)\omega^2$$

محاسبه لختی دورانی یک میله حول محور عمود بر مرکز جرم آن:

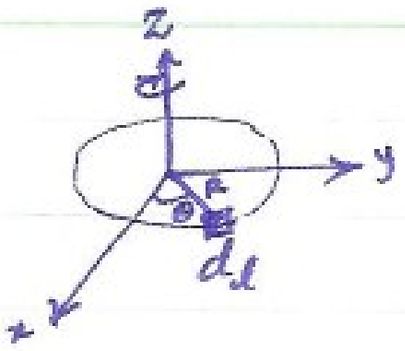


$$I_z = \int r^2 dm \qquad \lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda\, dl$$

$$r = y,\ dl = dy \Rightarrow I_z = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda\, dl = \int_{-L/2}^{+L/2} y^2 \lambda\, dy = \lambda \frac{y^3}{3}\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \lambda \frac{L^3}{12} = \lambda L \frac{L^2}{12} = \frac{m}{12} L^2$$

eg: لختی دورانی یک حلقه :



یادآوری: دکارتی: $dl = dx, dy, dz$

استوانه‌ای: $dl = R\,d\theta$

$$I_z = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R\, d\theta = R^3 \lambda \int_0^{2\pi} d\theta \qquad dm = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$$

$$\Rightarrow I_z = R^3 \lambda\, 2\pi = 2\pi R \lambda R^2 = \lambda L R^2 = M R^2$$

eg: لختی دورانی یک مثلث :

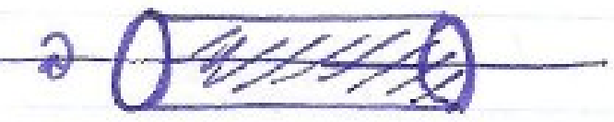
(تشکیل شده از میله)

حلقه حول محور عمود بر مرکز $0 \le \varphi \le 2\pi$

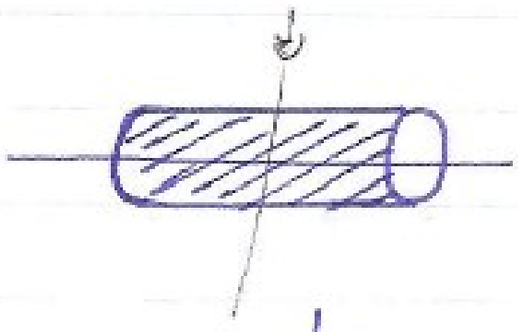
$I = MR^2$

حلقه نسبت به یکی از قطرها $0 \le \varphi \le \pi$

$I = \frac{1}{2} MR^2$

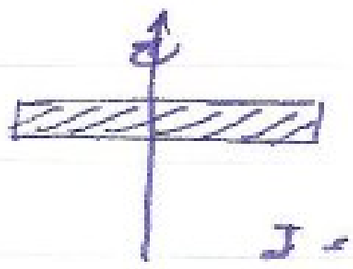


$I = \frac{1}{2} MR^2$



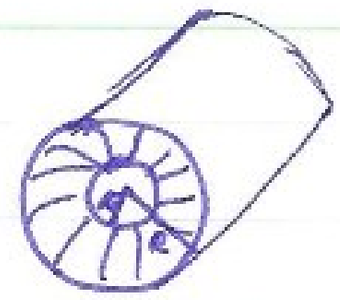
استوانه توپر $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$

$I = \frac{1}{4} MR^2$



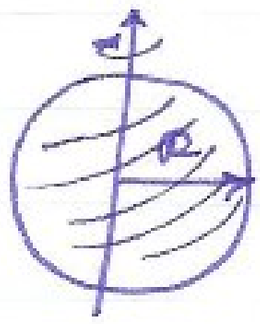
میله

$I = \frac{1}{12} M L^2$



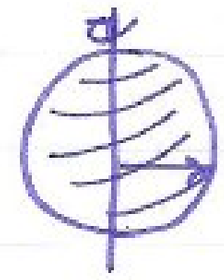
استوانه توخالی

$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$



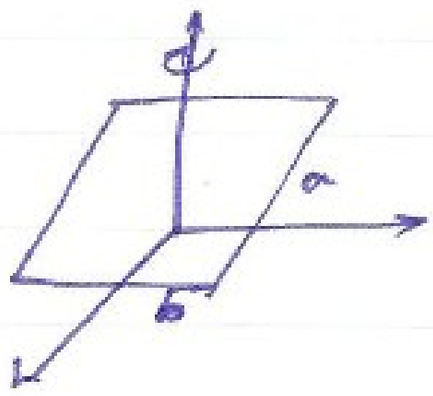
کره توپر

$I = \frac{2}{5} M R^2$



پوسته کروی

$I = \frac{2}{3} M R^2$

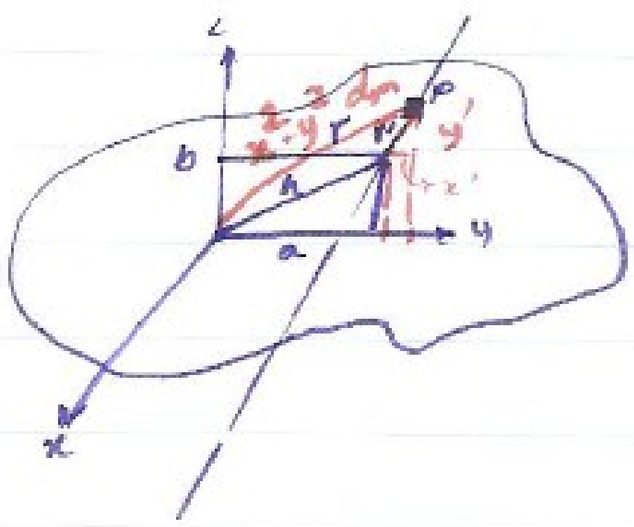


$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

قضیه محورهای موازی:

* اگر I را حول یک محور مثلاً مرکز جرم بدانیم و بخواهیم آن را حول محور دیگری موازی محور اول که به فاصله h از آن قرار دارد بدست آوریم:

$I = I_{cm} + Mh^2$



$y' = y - b$

$x' = x - a$

$I_p = \int r'^2 dm = \int (x'^2 + y'^2) dm$

$= \int ((x-a)^2 + (y-b)^2) dm$

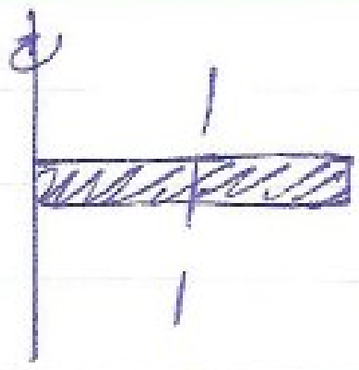
$= \int (x^2 - 2ax + a^2) dm + \int (y^2 + b^2 - 2by) dm$

$= \int (x^2 + y^2) dm + \int (a^2 + b^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm$

$= \int r^2 dm + \int h^2 dm - 2a \underbrace{\int x dm}_{\text{مرکز جرم مولفه x}} - 2b \underbrace{\int y dm}_{\text{مولفه y مرکز جرم}}$

$\Rightarrow I_p = \underset{\text{مرکز}}{I_{cm}} + Mh^2$

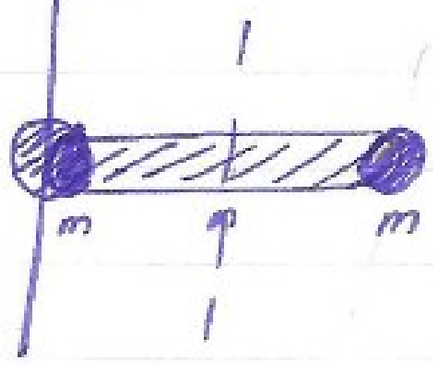
لختی دورانی برخی میله:



I_{cm}

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$I = \frac{1}{12}MR^2 + M\frac{R^2}{4} = \frac{1}{3}MR^2$$

