

[www.engclubs.net](http://www.engclubs.net)

A site for all engineers

[www.engclubs.net](http://www.engclubs.net)

# فیزیک

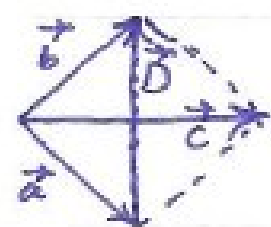
7/5

کتاب فیزیک:

بردار، دارای جهت و اندازه هستند و کمیت‌های جبری روی آنها از قوانین خاصی پیروی می‌کنند. مثل: سرعت، مسکالر: فقط دارای اندازه هستند. برای نشان دادن آن از واحد (استفاده می‌کنیم). مثل: جرم (kg)، زمان (s).

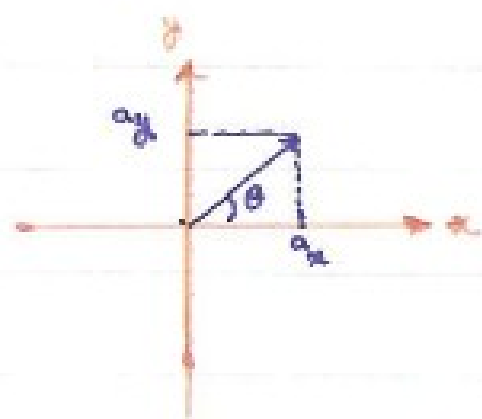
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} \quad \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



$$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$



$$\vec{c} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \quad \text{اندازه: } |\vec{c}|$$

$$a_x = a \cos \theta, \quad a_y = a \sin \theta, \quad \theta = \arctan \frac{a_y}{a_x}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{-11}{-2} \right) = \arctan(5.5) = 79.7^\circ$$

ضرب برداری:

$$3x(2i - 4j) = 6i - 12j$$

1. ضرب یک جهت اسکالر ضرب بردار:

2. ضرب برداری دو بردار: حاصل یک بردار است و علامت آن یک نقطه است. طبق تعریف حاصل ضرب برداری دو بردار حاصل ضرب اندازه‌های بردار اول و دوم در برابر سینوس زاویه بین آنهاست.

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta \quad (I)$$

$$\text{eg: } i \cdot i = ? \quad i \cdot j = ? \quad i \cdot i = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1, \quad i \cdot j = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (II)$$

$$(I); (II) \rightarrow |a||b| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

eg:  $\angle$   $a = 3i + 2j - k$  ,  $b = i + j + k$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3+2-1}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{14} \sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{14} \sqrt{3}}$$

ضرب برداری یا بردار حاصل یک بردار است. علامت آن (x) است و طبق تعریف:  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$

\*  $\vec{c} \leftarrow$  طبق قاعده دست راست بردار است که در محور بصری  $a \times b$  است.

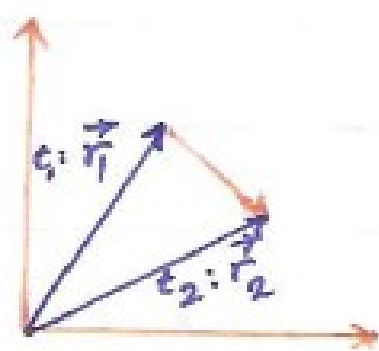
$$\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

eg:  $a = 3i + j - 2k$  ,  $b = i + j - k$  ,  $c = i + j \Rightarrow a \cdot (b \times c) = ?$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) - (-5) = 2$$

حرکت در یک بعد:



$$\Delta r = r_2 - r_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

1. سرعت متوسط: جایگاه در دو لحظه

\* راستای هم جهت با  $\Delta \vec{r}$  است.

eg: اتومبیل مسافتی که از همان به همان می‌رود را در 3 ساعت و مسافتی که از تهران به همان می‌آید در 2.5 ساعت طی می‌کند. سرعت متوسط آن چقدر است؟

$$\vec{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = .$$

2. سرعت لحظه‌ای: سرعت یک ذره در هر لحظه را گویند.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

اشتاب: اگر سرعت ذره چنانچه از اندازه و جهات تغییر جهت (حرکت دایره‌ای) تغییر کند جسم دارای شتاب می‌شود.

7/11

$$\vec{s}_{avg} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان سپری شده}} \quad \text{مقدار متوسط}$$

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{شتاب متوسط} \quad \text{شتاب هم جهت با تغییر است}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{شتاب لحظه‌ای}$$

حرکت یکنواخت:

$$\text{if: } t_1 = 0, v_1 = v_0, t_2 = t, v_2 = v$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0), v = at + v_0, x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

و: تیری قبل از رها شدن از کمان یک فاصله  $60 \text{ cm}$  شتاب بگیرد اگر سرعت تیر در لحظه رها شدن  $60\%$  باشد شتاب دارد بر تیر نیز چقدر است؟

$$v_0 = 0, v = 60 \text{ cm}, \Delta x = 0.16 \text{ m}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad a = \frac{(60)^2}{2 \times 0.16} = 3000 \text{ m/s}^2$$

و: در قطار یکی با سرعت  $15 \text{ m/s}$  و دیگری با  $20 \text{ m/s}$ ، سویی هم حرکت می‌کند و متنی فاصله در قطار  $1000 \text{ m}$  می‌باشد. تیر می‌کشد. اگر شتاب تیر  $2 \text{ m/s}^2$  باشد آیا برخورد صورت می‌گیرد؟ برخورد نمی‌کند.

• شتاب ها کند شونده با علامت (+)

• شتاب ها کند شونده با علامت (-)

سقوط آزاد: برای یافتن معادلات سقوط آزاد از معادلات حرکت مستقیم الخط حساب می‌کنیم با این تفاوت که بجای  $a$ ،  $y$  و بجای  $a$ ،  $-g$  را قرار می‌دهیم.

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gy$$

$$\text{نقطه اوج: } v_y = 0$$

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

وقتی اجسامی از روی بلندی پرتاب می‌شوند هم زمان با باران یک کامیون به طول 12 م و سرعت 20 م/ث از زیر پل رد می‌شود پس چه ارتفاعی از سطح کامیون داشته باشد تا جسم در انتهای کامیون نیفتد.

$$t = \frac{12}{20} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{12}{20}\right)^2 + 0 = -1.8$$

در ابتدا  $y = -h$   
در انتها  $y = 0$

eg: دو جسم با فاصله زمانی 5s از حالت سکون رها می‌شوند. چه مدت پس از رها شدن جسم اول فاصله میان دو جسم 20 م می‌شود.



$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$t_2 = t_1 - 5 \rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad y_2 = -\frac{1}{2}g(t_1 - 5)^2$$

$$\rightarrow t_1 = 2.9$$

eg: آب منبری با شتاب 1.2 م/ث<sup>2</sup> صعود می‌کند در خطی که سرعت روم بالای آن 2.4 م/ث<sup>2</sup> و عمودی از سقف آسانسور که 2.7 م از سطح آرنکف آن جدا می‌شود:



2.7 m

$$v_{0e} = v_{0T}$$

$$y_{0T} = y_{0e} + 2.7$$

$$y_e = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_{0e}$$

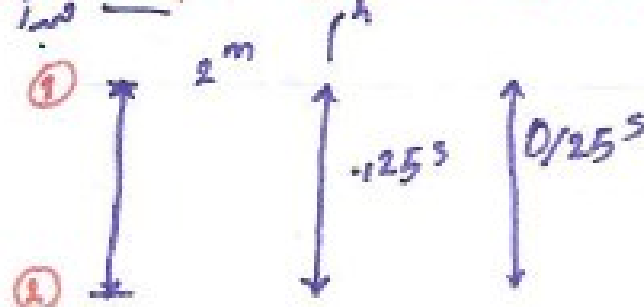
$$y_T = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_{0T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_{0e} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_{0T} \quad t = 0.75$$

$$\frac{1}{2}(1.2)t^2 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 2.7$$

$$2) \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \rightarrow y = -\frac{1}{2}(9.8)(0.75)^2 + 2.4(0.75) = 0.7 \text{ m}$$

eg: شخصی از پنجره‌ای به طول 2 م بالای زمین که کوب در عمق زمین 0.5 م باشد توب را چنان پرتاب می‌کند که در انتهای بلندی پل به بلندی 0.5 م می‌افتد.



$$y = -h \quad v_{0e} \quad y = -\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow -h = -\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (5)$$

$$② y = -(h+2), v_{0e} \Rightarrow ② y = -\frac{1}{2}g(t+0.25)^2 = -\frac{1}{2}g(t+0.25)^2$$

چند ثانیه  
از ①

$$2 + \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g(t_1 + 0.25)^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}g(0.25)^2 + g(0.25)t_1 \Rightarrow t_1 = 0.691$$

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}(9.8)(0.691)^2 = 2.34 \text{ m}$$

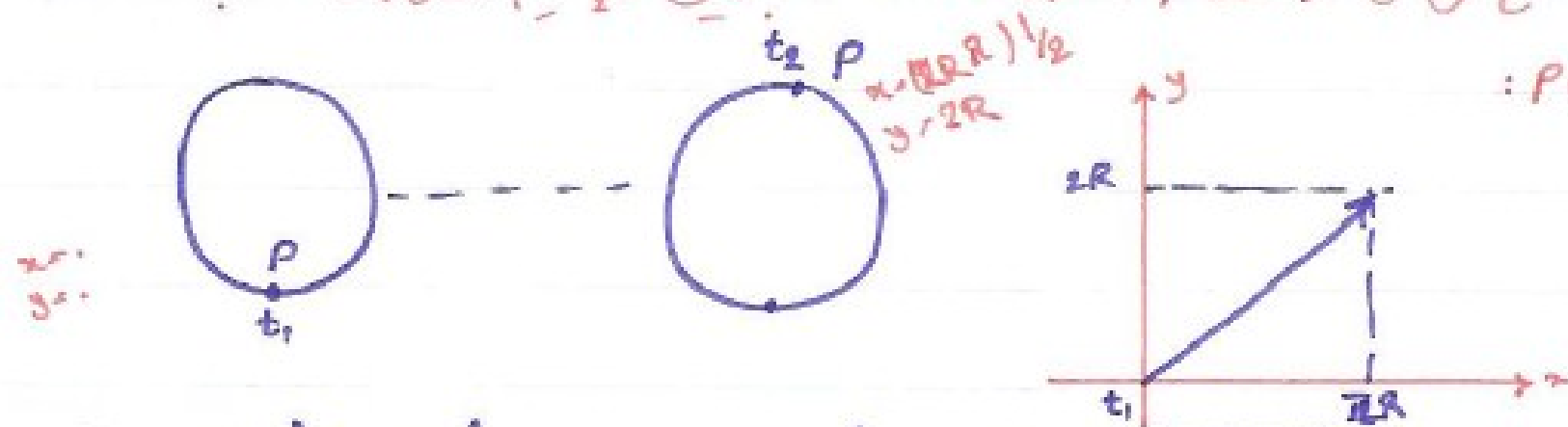
از حالت ①:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2}(9.8)(0.25)^2 + (0.25)v_0 \Rightarrow v_0 = 9.225 \text{ م/ث}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gH \Rightarrow -(9.2)^2 = -2(9.8)H \Rightarrow H = 4.34 \Rightarrow h = 4.34 - 2 = 2.34 \text{ m}$$



eg: چرخ به شعاع  $50\text{ cm}$  روی یک سطح افقی در نقطه  $P$  در لحظه  $t_1$  در زمین و  $t_2$  نیم دوری را به سمت راست بزرگ و کوچک جابجایی نقطه  $P$ :



$$\vec{r}_1 = \pi R \hat{i} + 2R \hat{j} = 1.57 \hat{i} + \hat{j} \Rightarrow |\vec{r}_1| = \sqrt{(1.57)^2 + 1}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{1.57} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{1.57} \right)$$

فصل ۴ حرکت در صفحه:

$$\text{if: } \vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k} \quad \vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

$$\text{سرعت متوسط} = \vec{v}_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = \vec{v}_{avg} \rightarrow \vec{v}_{لحظه‌ای} \quad \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\text{شتاب متوسط} = \vec{a}_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \hat{k}$$

$$\text{شتاب لحظه‌ای} = \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$v_x = v_{0x} + at$$

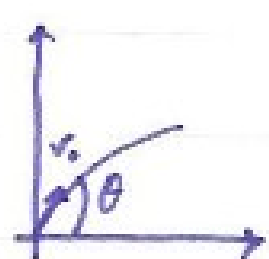
$$v_y = v_{0y} + at$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\vec{v} = (v_{0x} + at) \hat{i} + (v_{0y} + at) \hat{j}$$

$$= \underbrace{v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}}_{\vec{v}_0} + \underbrace{(a_x \hat{i} + a_y \hat{j})}_{\vec{a}} t = at + \vec{v}_0$$

حرکت پرتابی: در این حرکت جسم هیچ شتابی در راستای افق ندارد و شتاب در راستای عمود دارد.



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = -gt + v_0 \sin \theta \end{array} \right. \quad (I)$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_0 \cos \theta t \\ y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0 \end{array} \right.$$

در  
مستقل از  
t

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

نکته ۱: پرتاب در بالاترین نقطه مسیرش هیچ مولفه‌ی عمودی ندارد.

$$(۱) \quad 0 = -gt + v_0 \sin \theta \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

نکته ۲: سرعتها در ارتفاعات مساوی برابرند.

نکته ۳: زمان در نقطه‌ی لوج نصف کل زمان سپری شده برای پرتاب است.



نکته ۴: پرتابی که بصورت افقی پرتاب می‌شود دارای  $v_y = 0$  و  $v_2 = v_0$  است.

