SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۲۸۱۳ حل تمرین (۲۰٤)

شنبه ۳۱ / ۱۳۸۳ / ۶

مهسا محمدی

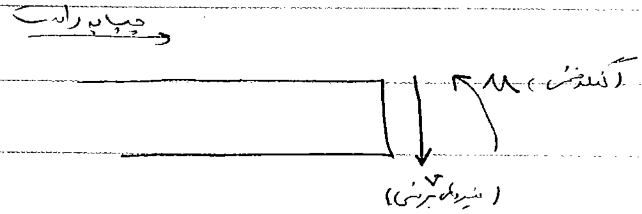
مقاومت مصالح ۱

استاد سیروس غلامپور

دانشگاه صنعتی شریف

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



در تیر :

بازو = سطح مقطع مستطیلی

میله = سطح مقطع دایره‌ای

بارگذاری محوری = یعنی در امتداد یک محور نیرو وارد شود [مثلاً فقط در امتداد محور x ها به سازه نیرو وارد شود]

بارگذاری چندمحوری = یعنی در امتداد چند محور نیرو وارد شود [مثلاً در امتداد هر سه محور مختصات به سازه نیرو وارد شود]

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

الف) محاسبات سازه

۱) بارگذاری (تعیین نیرو): تعیین کلیه بار خارجی که بر سازه وارد می‌شود به کجا وارد می‌شود و مقدار آن چقدر است [یعنی تعیین نیروها و لنگرهای خارجی وارد بر سازه] ، [بارگذاری ، مهندسی زلزله ، پل سازی ، ...]

۲) تحلیل (استاتیک ـ تحلیل سازه‌های ۱ و ۲): (نیروی داخلی را

تعیین سازه‌های معین   تعیین سازه‌های نامعین

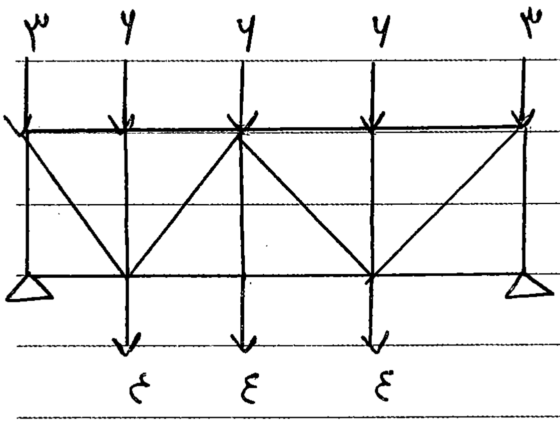
بدست می‌آوریم) تعیین نیروها و لنگرهای داخلی وارد بر سازه

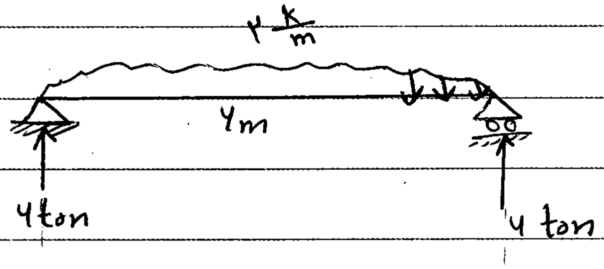
۳) طراحی: مقاومت مصالح ۱ و ۲ (طراحی سازه) ـ طراحی سازه‌های