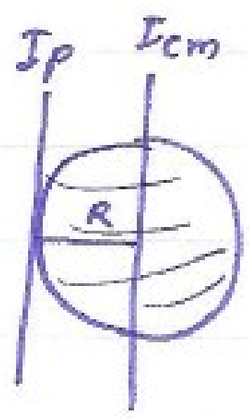


$$I = I_{cm} + Mh^2$$

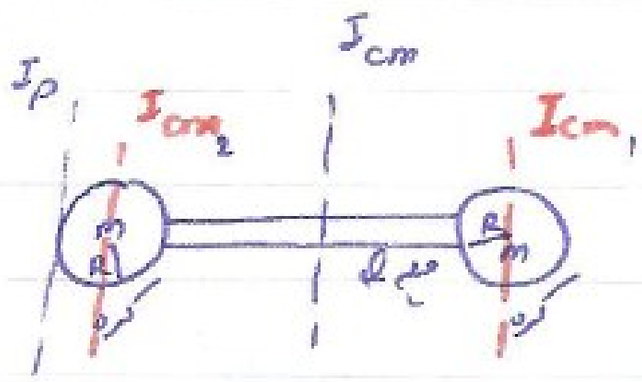
$$I_{cm} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{mL^2}{4} + \frac{1}{12}mL^2 + \frac{mL^2}{4} = \frac{7}{12}mL^2$$

$$I = \frac{7}{12}mL^2 + 3m\frac{L^2}{4} = \frac{4}{3}mL^2$$



$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad I_p = \frac{2}{5}MR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$



$$I_p = I_{cm_{کل}} + 3m(L/2 + 2R)^2$$

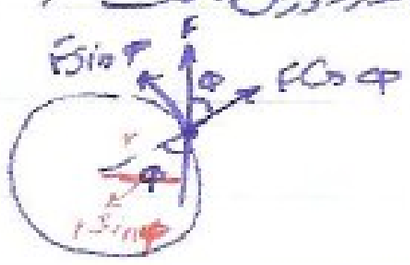
$$I_{cm_T} = \frac{1}{2}mL^2 + I_{cm_1} + m(R + L/2)^2 + I_{cm_2} + m(R + L/2)^2$$

$$I_{cm_{کل}} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(R + L/2)^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(R + L/2)^2$$

$$I_{cm_{کل}} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{4}{5}mR^2 + 2m(R + L/2)^2$$

$$I_p = I_{cm_{کل}} + 3m(L/2 + 2R)^2$$

گشتاور نیرو: بیان کننده اثر چرخانندگی یا بیچانندگی نیروی F وارد بر یک جسم حول محور دوران است.



گشتاور $\tau = rF = rF\sin\varphi = r\sin\varphi \cdot F = r_{\perp} F$

بازوی گشتاور.

$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ فرم برداری گشتاور نیرو

خواص گشتاور نیرو:

1. بردار است.
2. گشتاور نیرو از اصل برهم نهی پیروی می کند.
3. گشتاور نیرو اگر جسم پادساعتگرد باشد مثبت و اگر ساعتگرد باشد منفی است.

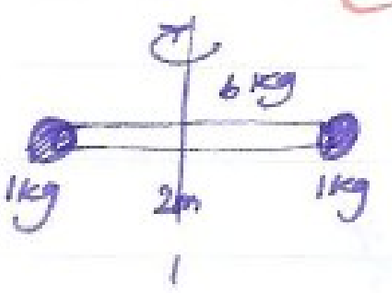
قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی.

$\tau = I\alpha$ دورانی

$F = ma$ انتقالی $\tau = rF_t = r(ma_t) = r(mar) = (mr^2)\alpha = I\alpha$

نیروی مماسی

eg: در شکل مقابل در لحظه‌ای که سرعت دورانی میله 40 دور بر دقیقه است جسم شروع به توقف می‌کند و 20^3 بعد می‌ایستد با فرض ثابت بودن گشتاور



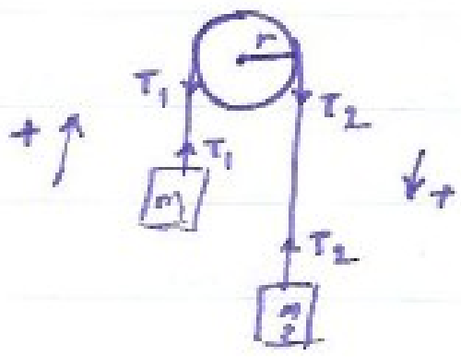
$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 4\pi/3}{20} = -\pi/15$

1. شتاب زاویه‌ای
2. گشتاور کند کننده

$40 \times \frac{2\pi}{60} = \frac{4\pi}{3}$

$\tau = I\alpha \Rightarrow I = \frac{1}{12} \times 6(2)^2 + 1\times1 + 1\times1 = 4$ $\tau = -\frac{4\pi}{15}$

eg: در یک ماشین آتوود جرم یک جسم 500gr و دیگری 400gr است. شعاع قرقره 5cm پس از رها کردن دستگاه از حالت سکون جسم سنگین‌تر به اندازه‌ی 75cm پایین می‌آید. لختی دورانی قرقره چقدر است؟



نکات:

در صورت چرخیدن قرقره دیگر کشش طناب در دو سر آن برابر نیست

1. معادلات حرکت نیوتن را می‌نویسیم.

2. اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات بود از معادلات کمکی گشتاور نیرو استفاده می‌کنیم و یک سری از مجهول برحسب بقیه جهت می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow T_2 - T_1 = m_2(g-a) + m_1(g+a) \quad (I)$$

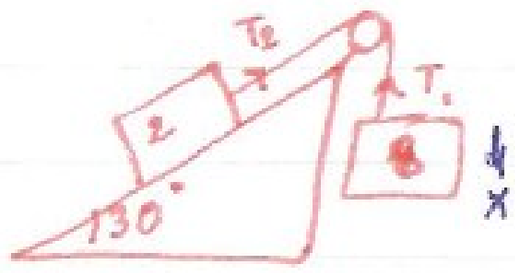
(II) $\tau = (T_2 - T_1)R = I\alpha = \frac{a}{R} I$ $y = +\frac{1}{2}at^2 + V_0 t \Rightarrow 75\times10^{-2} = \frac{1}{2}a(5)^2 \Rightarrow a = 6\times10^{-2} m/s^2$

$m_2(g-a) - m_1(g+a) = I\frac{a}{R} = Ia/R^2$ با جایگذاری I در II

$$\Rightarrow I = \left(\frac{0.5(9.8-6\times10^{-2}) - 0.4(9.8+6\times10^{-2})}{6\times10^{-2}}\right)R^2$$

* $S=r\theta$ ، $a=r\alpha$ ، $v=r\omega$ *

eg: جسمی به جرم 2kg روی سطح شیبداری با زاویه 30° می‌لغزد قرار دارد و به جسم 8kg متصل است. جرم قرقره قدرص مانند 1kg است و شعاع آن 10cm است. اگر $\mu_k = 0.1$

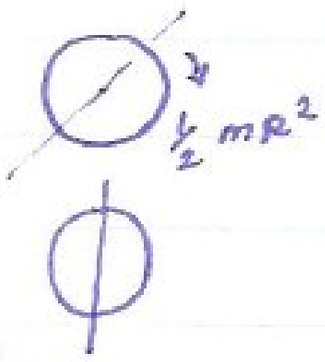


$I = \frac{1}{2}MR^2 \xrightarrow{M=1} \frac{1}{2}R^2$

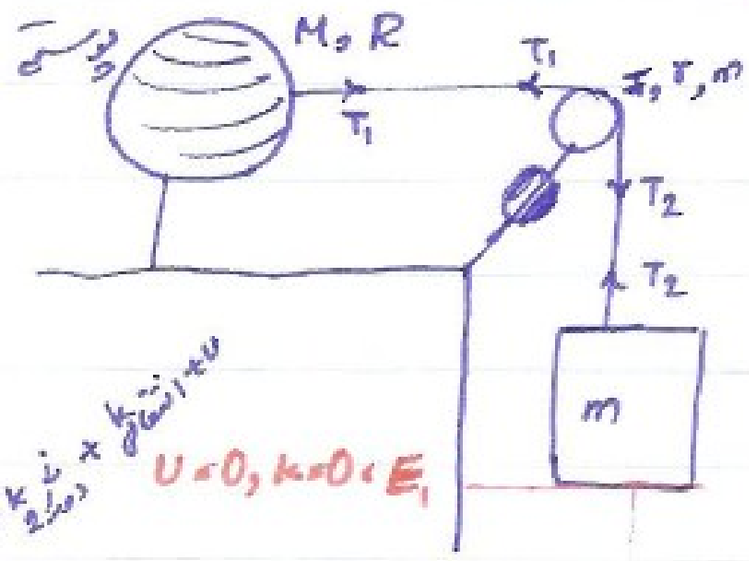
۱. شتاب جسم آویخته
۲. کشش نخ در هر طرف
خودم حل کردم.