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

eg: توپی از بالای نیروی به ارتفاع یک متر به پایین افتاد در نقطه‌ی ۲ م از پای نیروی به زمین می‌خورد: سرعت آن در لحظه‌ی برخورد چقدر است؟

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta \Rightarrow -1 = \frac{-(9.8)}{2v_0^2} \Rightarrow v_0 = 4.42$$

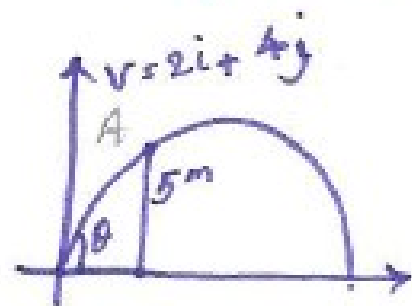
$$v = 2\hat{i} + 4\hat{j} \quad \text{به سمت بالا}$$

eg: توپی پرتاب می‌شود در ارتفاع ۵ م سرعت از رابطی

۱. ارتفاع اوج

۲. برد

۳. سرعت لحظه برخورد به زمین.



$$1: \quad v_A^2 - v_0^2 = -2gh$$

$$10^2 - v_0^2 = 2(9.8)(5) \Rightarrow v_0 y = 10.6$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin \theta \Rightarrow v_x = v_0 \cos \theta = 2$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0y}^2 + v_{0x}^2} = 10.8$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{v_{0y}}{v_0} = \sin^{-1} \frac{10.6}{10.8} = \sin^{-1} 0.98 = 72^\circ$$

$$h = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} = \frac{(10.8 \sin 72^\circ)^2}{2(9.8)}$$

$$2: \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$3: \quad v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh}$$

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} \Rightarrow v_{0x} = 2$$

تو

بدین جهت

eg: یک خازن با صفحات زیر آنترونی با مساحت  $2 \times 10^8 \text{ cm}^2$  باردهی شود. میدان داخل خازن شتابی برابر با  $2 \times 10^{15} \text{ cm/s}^2$  به طرف پایین به آنترونی در آن می دهد!



جا با این قائم نشود  
۱. سرعت آنترونی هنگام خروج

$$(I) \quad x = v_0 t \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{2} a t^2 + v_{y0} t$$

$$v_{y0} = v_0$$

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2} = \frac{2(1) \times 2 \times 10^{15}}{2 \times (2 \times 10^8)^2} = \frac{1}{4} \times 10^{-1} = 25 \times 10^{-2} = 25 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

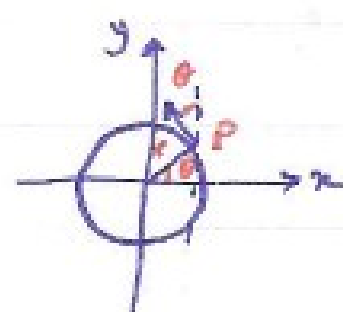
$$v_{0x} = 2 \times 10^8 \quad (J) \quad v_y = at = 2 \times 10^{15} \times \left( \frac{x}{v_0} \right) = 2 \times 10^{15} \times \frac{1}{2 \times 10^8} = 10^7 \text{ cm/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 \times 10^8)^2 + (10^7)^2} = 2 \times 10^8 \text{ cm/s}$$

حرکت دایره ای می باشد:

۱. بردار سرعت معکوس بر مسیر حرکت است.

۲. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است (مرکز گزینی)



$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = -r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta \hat{j} = -r \frac{dy}{dr} \hat{i} + r \frac{dx}{dr} \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v}{r} \frac{dy}{dt} \hat{i} + \frac{v}{r} \frac{dx}{dt} \hat{j} \quad (1)$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_y = v \cos \theta \\ \frac{dx}{dt} = v_x = -v \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{a} = \left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{i} - \left( \frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}$$

نکته: در حرکت پرنمایی یا مستقیم چون شتاب ثابت بود از معادله حرکت استفاده می کردیم اما در حرکت دایره ای به علت تغییر جهت شتاب نمی توانیم از آن معادلات استفاده کنیم.

نکته: در مسائلی که حرکتی صحیح از ۳ ضربه و تناوب و گذار مطرح است حتماً است که زاویه ای که با دوره تناوب حساب جهت است استفاده شود و ۳ از فرمول زاویه ای بدست می آید.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = r\omega \quad a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

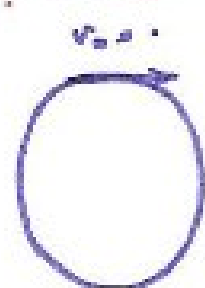
eg: ستاره ای در هر ثانیه یک دور می زند اگر شعاع این ستاره  $20 \text{ km}$  باشد شتاب جیوه در آن استواری چقدر است؟

$$\vec{a} = r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = 20 \times 10^3 \left( \frac{2\pi}{1} \right)^2 = 7.9 \times 10^5 \quad R = r \cos \theta$$



و: شخصی مسئله را به انتهای ریلهای مسافری طول ۳۰۰ متر شده بروی یک واگه افقی در ارتفاع ۲ متر زمین می چرخد و در اثر بار شدن این

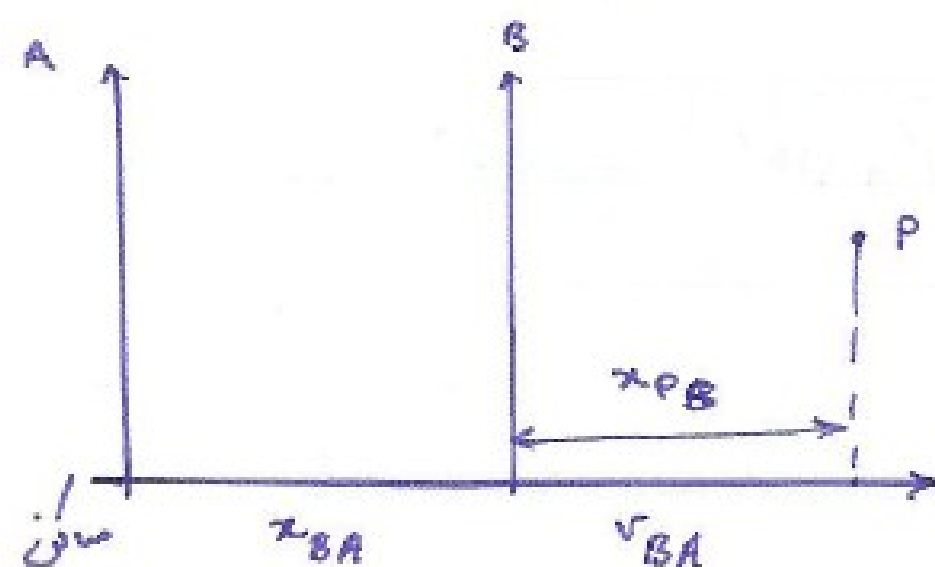
ریل در راستای افقی به سمت چپ می شود و ۱۰ متر از زمین پرتاب می شود. شتاب مرکز گری نسبت به سطح زمین و چقدر است؟



$$v = \frac{-\omega x^2}{2v_0 \cos \theta} + x \omega \Rightarrow v_0 = 5\sqrt{10} \text{ m/s} = 15.6 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{250}{1} = 250 \text{ m/s}^2$$

\* دوره تناوب  $T = \frac{2\pi r}{v}$



حرکت نسبی در یک بعد:

در صورتی که دستگاه مختصات B با سرعت ثابت نسبت به دستگاه A حرکت باشد.

مکان:  $x_{PA} = x_{BA} + x_{PB}$

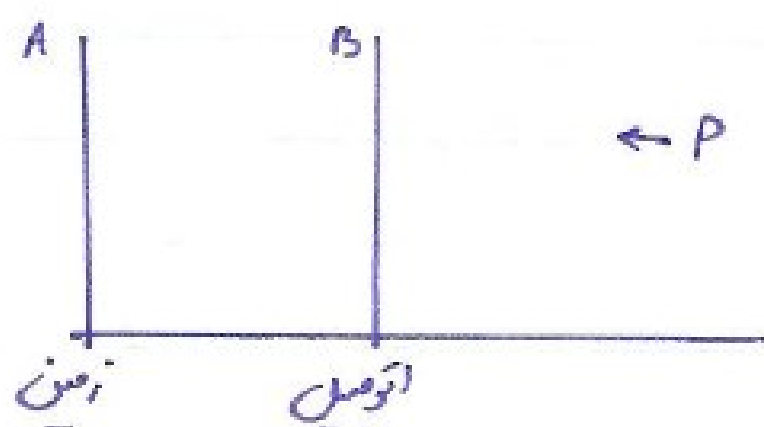
سرعت:  $\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{BA}}{dt} + \frac{dx_{PB}}{dt} \Rightarrow v_{PA} = v_{BA} + v_{PB}$

شتاب:  $\frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{BA}}{dt} + \frac{dv_{PB}}{dt} \Rightarrow a_{PA} = a_{PB}$

اگرچه برقرار باشد خود دستگاه مختصات هم شتابی مساوی و اندازه گیری می کند.

و: پرنده ای با سرعت ۳ m/s به سمت چپ حرکت می کند و توپهایی هم با سرعت ۱۰ m/s به سمت چپ حرکت می کنند.

ناظر اتوبوسی پرنده را چقدر اندازه گیری می کند؟



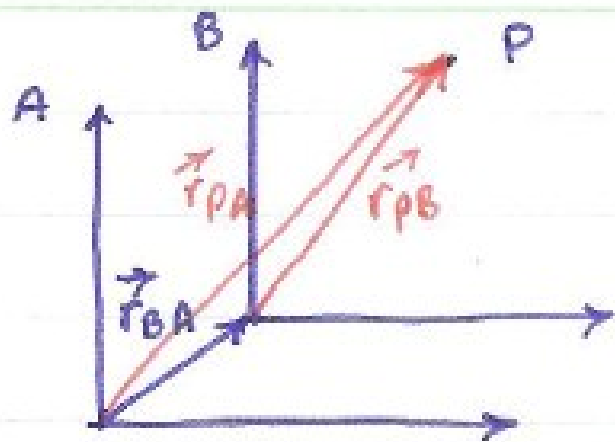
$$v_{PA} = v_{BA} + v_{PB}$$

$$(-3) = 10 + v_{PB} \Rightarrow v_{PB} = -13 \text{ m/s}$$

نکته: برای حل شتاب در یک دستگاه مختصات باید از همان سرعتهایی که ناظر مشاهده مستقیم در آن دستگاه ملاحظه می کند استفاده کنیم.

و: اگر پرنده به سمت چپ در ۵ ثانیه شتاب آن در دستگاه چقدر است.

$$a_A = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-3)}{5} = 3/5 \text{ m/s}^2 \quad a_B = \frac{-10 - (-13)}{5} = 3/5 \text{ m/s}^2$$



حرکت نسبی دو جرمی:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

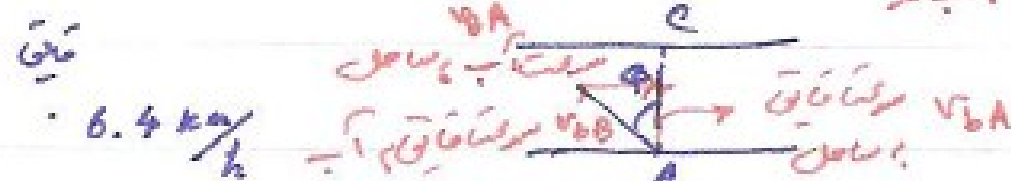
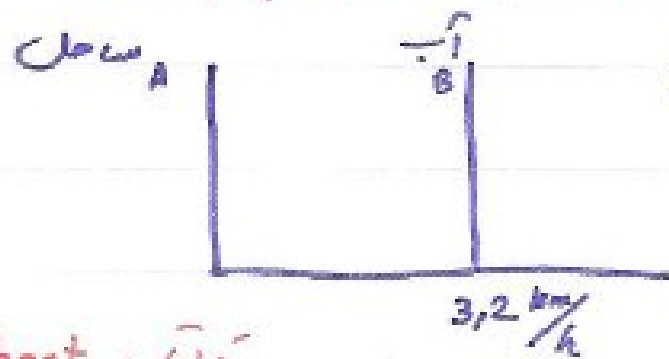
$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt}$$

سرعت دستگاه B نسبت به A ثابت است.  $\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

eg: شخصی می‌تواند با پارو درون قایق با سرعت  $6.4 \text{ km/h}$  برآید.

