آمار و احتمال مهندسی

www.engclubs.net

a site for all Engineers

احتمال (Probability)


بخش اول

فهرست مطالب:

- مفاهیم اساسی
  - آزمایش
  - فضای نمونه
  - پیشامد
- شمارش
  - اصول شمارش
  - جایگشت
  - ترکیب
- احتمال
  - تابع احتمال
  - قوانین احتمال

مفاهيم اساسي

آزمایش (Experiment):

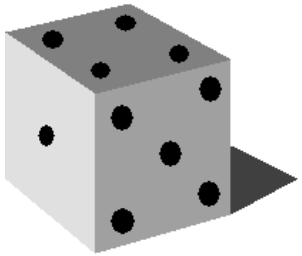
در نظريه احتمال ، هر عملي كه نتيجه آن را نتوان از پيش تعيين كرد آزمايش ناميده مي شود.
مانند پرتاب تاس ، پرتاب سكه و ...

فضای نمونه (Sample Space):

مجموعه اي را كه اعضاي آن تمام نتايج ممكن در يك آزمايش تصادفي باشد فضاي نمونه مي‌گويند. و آن را با علامت S نمايش مي دهند.

مثال:

يك تاس را پرتاب مي كنيم. فضاي نمونه آن را بنويسيد.



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال:

يك سكه را آنقدر پرتاب مي كنيم تا شير ظاهر شود. فضاي نمونه آن را بنويسيد.

$$S = \{H, TH, TTH, \ldots\}$$

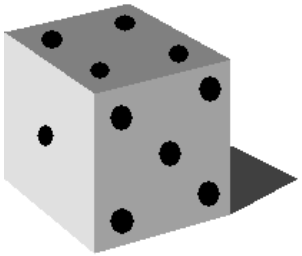
S گسسته و نامتناهي است

پیشامد (Event):

هر يك از زير مجموعه هاي فضاي نمونه را يك پيشامد گويند و آن را با علامت E نمايش مي دهند.

مثال:

در مثال پرتاب تاس پیشامد اعداد زوج را بنویسید.

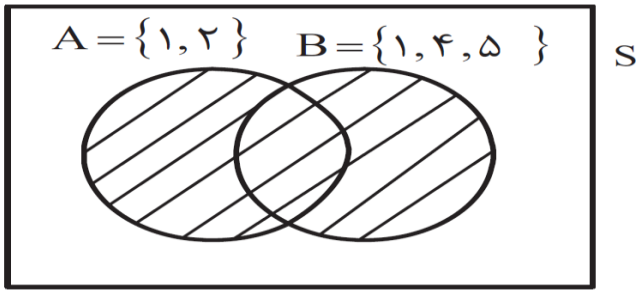


$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{2,4,6\}$$

قوانین پیشامد ها:

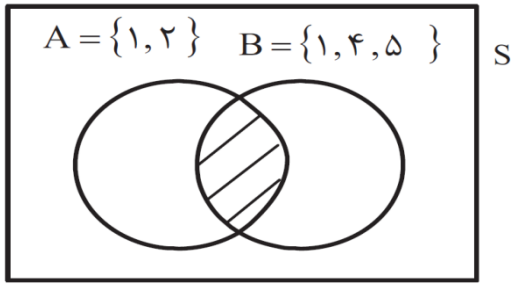
✓ اجتماع دو پیشامد



$A \cup B = \{۱, ۲, ۴, ۵\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$

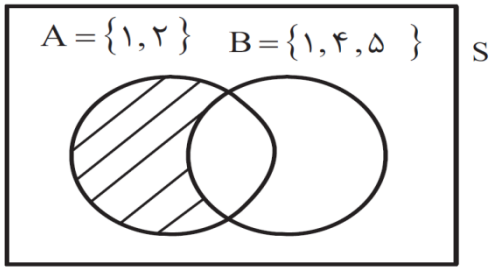
✓ اشتراك دو پیشامد



$A \cap B = \{۱\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$

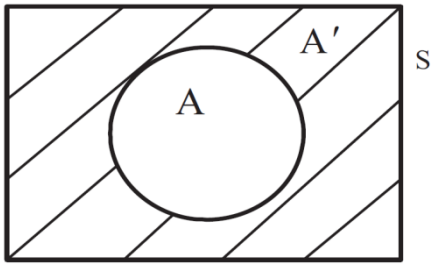
✓ تفاضل دو پیشامد



$A - B = \{۲\}$

$$A - B = \{x \mid x \in A \ , \ x \notin B\}$$

✓ متمم پیشامد



$$A' = \{x \mid x \in S \ , \ x \notin A\}$$

شمارش (COUNTING)

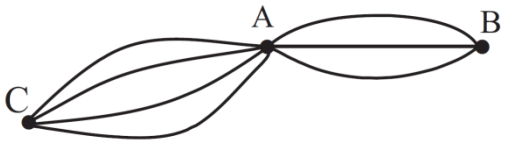
اصول شمارش :

۱-اصل جمع

اگر كاري را بتوان به n_1 طريق و كار ديگري را به n_2 طريق انجام داد و اين دو كار را نتوان همزمان انجام داد ، آنگاه كار اول يا كار دوم را مي توان به n_1+n_2 طريق انجام داد.