$a = 6.37\ m/s^2$

$T_2 = 24.2\ N$, $T_1 = 27.44\ N$



eg: پوسته‌ی نازکی مطابق شکل به جسم m متصل است. نخ به دور پوسته پیچیده شده و جسم m رها می‌شود. سرعت جسم پس از سقوط به اندازه h چقدر است؟



$m: mg - T_2 = ma \Rightarrow T_2 = m(g-a)$ (I)

قرقره $\tau = T_2 r - T_1 r = (T_2 - T_1)r = I\alpha = I\frac{a}{r}$ (III)

پوسته $\tau = T_1 R = I\alpha_2 = I\frac{a}{R} \Rightarrow T_1 = I_2\frac{a}{R^2}$ (II)

$U=0, K=0, E_1$

انتهای x انتهای x

$K_1 + K_2 + U = K + U$

$0 + 0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ E_2

$\xrightarrow{(II, I)} r\left(m(g-a) - I_2\frac{a}{R^2}\right) = \frac{a}{r}\cdot I_1$

$\Rightarrow a = rmg \Big/ \left(\frac{I_1}{r} + \frac{rI_2}{R^2} + rm\right)$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$ $v^2 - v_0^2 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah}$

$2mgh = \left(m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{3}M\right)v^2$

$$v = \sqrt{\left[2rmg \Big/ \left(\frac{\frac{1}{2}m'R^2}{r} + \frac{r\,\frac{2}{3}MR^2}{R^2} + rm\right)\right]}\ m/s$$

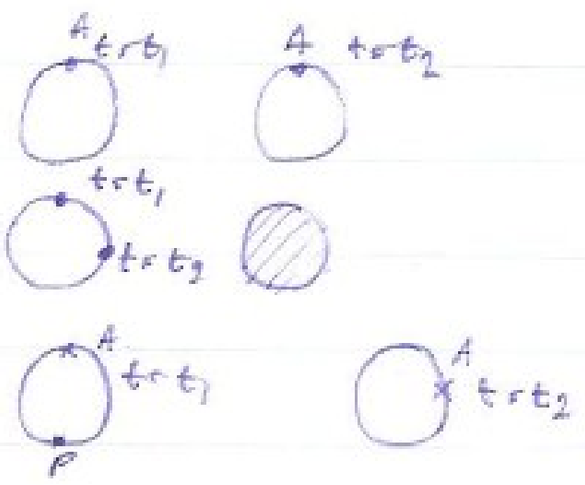
نکته: دو جسم که توسط تخت به هم متصل اند و حرکت دورانی دارند دارای سرعت و شتاب خطی برابر و سرعت (و شتاب) زاویه ای متفاوت هستند.

اما یک جسم که در حال دوران است دارای سرعت و شتاب زاویه ای برابر و سرعت و شتاب خطی متفاوت دارند.

The inertia of moment for triangle

.10.5

فصل هفدهم: غلتش

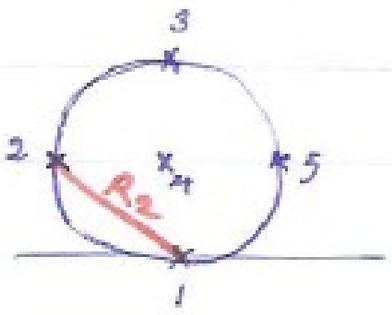


1. انتقالی: جسم فقط جابجا می شود و هیچ دورانی ندارد.
2. دورانی: جسم حول یک محور دوران می کند و هیچ انتقالی ندارد.
3. غلتش: جسم هم دوران می کند و هم منتقل می شود.

نکته: در حرکت دورانی محور دوران از مرکز جسم می گذشت اما در حرکت غلتشی محور دوران نقطه تماس با زمین است نقطه P در شکل

.11

سرعت نقاط مختلف را در حرکت غلتشی بررسی می کنیم.

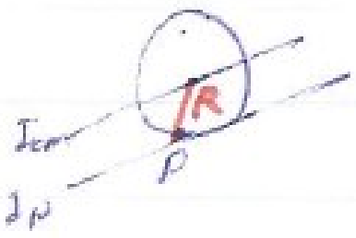


* $V_1 = 0$

$V_2 = R_2\omega$, $V_3 = R_3\omega = 2a\omega$, $V_4 = R_4\omega = a\omega$

$V_5 = R_5\omega$

1. سرعت خطی نقطه تماس با زمین صفر و سرعت خطی بالاترین نقطه A دو برابر سرعت مرکز جرم است.



انرژی جنبشی غلتش:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{cm} + MR^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

با دقت در آن K به این نتیجه می رسیم که انرژی جنبشی غلتش برابر است با مجموع انرژی جنبشی دورانی حول مرکز جرم و انرژی جنبشی انتقالی

$$K_{\text{غلتش}} = K_{\text{دورانی}} + K_{\text{انتقالی}}$$

مثال: استوانه‌ای روی زمین می‌غلتد انرژی جنبشی دورانی آن چه کسری از انرژی کل است.

$K_{\text{غلتشی}} = K_{\text{دورانی}} + K_{\text{انتقالی}}$

$$K_{\text{غلتشی}} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2}{\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\omega^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} MR^2\omega^2}{\frac{1}{2} MR^2\omega^2 + MV^2} = \frac{\frac{1}{2} M}{\frac{1}{2} M + M} = \frac{1}{3}$$

نیروها در حرکت غلتشی:

انواع حرکت‌های غلتشی: 1. حرکت غلتشی هموار (محض): جسم فقط جابجا شده و دوران نمی‌کند. (غلتش)

2. حرکت غلتشی ناهموار: علاوه بر جابجایی و دوران لغزش هم دارد. (هم غلتش و هم لغزش)

نیروهای ایجاد کننده‌ی حرکت غلتشی محض f_s است. $\circlearrowleft f_s$ ($f_{s_{max}}$ ، f_s نیست)

اما در حرکت غلتشی ناهموار نیروی f_k عامل ایجاد غلتش است.

f_s: مقدار ماکزیمم نیست بلکه برای هر جسم دارای مقادیر متفاوتی است.

f_s: جزء مجهولات دچار ۱۸۰ درجه حرکت غلتشی.

در حرکت غلتشی هموار می‌توانیم از رابطه‌ی $a_{cm} = R\alpha$ استفاده کنیم. اما در حرکت غلتشی ناهموار از رابطه $a_{cm} = R\alpha$ نمی‌توان استفاده کرد.

مراحل مسائل:

1. مرکز جرم جسم را تعیین می‌کنیم.
2. f_s و سایر نیروها را در دستگاه رسم می‌کنیم.
3. قانون نیوتن را بر آن حرکت می‌نویسیم.
4. اگر تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر بود از معادلات تکمیلی کشتاور نیرو استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\sum F = ma$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - f_s = ma$$

$$\Rightarrow \tau\begin{pmatrix} N \\ mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{چون } r_\perp = 0$$

$$\tau = f_s d = I\alpha \rightarrow f_s = I\frac{\alpha}{r} = I\frac{a}{r^2}$$

$mg\sin\theta - I\frac{a}{r^2} = ma \Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = mar^2 + Ia$

$\Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = mar^2 + \frac{1}{2}MR^2 a$

$\Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = a(mr^2 + \frac{1}{2}mr^2)$

$\Rightarrow mg\sin\theta = a(m + \frac{1}{2}m)$

$\Rightarrow g\sin\theta = a\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\theta$

$a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$ حالت کلی

$a_{\text{استوانه}} = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \frac{\frac{1}{2}MR^2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

$a_{\text{کره}} = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta \cdot \frac{5}{7}$ ⇒ کره زودتر از استوانه به پایین سطح شیبدار می‌رسد.

eg: استوانه‌ی توپری به جرم m و شعاع R از یک سطح شیبدار به پایین می‌غلتد. سرعت مرکز جرم هنگام رسیدن به سطح شیبدار چقدر است. (ارتفاع سطح شیبدار h می‌باشد)

$a_{\text{استوانه}} = \frac{2}{3}g\sin\theta \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2ad$

$\Rightarrow v^2 = 2ad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}g\sin\theta \cdot d} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

$E_2 - E_1 = W = F \cdot d \Rightarrow E_2 = E_1 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

تکانه زاویه‌ای $\vec{l}$

تکانه زاویه‌ای:

θ: زاویه بین ابتدا دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{p}$

تکانه خطی

$p = \sum p_i$ تکانه خطی برای یک ذره $p = mv$ و برای مجموعه ذرات

$l = \sum l_i$ تکانه زاویه‌ای برای یک ذره $l = r \wedge F$ و ... ...