1. اگر رودخانه از رودخانه ای که در اینجا آن  $3.2 \text{ km/h}$  است عبور کند و به نقطه مقابل برسد قایق را به چه جهت براند؟



قایق به boot

$$\sin \phi = \frac{v_{BA}}{v_{BB}} = \frac{3.2}{6.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \pi/6 = 30^\circ$$

2. اگر شخصی رودخانه  $6.4 \text{ km}$  باشد چقدر طول می‌کشد قایق از آن عبور کند.

$$t = \frac{D}{v_{BA}} = \frac{D}{v_{BB} \cos \phi} = \frac{6.4}{6.4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.15 \text{ h}$$

3. چقدر طول می‌کشد تا شخص  $3.2 \text{ km}$  در جهت آب پارو بزنند و برگردند.

$$\text{در رفت: } v_{BA} = 3.2 + 6.4 = 9.6$$

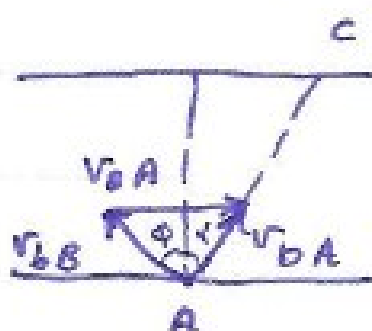
$$t_{\text{رفت}} = \frac{\Delta r_{\text{رفت}}}{v_{\text{رفت}}} = \frac{3.2}{9.6} = 0.33 \text{ h}$$

$$\text{در برگشت: } v_{BA} = 3.2 - 6.4 = -3.2$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{\Delta r_{\text{برگشت}}}{v_{\text{برگشت}}} = \frac{-3.2}{-3.2} = 1 \text{ h}$$

$$t_{\text{tot}} = 1 + 0.33 = 1.33$$

4. در کمترین زمان ممکن از رودخانه عبور کند باید قایق را به چه جهت براند؟



$$t = \frac{AC}{v_{BA}}$$

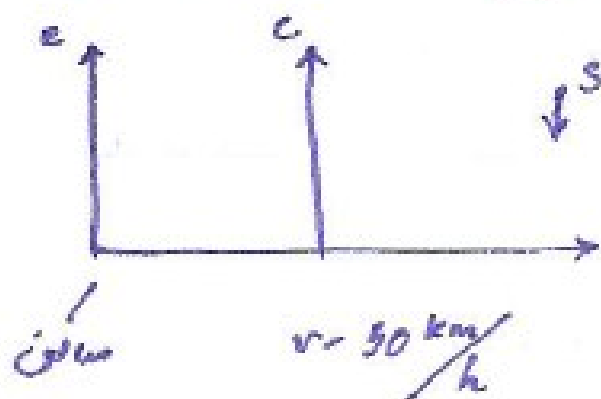
$$\begin{cases} AC \cos \alpha = D \\ v_{BA} \cos \alpha = v_{BB} \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{v_{BA}} = \frac{D}{v_{BB} \cos \phi}$$

$$t = \frac{D}{v_{BB} \cos \phi} \Rightarrow \cos \phi = 1 \Rightarrow \phi = 0^\circ$$

$$t_{min} = \frac{D}{v_{obs} \cos(\theta)} = \frac{6.4}{6.4} = 1 \text{ h}$$

7/18

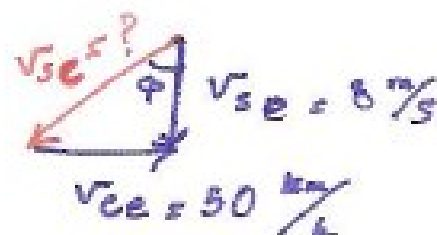
eg: برف در راستای قائم و با سرعت  $8 \text{ m/s}$  می باشد. تصور را قوی که در جاده ی مستقیم با سرعت  $50 \text{ km/h}$  حرکت می کند در آن برف:  
1. تحت چه زاویه ای نسبت به افق قائم  
2. با چه سرعتی سقوط می کند.



$$\vec{v}_{se} = \vec{v}_{ce} + \vec{v}_{sc}$$

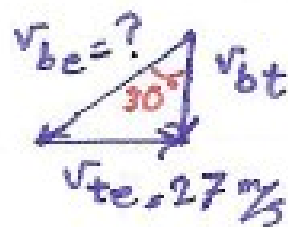
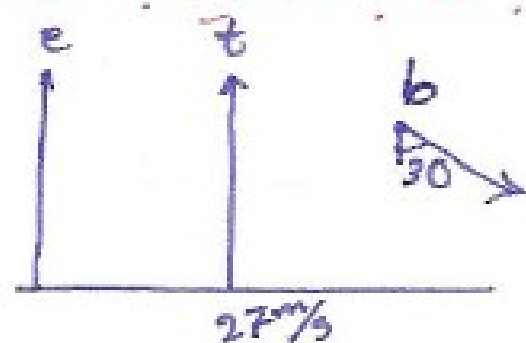
$$v_{ce} = 50 \text{ km/h} \times \frac{1}{3.6} = 13.89 \text{ m/s}$$

$$\tan \phi = \frac{v_{ce}}{v_{se}} = \frac{13.89}{8} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$



$$v_{sc}^2 = v_{se}^2 + v_{ce}^2 \Rightarrow v_{sc} = \sqrt{8^2 + (13.89)^2} \Rightarrow v_{sc} = 16 \text{ m/s}$$

eg: تقاری با سرعت  $27 \text{ m/s}$  در زیر بارانی که برین زمین باد می خیزد جنوب است حرکت می کند. از دید ناظر زمین باران با زاویه  $30^\circ$  نسبت به قائم می بارد و در قطار آن در قطره های باران را بر تیر قائم می بیند. سرعت قطره ها در آن نسبت به زمین چقدر است؟



$$\vec{v}_{be} = \vec{v}_{te} + \vec{v}_{bt}$$

$$\Rightarrow \sin 30 = \frac{v_{te}}{v_{be}} \Rightarrow v_{be} = 54$$

مصل 5: دنیا یک ذره!  
توانش نیوتون:

1. جسم که در جهان سکون یا حرکت است تا قبل دارد حالت خود را حفظ کند مگر آنکه در اثر نیرو و یا جاذبه مجبور به تغییر حالت آن شود. (اصطلاح)

2. نیروی برآکنده وارد بر یک جسم برابر است با حاصل ضرب حجم جسم در شتاب آن.
3. برای هر فن یک واکنش وجود دارد مساوی و در خلاف جهت آن.

\* برآحل مسائل: اگر جسم سکون بود بر این نیروها وارد بر آن را برابر صفر می نویسم و اگر جسم متحرک بود برابر با  $ma$  می نویسم.  
انواع نیروها: 1. کش طناب: اگر طناب بدن جسم باشد کش در دست آن برابر است.  $T_1 = T_2$

2. کش فنر:  $F = kx$  (کش فنر)  
3. نیروی وزن:  $F = W = mg$

4. نیروی کشش اهل سطح:  $N$  نیروی وارد از طرف سطح بر جسم.

5. نیروی اصطکاک: 1. نیروی اصطکاک ایستایی:  $\mu_s$  ضریب اصطکاک ایستایی

2. نیروی اصطکاک جنبی:  $\mu_k$  ضریب اصطکاک جنبی

3. نیروی اصطکاک جنبی:  $\mu_k$  ضریب اصطکاک جنبی



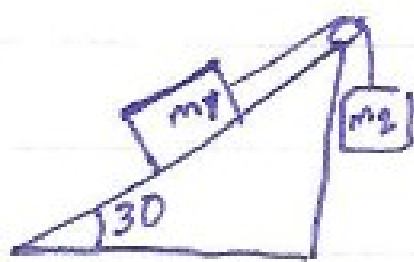
و ۵: دو جسم روی میز بدون اصطکاک قرار دارند و با هم تماس دارند.  $m_1 = 2 \text{ kg}$  و  $m_2 = 1 \text{ kg}$  نیروی  $F = 3 \text{ N}$  به جسم چپ وارد می شود. نیروی تماس بین این دو را بیابید.



$$F = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

$$F_{12} = m_2 a \Rightarrow F_{12} = 1 \times 1 = 1 \text{ N}$$

و ۶: جسمی به جرم  $m_1 = 3 \text{ kg}$  روی سطح شیبدار صاف با زاویه  $30^\circ$  قرار دارد. با جسمی به جرم  $m_2 = 2 \text{ kg}$  مطابق شکل متصل است.



$$m_1: m_1 g \sin 30 = 15 \text{ N}$$

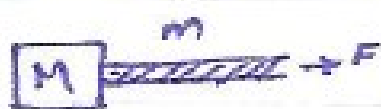
$$m_2: m_2 g = 20 \text{ N} \Rightarrow \text{حرکت را به سمت بالا می کشد}$$

$$m_2 g - m_1 g \sin 30 = (m_1 + m_2) a$$

$$20 - 15 = 5a \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow m_2 g - T = m_2 a \Rightarrow 20 - T = 2 \times 1 \Rightarrow T = 18 \text{ N}$$

و ۷: جسمی به جرم  $M$  توسط طنابی به جرم  $m$  با نیروی  $F$  کشیده می شود:



$$a = \frac{F}{M+m}, \quad T = Ma : M$$

$$F - T = ma : m$$

$$T = M \cdot a = M \left( \frac{F}{M+m} \right) \quad T' = \left( \frac{m}{2} \right) a = (m+M) a - \frac{m}{2} a = \left( M + \frac{m}{2} \right) a$$

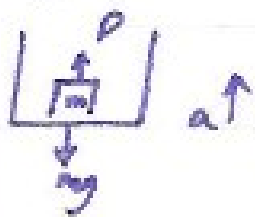
وزن واقعی: تفاوت جسم در مقابل حرکت یا  $w = mg$

وزن ظاهری: نیرویی که از طرف سطح در مقابل قائم بر جسمی که روی آن قرار دارد وارد می شود. (P)

۱. جسم هیچ شتابی در راستای عمود ندارد. مثلاً جسم در آب فرو می افتد و با سرعت ثابت حرکت می کند.



$$\Sigma F_{\text{net}} \Rightarrow P - W = 0 \Rightarrow P = W$$



۲. در این حالت جسم دارای شتاب در راستای عمود است.

$$P - mg = ma \Rightarrow P = m(g+a)$$

نکته: در مورد شتاب به این صورت:

۱. با شتاب تند شونده بالا می رود:  $a$  مثبت
۲. با شتاب کند شونده بالا می رود:  $a$  منفی
۳. با شتاب کند شونده پایین می رود:  $a$  منفی
۴. با شتاب تند شونده پایین می رود:  $a$  مثبت



وقتی جسم به جرم 5 kg در آسانبندی قرار دارد وزن ظاهری آن:

$$p = m(g+a) = 5(9.8+2) = 59$$

$$p = m(g-a) = 5(9.8-2) = 39$$

$$p = m(g-a) = 5(9.8-2) = 39$$

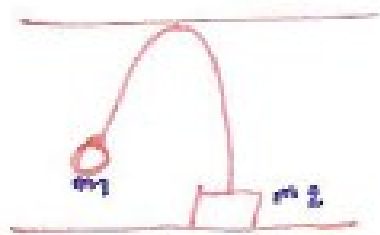
$$p = m(g+a) = 5(9.8+2) = 59$$

1. با شتاب  $2 \text{ m/s}^2$  به بالا می‌رود.

2. با شتاب  $2 \text{ m/s}^2$  به پایین می‌رود.

3. - - - - -  $2 \text{ m/s}^2$  به پایین می‌رود.

4. - - - - -  $2 \text{ m/s}^2$  به بالا می‌رود.



وقتی حیوان به جرم 10 kg از طناب بدون جرمی که به صندوقی به جرم 15 kg وصل است بالا می‌رود.

1. کمترین شتاب حیوان برای آنکه صندوق بالا می‌رود. ( $N=0$ )

2. وقتی صندوق بالا رفت از حرکت می‌ایستد در این حالت کش طناب چقدر است؟

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$T = m_2 g = 15 \times 9.8 = 147 \text{ N} \quad \text{و} \quad 147 - 10 \times 9.8 = 10a \Rightarrow a = 4.9$$

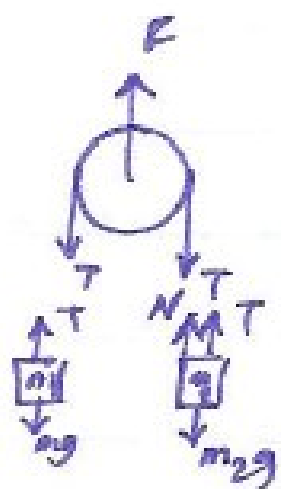
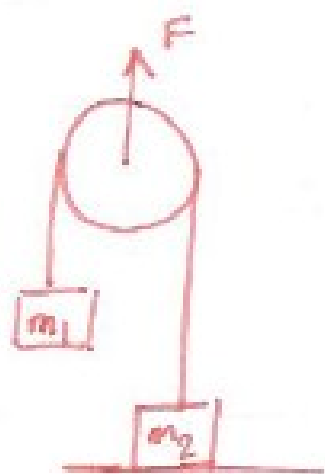
$$(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a' \Rightarrow -5 \times 9.8 = 25a' \Rightarrow a' = -1.96$$

$$T' - m_2 g = m_2 a' \Rightarrow T' - 15 \times 9.8 = 1.96 \times 15 \Rightarrow T' = 120 \text{ N}$$

وقتی دو جسم  $m_1$  و  $m_2$  از قله قله‌ای آویزانند جسم  $m_2$  متصل به زمین است و قله قله را با شتاب  $F$  بالا می‌کشیم.

1. بیشترین مقدار  $F$  چقدر باشد تا  $m_2$  روی زمین ساکن بماند.