به مقاومت مصالح بستگی دارد

فولادی ۱ و ۲ ـ طراحی سازه‌های بتن آرمه ۱ و ۲

ب) اجرا

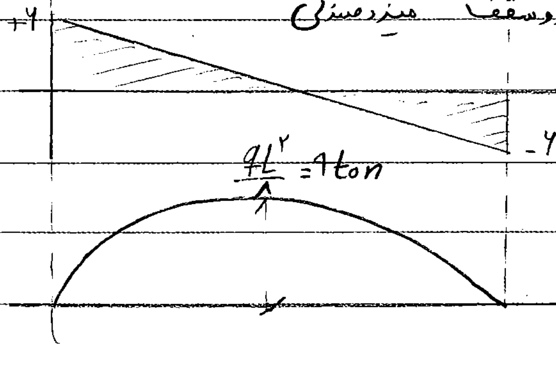




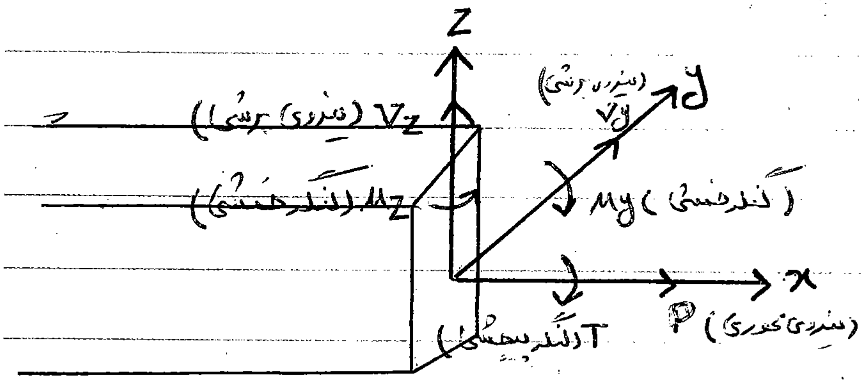
بارگذاری: بار ثقلی یا بار عمودی ـ بار جانبی یا افقی

(بار مرده و بار زنده)   (زلزله ـ باد ـ ...)

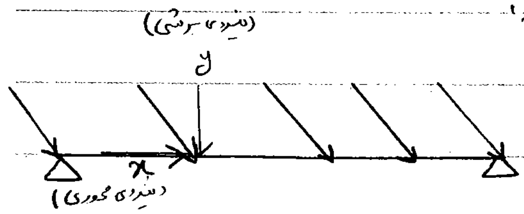
دیوار و سقف   میز و صندلی



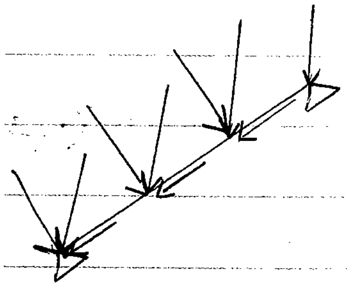
یک مقطع: ۳ نیرو و ۳ لنگر دارد.



در خرپا فقط نیروی محوری داریم چون عضو دو نیرویی دارد.
P

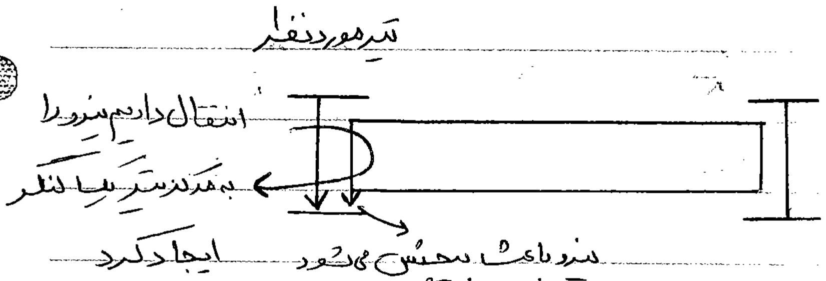


در تیر: حتما نیروی برشی و لنگر خمشی همیشه هست



نیروی محوری هم در تیر می‌تواند وجود داشته باشد مانند: تیرهای مورب یا تیر سقف راه پله

یک تیر می‌تواند پیچش هم داشته باشد



نکته:

بارگذاری برای تحلیل مهم است - برای طراحی، تحلیل مهم است

در نیروی محوری، علامت مهم است. چون مقاومت مصالح در کشش و فشار با هم فرق می‌کند

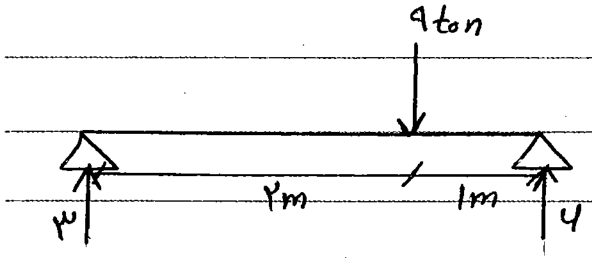
رفتار مصالح در کشش و فشار با هم فرق دارد.