$\vec{L}_i$ ، $\vec{L}_f$ هرگاه برایند گشتاورهای وارد بر جسم حول محور صفر شود در آن صورت پایستگی تکانه زاویه‌ای داریم.

$F_{net} = \frac{dp}{dt}$ شکل دوم قانون دوم نیوتن

$\tau_{net} = \frac{dL}{dt}$ شکل دوم قانون نیوتن در حرکت دورانی

$\frac{dL}{dt} = \frac{d(r \wedge p)}{dt} = \frac{d(r \wedge mv)}{dt} = m\frac{d(r \wedge v)}{dt} = m\frac{dr}{dt} \wedge v + mr \wedge \frac{dv}{dt}$

$\frac{dL}{dt} = \underbrace{mv \wedge v}_{0} + mr \wedge a \Rightarrow \frac{dL}{dt} = r \wedge ma = r \wedge F = \tau \Rightarrow \tau = \frac{dL}{dt}$

مقایسه روابط حرکت انتقالی و دورانی :

دورانی		انتقالی	
گشتاور نیرو	τ	نیرو	F
تکانه زاویه‌ای ذره	$l = I\omega$	تکانه تک ذره	$p = mv$
تکانه زاویه‌ای کل	$L = \sum l_i$	تکانه کل	$P = \sum P_i$
پایستگی تکانه زاویه‌ای	$L_i = L_f$	پایستگی تکانه خطی	$P_i = P_f$
شکل دوم نیوتن	$\tau_{net} = \frac{dL}{dt}$	شکل دوم نیوتن	$F_{net} = \frac{dP}{dt}$

کار و انرژی جنبشی دورانی :

$$W = \int F \cdot dt \quad \Rightarrow \quad W = \int \tau \, d\theta$$

توان :

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v \qquad \text{انتقالی}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

قضیه کار و انرژی جنبشی :

$$\frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \int \tau \, d\theta = W$$

تعادل :

۱. برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است . $\sum F = 0$

$$\Rightarrow \sum F_{(x)} = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

۲. برایند گشتاورهای نیرو وارد بر جسم صفر است . $\sum \tau = 0$

$$\Rightarrow \sum \tau_x = 0 \quad \sum \tau_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0$$

روش حل مسائل برای تعادل :

۱. ابتدا نمودار آزاد جسم را رسم کرده و کلیه نیروها را وارد می‌کنیم .

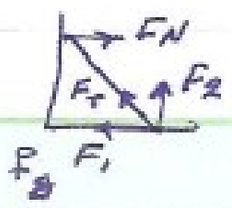
۲. چون دستگاه در حال تعادل است از روابط $\sum F = 0$ و $\sum \tau = 0$ استفاده می‌کنیم. (محدودیت انتخاب کنیم)

۳. اگر گشتاورهای نیروی وارد بر جسم تمایل داشت جسم را ساعتگرد بچرخاند علامت گشتاور منفی است
اگر تمایل داشت جسم را پادساعتگرد بچرخاند گشتاور مثبت است .

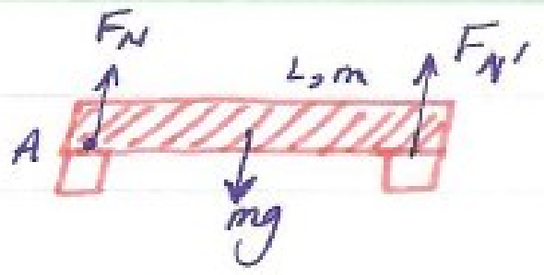
۴. اگر تعداد مجهولات بیشتر از معادلات بود می‌توانیم محور دوران را روی نیروهای مجهول قرار دهیم
گشتاور نیروها را صفر کردیم .

۵. اگر نیروها دارای زاویه بودند ابتدا آنها را تجزیه می‌کنیم و سپس گشتاور مولفه را حساب می‌کنیم .

۶. اگر سطح بدون اصطکاک بود تنها نیروی وارد بر جسم نیرو عکس العمل سطح است . اما اگر
جسم دارای اصطکاک بود دو نیرو عمود بر هم بر جسم وارد می‌شود .

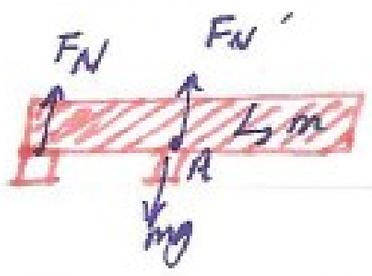


eg: نیروی عکس العمل وارد بر پایه A برای جسم زیر حساب کنید.



$\sum F = 0 \Rightarrow F_{N'} + F_N - mg = 0$

حول نقطه A دوران کند. $\sum \tau = 0 \Rightarrow -mg\,L/2 + F_{N'}L = 0 \Rightarrow F_{N'} = mg/2 = F_N$

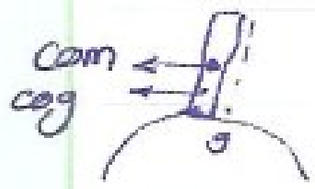


$\sum F = 0 \Rightarrow F_N + F_{N'} - mg = 0$

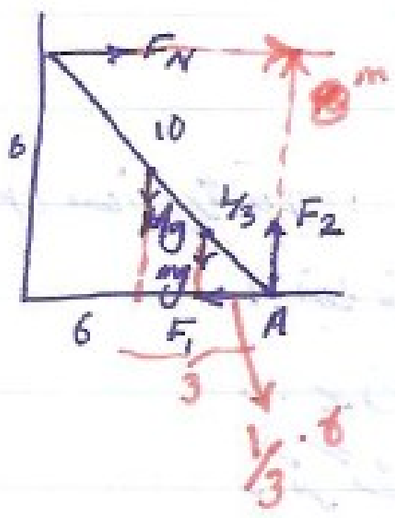
$\sum \tau = 0 \Rightarrow -F_N(L/2) = 0 \Rightarrow F_N = 0 \Rightarrow F_{N'} = mg$

eg: نردبانی به طول 10m و جرم 45kg به دیوار بدون اصطکاک تکیه کرده است انتهای بالای نردبان در ارتفاع 8m زمین قرار دارد. زمین دارای اصطکاک است. شخصی به جرم 70kg تا مرکز نردبان بالا می‌رود. چه مقدار نیروی مرکز جرم نردبان در انتهای پایین 1/3 است بزرگی نیروهای وارد بر نردبان از سوی دیوار و کف چقدر است.

* مرکز گرانش (گرانیگاه): نیروی گرانشی وارد بر جسم به نقطه‌ای وارد می‌شود که به آن مرکز گرانیگاه گویند و با (cog)



$\Rightarrow cog \simeq com$



$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_N$

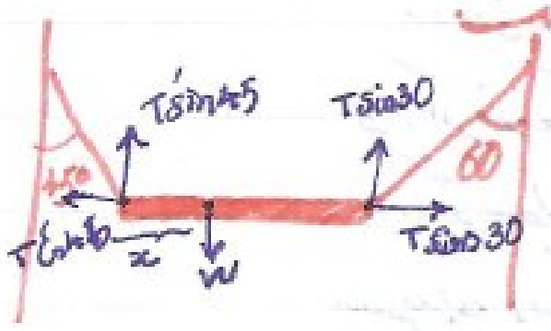
$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 = mg + Mg$

$\sum \tau = 0 \Rightarrow -F_N \cdot 8 + Mg \times 3 + mg \times 2 = 0$

$\Rightarrow (3M + 2m)g = 8F_N$

$F_N = F_1 = 37.5\,N \qquad F_2 = 427\,N$

eg: میله غیر یکنواختی به وزن W به دو نخ سبک مطابق شکل وصل است. اگر طول میله 6m باشد فاصله مرکز گرانش (x) از انتهای سمت چپ میله چقدر است. $\theta = 45$ و $\varphi = 60$