مثال:

فرض كنيم از شهر A بتوان به سه طريق به شهر B و به چهار طريق به شهر C سفر نمود. به چند طريق مي توان از شهر A به شهر B يا شهر C سفر نمود ؟



پاسخ:

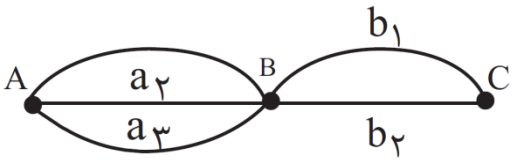
$$n=n_1+n_2=3+4=7$$

۲-اصل ضرب

اگر كاري را بتوان به n_1 طريق و كار ديگري را به n_2 طريق انجام داد و اين دو كار را بتوان بصورت همزمان و يكي پس از ديگري انجام داد ، آنگاه هر دو كار را مي توان به $n_1 \times n_2$ طريق انجام داد.

مثال:

فرض كنيد از شهر A بتوان به سه طريق به شهر B سفر نمود و از شهر B نيز به دو طريق به شهر C سفر نمود. به چند طريق مي توان به شهر C سفر نمود ؟



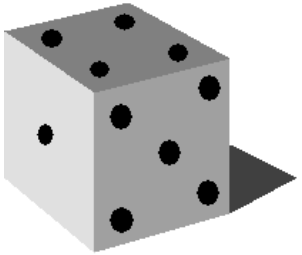
پاسخ:

$$n=n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$$

مثال:

يك سكه و يك تاس را با هم پرتاب مي كنيم. تعداد كل حالات ظاهر شدن سكه و تاس كدام است ؟

پاسخ:



$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{H, T\}$$

$$n(S) = 6 \times 2 = 12$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,H),(2,H),(3,H),(4,H),(5,H),(6,H) \\ ,(1,T),(2,T),(3,T),(4,T),(5,T),(6,T) \end{array} \right\}$$

مثال:

چند عدد زوج سه رقمي از ارقام ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۶ و ۹ مي توان نوشت به طوريكه هر رقم فقط يك بار استفاده شود ؟

پاسخ:

از اينكه اعداد زوج باشد ، براي رقم يكان فقط دو انتخاب وجود دارد پس كل طرق برابر است با:

۴ × ۳ × ۲ = ۲۴

مساله ۱:

چند عدد چهار رقمي زوج با تكرار و بدون تكرار مي توان ساخت ؟

جایگشت (permutation):

جایگشت عبارت است از حالات مختلف قرار گرفتن اشیاء در کنار یکدیگر.

مثال:

سه حرف a و b و c را در نظر مي گيريم ، جايگشت هاي مختلف اين سه حرف را بنويسيد.

abc , acb , bac , bca , cab , cba

جايگشت در يك رديف:

تعداد جايگشت هاي n شيء متمايز در يك رديف (صف) كنار يكديگر برابر است با:

$$n(n-1)\times\ldots\times 2\times 1=n!$$

اثبات:

فرض كنيد n جاي خالي داريم و مي خواهيم با n شيء متمايز ، اين n محل را پر كنيم. محل اول را با هر يك از n شيء مي توان پر نمود ، محل خالي دوم را با n-1 شيء و ... به همين ترتيب محل خالي آخر را با يك شيء باقيمانده مي توان پر نمود.

n	n-1	n-2	...	...	۲	۱

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1=n!$$

مثال:

به چند طريق مي توان يك صف ۵ نفري براي سوار شدن به اتوبوس تشكيل داد ؟

پاسخ:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال:

۴ مرد و ۴ زن را در يك صف در نظر بگيريد. مطلوبست محاسبه:

الف) تعداد كل حالاتي كه آنها در صف قرار مي گيرند.

ب) تعداد حالاتي كه همه مردها كنار هم باشند.

ج) تعداد حالاتي كه همه مردها و همه زن ها كنار هم باشند.

پاسخ:

الف) حالات ممکن $= 8!$

ب)

M

$$w_1 w_2 w_3 w_4 \boxed{m_1 m_2 m_3 m_4}$$

جایگشت ۴ زن و ۱ مرد $= 5!$

جایگشت ۴ مرد کنار هم $= 4!$

تعداد حالات مساعد $= 5! \times 4!$

ادامه:

ج)

W	M
$w_1 w_2 w_3 w_4$	$m_1 m_2 m_3 m_4$

جایگشت ۱ زن و ۱ مرد $= 2!$

جایگشت ۴ مرد کنار هم $= 4!$

جایگشت ۴ زن کنار هم $= 4!$

تعداد حالات مساعد $= 2! \times 4! \times 4!$

جايگشت دايره اي:

جايگشت هاي n شيء متمايز را روي محيط يك منحني بسته ، جايگشت دايره اي گويند كه تعداد اين جايگشت ها برابر است با !(n-1).