2. شتاب جسم دیگر.



$$F = 2T$$

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$m_2 g - T - N = m_2 a \Rightarrow T = m_2 g$$

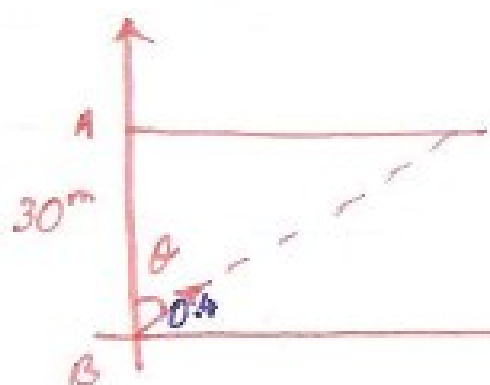
$$F = 2m_2 g \quad \text{و} \quad T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow m_2 g - m_1 g = m_1 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1}$$

وقتی در قطار با سرعت  $30 \text{ km/h}$  به سوی هم حرکت کنند و در نقطه‌ای که  $60 \text{ km}$  به هم فاصله دارند پرنده‌ای از یکی از قطارها به دیگری می‌پزد. این پرنده که پرنده مسیری می‌گذرد و مسافت طی شده توسط آن باید بداند.

$$v = 60 \text{ km/h} \quad \text{و} \quad a = 60 \text{ km} \Rightarrow x = vt \Rightarrow t = 1 \text{ h}$$

وقتی دو ذره A با سرعت  $3 \text{ m/s}$  روی خط  $30 \text{ m}$  در حرکت است و ذره B با سرعت صفر و شتاب  $0.4 \text{ m/s}^2$  در حرکت است. پرنده به شود (سوت می‌زند) چقدر باشد تا پرنده برخورد کند.



$$x_A = x_B \quad \text{و} \quad y_A = y_B$$

$$a = 0.4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = 0.4 \cos \theta \hat{j} + 0.4 \sin \theta \hat{i}$$

$$x_A = 30t$$

(1)

$$y_A = 30 \quad (2)$$

$$x_B = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} (0.4 \sin \theta) t^2$$

$$y_B = \frac{1}{2} a y_B t^2 = \frac{1}{2} (0.4 \cos \theta) t^2$$

$$2t = 0.2 \sin \theta t^2 \Rightarrow t = \frac{15}{\sin \theta} \text{ (I)} \Rightarrow \text{(II)} 30 = \frac{1}{2} (0.4 \cos \theta) t^2$$

$$30 = 0.2 \cos \theta \left( \frac{15}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= 0.2 \frac{15^2}{1 - \cos^2 \theta} = 30$$

$$\Rightarrow 30 - 30 \cos^2 \theta = 45 \cos \theta \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta = 0 \Rightarrow 2u^2 + 3u - 2 = 0 \quad \Delta = ?$$

$$\Rightarrow u = \pm \left[ \dots \right] \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

هم: شخصی به جرم 85 kg رسید و مشاهده کرد که اصطکاک عبور کرده و به یک کسر شدن به جرم 55 kg متصل است و از ارتفاع 10 m به پایین می آید اگر فرض کنیم از محل سکون شروع به حرکت کرده باشد سرعت آن در لحظه برخورد به زمین؟



$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad v^2 - v_0^2 = 2 a \Delta y$$

$$\Rightarrow v = 5.16 \text{ m/s}$$

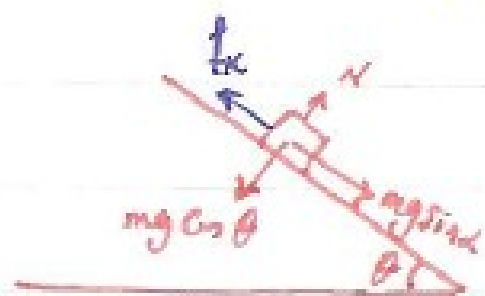
## فصل ششم: دینامیک ذره 2:

$$f_s = \mu_s \cdot N$$

$$f_k = \mu_k \cdot N$$

1. اصطکاک ایستایی: نیروی اصطکاک بین دو جسم ساکن

2. اصطکاک جنبشی: نیروی اصطکاک بین دو جسم متحرک

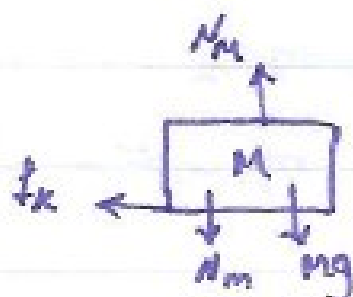
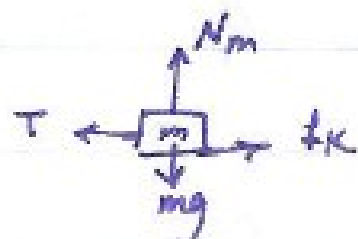
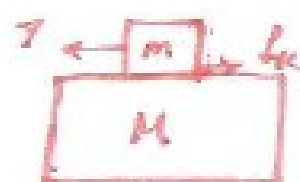


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad \text{برو اصطکاک}$$

$$\Sigma F_x = m a \Rightarrow mg \sin \theta = m a \Rightarrow a = g \sin \theta$$

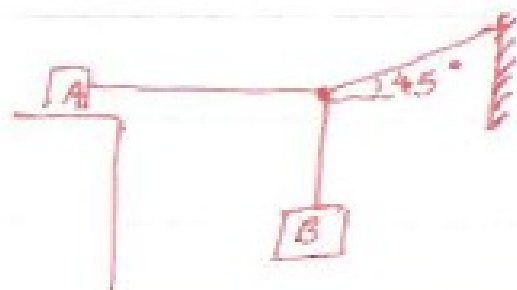
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad \text{با اصطکاک}$$

$$\Sigma F_x = mg \sin \theta - \mu_k \cdot mg \cos \theta = m a \Rightarrow a = g \sin \theta - \mu \cos \theta$$



تعلیق: نیروها برای دو جسم در هم قفسه شده اند:

هم: جسم A به جرم 5 kg روی تیر به پایین اصطکاک کم 0.5 قرار دارد به تیر به جرم 5 kg برای آنکه دستگاه در حالت تعادل باشد چه راست!



$$T \cos 45 = \mu m g$$

$$T \sin 45 = m g \Rightarrow \mu m g = m g$$

$$\Rightarrow m_B = 5 \times 0.5 = 2.5 \text{ kg}$$

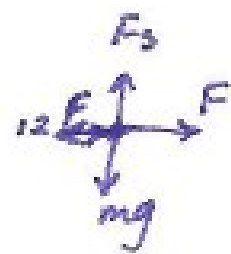
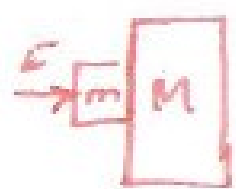
و اگر از بالای ساختمان به ارتفاع  $60\text{ m}$  از حال سکون رها شود سنگ 1.25 پس از رسیدن به زمین چه ارتفاعی دارد؟

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow -60 = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t_c = 2\sqrt{3} - 1.2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times (2\sqrt{3} - 1.2)^2 = 25.11\text{ m}$$

$$\Rightarrow y_c = 60 - 25.11 = 34.89$$

و اگر دو جسم به جرم  $5\text{ kg}$  و  $10\text{ kg}$  مطابق شکل دارای ضریب اصطکاک  $\mu_s = 0.5$  می باشند محاسبه کنید نیروی  $F$  جهت راست را به جسم کوچکتر بدهند؟



$$F = (m+M)a \quad F = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{m+M}, \quad f_s = \mu_s mg, \quad N = \mu_s \cdot F_{12} = mg$$

$$\mu_s \cdot M = mg$$

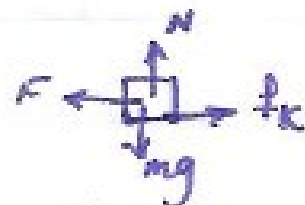
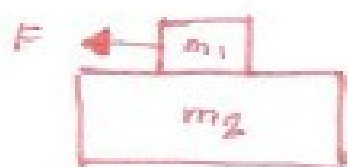
$$M: F_{12} = Ma = M \left( \frac{F}{m+M} \right)$$

$$\mu_s (F_{12} - F) = mg \Rightarrow \mu_s (ma) = mg$$

$$\Rightarrow \mu_s \cdot M \left( \frac{F}{m+M} \right) = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu_s M} (m+M)$$

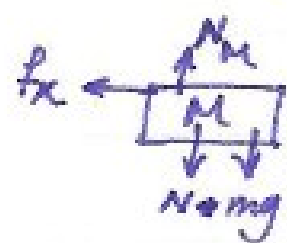
$$\mu_s \left( \frac{F}{m+M} \right) = g \Rightarrow F = \frac{(m+M)g}{\mu_s} \Rightarrow F = \frac{5 \times 9.8}{0.5 \times 10} \times (15) = 147\text{ N}$$

و اگر جسم  $m_1 = 10\text{ kg}$  روی جسم  $m_2 = 20\text{ kg}$  قرار دارد و  $\mu_k = 0.5$  جسم  $m_1$  با نیروی  $100\text{ N}$  کشیده می شود. شتاب جسم  $m_1$  و  $m_2$ ؟



$$F - f_k = ma_1 \Rightarrow 100 - 0.5 \times 100 = 10a$$

$$\Rightarrow a_1 = 5\text{ m/s}^2$$



$$\Rightarrow f_k = 50 = 20a_2 \Rightarrow a_2 = 2.5\text{ m/s}^2$$

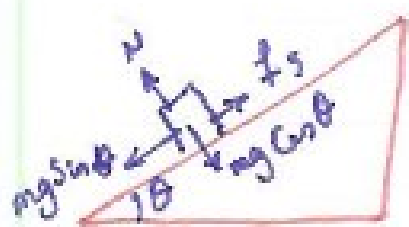


$$\mu_k = 0.5 \quad F - f_k = (m_1 + m_2)a_1 \Rightarrow 100 = 30a \Rightarrow a = 10/3$$

$$f_k = 50\text{ N}$$

$$\mu_s = 0.7 \quad ma = F = 10 \times \frac{10}{3} = \frac{100}{3}, \quad f_{s, \max} = 70\text{ N}$$

$$\mu_s = 0.7$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg \sin \theta - f_s = \mu_s \cdot N \Rightarrow \mu_s = \tan \theta$$

جسم  $m$  در سطح شیبدار  
برای جسم  $m$  با ضریب اصطکاک ثابت حرکت کند.

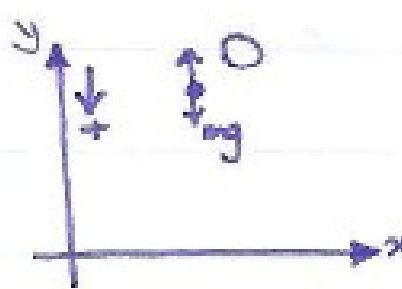


نیروی پس کشی و نیروی جدی:  
نیروی مقاوم در برابر حرکت جسم درشت را می گویند.  $\vec{D}$

1. ضریب کشش  $C$  ، 2. چگالی شاره  $\rho$  ، 3. سطح مقطع مؤثر جسم  $A$  ، 4. سرعت جسم  $v$   
 $D = \frac{1}{2} \rho A C v^2$

سرعت جدی یا  $v_t$ : اگر جسم از ارتفاع زیاد سقوط داشته باشد در جایی سرعت جسم ثابت می شود این سرعت را سرعت جدی می گویند.

$\vec{D} - mg = ma$



$v = v_t \Rightarrow a = 0$   
 $D = mg$

$\frac{1}{2} \rho A C v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C}}$

eg: سرعت جدی یک تیر در دوره در دو حالت  $160 \frac{km}{h}$  و  $310 \frac{km}{h}$  است. در این حالت ها را با تغییر در مساحت خود ایجاد کرده است با فرض ثبات بودن  $C$  مطلوب  $\frac{A_{تیر 2}}{A_{تیر 1}} = ?$

$\left(\frac{31}{16}\right)^2 = \frac{A_{تیر 2}}{A_{تیر 1}} = \left(\frac{v_{t1}}{v_{t2}}\right)^2$

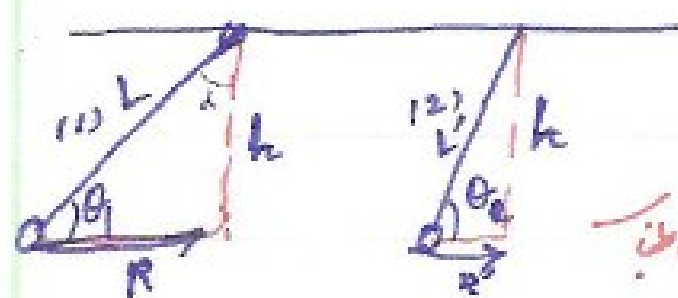
دینامیک حرکت دورانی:  
سرعت ثابت بر روی دایره با سرعت  $\frac{v^2}{r}$  به سمت مرکز است.

eg: جسم  $m$  روی میز بدون اصطکاک قرار دارد و توسط ریسمان به جسم  $M$  متصل است. مقدار  $r$  و  $v$  را بیابید.



$T = Mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{Mg}{m}$

eg: دو گویک مخروطی با طول ها مختلف از سقف آویزان شده اند و بطوری دوران می کنند که گویک ها از سقف عمود بر یکدیگر باشند. دور و سرعت هر یک را بیابید.



$R = L \cos \theta$   
 $R' = L' \cos \theta'$

(1)  
 $T \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$   
 $T \sin \theta = mg$

$\Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow v = \sqrt{Rg \cdot \tan \theta}$

$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \cdot \tan \theta}} = \frac{2\pi L \cos \theta}{\sqrt{L \cos \theta \cdot g \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}}} = \frac{2\pi L}{\sqrt{\frac{Lg}{\sin \theta}}}$

$2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$

برای هر دو گویک  $T$  است و برابرند.



و: یک قطب کوچک به جرم  $m$  داخل غده‌ای که با جدار (V) می‌چرخد قرار گرفته است. بیشترین مقدار زاویه  $\theta$  چقدر باشد؟  
 قطب نسبت به تعاد حرکت نکند. ضریب اصطکاک  $\mu$ .



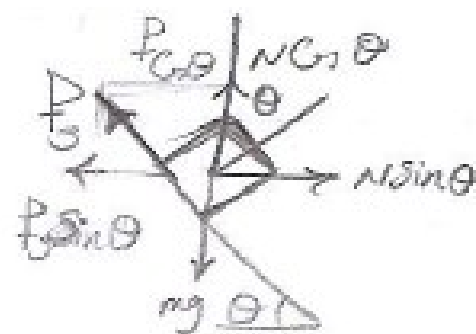
بیشترین:

$$mg \sin \theta = F \cos \theta + \mu (F \sin \theta + mg \cos \theta)$$

$$mg \sin \theta = mr\omega^2 \cos \theta + \mu (mr\omega^2 \sin \theta + mg \cos \theta)$$

$$g \sin \theta = r\omega^2 (\cos \theta + \mu \sin \theta) + \mu g \cos \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{4\pi^2 r (\cos \theta + \mu \sin \theta)}}$$



در داخل درشت:  $N \sin \theta - \mu_3 N \cos \theta = mr\omega^2$  I

بیشترین:  $N \cos \theta + \mu_3 N \sin \theta = mg \Rightarrow N (\cos \theta + \mu_3 \sin \theta) = mg$  II

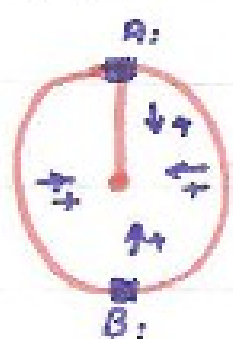
$$\frac{I}{II} \Rightarrow N (\sin \theta - \mu_3 \cos \theta) = mr\omega^2 \Rightarrow \frac{(\sin \theta - \mu_3 \cos \theta)g}{r (\cos \theta + \mu_3 \sin \theta)} = \omega^2$$

$$\Rightarrow \theta_{min} = \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu_3 \cos \theta)}{4\pi^2 r (\cos \theta + \mu_3 \sin \theta)}}$$

در بیشترین مقدار  $\theta$  باید  $\mu$  را صفر بگیریم یعنی حالتی که جسم می‌خواهد از سطح خارج شود.