$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30 = T'\cos 45 \Rightarrow T' = \sqrt{3/2}\,T$

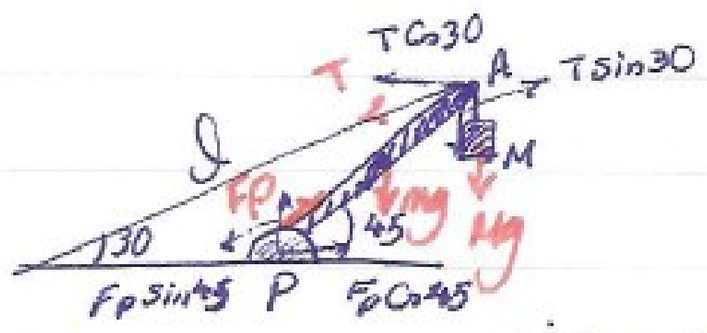
$\sum F_y = 0 \Rightarrow T'\sin 45 + T\sin 30 = W$

$\sum \tau = 0 \Rightarrow T'\sin 45\, l + W(l - x) = 0$

$T' \sin 45\, l = (T_0 \cos 30 + T' \sin 45)(l - x)$,

$\frac{\sqrt{2}}{2} l = (T_1/2 + \sqrt{3}T_1/2)(l - x) \Rightarrow x = \frac{l}{(\sqrt{3}+1)}$

eg: دستگاه شکل مقابل در حال تعادل است مطلوب است T و نیروی وارد بر میله از طرف پایه P و جرم جرم 200kg جرم میله 50kg .



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_p \cos 45 = T \cos 30 \Rightarrow T = F_p \sqrt{2/3}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg + mg + T \sin 30 = F_p \sin 45$

محور دوران

نقطه A : $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos 45 + F_p \cos 45 . L \sin 45$

$- F_p \sin 45 . L \cos 45 = 0$ بی جواب می‌شود.

نیروی مقوا امتداد چرا می‌کند / نه انتقال.

محور دوران P : $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow -T \cos 30 . L \sin 30 + mg . \frac{l}{2} \sin 45$

$+ MgL \sin 45 = 0$

$\Rightarrow -T \times \frac{\sqrt{3}}{2} . L \frac{1}{2} + 50 \times 9.8 \times \frac{L}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 . L \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

فصل نهم: یک نقطه خاص در اجسام (مرکز جرم)

مرکز جرم یک جسم یا دستگاهی از اجسام، نقطه‌ای است که در موقع حرکت کردن کلی تمام جرم جسم در آنجا متمرکز شده است و تمام نیروهای خارجی به آن نقطه اثر می‌کنند.

Center of mass برای دو جسم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_{com} = \frac{m_1 d + m_2 d}{m_1 + m_2}$$

به ازای $m_1 = m_2$ جرم‌های ذره‌ها یکسان و مرکز جرم در وسط فاصله‌ی میان آنهاست ← $x_{com} = d/2$

- اگر $m_1 \neq m_2$ باشند، x_{com} مقداری در بین صفر و d خواهد بود یعنی مرکز جرم در محلی واقع در میان دو ذره است.
- با وجود جابجا شدن دستگاه مختصات، فاصله مرکز جرم از ذره‌ها همان فاصله قبلی است.

برای حالتی که n ذره در راستای محور x قرار دارد:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\Rightarrow x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}$$

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

تذکر: شاخص i: ذره‌های مختلف را از لحاظ جرم و مکان معرفی می‌کند.

اگر ذرات در ۳ بعد توزیع شود:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

(مهم) $y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad (\text{مهم})$$

$$d_I = \frac{1}{3} d_A L^2 = \frac{1}{3}\sigma x^2 dy$$

$$d_I = \frac{1}{3}\sigma x^3 dx$$

$$y = x \Rightarrow dy = dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma}{3} \left. \frac{x^4}{4} \right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{12} a^4 = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sigma \left(\frac{a^2}{6} \right)$$

$$= \frac{ma^2}{6}$$

تقسیم‌بندی:

ریاضی: 13:30-16:30 . 10 . 12

زبان: 7:30-10:30 . 10 . 18

فیزیکوشیمی: 16:30-18:30 . 10 . 19

فارسی: 7:30-10.30 . 10 . 25

13.30-16.30 . 10 . 26

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

چگالی حجمی: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \frac{M dV}{V}$

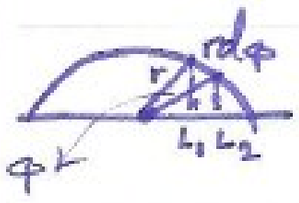
چگالی سطحی: $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \frac{M dA}{A}$

چگالی طولی: $\lambda = \frac{M}{l} = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \frac{M dl}{L}$

المان:

1. dl (خطی): a) دکارتی: $dl = dx \text{ یا } dy \text{ یا } dz$

* b) دایره:



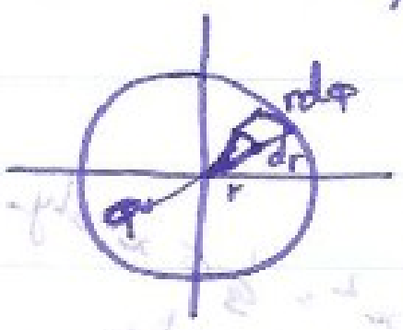
$\Delta l = l_2 - l_1 = dl$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$

پس $dl = r\,d\varphi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

2. dA (سطحی): a) دکارتی: $dA = dx\cdot dy \text{ یا } dx\, dz \text{ یا } dy\, dz$

* b) اگر یک قرص دایره باشد:



پس $dA = r\,d\varphi\, dr = r\,dr\,d\varphi \quad , \quad 0 \leq r \leq a \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

c) اگر یک کره باشد:

$dA = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

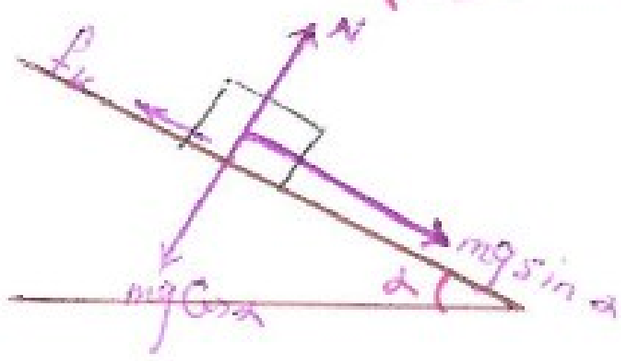
$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

3. dV (حجمی): a) دکارتی: $dV = dx\cdot dy\, dz$

b) کره: $dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

حرکت روی سطح شیب دار :

لغزیدن با شتاب به طرف پایین :



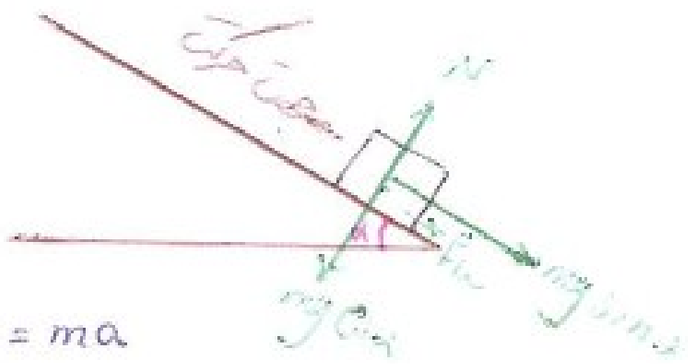
$$mg\sin\alpha - f_K = ma \qquad (1)$$

$$f_K = \mu_K \cdot N = \mu_K mg\cos\alpha \quad (2) \xrightarrow{(2)(1)} a = g(\sin\alpha - \mu_K \cos\alpha)$$

$$\mu_K = 0 \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

(سطح بدون اصطکاک)
هنگامی که جسم به طرف پایین سطح شیبدار
بدون سرعت اولیه رها شود

پرتاب به طرف بالا سطح شیبدار :