مثال:

به چند طريق ۷ نفر مي توانند دور هم بنشينند به طوري كه يك فرد در جاي ثابتي باشد؟

۱) !۵ ۲) !۷ ۳) !۷x۵ ۴) !۶

پاسخ:

يكي از افراد كه جاي ثابتي خواهد داشت ۷ حالت مختلف مي تواند داشته باشد و مابقي افراد كه ۶ نفر هستند داراي !(6-1) حالت مختلف مي باشند. پس خواهيم داشت:

$$7\times(6-1)!=7\times5!$$

مساله ۲:

در يك كنفرانس شامل نمايندگان ۵ كشور ، همه افراد دور يك ميز گرد نشسته اند. هر كشور سه نماينده به كنفرانس فرستاده است كه رئيس آنها در وسط مي نشيند. به چند طريق نمايندگان اين ۵ كشور مي توانند دور ميز بنشينند؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۷۶۸ ۳) ۷۸۰ ۴) ۱۴۴۰

جایگشت r شيء از میان n شی ء متمایز:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:

از بین ۱۵ تیم شرکت کننده در مسابقه فوتبال به چند طریق سه تیم رتبه هاي اول و دوم و سوم را بدست مي آورند؟

پاسخ:

$$P_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$$

مثال:

مطلوبست محاسبه تعداد حالات انتخاب ۳ دانشجو از بين ۱۰ دانشجو به طوري كه:

الف) به عنوان شاگرد اول ، دوم و سوم معرفي شوند.

ب) به عنوان شاگردان ممتاز معرفي شوند.

پاسخ:

الف)

$$P_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$$

ب) ؟

نمي توان از فرمول جايگشت استفاده كرد چون ترتيب در اين قسمت مهم نيست.

ترکیب (combination):

ترکیب عبارت است از انتخاب r شيء از n شيء متمايز به طوري كه ترتيب انتخاب مهم نباشد.

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال:

از بين ۵ نوع اتومبيل سه نوع اتومبيل را انتخاب مي كنيم به چند طريق اين امر امكان پذير است ؟

پاسخ:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$$

مثال:

از يك گروه مركب از ۵ پزشك و ۳ پرستار چند كميته ۳ نفره مي توان تشكيل داد ؟

پاسخ:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\times 5!} = 56$$

مثال:

در مثال قبل اگر بخواهيم كميته هاي ۳ نفره مركب از ۲ پزشك و ۱ پرستار باشند ، چند كميته ۳ نفره مي توان انتخاب كرد ؟

پاسخ:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times 3!} = 10$$

انتخاب ۲ پزشك از ميان ۵ پزشك

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!\times 2!} = 3$$

انتخاب ۱ پرستار از ميان ۳ پرستار

$$10 \times 3 = 30$$

موارد خاص شمارش

توزيع nشيء متمايز در k سلول:

تعداد تقسيمات n شيء در k سلول به طوري كه n_1 تاي آنها در سلول اول ، n_2 تاي آنها در سلول دوم ، ... و n_k تاي آنها در سلول k ام قرار گيرد ، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

مثال:

به چند طريق مي توان ۹ نفر كارمند را در يك اتاق ۴ نفره ، يك اتاق ۳ نفره و يك اتاق ۲ نفره جاي داد ؟

پاسخ:

$n_1=4$ $n_2=3$ $n_3=2$ $n=9$

$$\frac{9!}{4!3!2!}=1260$$

مشابه حالت قبل:

تعداد جايگشت هاي مختلف n شيء كه n_1 شيء آن از نوع اول ، n_2 شيء آن از نوع دوم و ... و n_k شيء آن از نوع k باشد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \quad ; \quad n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

مثال:

به چند طريق مي توان ۳ لامپ قرمز ، ۲ لامپ سبز و ۴ لامپ آبي را روي يك صفحه نصب كرد ؟

پاسخ:

$n_1=3 \qquad n_2=2 \qquad n_3=4 \qquad n=9$

$$\frac{9!}{3!2!4!}=1260$$

مساله ۳ :

به چند طريق مي توان ۱۰ خودكار قرمز و ۱۵ خودكار سبز و ۸ خودكار آبي را بين ۴ نفر تقسيم كرد ؟

توزيع nشيء مشابه در k سلول:

الف) تعداد تقسيمات n_1 ، n_2 ، ... شيء مشابه در k سلول بدون هيچ محدوديتي برابر است با:

$$\binom{n_1+k-1}{k-1}\times\binom{n_2+k-1}{k-1}\times\ldots$$

ب) تعداد تقسيمات n شيء مشابه در k سلول به طوري كه در هر سلول حداقل r شيء قرار گيرد برابر است با:

$$\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}$$

مثال:

به چند طريق مي توان ۸ دانشجوي رشته برق و ۱۱ دانشجوي رشته كامپيوتر و ۵ دانشجوي رشته مكانيك را در ۳ كلاس تقسيم كرد به گونه اي كه در هر كلاس حداقل يك نفر از هر رشته وجود داشته باشد؟

پاسخ:

$n_1=8 \qquad n_2=11 \qquad n_3=5 \qquad k=3 \qquad r=1$

$$\binom{n-k(r-1)-1}{k-1} \Rightarrow \binom{8-3(1-1)-1}{3-1} \quad \binom{11-3(1-1)-1}{3-1} \quad \binom{5-3(1-1)-1}{3-1}$$

$$\binom{8-1}{3-1}\times\binom{11-1}{3-1}\times\binom{5-1}{3-1}=5670$$

پایان

آمار و احتمال

احتمال (Probability)


بخش دوم

فهرست مطالب:

- احتمال
  - تعریف احتمال
  - انواع بیان احتمال
  - تابع احتمال
  - قوانین احتمال
- احتمال شرطي
- قانون ضرب احتمال
- پیشامدهاي مستقل و وابسته
- پیشامدهاي ناسازگار
- فرمول بیز

احتمال

(Probability)

www.engclubs.net

احتمال (Probability):

اندازه شانس وقوع پيشامد A را كه با P(A) نشان داده مي شود ، احتمال پيشامد A گويند.

به عبارت ديگر شانس وقوع پيشامد را احتمال گويند كه $0 \le P(A) \le 1$

انواع پيشامد از نظر احتمال وقوع:

- ✓ پيشامد غير ممكن $P(A) = 0$
- ✓ پيشامد تصادفي $0 < P(A) < 1$
- ✓ پيشامد حتمي $P(A) = 1$

انواع بيان احتمال:

۱- احتمال كلاسيك:

احتمال وقوع پيشامد خاصي مانند A عبارت است از تعداد عضوهاي پيشامد A (تعداد حالات مساعد) به تعداد عضوهاي فضاي نمونه (تعداد حالات ممكن)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات کل}}$$

مثال:

يك تاس را پرتاپ مي كنيم احتمال اينكه عدد ظاهر شده بزرگتر از ۴ باشد چقدر است ؟

$$S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad n(S)=6$$

$$A=\{5,6\} \qquad n(A)=2$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{6}=0.33$$

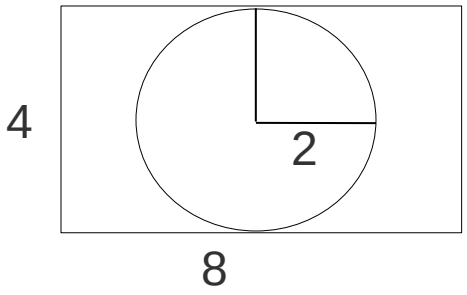
۲- احتمال هندسي:

احتمال هندسي به صورت زير تعريف مي شود:

$$P(A) = \frac{\text{طول ، سطح يا حجم مساعد}}{\text{طول ، سطح يا حجم كل}}$$

مثال:

گلوله اي توسط يك تيرانداز به سمت سيبلي مشابه شكل زير شليك شده است. اگر مطمئن باشيم كه گلوله حتماً به سيبل برخورد كرده باشد ، احتمال اينكه گلوله با قسمت دايره اي برخورد كند ، چقدر است ؟



$$P(\text{تير به دايره بخورد}) = \frac{\text{مساحت دايره}}{\text{مساحت مستطيل}} = \frac{\pi \times 2^2}{8 \times 4} = \frac{\pi}{8}$$

۱- احتمال آماري:

$$P(A) = \text{فراواني نسبي پيشامد } A = \frac{\text{تعداد دفعاتي كه پيشامد } A \text{ در } N \text{ تكرار آزمايش روي مي دهد}}{N}$$

مثال:

در ۱۰۰ بار پرتاب يك سكه ، ۶۵ بار شير ظاهر شده است. احتمال شير آمدن سكه با توجه به يافته هاي آزمايش چقدر است ؟

$$P(\text{شير آمدن}) = \frac{65}{100} = 0.65$$

مثال:

يك سكه طوري ساخته شده است كه احتمال وقوع شير ، ۲ برابر خط است. اگر اين سكه را يك مرتبه پرتاب كنيم ، احتمال اين را كه شير ظاهر شود تعيين كنيد.