8/9

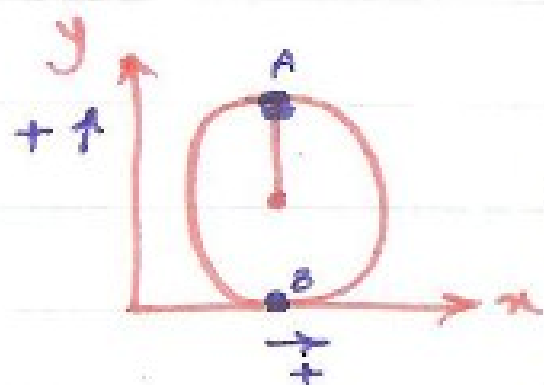
## تعیین جهت در حرکت حلقه برای:



$$A: mg + T = \frac{mv^2}{R}$$

$$B: T - mg = \frac{mv^2}{R}$$

روش اول: جهت مثبت در جهت نیروی مرکز گراونداری در هم  
 مبنی صورت که نیروهای که در جهت مرکز هستند با علامت  
 مثبت و نیروهای که خلاف جهت نیروی مرکز هستند با  
 علامت منفی قرار می دهیم.



$$A: -mg - T = -\frac{mv^2}{R}$$

$$B: T - mg = \frac{mv^2}{R}$$

روش دوم: جهت مثبت را هم جهت با جهت دایره انتخاب می کنیم  
 مبنی صورت که نیروهای که در جهت دایره بودند با علامت  
 مثبت و نیروهای که در خلاف جهت دایره بودند با علامت منفی قرار می دهیم.

eg: وزن ظاهری شخصی به جرم  $50 \text{ kg}$  در بالا ترین نقطه چرخ و فلک  $400 \text{ N}$  است وزن ظاهری او در پایین ترین نقطه چرخ و فلک.

$$mg - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow 50 \times 9.8 - 400 = \frac{mv^2}{R}$$

$$N' - mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N' - 9.8 \times 50 = 90 \Rightarrow N' = 580 \text{ N}$$

eg: وزن ظاهری شخصی به جرم  $67 \text{ kg}$  در بالا ترین نقطه چرخ و فلک  $550 \text{ N}$  است. وزن ظاهری او در پایین ترین نقطه چرخ و فلک برابر شود وزن ظاهری او در بالا ترین نقطه چرخ و فلک شود.

$$mg - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow 67 \times 9.8 - 550 = \frac{mv^2}{R} = 106.6$$

$$\Rightarrow v' = 2v \Rightarrow \frac{mv'^2}{R} = 426.4 = mg - N$$

$$\Rightarrow 67 \times 9.8 - N = 426.4 \Rightarrow N = 230.2 \text{ N}$$

eg: جسمی به فیزی با ثابت  $k$  متصل است طول فنر در حالت عادی  $L_0$  و اگر جسم با سرعت  $v$  بچرخد  $R$  و  $F$  تعیین کنید.



$$F = k\Delta L = k(R - L_0) = \frac{mv^2}{R}$$

$$k(R - L_0) = mR\omega^2 \Rightarrow k(R - L_0) = mR(4\pi^2 \nu)^2$$

$$\Rightarrow k(R - L_0) = mR(4\pi^2 \nu)^2$$

$$\Rightarrow R(k - m4\pi^2 \nu^2) = kL_0$$

$$\Rightarrow R = \frac{kL_0}{k - m4\pi^2 \nu^2}$$

$$F = k\Delta L = k(R - L_0) = k\left(\frac{kL_0}{k - m4\pi^2 \nu^2} - L_0\right) = \left(\frac{L_0 4m\pi^2 \nu^2}{k - m4\pi^2 \nu^2}\right) k$$

و: زاویه عرضی یک پیچ در یک جاده برای سرعت  $64 \text{ km/h}$  و شعاع  $120 \text{ m}$  چقدر است!  
 اگر قیاس عرضی نداشته باشد مقدار نیروی اصطکاک لازم چقدر است؟



$$N \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \quad N \cos \theta = mg \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{Rg} = 0.268 \Rightarrow \theta = 15^\circ$$



$$f_s = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \mu_s \cdot N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \mu_s = \frac{v^2}{Rg} = 0.268$$

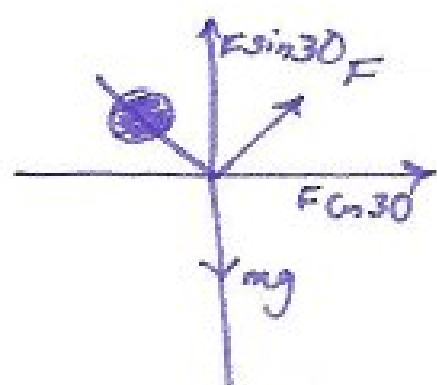
و: جسمی که سطح شیبدار  $30^\circ$  با افق زاویه  $20^\circ$  سازد با سرعت ثابت در حال لغزیدن است. اگر زاویه سطح شیبدار  $30^\circ$  شود شتاب جسم چقدر است.

$$I \quad mg \sin \theta = \mu_k mg \cos \theta$$

$$\theta = 20^\circ \Rightarrow \mu_k = \tan 20^\circ$$

$$II \quad mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma \Rightarrow g(\sin \theta - \tan 20^\circ \cos \theta) = a \Rightarrow a = 9.8(\sin 30^\circ - \tan 20^\circ \cos 30^\circ)$$

و: خودرویی با سرعت  $360 \text{ km/h}$  روی دایره‌ای لغزشی پرواز می‌کند. اگر زاویه بین جاذبه و پیمانی با افق  $30^\circ$  باشد شتاب شعاع دایره پرواز چقدر است؟ (فرض می‌کنیم باد بر این خودرو تأثیر نمی‌گذارد)

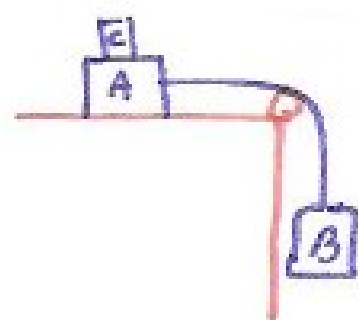


$$F \sin 30 = mg \Rightarrow F = 2mg$$

$$F \cos 30 = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \sqrt{3}mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{\sqrt{3}g}$$

و: جسمی به وزن  $W_A = 44 \text{ N}$  و  $W_B = 22 \text{ N}$  است که به وزن C چیده شده. جسم A به یک فنر  $k = 0.3$  متصل است.



با جسم C تا آنجا برداشته می‌شود که  $\mu_k = 0.2$  شتاب جسم A چقدر است.

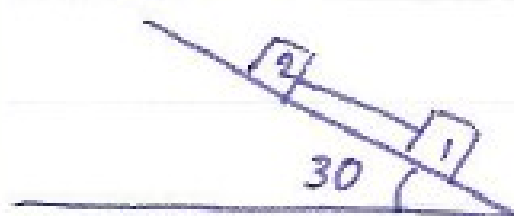
$$m_B g \leq \mu_k (m_A g + m_B g)$$

$$\Rightarrow m_B g = 29.3 \text{ N}$$

$$m_B g - \frac{F}{k} = (m_A + m_B) a \Rightarrow m_B g - \mu_k m_A g = (m_A + m_B) a$$

$$a = \frac{m_B g - \mu_k m_A g}{m_A + m_B} = \frac{22 - 0.2 \times 44}{22 + 44} = 1.98 \text{ m/s}^2$$

دو جسم  $m_1 = 3$  و  $m_2 = 7$  در سطح شیبدار  $30^\circ$  و لغزند  $\mu = 0.1$  و  $\mu = 0.2$  قرار دارند. شتاب دو جسم را در دو حالت زیر بیابید.



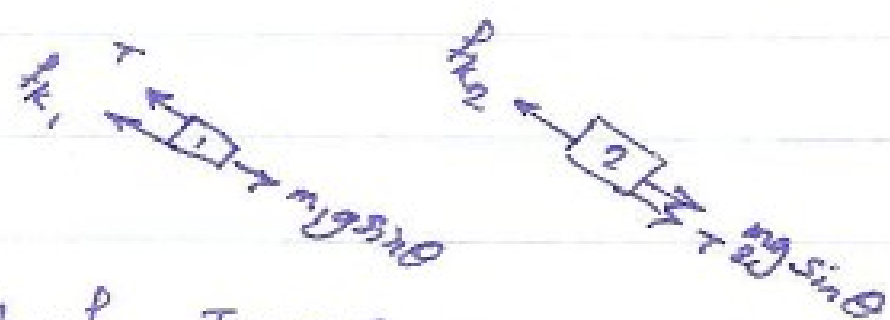
۱. جسم  $m_1$  پایین  $m_2$  را می‌کشد
۲. جسم  $m_2$  پایین  $m_1$  را می‌کشد
۳. کشش ریسمان در دو حالت بالا

$$a = g(\sin\theta - \mu \cos\theta)$$

$$(I) a_1 = 4.05 \quad a_2 = 3.4 (II)$$

الف) ابتدا شتاب حرکت جسم ها را پیدا کنیم. هنگامی که جسم اول جسم دوم را می‌کشد و جسم دوم بالاتر است. به سمت بالا شتاب

$m_2$  بزرگتر است جسم  $m_1$  و جسم  $m_2$  را به دنبال خود می‌کشد. در این حالت کشش  $T$  وجود دارد و دو جسم با یک شتاب حرکت می‌کنند.



$$* m_1 g \sin\theta - f_{k1} - T = m_1 a$$

$$T + m_2 g \sin\theta - f_{k2} = m_2 a \quad \Rightarrow (m_1 + m_2) g \sin\theta - f_{k1} - f_{k2} = (m_1 + m_2) a$$

$$9.8 \times \frac{1}{2} \times 10 - 0.1 \times 3 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.2 \times 7 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10a \Rightarrow a = 3.4 \text{ m/s}^2$$

$\Rightarrow$  با جایگذاری در  $T$  بدست می‌آید.

ب) در حالت دوم در جسم  $m_2$  پایین و  $m_1$  بالاتر است به سمت بالا شتاب  $m_2$  کمتر از شتاب  $m_1$  است جسم  $m_1$  سریعتر از جسم  $m_2$  حرکت می‌کند تا جاییکه اگر کامل سطح شیبدار به اندازه کافی بزرگ باشد دو جسم به هم می‌رسند و در این

حالت حرکت از دو جسم با شتاب مستقل از یکدیگر یعنی همان روابط (I) و (II) به پایین می‌لغزند. در این حالت کشش طناب صفر است.

**کار و فصل هفتم: انرژی جنبی و کار:**

انرژی جنبی به خط به حرکت جسم است:  $K = \frac{1}{2} m v^2$

کار (W): انرژی است که باید وارد کردن نمود به یک جسم به آن داده می‌شود یا از آن می‌شود. کار مربوط به انرژی دانه

$$W = F \cdot d$$

شماره مثبت و کار مربوط به انرژی گرفته شده و منفی است.



رابطه کار و انرژی جنبشی: اگر ذره ای تحت تأثیر نیروی  $F$  متحرک شود و به اندازه  $d$  جابجا شود کار انجام شده روی جسم:

$$W = \Delta K = F \cdot d \cos \theta \quad \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = F \cdot d \cos \theta$$

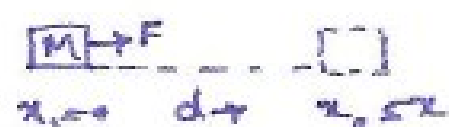
$\theta$ : زاویه بین نیرو و جابجایی

برای استفاده از رابطه بالا نکاتی را در نظر بگیرید:

نکته 1: نیروی  $F$  ثابت است یعنی با گذشت زمان یا فاصله تغییر نمی کند.

نکته 2: جسم مورد نظر یک جسم صلب است یعنی در حین حرکت تمام اجزای آن حرکت می کنند.

سه زاویه  $\theta$  رابطه بین نیرو و جابجایی به حالت های مختلف نمایش داده می شود:



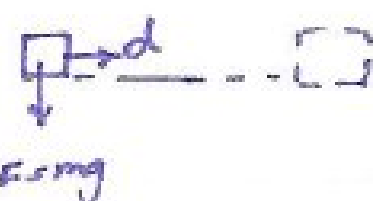
$$W = F \cdot d$$

1. نیرو و جابجایی در یک جهت باشند.



$$W = -F \cdot d$$

2. نیرو و جابجایی در جهت مخالفند.



$$W = F \cdot d \cos 90^\circ = 0$$

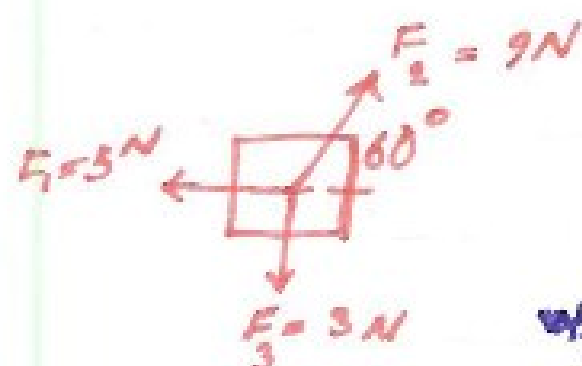
3. نیرو و جابجایی عمود بر هم باشند.