پرتاب به طرف بالا سطح شیب دار $(F_{\text{موثر}} = 0)$

$$-mg\sin\alpha - f_K = ma \Rightarrow -mg\sin\alpha - \mu_K mg\cos\alpha = ma$$

$$\Rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu_K \cos\alpha) \qquad \mu_K = 0 \Rightarrow a = -g\sin\alpha$$

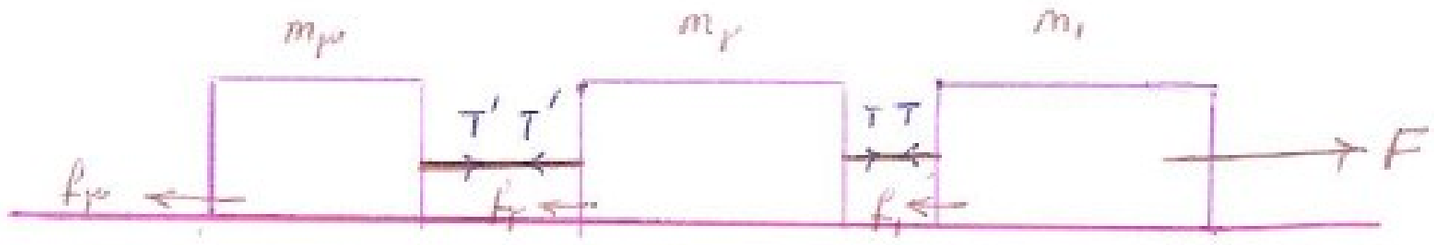
* اگر جسم را رو به بالا سرعت V_0 روی سطح شیبدار پرتاب کنیم

و با سرعت V به همین نقطه برسد داریم :

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu_K \cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_K \cos\alpha}}$$

حرکت چند جسم باهم روی یک سطح

* در این حالت می توانیم حرکت اجسامی که به طریق به هم وصل شده است (توسط نخ یا فنر یا تماس سطح دو جسم) را به صورت تک تک یا صورت جسم واحد بررسی نماییم.



* واضح است F از T بزرگتر و T نیز از T' بزرگتر است *

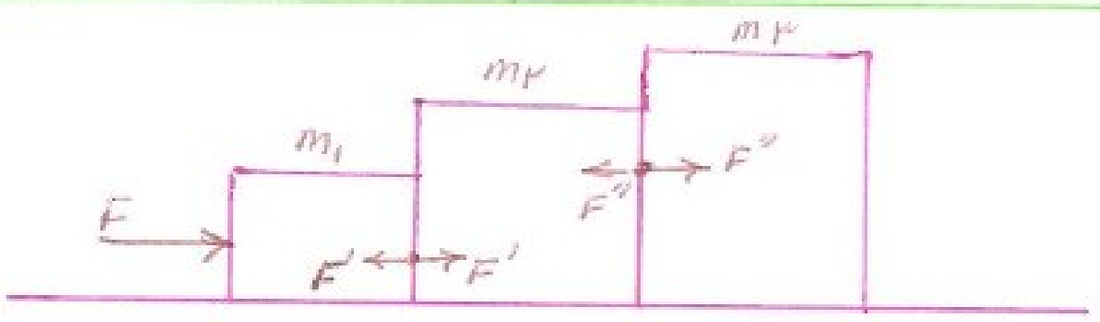
کل دستگاه: $F - f_1 - f_2 - f_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{T_1}{m_2+m_3} = \frac{T'}{m_3}$$

اگر F را به شکل مقابل باشد: $\nearrow F$ یا μ همگی یکسان باشد:

$$a = \frac{F - f_1 - f_2 - f_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{F - T - f_1}{m_1} = \frac{T' - f_3}{m_3}$$

$$\text{شتاب} = \frac{\text{برایند نیروهای وارد بر کل دستگاه}}{\text{جرم کل دستگاه}} = \frac{\text{برایند نیروهای وارد بر هر جزء از دستگاه}}{\text{جرم همان جزء}}$$



* واضح است F از F' بزرگتر و F' از F'' بزرگتر است.

کل دستگاه: $F - f_1 - f_2 - f_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

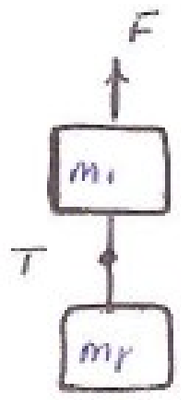
$$F' \begin{cases} m_1: F - F' - f_1 = m_1 a \\ m_2+m_3: F' - f_2 - f_3 = (m_2+m_3)a \end{cases}$$

$$F'' \begin{cases} m_3: F'' - f_3 = m_3 a \\ m_1+m_2: F - F'' - f_1 - f_2 = (m_1+m_2)a \end{cases}$$

$$F' - F'' \Rightarrow m_2: F' - F'' - f_2 = m_2 a$$

$$\frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{F'}{m_2+m_3} = \frac{F''}{m_3}$$

در این حرکت اگر اصطکاک نداشته باشیم، ابتدا باید کل دستگاه را یک جسم واحد در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون برای آن نوشته شود.



کل دستگاه: $F - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a$

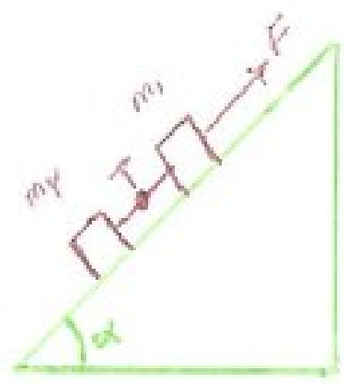
$$\begin{cases} m_1: F - m_1 g - T = m_1 a \\ m_2: T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{T}{m_2}$$

* اگر دستگاه در شرایطی خلاء کشیده شود، نیروی کشش تخ ماجم وزنه‌هایی که به دنبال خود می‌کشد متناسب است.

$$\begin{cases} F \propto m_1 + m_2 \\ T \propto m_2 \end{cases}$$

سطح شیبدار:



کل دستگاه: $F - m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha - f_1 - f_2 = (m_1 + m_2) a$

m_1: $F - m_1 g \sin\alpha - f_1 - T = m_1 a$

m_2: $T - m_2 g \sin\alpha - f_2 = m_2 a$

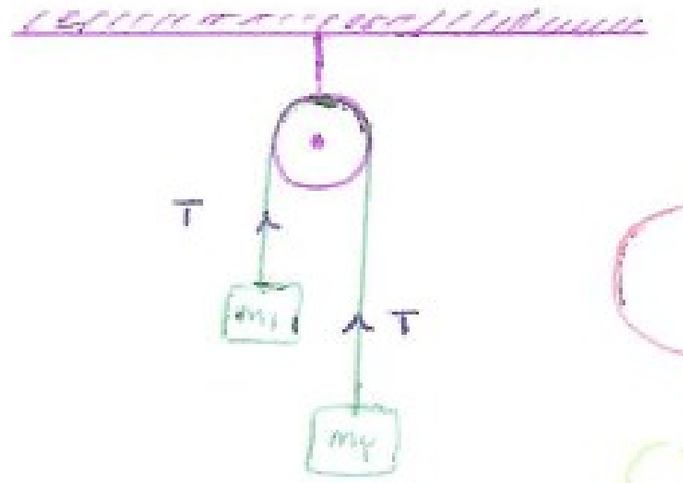
* اگر جسم با سطح اصطکاک نداشته باشد یا ضریب اصطکاک آن بزرگ

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{T}{m_2}$$

هر دو وزنه یکسان باشد، نیروی کشش تخ با جرم وزنه‌هایی که به دنبال خود می‌کشد، متناسب است.

$$\begin{cases} F \propto m_1 + m_2 \\ T \propto m_2 \end{cases}$$

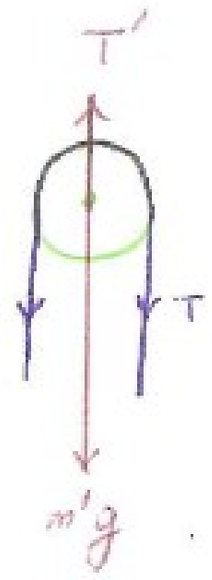
* ماشین آتوود *



$$a = \frac{|m_2 - m_1|\, g}{m_2 + m_1}$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