پاسخ:

$$S = \{H, T\}$$

$$P(S) = P(H) + P(T) = 1 \qquad , \qquad P(T) = w$$

$$\Rightarrow \quad w + 2w = 1 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{3}$$

$$P(T) = \frac{1}{3} \qquad , \qquad P(H) = \frac{2}{3}$$

تابع احتمال:

تابعي را كه به هر پيشامد عددي در بازه [۱ ، ۰] نسبت دهد و در سه اصل زير صدق كند تابع احتمال گويند .

اصل اول: احتمال هر پيشامد بزرگتر يا مساوي صفر است.

$$P(A) \geq 0 \quad , \qquad \forall A \subset S$$

اصل دوم: احتمال فضاي نمونه S برابر با ۱ مي باشد.

$$P(S) = 1$$

اصل سوم:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = \sum_{i=1} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

هر گاه $A_i \cap A_j = \phi \ ، \ \forall \ i \neq j$

قوانین احتمال:

1) $P(\phi) = 0$

2) $0 \le P(A) \le 1$

3) $P(A') = 1 - P(A)$

4) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$

5) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$
$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

مثال:

سه سکه را همزمان پرتاب مي كنيم احتمال بدست آوردن سه شير يا سه خط چقدر است ؟

پاسخ:

A: پیشامد شیر آمدن هر سه سکه

B: پیشامد خط آمدن هر سه سکه

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$n(A) = 1 \qquad n(B) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8} \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

مثال:

از ۱۰ کارت به شماره هاي ۱ تا ۱۰ ، کارتي را به تصادف اختيار مي کنيم. مطلوبست احتمال اينکه شماره کارت انتخاب شده بر ۲ يا ۵ بخش پذير باشد؟

پاسخ:

A: پيشامد اينکه عدد روي کارت بر ۲ بخش پذير باشد.

B: پيشامد اينکه عدد روي کارت بر ۵ بخش پذير باشد.

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{2,4,6,8,10\} \qquad B = \{5,10\} \qquad A \cap B = \{10\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{10} \qquad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10}$$

مثال:

از جعبه اي محتوي ۳ مهره سفيد و ۲ مهره قرمز و ۴ مهره سياه ، ۲ مهره به تصادف بيرون آورده مي شود. مطلوبست احتمال اينكه هر ۲ مهره سياه نباشند؟

پاسخ:

A: پيشامد اينكه ۲ مهره بيرون آورده شده هر دو سياه باشند.

$$n(A)=\binom{4}{2}=6 \qquad n(S)=\binom{9}{2}=36$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{6} \qquad P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

مثال:

در دانشکده اي ، ۵۰% دانشجويان فوتبال ، ۴۰% بسکتبال و ۳۰% هم فوتبال و هم بسکتبال بازي مي کنند. احتمال اينکه دانشجويي در اين دانشکده ورزش نکند ، چقدر است ؟

پاسخ:

$$P(\text{دانشجويي ورزش نکند}) = P(\text{نه فوتبال و نه بسکتبال}) = P(A' \cap B')$$

$$= P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

A : فوتبال $\longrightarrow$ $P(A) = 0.5$

B : بسکتبال $\longrightarrow$ $P(B) = 0.4$

A : هم فوتبال و هم بسکتبال $\longrightarrow$ $P(A \cap B) = 0.3$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مساله ۱:

مطلوبست احتمال اینکه از یك گروه ۴ نفري حداقل ۲ نفر در یك ماه متولد شده باشند؟

احتمال شرطي (Conditional Probability):

احتمال شرطي پيشامد A به شرط وقوع پيشامد B به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad , \qquad P(B)>0$$

مثال:

دو تاس پرتاب شده است ، در صورتي كه بدانيم مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۶ است ، مطلوبست محاسبه احتمال اينكه يكي از تاس ها عدد ۲ را نشان دهد.

پاسخ:

A: پيشامد اينكه مجموع برابر ۶ باشد.

B: پيشامد اينكه يكي از تاس ها عدد ۲ را نشان دهد.

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

$$B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

مثال:

در جعبه اي ۵ مهره به رنگ آبي و ۴ مهره به رنگ قرمز موجود مي باشد. از اين جعبه ۳ مهره به تصادف خارج مي كنيم اگر بدانيم دو مهره از سه مهره به رنگ آبي مي باشند احتمال اينكه مهره سوم به رنگ قرمز باشد چقدر است ؟

پاسخ:

A: پيشامد اينكه دو مهره از سه مهره آبي باشند.

B: پيشامد اينكه يك مهره از سه مهره قرمز باشد.