برای محاسبه کار از بین بردن روش استفاده می کنیم:

1. کار تک تک نیروها بدست می آوریم و در نهایت تک کارها را جمع شده با هم جمع می کنیم.

2. ابتدا نیروها را برآیند چند نیرو بدست می آوریم سپس کار نیروی برآیند را حساب می کنیم.

9: سه نیرو مطابق شکل به جسم وارد می شود و آنرا به اندازه  $3\text{ m}$  به طرف چپ جابجا کند!



1. کار خاص انجام شده توسط نیرو چقدر است!

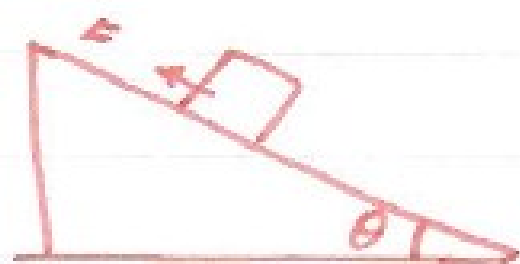
2. تغییرات انرژی جنبشی!

$$F_T = F_1 - F_2 \cos \theta = 3 - \frac{9}{2} = 0.5\text{ N}$$

$$W = F_T \cdot d = 0.5 \times 3 = 1.5\text{ J}$$

$$\Delta K = W = 1.5\text{ J}$$

49: جسی بدن 450<sup>N</sup> از سطح شیب‌داری به طول 1.5<sup>m</sup> و ارتفاع 0.9<sup>m</sup> به پایین می‌آید نیروی اصطکاک می‌شود تا جسی با سرعت ثابت به پایین آید اگر  $\mu_k = 0.1$  :



$$\sin \theta = \frac{\text{ارتفاع}}{\text{طول}} = \frac{0.9}{1.5} = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow \theta = 36.87^\circ$$

1. نیروی چهار است؟
2. کار نیروی چهار است؟
3. کار نیروی کششی چهار است؟
4. کار سطح شیب‌دار چهار است؟
5. تغییر انرژی جسی؟

$$\sum F = 0 \quad F + f_k - mg \sin \theta \Rightarrow F + \mu_k mg \cos \theta = mg \sin \theta \quad (\text{الف})$$

$$\Rightarrow F + 0.1 \times 450 \times 0.8 = 450 \times 0.6$$

$$\Rightarrow F = 234 \text{ N}$$

$$\text{ب) } W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = -F \cdot d = -234 \times 1.5 = -351 \text{ J}$$

$$\text{ج) } W = \vec{F} \cdot \vec{d} \cos \theta = mg \cdot d \cos \theta = 405 \text{ J}$$

$$L = mg \cdot d \sin \theta = 450 \times 0.6 \times 1.5 = 405 \text{ J}$$

$$\text{د) } W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

6. برای اینکه از طرف سطح شیب‌دار (نیاز نیست فقط  $\mu_k$ )  $mg \sin \theta - F - f_k = 0 \Rightarrow mg \sin \theta = F + f_k$

$$W = -\mu_k \cdot mg \cos \theta \cdot d = -0.1 \times 450 \times 1.5 \times 0.8 = -54 \text{ J}$$

$$\text{ه) } \Delta K = W \Rightarrow W_T = -351 + 405 - 54 = 0$$

کارهای انجام شده توسط مسطح شیب‌دار گرانشی:



$$W = F \cdot d = mgh \cos 180^\circ = -mgh$$

1. جسی به اندازه h بالا می‌آورد:



$$W = F \cdot d = mgh \cos 0^\circ = mgh$$

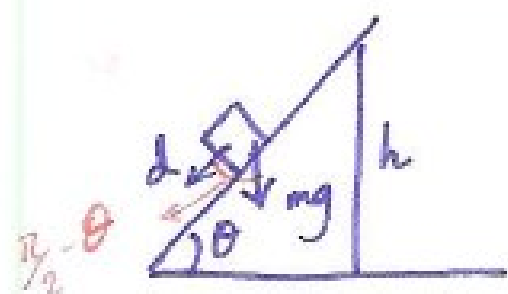
2. جسی به اندازه h پایین می‌آید:



$$W = F \cdot d = mg d \cos (90^\circ + \theta) = -mg d \sin \theta = -mgh$$

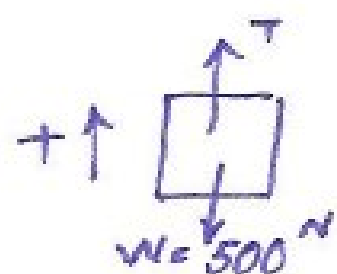
3. جسی به اندازه d روی سطح شیب‌دار بالا می‌آورد:

4. جسم، اندازه  $d$  از سطح شیبدار پهن می‌آید.



$$W_{mg} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = mgd \sin \theta = mgh$$

و: حلقه پستی جسم  $50 \text{ kg}$  را به وسیله یک طناب ارتفاع  $15 \text{ m}$  با شیب  $10\%$  بالا کشد. کار انجام شده توسط طناب و نیروی گرانشی روی جسم چقدر است.



$$T - mg = ma = m \frac{9}{10} \Rightarrow T = \frac{11}{10} \times 500 \times 9.8$$

$$\Rightarrow T =$$

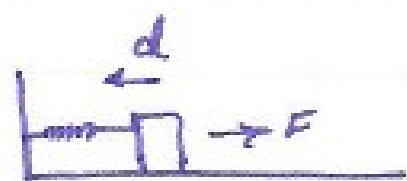
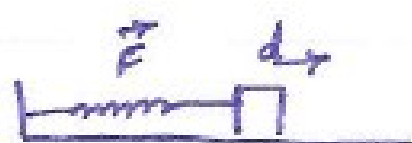
$$W_T = T d \cos 0 = \frac{11}{10} \times 50 \times 9.8 \times 15 \text{ m} = 8085$$

$$W_{mg} = -mgh = -50 \times 9.8 \times 15 = -7350$$

$$\Delta K = W_T = W_T + W_{mg} = 8085 - 7350 = 735$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = 735$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{735}{25} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{735}{25}} = 4.9 \text{ m/s}$$



$$F = -kx$$

قانون هوک

نیروی فنر: یک نیروی بازگرداننده است.

1. فنر با بریدن جرم با اثر.

2. فنر از قانون هوک پیروی کند.

کار فنر و متن:

چون فنر و شتاب فنر مقدار است می توان از رابطه مشتق  $W = F \cdot d$  استفاده کرد.



$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

$$\Delta W_T = \sum \Delta W_i = \sum F_i \Delta x_i$$

اگر  $\Delta x_i$  آن قدر کوچک بگیریم که  $F$  تقریباً در بازه ها مساوی فرض کنیم.

$$W = \sum F_i \Delta x_i \Rightarrow W \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F \Delta x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx, F = -kx \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

و: جرم  $m$  روی فنر با ثابت  $k$  افتاده و آن را به اندازه  $d$  حتماً می کشد. کار فنر روی جسم؟ کار خود گرانش؟  
 سرعت جسم در نقطه برخورد با فنر؟ اگر سرعت اولیه دو برابر شود میزان تراکم چه قدر است؟

س:  $v_0$ ؟

ج:  $m$   $v_0 = 0$

$$W_F = -\frac{1}{2} kx^2 = -\frac{1}{2} kd^2$$

$$W_g = mgh = mgd$$

$$W_T = mgd - \frac{1}{2} kd^2 = \Delta K = \frac{1}{2} m(v_0^2 - v_0^2)$$

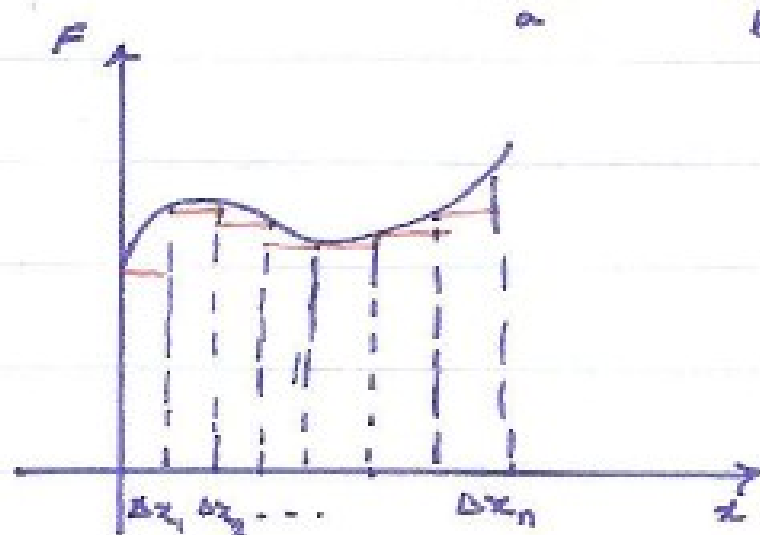
$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2mgd - kd^2}{m}}$$

$$v_0' = 2v_0 \Rightarrow k' = 4k$$

$$k' = W_T' = W_g' + W_F' = mgd' - \frac{1}{2} kd'^2 = 4k$$

$$\Rightarrow mgd' - \frac{1}{2} kd'^2 = -2mv_0^2 \Rightarrow d' = ?$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2} kd'^2}_a + \underbrace{mgd'}_b + \underbrace{2mv_0^2}_c = 0 \quad \text{حل معادله درجه 2}$$



$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

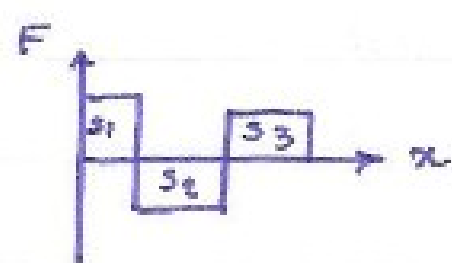
$$W_T = \sum \Delta W_i = \sum F_{i, \text{avg}} \Delta x_i$$

فرض می کنیم  $\Delta x$  ها به نسبت فنر می کشد می توان  $F$  و مساحتی فرد داریم.

$$W_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_i \Delta x_i \quad \left( \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Sigma \rightarrow \int \right)$$

$$\Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F \cdot dx$$

حالت  $F \Delta x$  همواره از مستطیل ها است و کار برابر است با مجموع  $F \Delta x$  ها پس کار برابر است با مساحت کل مستطیل ها یا کار برابر است با مساحت زیر نمودار  $(F)$

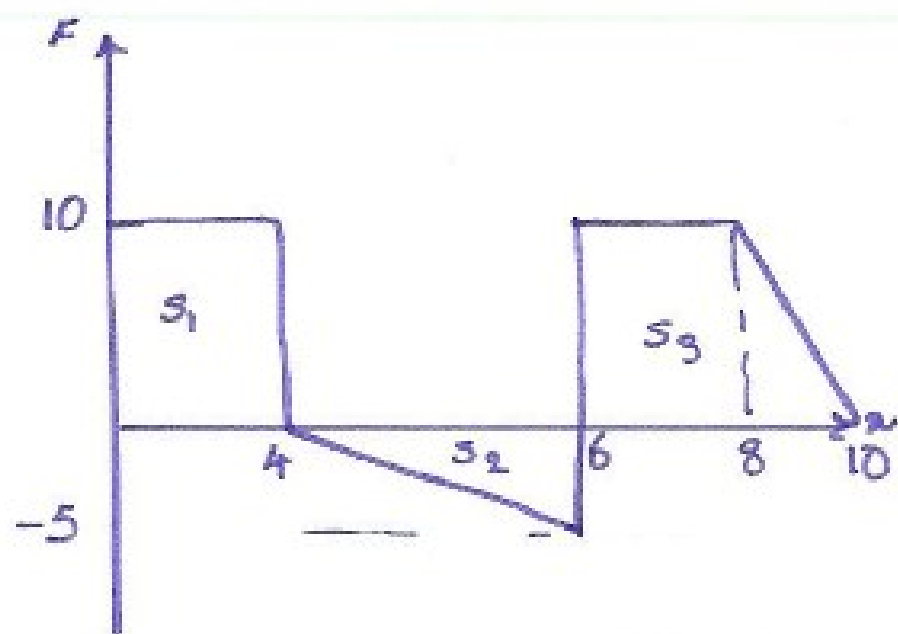


$$W = S_1 - S_2 + S_3$$

نکته: اگر جایی از نمودار علامت منفی دارد و نشانه مثبت است در آنجا کار را منفی درجیم.



و: در شکل مقابل کارایی کشنده را بدست آورید:



$$W_T = S_1 - S_2 + S_3 = (4 \times 10) - (2 \times \frac{5}{2}) + (\frac{(2+4)10}{2}) = 65 \text{ ج}$$

در مثال بالا اگر سرعت جسم که 2 kg وزن دارد در  $x=0$  برابر  $\frac{1}{3}$  باشد انرژی جنبه آن در  $x=6$  چقدر است.

$$W_{\text{at } x=6} = \Delta K \Rightarrow 35 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow 35 = \frac{1}{2} \times 2 (v^2 - 1) \Rightarrow v = 6 \text{ m/s} \text{ و } K = 36 \text{ ج}$$

توان:  $P = \frac{W}{t}$   
 آنقدر که توان در یک لحظه توسط نیرو را توان لحظه (P: W) میگویند.

$$P = \frac{W}{\Delta t} \text{ توان متوسط}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cos \theta \Rightarrow P = \frac{d}{dt} F r \cos \theta = F \cos \theta \frac{dr}{dt}$$

$$P = \frac{dW}{dt} \text{ توان لحظه‌ای}$$

$$\Rightarrow P = F \cdot v \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

فرد یا چه آنقدر که کارایی در هر لحظه توان

$$W = \int dw = \int P \cdot dt$$

اگر م بر حسب متوسط باشد می توان کار را حساب کرد.