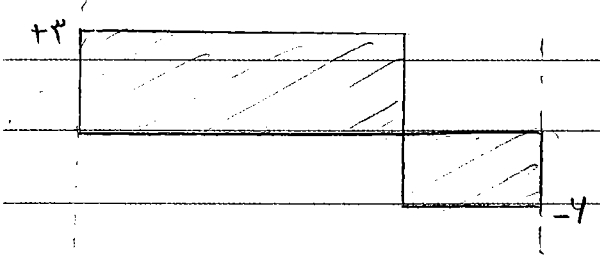
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نتیجه: در طراحی می خواهیم انجام دهیم علامت مهم است

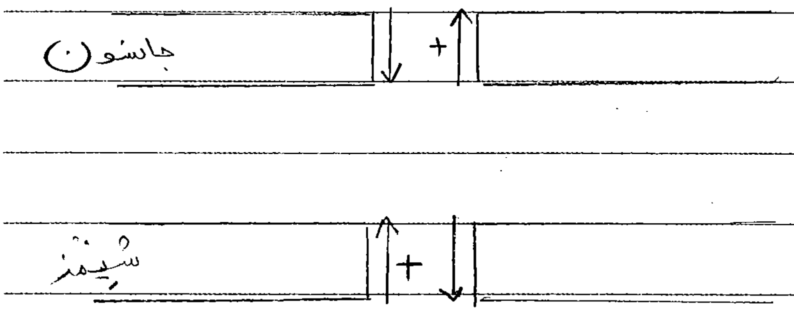
مقاومت برشی مصالح در مثبت و منفی فرقی ندارد.



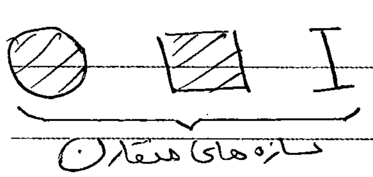


این تیر باید تحمل 6ton برش را داشته باشد علامت مهم نیست

نکته:

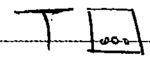


نکته: در لنگر پیچشی هم در علامت فرقی ندارد اما لنگر خمشی در علامت مهم است



فقط برای سازه های متقارن علامت در لنگر خمشی مهم نیست!

اما برای سازه های غیرمتقارن مانند: بتن آرمه



علامت مهم است.

در لنگر خمشی و نیروی محوری علامت مهم است ولی در نیروی برشی و لنگر پیچشی علامت مهم

نیست و قراردادی است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نکته: نیرو و لنگر برای مقطع است = استاتیک
تنش برای نقطه است = مقاومت مصالح
و برای رسیدن به نقطه باید مقطع بزنیم

« فصل اول »

« stress مفهوم تنش »

تنش: نیروی وارد بر واحد سطح

محوری (نیروی داخلی) — برشی (نیروی داخلی)

نیروی محوری همواره در راستای محور عضو و عمود بر مقطع می‌باشد

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

سیگما — تنش قائم — نیروی محوری — مساحت مقطع

نیروی برشی مماس بر مقطع و عمود بر محور می‌باشد

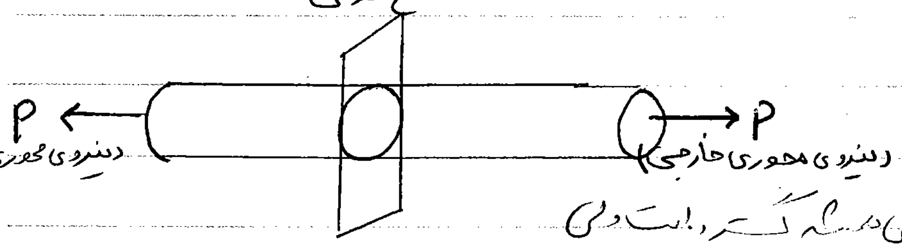
تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

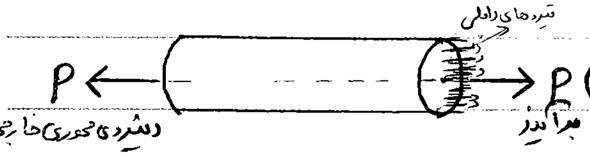
تنش برشی (تاو) — نیروی برشی — سطح مقطع

در صورتی که توزیع تنش یکنواخت باشد

$\tau_{Ave}=\frac{V}{A}$ و $\sigma_{Ave}=\frac{P}{A}$ بیانگر مقدار میانگین تنش روی مقطع است
به جای این که تنش در نقطه‌ای به خصوص از سطح مقطع باشد

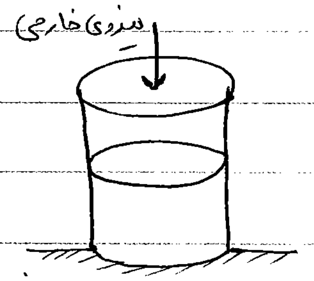


نکته: وقتی برش می‌زنیم نیروهای داخلی همیشه گسترده است ولی
نیروی خارجی هم متمرکز و هم گسترده می‌تواند باشد.