بررسی قرقره ثابت



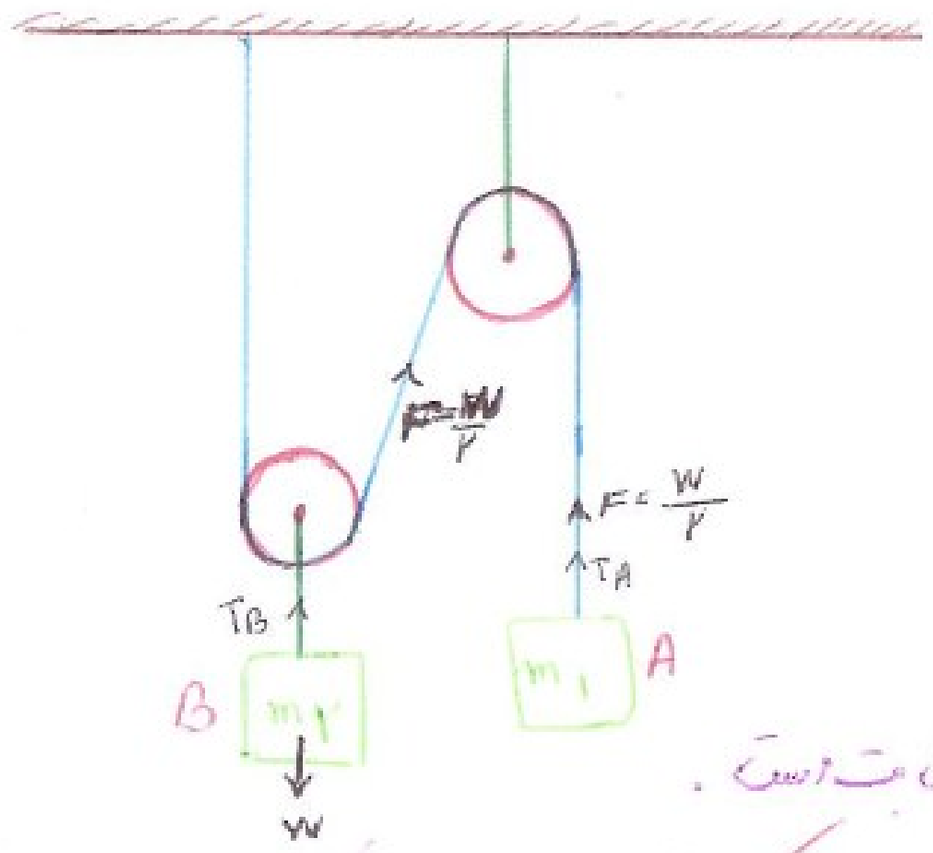
$$T' = 2T + m'g$$

اگر جرم قرقره ناچیز باشد آنگاه $m' = 0$

$$T' = 2T$$

$$\Rightarrow T' = \frac{4 m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

بررسی قرقره متحرک



$$x_A = 2x_B \Rightarrow x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a_A = 2a_B$$

$$v = at \Rightarrow v_A = 2v_B$$

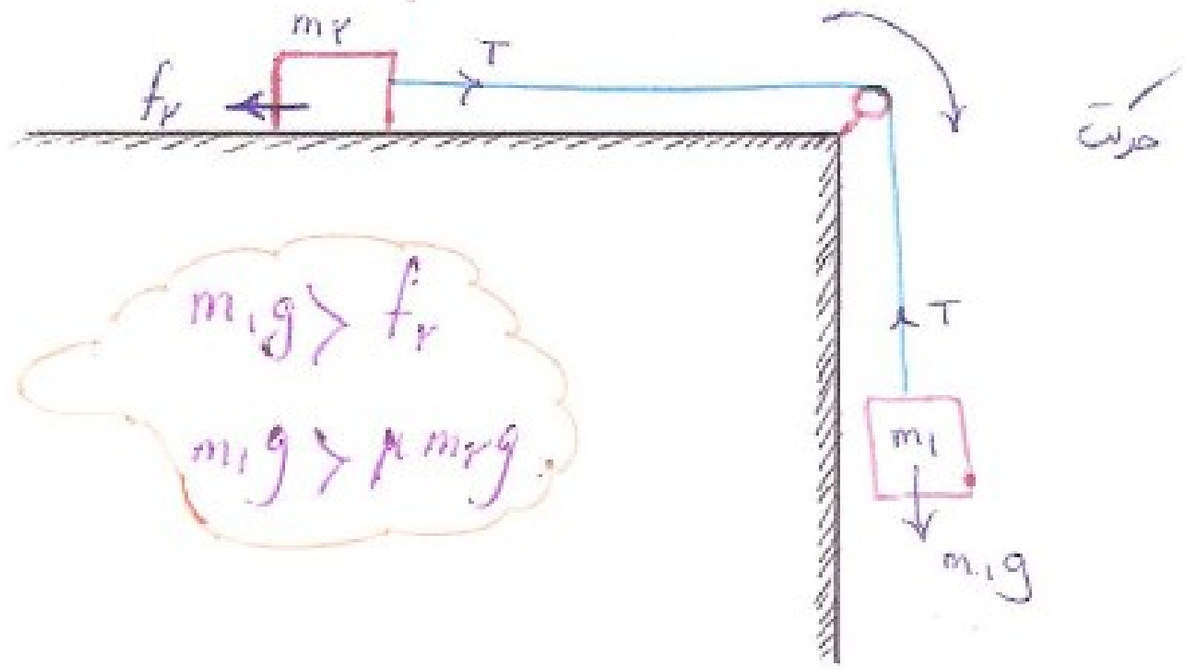
$$T_A = m_A(g - a_A), \quad T_B = 2T_A = m_B(g + a_B)$$

$$, \quad a_B = \frac{a_A}{2} \Rightarrow T_B = 2T_A = m_B\left(g + \frac{a_A}{2}\right)$$

* اگر تخ بدون جرم با تعداد کشش تخ در سرعت سر تخ مقداری ثابت است.

* اندازه نیروی کشش تخ با عبور از روی قرقره تغییر نمی کند. (یعنی به جرم قرقره بستگی ندارد.)

* حرکت در سطوح توپی افقی و قائم *



$m_1 g > f_2$

$m_1 g > \mu m_2 g$

چند فرمول کاربردی

زمانی که در سؤال مسافت یا با زمان یا با مسافت داده می‌شود!

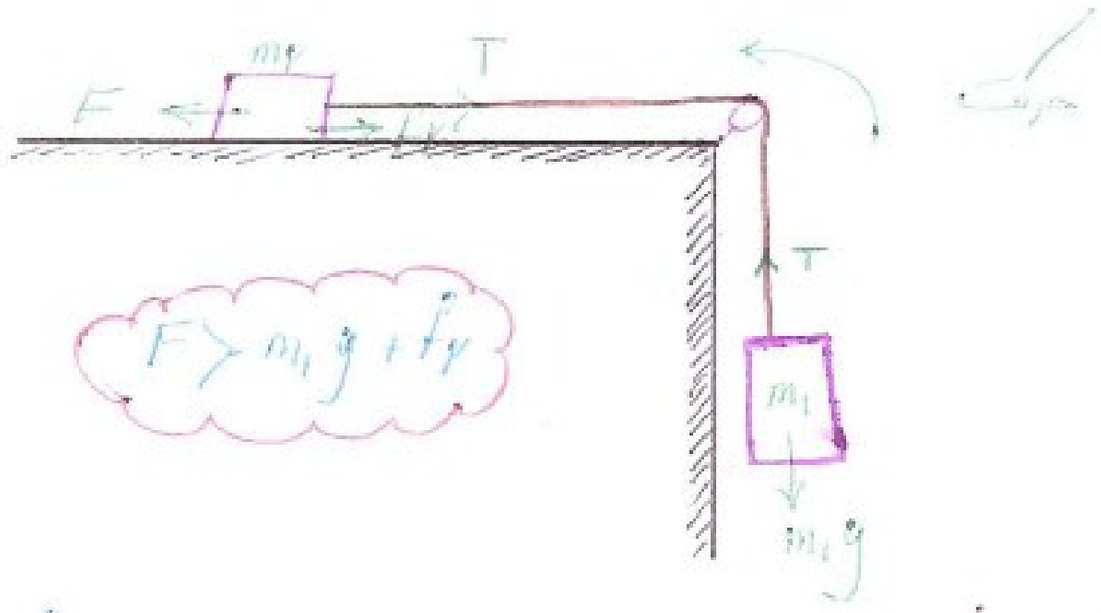
$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