A∩B: پيشامد اينكه دو مهره آبي و يك مهره قرمز باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}}{\dfrac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}}$$

مساله ۲:

فرض کنید که سن ۴۰% از کارگران يك کارخانه بيش تر از ۳۰ سال باشد و نيز فرض کنيد که ۵۰% کارگراني که بيش تر از ۳۰ سال سن دارند متاهل و همچنين ۳۰% از کارگراني که ۳۰ سال يا کمتر سن دارند متاهل باشند. کارگري را به تصادف انتخاب مي کنيم و مشخص مي شود که متاهل است ، تعيين کنيد احتمال اينکه سن کارگر بيش تر از ۳۰ سال باشد؟

قانون ضرب احتمال:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\,P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A)$$

A, B →

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)\,P(A)$$

A, B, C →

$$P(A\cap B\cap C)=P(B)P(C\,|\,B)P(A|\,B\cap C)$$

$$=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,A\cap B)$$

مثال:

كارمندي براي رفتن به محل كار خود از اتوبوس يا وسيله نقليه شخصي استفاده مي كند. او براي رفتن به محل كار ، $\frac{3}{4}$ اوقات از وسيله شخصي و $\frac{1}{4}$ اوقات از اتوبوس استفاده مي كند. هنگامي كه از وسيله نقليه شخصي استفاده مي كند ، ۷۵% مواقع ساعت ۷:۳۰ در محل كار حاضر و هنگامي كه از اتوبوس استفاده مي كند ، ۶۰% مواقع ساعت ۷:۳۰ در محل كار خود حاضر مي شود. اگر در يك روز اين كارمند ساعت ۷:۳۵ به محل كار خود رسيده باشد ، مطلوبست محاسبه احتمال اينكه از وسيله نقليه شخصي استفاده كرده باشد.

پاسخ:

A: پيشامد اينكه كارمند از وسيله نقليه شخصي استفاده كند.

A′: پيشامد اينكه كارمند از اتوبوس استفاده كند.

B: پيشامد اينكه كارمند ساعت ۷:۳۰ به محل كار خود رسيده باشد.

B′: پيشامد اينكه كارمند ساعت ۷:۳۰ به محل كار خود نرسيده باشد.

$$P(A|B') = ?$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cap B')}{P(B' \cap A) + P(B' \cap A')}$$

$$= \frac{P(A)P(B'|A)}{P(A)P(B'|A) + P(A')P(B'|A')}$$

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad P(A') = \frac{1}{4} \qquad P(B|A) = \frac{3}{4} \qquad P(B'|A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B'|A') = 1 - P(B|A') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(A|B') = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}} = \frac{15}{23}$$

مثال:

از ظرفي كه محتوي ۴ مهره سفيد ، ۶ مهره سياه و ۵ مهره قرمز است ، ۳ مهره به تصادف و بدون جايگذاري خارج مي كنيم. مطلوبست محاسبه:

الف) احتمال اینکه هر سه مهره سفید باشد؟

ب) احتمال اینکه مهره ها به ترتیب سفید ، سیاه و قرمز باشند؟

پاسخ:

الف) پیشامد اینکه مهره iام سفید باشد A_i

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{4}{15} \times \frac{3}{14} \times \frac{2}{13}$$

ادامه :

ب) پیشامد اینکه مهره iام سفید باشد A_i

پیشامد اینکه مهره iام سیاه باشد B_i

پیشامد اینکه مهره iام قرمز باشد C_i

$$P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) = P(A_1)P(B_2 \mid A_1)P(C_3 \mid A_1 \cap B_2) = \frac{4}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13}$$

پیشامدهاي
مستقل و وابسته

پيشامدهاي مستقل (Independent Events):

دو پيشامد را مستقل گويند هرگاه وقوع يا عدم وقوع يك پيشامد ، تاثيري در وقوع يا عدم وقوع پيشامد ديگري نداشته باشد.

A و B مستقل ⇒ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

سه پيشامد A ، B و C را مستقل مي ناميم اگر داشته باشيم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

پیشامدهاي وابسته (Dependent Events):

دو پیشامد را وابسته گویند هرگاه مستقل نباشند. و یا به عبارت دیگر وقوع یا عدم وقوع یك پیشامد در وقوع یا عدم وقوع پیشامد دیگر اثر بگذارد.

A و B وابسته ⇒ $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

مثال:

احتمال اینکه علي يك مسئله رياضي را حل كند ، ۰/۴ و احتمال اینکه مهدي آن را حل كند ، ۰/۵ است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه مسئله حل شود.

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

پاسخ:

$P($ مسئله حل شود $) = P($ حداقل يكي از دو نفر مسئله را حل كنند $) = P($ علي يا مهدي مسئله را حل كنند $)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.4 \times 0.5 = 0.7$$

پيشامدهاي حل مسئله توسط علي و مهدي مستقل اند.

مثال:

در يك ايستگاه مترو احتمال اينكه قطار به موقع در ايستگاه قرار داشته باشد ۰/۹ مي باشد مطلوبست:

الف) احتمال اينكه قطار سه روز متوالي به موقع در ايستگاه باشد.