نکته: اگر بار یا نیروهای خارجی گسترده باشند توزیع تنش یکنواخت است
اما اگر بار یا نیروی خارجی متمرکز باشد توزیع تنش بعد از مقطع یکسان نیست و تنش در مرکز بیشتر است.

- نیروی متمرکز یا نقطه‌ای بر سطحی وارد می‌شود که در مقایسه با سطح کل بسیار ناچیز است.



- نیروی داخلی همیشه گسترده است.

- نیروی خارجی می‌تواند هم گسترده، هم نقطه‌ای باشد.

تنش محوری یا قائم $\sigma = \frac{P}{A}$

$$10^3 \frac{kg}{cm^2} = 1 \frac{ton}{cm^2}$$

$$psi = \frac{lb}{in^2}$$

$$ksi = \frac{kLb}{in^2}$$ (کیلو)

$$1 \text{ میلیون } pa = 1\, Mpa = \frac{N}{mm^2}$$ (10^6، مگا)

$$pa = \frac{N}{m^2}$$

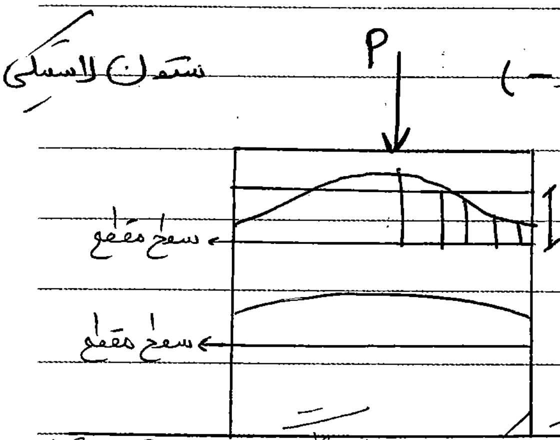
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نکته: علامت تنش همیشه به علامت نیرو بستگی دارد (نیروی کششی مثبت است)

اگر نیروی محوری کششی (+) ⟵ تنش کششی (+)

اگر نیروی محوری فشاری (−) ⟵ تنش فشاری (−)

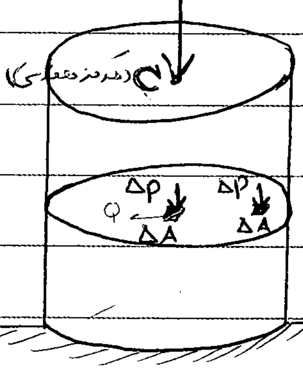


$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

هرچه فاصله بیشتر شود، تنش یکنواخت تر شد.

پس تنش به فاصله و جنس مصالح بستگی دارد.

برای تعریف تنش در نقطه‌ی مفروض Q از مقطع عرضی، می‌بایست یک سطح کوچک ΔA را در نظر بگیریم. با تقسیم مقدار ΔP بر ΔA مقدار میانگین تنش روی ΔA را به دست آوریم. با میل دادن آن به صفر $\Delta A \to 0$ تنش در نقطه‌ی Q را به دست می‌آوریم.



$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$ صحیح باشد ①

$$dP = \sigma \cdot dA \Longrightarrow \boxed{P = \int \sigma \cdot dA}$$

برآیند نیروهای داخلی گسترده

اگر σ ثابت باشد یا ثابت فرض شود ⟵ $P = \sigma \cdot A$ یا $\sigma = \frac{P}{A}$

یعنی توزیع تنش یکنواخت باشد.

هرجا σ بود منظور σ_{Ave} است.

تنش قائم:
- تنش موجود (ما به دست می‌آوریم)
- تنش مجاز (صورت مسئله می‌دهد) که در آزمایشگاه به دست می‌آید.