$v = at + v_0$

که در اکثر موارد $v_0 = 0$

کل دستگاه: $m_1 g - f_2 = (m_1 + m_2) a$

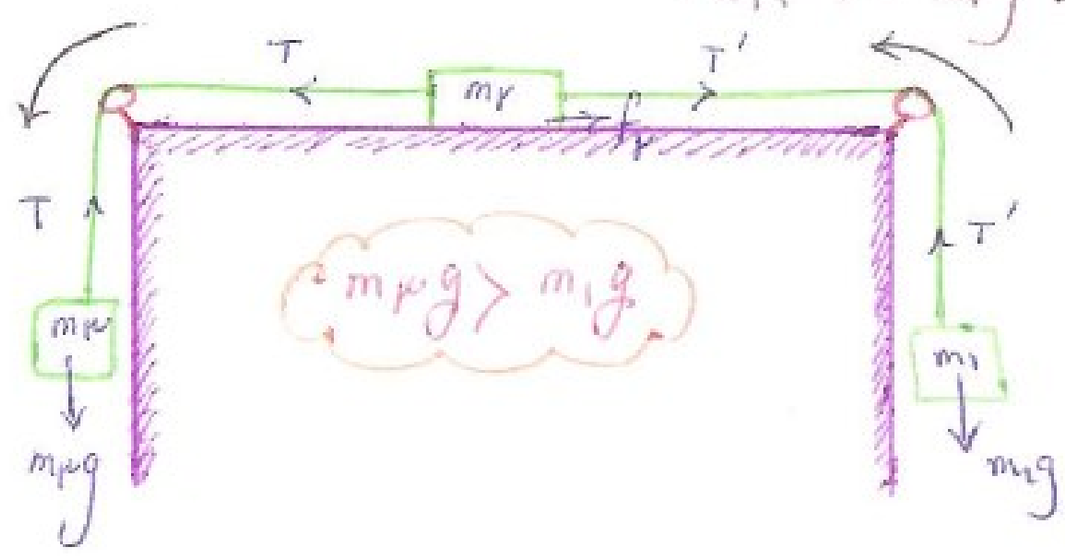
$$\begin{cases} m_2: T - f_2 = m_2 a \\ m_1: m_1 g - T = m_1 a \end{cases}$$



$F > m_1 g + f_2$

کل دستگاه: $F - f_2 - m_1 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$

$$\begin{cases} m_2: F - f_2 - T = m_2 a \\ m_2: F - f_2 - T = m_2 a \\ m_1: T - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$



$m_3 g > m_1 g$

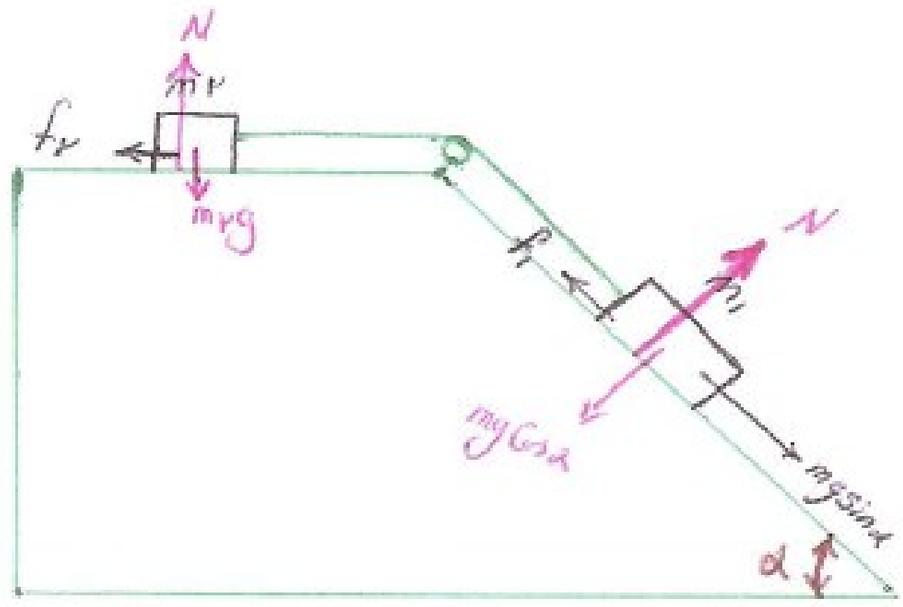
کل دستگاه: $m_3 g - f_2 - m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3) a \Rightarrow$

$$\begin{cases} m_3: m_3 g - T = m_3 a \\ m_2: T - T' - f_2 = m_2 a \end{cases}$$

سطح های توپی افقی یا قائم با سطح شیبدار

در این مسئله ها برای تعیین جهت حرکت باید ابتدا برای وزنه ی روی سطح شیب دار نیروی $mg\sin\alpha$ را با نیروی mg برای وزنه ای که در راستای قائم قرار دارد مقایسه نماییم. پس از آن قانون اول و دوم نیوتون را بنویسیم

$N_2 = m_2 g$



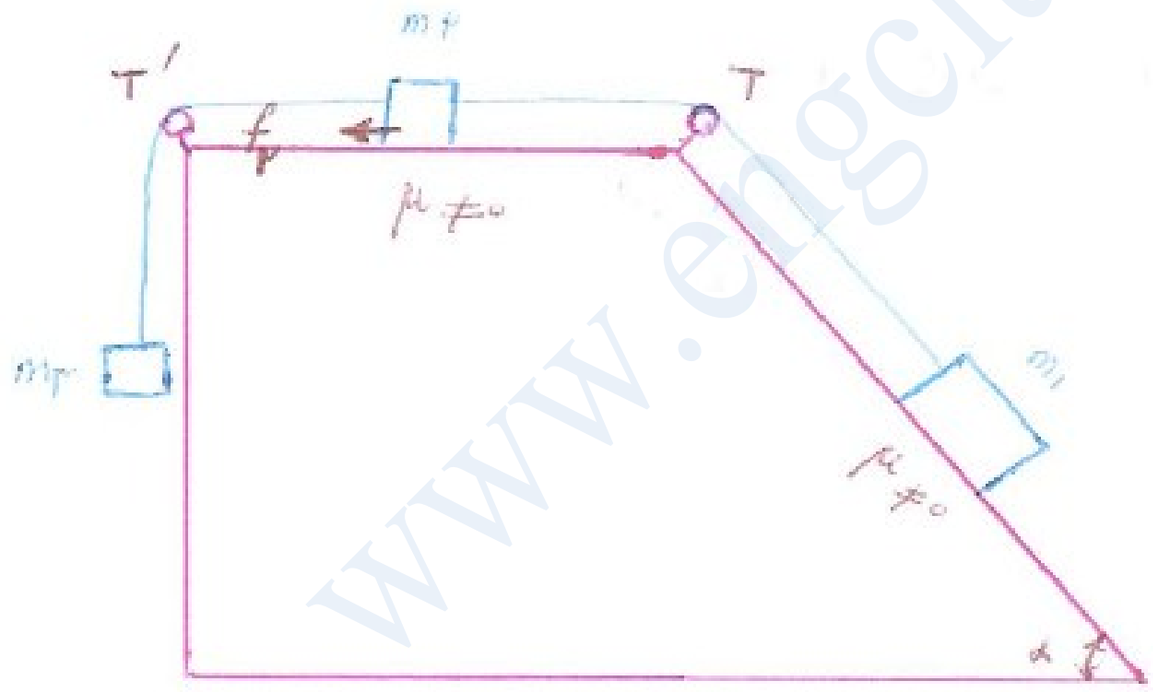
$N_1 = m_1 g\cos\alpha$

$m_1 g\sin\alpha > f_1 + f_2$

m_1: $m_1 g\sin\alpha - f_1 - T = m_1 a$

(کل دستگاه) $m_1 g\sin\alpha - f_1 - f_2 = (m_1 + m_2)a$

m_2: $T - f_2 = m_2 a$



اگر: $m_1 g\sin\alpha > m_3 g + f_2$

(کل دستگاه) $m_1 g\sin\alpha - f_2 - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$

m_2: $T - T' - f_2 = m_2 a$

m_3: $T' - m_3 g = m_3 a$

(m_1, m_2): $m_1 g\sin\alpha - f_2 - T' = (m_1 + m_2)a$

www.engclubs.net