ب) احتمال اينكه قطار در روز سوم براي بار دوم دير كند.

پاسخ:

الف)

A_i = پيشامد اينكه قطار در روز iام به موقع در ايستگاه قرار داشته باشد.

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱) \times P(A_۲) \times P(A_۳) = ۰/۹ \times ۰/۹ \times ۰/۹ = ۰/۷۲۹$$

ب)

A'_i = پیشامد اینکه قطار در روز iام دیر کند.

$$P(A'_i) = ۱ - P(A_i) = ۱ - ۰/۹ = ۰/۱$$

$$P\left[(A'_۱ \cap A_۲ \cap A'_۳) \cup (A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)\right] =$$

$$= P(A'_۱ \cap A_۲ \cap A'_۳) + P(A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)$$

$$= P(A'_۱)\ P(A_۲)\ P(A'_۳) + P(A_۱)\ P(A'_۲)\ P(A'_۳)$$

$$= ۰/۱ \times ۰/۹ \times ۰/۱ + ۰/۹ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = ۰/۰۱۸$$

مثال:

احتمال کار کردن يك نفر در شركتي براي مدت بيشتر از ۱۰ سال برابر $\frac{1}{6}$ است. اگر دو فرد A و B کار خود را همزمان در این شرکت شروع کنند ، احتمال اینکه فقط يك نفر از آنها بيشتر از ۱۰ سال در شرکت بماند کدام است ؟

پاسخ:

احتمال کار کردن هر فرد در شرکت ، مستقل از ديگري است. يعني A و B مستقل اند.

$$P(\text{فقط يك نفر}) = P(\text{فقط A}) + P(\text{فقط B}) = P(A-B) + P(B-A)$$

$$= P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$= P(A)P(B') + P(B)P(A')$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

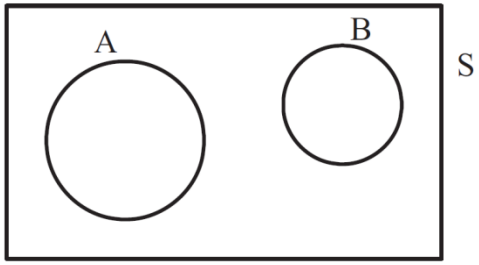
پیشنهادهای ناسازگار

پيشامدهاي ناسازگار (Mutually Exclusive):

1) هرگاه وقوع همزمان دو پيشامد غير ممكن باشد ، پيشامدها را ناسازگار گويند.

مثال: اگر نوزادي پسر باشد ديگر نمي تواند دختر باشد.

2) دو پيشامد A و B را ناسازگار گوييم ، اگر و فقط اگر اشتراك دو پيشامد صفر باشد.



$$A \cap B = \phi$$

مثال:

در ماه گذشته ۱۰۰ نوزاد در شهرستان زاهدان متولد شده اند. که در میان آنها ۵۵ نوزاد دختر و ۴۵ نوزاد پسر مي باشند. با استفاده از داده هاي آماري بالا اگر نوزاد جديدي در اين شهر متولد شود مطلوبست محاسبه احتمال پسر بودن و يا دختر بودن اين نوزاد ؟ ثانياً اگر از نوزادان متولد شده دو نوزاد را تصادفي انتخاب كنيم مطلوبست محاسبه احتمال اينكه اين دو نوزاد هر دو پسر باشند.

پاسخ:

$$P(male) = \frac{45}{100} = 0.45$$

$$P(female) = \frac{55}{100} = 0.55$$

صفر

$$P(male \cup female) = P(male) + P(female) - \cancel{P(male \cap female)}$$

$$= 0.45 + 0.55 + 0 = 1$$

پيشامدهاي پسر بودن و يا دختر بودن نوزادان دو پيشامد ناسازگار هستند ولي پيشامدهاي نوزاد اول پسر باشد و نوزاد دوم پسر باشد كاملاً از هم مستقل اند.

$$0.45 \times 0.45 = 0.2025$$

رابطه پيشامدهاي مستقل و ناسازگار:

- **اگر دو پيشامد مستقل از يكديگر باشند:**
  - ✓ هر دو مي توانند همزمان رخ دهند ،
  - ✓ احتمال اشتراك آنها برابر با حاصل ضرب احتمالات آنهاست ،
  - ✓ احتمال اجتماع آنها كوچكتر يا مساوي با مجموع احتمالات هر يك مي باشد.
- **اگر دو پيشامد ناسازگار باشند:**
  - ✓ نمي توانند همزمان رخ دهند ،
  - ✓ احتمال اشتراك آنها صفر مي باشد ،
  - ✓ احتمال اجتماع آنها برابر مجموع احتمالات هر يك مي باشد.