کنترل

اگر تنش موجود > تنش مجاز ⟸ شکستگی اتفاق می‌افتد

تنش نهایی

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

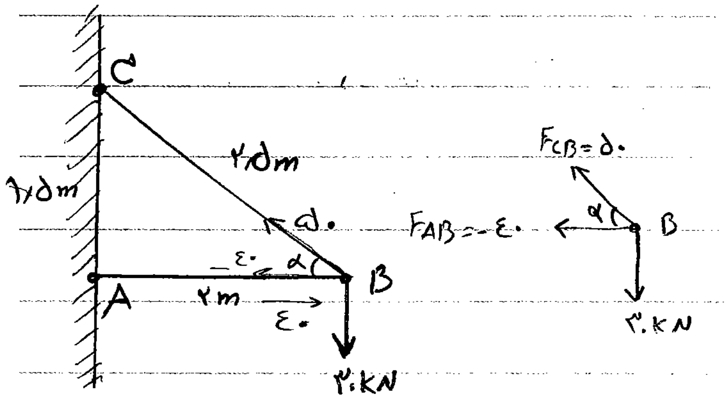
کنترل :

$\sigma_{موجود} = \dfrac{P_{موجود}}{A_{موجود}} \leq \sigma_{مجاز}$ okk ✓

درغیر این صورت یا باید سطح را منطقی تر کرد یا جنس را منطقی تر کرد.

مثال: الف) میله‌ی BC به قطر ۲۰mm و از فولاد با $\sigma = 140\,Mpa$ کنترل نمائید

سطح مقطع دایره‌ای



$\alpha = \text{Arc}\tan \frac{1.5}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$

تحلیل:

$\sum F_y = 0$

$\sum F_x = 0$

$F_{BC} = 50$ کششی

$F_{AB} = -40$ فشاری

طراحی:

$140\,Mpa = \frac{N}{mm^2}$ $\quad \sigma_{موجود} = \dfrac{50 \times 10^3\,N}{\pi (10)^2\,mm^2} = 159 \frac{N}{mm^2}$ یا $Mpa \leq 140\,Mpa$ okk✓

سطح اقتصادی است

$$\boxed{\sigma_{مجاز} = \dfrac{\sigma_{\text{نهایی یا تسلیم}}}{\text{ضریب اطمینان}\ S.F} = \dfrac{240\,Mpa}{1.5} = 140\,Mpa}$$

چون σ نهایی ۲۴۰ بوده چون ما به ۱٫۵ تقسیم کرده‌ایم در اطمینانیم

چون بارگذاری، تحلیل، طراحی با خطا و تقریب است از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم و بیشتر ضریب اطمینان را برای این به کار می‌برند که در اجرا هم خطا وجود دارد و ضریب اطمینان بستگی به دقیق بودن محاسبه و اجرا دارد و بستگی به نوع سازه دارد که چی می‌خواهیم بسازیم

— ظرفیت باربری: $\hat{P}_{\text{حداکثر مجاز}} = \sigma_{مجاز} \cdot A_{موجود}$ به سمت پایین گرد می‌شود

— طراحی: $\hat{A}_{\text{حداقل مورد نیاز}} = \dfrac{P_{موجود}}{\sigma_{مجاز}}$ به سمت بالا گرد می‌شود

ب) قطر میله BC از آلومینیوم با $\sigma_{مجاز} = 100\,Mpa$ را طراحی نمائید.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{\overbrace{50\times10^{3}}^{F_{BC}}}{100} = 500\,mm^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

قطر لازم $d = 25.2\,mm$

طراحی $\boxed{d = 24\,mm}$

یادآوری:

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

سیگما

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

نیروی محوری — مساحت مقطع

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

تاو یا تو

$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

نیروی برشی — مساحت مقطع

نیروی برشی یعنی عمود وارد شود

+ یا - منفی بودن تنش قائم به P بستگی دارد و + یا - تنش برشی به V بستگی دارد.

تنش برشی + با تنش برشی - فرقی ندارد.

اگر در صورت مسئله نیروی محوری کششی بود برای کنترل باید این صورت عمل کنیم

$$\underline{\sigma_{\text{موجود کششی}}} = \frac{P_{\text{موجود کششی}}}{A_{\text{موجود}}} \le \underline{\sigma_{\text{مجاز کششی}}}$$

" " " " " " فشاری بود

$$\underline{\sigma_{\text{موجود فشاری}}} = \frac{P_{\text{موجود فشاری}}}{A_{\text{موجود}}} \le \underline{\sigma_{\text{مجاز فشاری}}}$$

پس نیروی کششی و فشاری با هم فرق دارند اما نیروی برشی (+) یا (-) فرقی نمی‌کند.