روش حساب کار از طریق  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$W = \int F \cos \theta dr$$

1. حالتی که توان  $F$  و  $r$  بر حسب زاویه نیست.

2.  $F$  و  $dr$  به صورت مولفه ای در آورده شوند.

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

$$\Rightarrow W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

eg: جسم 2kg از حالت سکون حرکت می کند پس از 3 ثانیه با 10% می ریزد:

$$W = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \rightarrow W = \frac{1}{2} \times 2 (100 - 0) = 100 \text{ J}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{20}{3} \times 10 = 67 \text{ W}$$

$$F = ma \rightarrow F = 2 \times \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$$

$$P_{avg} = \frac{W}{t} = \frac{100}{3} = 33 \text{ W}$$

1. کار انرژی
2. توان فضا
3. توان متوسط

eg: جسمی تحت تأثیر نیرو  $F = i + j + k$  قرار دارد و سرعتش به  $v = -i$  می ریزد

$$\vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P_{inst} = -1 - 1 + 0 = -2 \text{ W}$$

آن منفی انجام کار می دهد

eg: انرژی جنبه دونه ای نصف انرژی پسر بچه ای است که چرخش نصف جسم دونه است دونه سرعتش 1/3 اندازه دونه ای دیگر در نتیجه انرژی جنبه دو برابر می شود

$$K_2 = \frac{1}{2} K_1 \quad (I) \quad K_2 \text{ دونه}$$

$$m_1 = \frac{1}{2} m_2 \quad K_1 \text{ پسر بچه}$$

1. سرعت اولیه دونه؟

2. سرعت اولیه بچه؟

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (II) \quad v_2 = v_1 + 1 \quad K_2 = 2K_1 \quad \Rightarrow (v_1 + 1)^2 = 2v_1^2$$

$$\underline{I}: \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \Rightarrow \frac{1}{2} (2m) V^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow V^2 = \frac{v^2}{4} \quad \underline{I} \quad V = \frac{v}{2} \quad (I)$$

$$\frac{1}{2} M (V+1)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} (2m) (V+1)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow (V+1)^2 = \frac{v^2}{2} \quad (II)$$

$$A = 0.5 \quad B = 0.5$$

$$2K_A = K_B, 2m_A = m_B \quad v_A = \frac{v_B}{2} \quad (I) \quad v_A' = v_A + 1 \quad (II)(I) \Rightarrow \frac{v^2}{4} + v + 1 = \frac{v^2}{2}$$

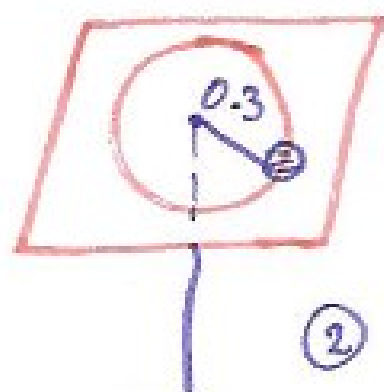
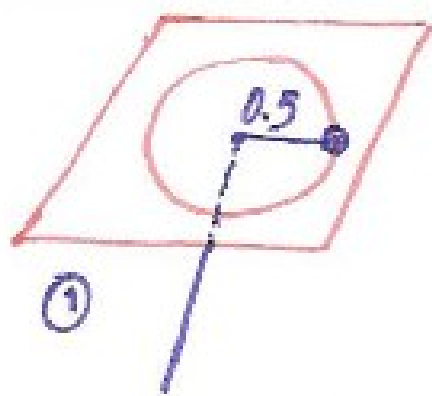
$$2\left(\frac{1}{2} m_A v_A^2\right) = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \quad \frac{1}{2} m_A (v_A + 1)^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$2\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_B v_A^2\right) = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \quad 2(v_A + 1)^2 = v_B^2 \Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B - 1 \Rightarrow v = 4.83 \Rightarrow V = 2.41$$

eg: جسم 0.675kg روی میز متصل به طناب حرکت دایره ای انجام می دهد شعاع 0.5m، سرعت جسم 10%

$$T = ?$$

12 اگر رمان به اندازه 0.2 پاپین کشید شود ش رمان 4.63 برابرش اولیه می شود کل کار انجام شده توسط رمان



$$T = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T = \frac{0.675 \times 100}{0.5} = 135 \text{ N}$$

$$W = F \cdot d \cos 90^\circ = T \cdot d = \frac{mv^2}{R} \cdot d$$

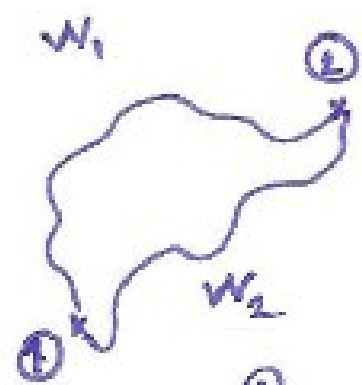
$$4.63 \times 135 \times 0.2 = 125.01 \text{ J}$$

مسئله هشتم  
انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی:

انرژی پتانسیل: انرژی میانی اجسامی است که بین آنها نیروی پتانسیل وجود دارد.

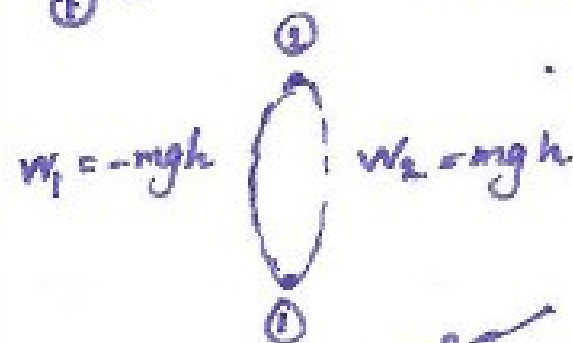
نیروی پتانسیل:

- کار انجام شده روی جسم توسط نیروی پتانسیل میسر می‌شود یا نه؟  
و: نیروی وزن، کشش فنر



$$W_1 = W_2$$

- کار خاص انجام شده روی یک ذره در یک مسیر بسته صفر است.



$$W_1 = -mgh$$

$$W_2 = mgh$$

$$W_T = W_1 + W_2 = -mgh + mgh = 0$$

- کار انجام شده در نیروی پتانسیل در مسیر رفت برابر با منفی مقدار آن در مسیر برگشت.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \Delta E = 0$$

- در نیروی پتانسیل، انرژی پتانسیل نمی‌آورد.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow W = -\Delta U$$

تغییر انرژی پتانسیل برابر با منفی کار انجام شده روی جسم است.

$$W = -\Delta U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

فروتنی باشد

نیروی متغیر باشد

$$W = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) \quad x_i = 0$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

$$U_{(x)} = \frac{1}{2} k x^2$$

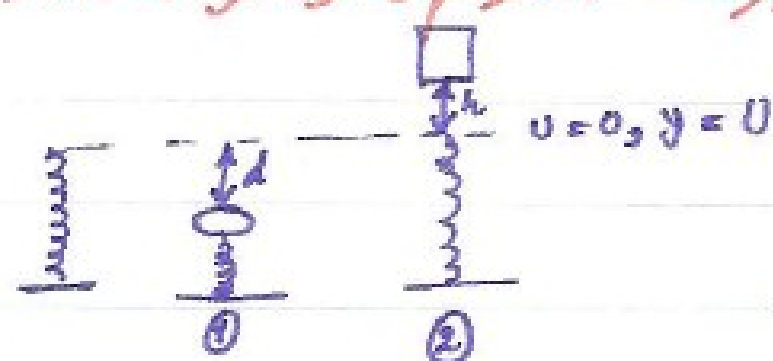
$$U_{(y)} = mgy$$

اصل پایستگی انرژی: اگر در یک دستگاه فیزیکی هیچ نیروی خارجی با شدت انرژی مکانیکی تغییر نکند.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

در حل مسائل جنبه را به عنوان سطح  $U=0$  و  $K=0$  قدری دهیم و ارتفاع ثابت به آن جنبه می سفیم جنبه را  $U=0$  و  $K=0$  مثبت و  $U$  را منفی قدری دهیم.

eg: یک کوبی  $2 \times 10^{-3}$  کیلوگرمی در پایین فشرده می شود و به اندازه  $1 \text{ cm}$  مقدار کم می شود اگر  $K=40$  و سبکها شود تا چه ارتفاعی بالا می رود؟



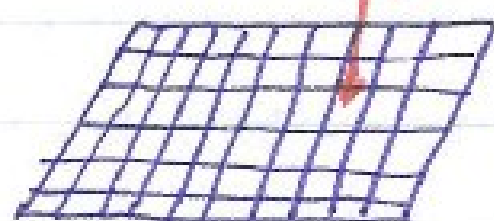
$$E_1 = E_2$$

$$-mgd + \frac{1}{2} K d^2 = mgh$$

$$-2 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-2} \times 9.8 + \frac{1}{2} \times 40 \times (10^{-2})^2 = 2 \times 10^{-3} \times 9.8 \times h$$

$$h = 9.2 \text{ cm}$$

eg: تخته بوزن  $900 \text{ N}$  از ارتفاع  $1.8 \text{ m}$  و به داخل تدرجی می رود و این قدر را با متوقف کردن تخته به اندازه  $1.8 \text{ m}$  می شود. انرژی پتانسیل تدرجی می شود؟

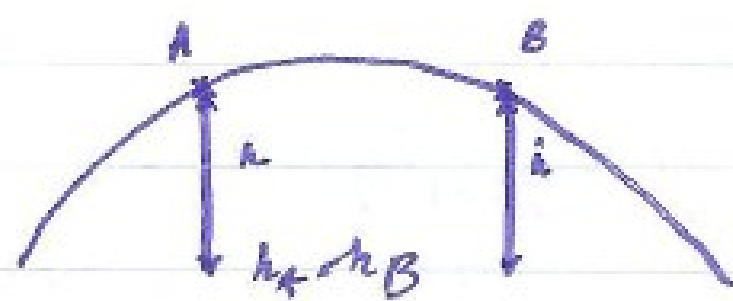


$$E_1 = E_2$$

$$mgh_1 = U_F - mgh_2$$

$$900 \times 1.8 = U_F - 900 \times 1.8 \Rightarrow U_F = 900 \times 10.8 = 9720 \text{ J}$$

eg: نشان دهید سرعت در ارتفاعات مساوی بر تخته با هم برابر است.

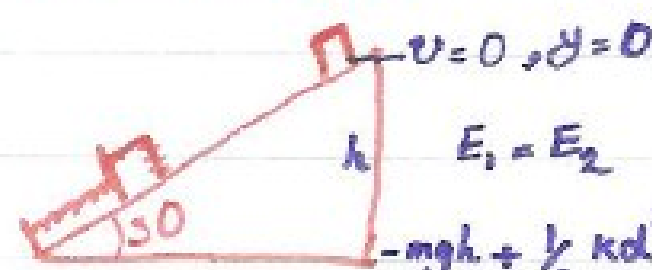


$$E_A = E_B$$

$$mgh_A + \frac{1}{2} m v_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$|v_A| = |v_B|$$

eg: فیزی با ثابت  $K=100$  در پایین سطح شیبدار بدون اصطکاک که با فاق زاویه  $30^\circ$  می سازد قرار دارد. جسم  $M=10 \text{ kg}$  از حالت سکون از بالای سطح شیبدار را می شود و بعد از مقدار کم کردن فاق به اندازه  $2 \text{ m}$



$$E_1 = E_2$$

$$-mgh + \frac{1}{2} K d^2 = 0$$

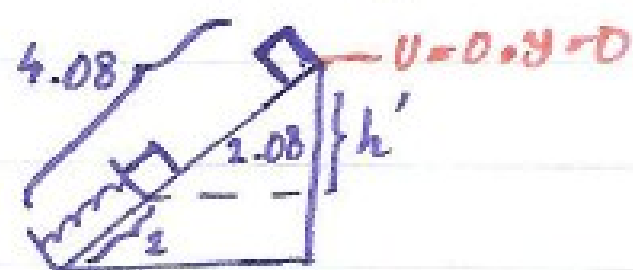
$$-10 \times 9.8 h + \frac{1}{2} \times 100 \times 4 = 0 \Rightarrow h = \frac{200}{9.8} = 2.04 \text{ m} \Rightarrow h = L \sin 30$$

$$\Rightarrow L = 2 \times 2.04 = 4.08 \text{ m}$$

موقوف می شود. 1) این جسم پس از رسیدن به سکون چقدر می لغزد. 2) سرعت آن در نقطه رسیدن به فاق