نكته:

اگر دو پيشامد بخواهند بصورت همزمان هم ناسازگار باشند و هم مستقل در نتيجه بايد داشته باشيم:

$$\begin{cases} P(A\cap B)=0 \\ P(A\cap B)=P(A)\,P(B) \end{cases} \Rightarrow \quad P(A)\,P(B)=0 \quad \Rightarrow \quad P(A)=0 \quad \text{يا} \quad P(B)=0$$

مثال:

جدول زير اطلاعات گروه خوني ۱۰۰ نفر را نشان مي دهد.

group	n	%
0	45	45
A	29	29
B	21	21
AB	5	5
Total	100	100

اگر از بين اين گروه دو نفر انتخاب شوند احتمال اينكه گروه خوني هر دو O باشد چقدر است ؟ پيشامد مورد نظر ناسازگار است يا مستقل ؟

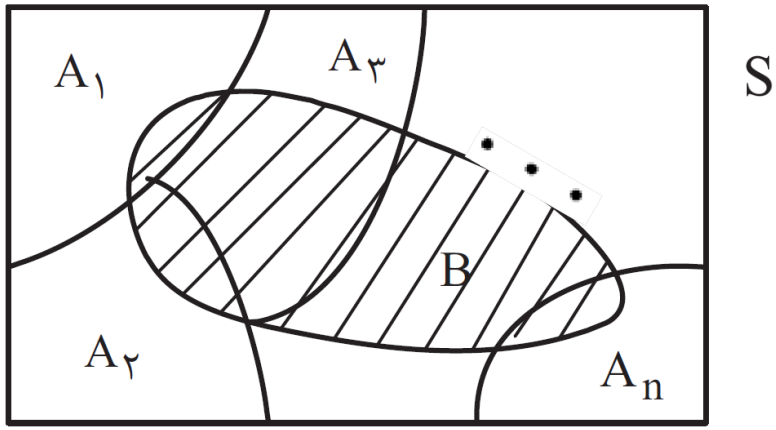
پاسخ:

مستقل

$$0.45 \times 0.45 = 0.2025 = 20.25\%$$

فرمول بیز (Bayes' Formula):

اگر پیشامدهاي A_1 ، A_2 ، ... ، A_n دو به دو مجزا و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$ باشد احتمال شرطي هريك از A_i ها به شرط اتفاق پیشامد B از S برابر با:



$$P[A_i \mid B] = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

مثال:

کارخانه اي داراي ۳ ماشين است كه به ترتيب ۵۰% ، ۳۰% و ۲۰% محصول را توليد مي كنند. مي دانيم درصد كالاهاي معيوب اين ۳ ماشين به ترتيب ۳% ، ۴% و ۵% است. مطلوبست محاسبه احتمال اينكه:

الف) اگر كالايي را به تصادف از محصول كارخانه انتخاب كنيم ، معيوب باشد.

ب) اگر كالاي انتخاب شده معيوب باشد ، اين كالا توسط ماشين اول توليد شده باشد.

پاسخ:

B_i: پيشامد اينكه كالاي انتخاب شده مربوط به ماشين i ام باشد. $i=1,2,3$

C: پيشامد اينكه كالاي انتخاب شده معيوب باشد.

$$C = (B_1 \cap C) \cup (B_2 \cap C) \cup (B_3 \cap C)$$

الف)

$$P(C) = P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) + P(B_3 \cap C)$$

$$= P(B_1)P(C \mid B_1) + P(B_2)P(C \mid B_2) + P(B_3)P(C \mid B_3)$$

$$= \frac{50}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{37}{1000}$$

در نتیجه ۳/۷% کالاهاي توليد شده معيوب هستند.

ب)

$$P(B_1 \mid C) = \frac{P(B_1)P(C \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(C \mid B_i)} = \frac{\frac{50}{100} \times \frac{3}{100}}{\frac{37}{1000}} = \frac{15}{37}$$

مساله ۳:

ميزي داراي داراي سه كشو است. يكي از كشوها محتوي يك سكه طلا و يك سكه نقره و كشوي ديگري محتوي دو سكه نقره و كشوي سوم محتوي دو سكه طلا است. يكي از كشوها را به تصادف باز كرده و سكه اي را از آن خارج مي كنيم. اگر اين سكه نقره باشد ، مطلوبست احتمال اينكه سكه ديگر داخل اين كشو طلا باشد.

مساله ۴:

شخصي را كه با احتمال ۰/۶ مبتلا به نوعي سرطان است ، مورد آزمايش قرار مي داديم. اين آزمايش ۱۰% افراد سالم را سرطاني و ۲% افراد سرطاني را سالم نشان مي دهد. چقدر احتمال دارد شخصي كه آزمايش او جواب مثبت داشته است ، واقعاً مبتلا به سرطان باشد؟

پایان

www.engclubs.net