(-) (+)

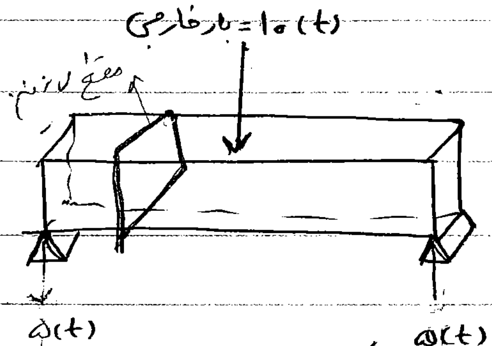
STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نکته: معمولاً تنش‌های برشی در پیچ‌ها، پین‌ها و میخ پرچ‌ها، که برای اتصال عضوهای مختلف سازه‌ها و اجزای ماشین به کار می‌روند، یافت می‌شوند

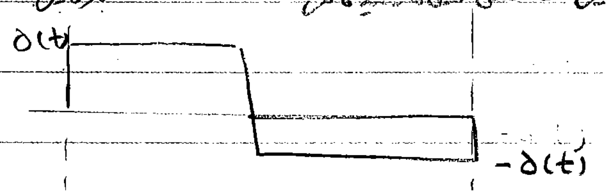
مثال: تیر چوبی



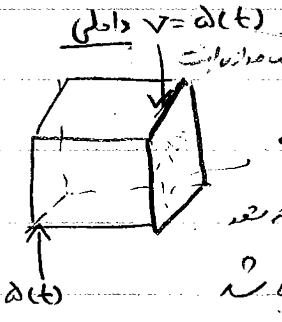
(مثال برای تنش برشی)

نیروی داخلی همیشه مماس بر برش است:

بار خارجی = نیروی داخلی مماس



دیاگرام مقطع:



چون V با مقطع آن موازی است برشی است

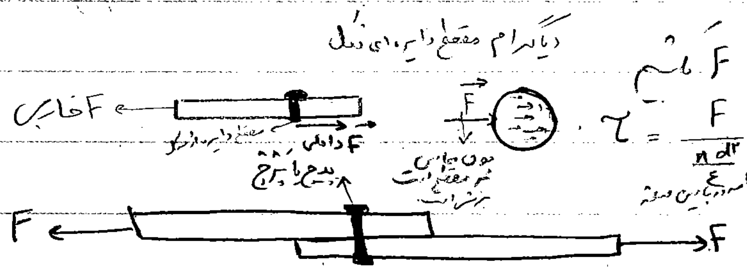
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} < \tau_{مجاز}$$

متوسط تنش

در اصل باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد (بعداً گفته می‌شود)

* در این جا τ مثبت است چون در این دیاگرام نیروی برشی 5(t)+ است طبق نمودار نیروی برشی *

مثال: فرض کنیم دو ورق را با پیچ ببندیم و با نیروی F بکشیم

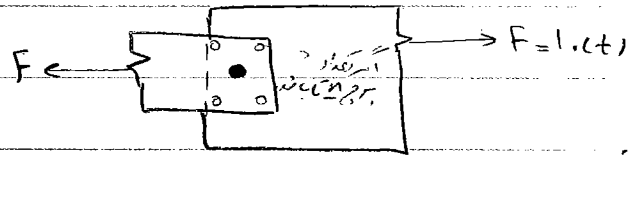


$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (1)$$

ادامه در پایین صفحه

برای دایره (شعاع $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$)

دیاگرام وقتی از بالا به آن نگاه می‌کنیم:



نکته: اگر مقطعی که می‌زنیم عمود بر F باشد تنش قائم داریم و اگر مماس بر آن باشد تنش برشی است.
(یا موازی)

ادامه (1): $\tau = \frac{F_{داخلی}}{n \times \frac{\pi d^2}{4}} < \tau_{مجاز\ پیچ\ یا\ پرچ}$ ← تعداد پیچ یا پرچ

در صورتی که همه پیچ‌ها مثل هم باشند (از نظر قطر و جنس) (اگر تعداد پیچ n تا بود) ###