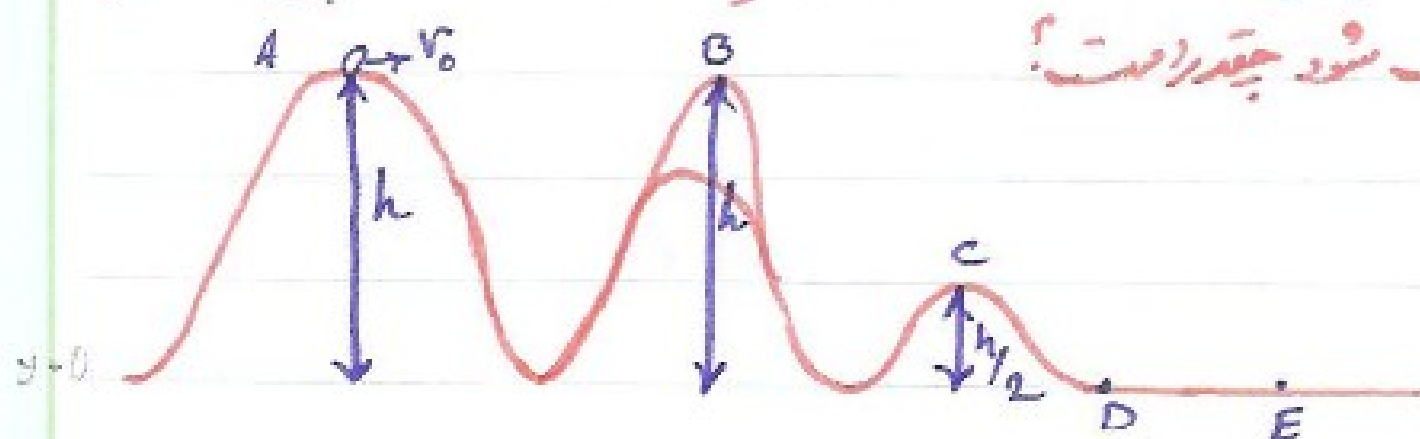
$$2) -mgh' + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow -10 \times 9.8 \times 1.04 = -\frac{1}{2} \times 10 \times v^2$$



$$\Rightarrow v = 4.5 \text{ m/s}$$

و: جبهه از ارتفاع  $h$  با سرعت  $v_0$  رها می شود در روی سطح بود اصطکاک می مطابق شکل شروع به حرکت می کند

ا: سرعت کمترین در نقاط B و C چقدر است؟ اگر طول در نقطه D کمترین شود یعنی در آنجا متوقف شود چقدر است؟



$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|v_A| = |v_B|$$

$$E_A = E_C \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgh/2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\Rightarrow mgh/2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$E_A = E_D \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 - mgh_D$$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_D} = \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{gh + v_A^2}$$

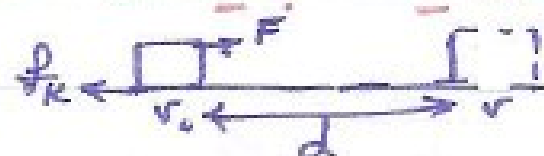
$$v_E^2 - v_D^2 = 2a\Delta x_{DE} \Rightarrow a = \frac{v_E^2 - v_D^2}{2\Delta x_{DE}} = \frac{-(\sqrt{v_A^2 + 2gh})^2 - (v^2 + 2gh)}{2\Delta x_{DE}} = \frac{-(v^2 + 2gh)}{2\Delta x_{DE}}$$

بحث در مورد انرژی در حضور نیروهای غیر محافظی:



$$\sum F = ma$$

$$F - f_k = ma \quad (1)$$

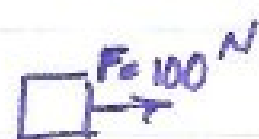


$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x = 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \quad (2)$$

$$I, II \Rightarrow F - f_k = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2d}\right) \Rightarrow Fd - f_k d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow F \cdot d = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}_{\Delta K} + f_k d \Rightarrow F \cdot d = \Delta E_{mec} + f_k \cdot d = \Delta E_{mec} + \Delta E_{fric}$$

eg: شخصی جسمی را با نیروی  $100^N$  به اندازه  $5^m$  جابجایی کرده و سپس متوقف می‌شود.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cos 0 = 100 \times 5 = 500 \text{ J}$$

$$\Delta E_{th} \quad (3) \quad \Delta E_{mec} \quad (2) \quad W \quad (1)$$

$$\Delta E_{mec} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

در هر دو حالت متوقف است

$$\Delta E_{th} = W - \Delta E_{mec} = 500 - 0 = 500 \text{ J}$$

eg: جسمی به جرم  $10 \text{ kg}$  با نیروی  $100^N$  به اندازه  $5^m$  جابجایی شود و سرعت آن از  $2^{\frac{m}{s}}$  به  $4^{\frac{m}{s}}$  برسد!

$$\Delta E_{th} \quad (3) \quad \Delta E_{mec} \quad (2) \quad W \quad (1)$$

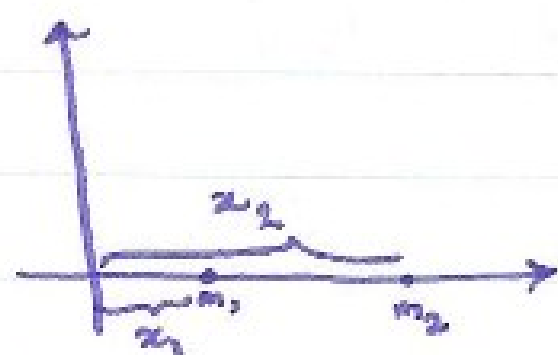
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 100 \times 5 = 500 \text{ J}$$

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \times 10 (4 - 4) = 15 \text{ J}$$

$$\Delta E_{th} = W - \Delta E_{mec} = 500 - 15 = 485 \text{ J}$$

مفصل فیم، مرکز جرم

برای ساده سازی مسائل مرکز جرم را تعریف می‌کنیم.

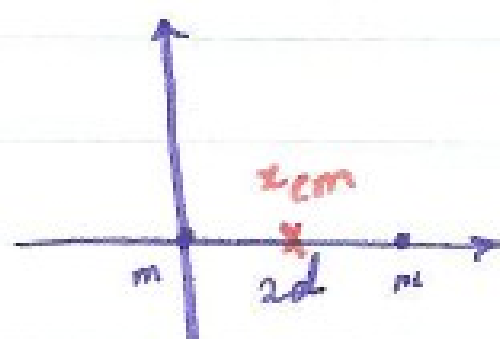


$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

center of mass

مرکز جرم در حالت گسترده:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$



$$x_{cm} = \frac{m(0) + m(2d)}{m+m} = d$$



$$x_{cm} = \frac{-md + md}{m+m} = 0$$

مختصات  $x_{cm}$  نسبت به دوزده تغییر می‌نماید.

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$x_{cm}$  ذری ذره :

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

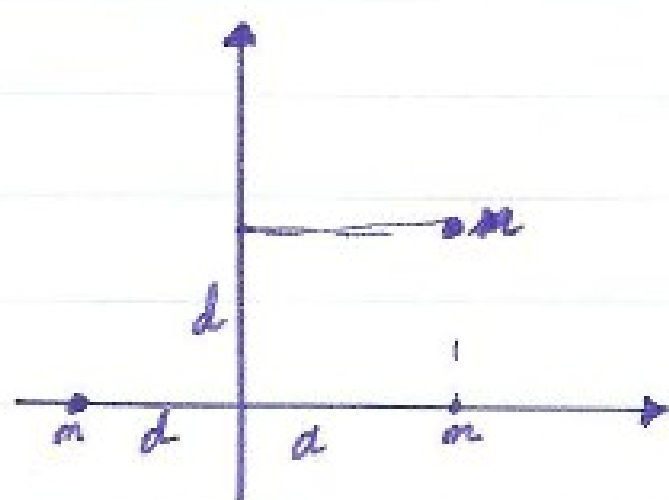
$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j} + z_{cm} \hat{k}$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n z_i m_i$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^n m_i x_i + \sum_{i=1}^n m_i y_i + \sum_{i=1}^n m_i z_i \right)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$



eg: مرکز جہاں را در دستہ زیر باید

$$x_{cm} = \frac{m(-d) + m(d) + md}{m+m+m} = d/3$$

را حل است :

$$y_{cm} = \frac{m(0) + m(0) + md}{m+m+m} = d/3$$

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j} = d/3 \hat{i} + d/3 \hat{j}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{m(-d)\hat{i} + m(d)\hat{i} + m(d\hat{i} + d\hat{j})}{3m}$$

را حل است :

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{md\hat{i} + md\hat{j}}{3m} = d/3 \hat{i} + d/3 \hat{j}$$

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m = dm \quad \Rightarrow \sum \rightarrow \int$$



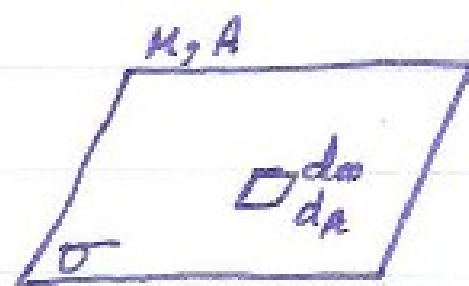
حالت جہا :

$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm \\ y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm \\ z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm \end{cases} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \frac{M}{r} dv = \frac{1}{r} \int x dv$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \frac{M}{r} dv = \frac{1}{r} \int y dv$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int z \frac{M}{r} dv = \frac{1}{r} \int z dv$$

اگر جسم بصورت یک سطح باشد چگالی سطحی تعریف می شود.



$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}$$

چگالی سطحی  $\sigma$ : جرم واحد سطح

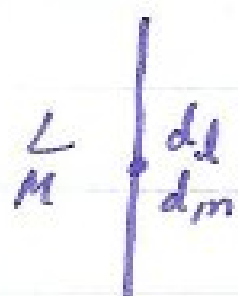
$$\Rightarrow dm = \frac{M}{A} dA$$

$$x_{cm} = \frac{1}{A} \int x dA$$

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int y dA$$

$$z_{cm} = \frac{1}{A} \int z dA$$

اگر جسم بصورت خطی باشد:



$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dl}$$

چگالی طولی  $\lambda$ : جرم واحد طول

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{L} dl$$

$$x_{cm} = \frac{1}{L} \int x dl$$

$$y_{cm} = \frac{1}{L} \int y dl$$

$$z_{cm} = \frac{1}{L} \int z dl$$

$dl$ : ابعاد خطی یا خطی

$dA$ : ابعاد سطحی

$dV$ : ابعاد حجمی

1. در دستگاه مختصات دکارتی:  $dl = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$

ایمپلای مختصات:



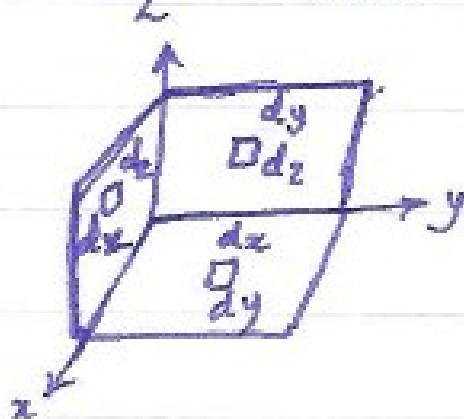
$$\Delta l = l_2 - l_1 = r \Delta \phi$$

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = d\phi$$

$$AB = r \phi$$

$$\Rightarrow dl = r d\phi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

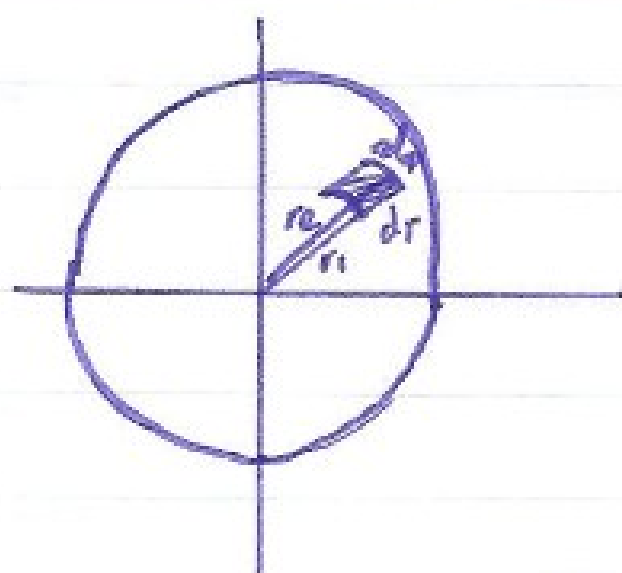
2. اگر جسم بصورت دایره ای باشد:



ایمپلای سطحی:  $dA = dx \cdot dy, dy \cdot dz, dx \cdot dz$  در مختصات دکارتی.



2. اگر یک دایره ای باشد.



$$dA = dr d\varphi r = r dr d\varphi$$

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\text{eg: } A = \int dA = \int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\varphi = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{r^2}{2} \Big|_0^a \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \pi a^2$$

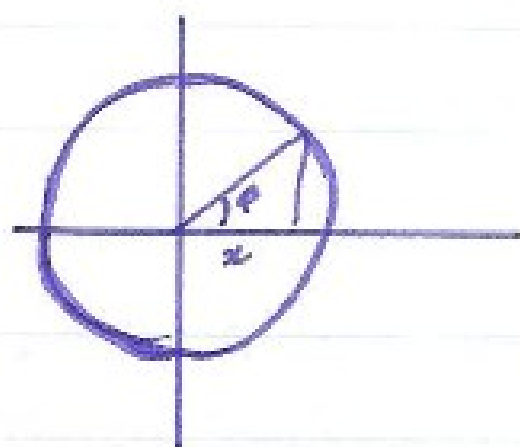
3. اگر سطح یک کره باشد:  $dA = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$   $0 \leq \theta \leq \pi$   
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

ایمان شاه جمعی:

1. کروی:  $dv = dx dy dz$

2.  $dv = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$

eg:



$$x_{cm} = \frac{1}{L} \int x dl$$

$$dl = r d\varphi \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{L} \int x r d\varphi$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x_{cm} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} r \cos \varphi r d\varphi = \frac{r^2}{L} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \frac{r^2}{L} [\sin \varphi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^2}{L} (\sin 2\pi - \sin 0) = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{L} \int y dl$$

$$dl = r d\varphi \Rightarrow y_{cm} = \frac{1}{L} \int y r d\varphi$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} r \sin \varphi r d\varphi = \frac{r^2}{L} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{r^2}{L} [-\cos \varphi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^2}{L} (-\cos 2\pi + \cos 0) = 0$$