مثلاً اگر پیچ‌ها از نظر قطرها فرق داشتند (مثلاً یکی قطرش 2mm و ۴ تای دیگر 3mm باشد) آن‌گاه:

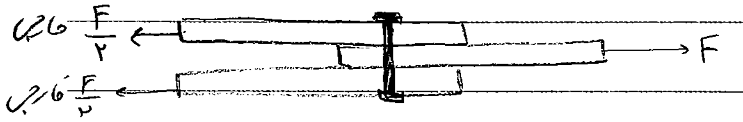
$$\tau = \frac{F}{1 \times \frac{\pi (2)^2}{4} + 4 \times \frac{\pi (3)^2}{4}}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

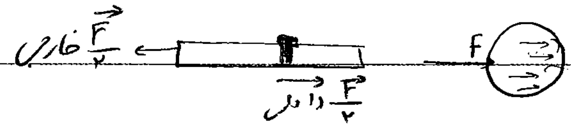
اگر اتصال دو برشی باشد یعنی برای جدا کردن

اعضا باید ۲ برش داشته باشد



اگر ۳ تا ورق داشتیم ۲ برش می‌شود.
اگر ۴ تا ورق داشته ۳ برش می‌شود

مثلاً در شکل (الف) ۱ سطح



$$\tau = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

دیاگرام ورق بالایی:

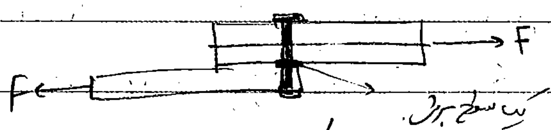
کنترل:

$$\tau = \frac{F}{\underbrace{n}_{\text{تعداد پیچ یا پرچ}} \cdot \underbrace{m}_{\text{تعداد سطوح برش هر پیچ}} \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

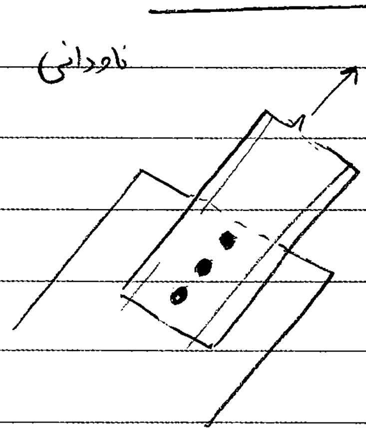
$$\text{سطح پیچ‌ها} = n.m.\frac{\pi d^2}{4}$$

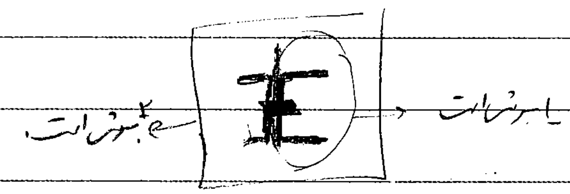
$$\boxed{n.m = \text{تعداد سطوح برش}}$$

(الف) زمانی می‌توانیم بگوییم که تعداد سطوح برش یکی از تعداد ورق‌ها کمتر است که تعداد ورق‌های میانی در خلاف جهت هم باشند



(شکل الف)





اتصال ایرونی که ۲ تا پیچ دارد
و ۲ سطح برش.

- کنترل: $\tau_{موجود} = \frac{V_{موجود}}{A_{موجود}} \le \tau_{مجاز}$

- ظرفیت باربری (به سمت پایین روند شود) $\underset{حداکثر}{V_{مجاز}} = \tau_{مجاز} \times A_{موجود}$

- طراحی: (به سمت بالا روند شود) ($\underset{بالا}{d}$ را به سمت بالا روند می‌کنیم) $\underset{حداقل}{A_{لازم}} = \frac{V_{موجود}}{\tau_{مجاز}}$

در طراحی F موجود معلوم است و A مجهول است.

نکته: (یک معادله و ۲ مجهول بی‌نهایت جواب دارد) مثل: $2x+3y=10$

در جوش مساحت جوش برابر است: تعداد جوش × طول جوش × ضخامت جوش (در مقاومت مصالح است)

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی):

$\sigma_{B_{مجاز}}$ = بر اساس جنس معلوم است

تنش لهیدگی مجاز

$$\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{مجاز}}$$

از دو جسم ضعیف‌تر است را انتخاب کن هر کدام از این دو جسم که ضعیف‌تر است

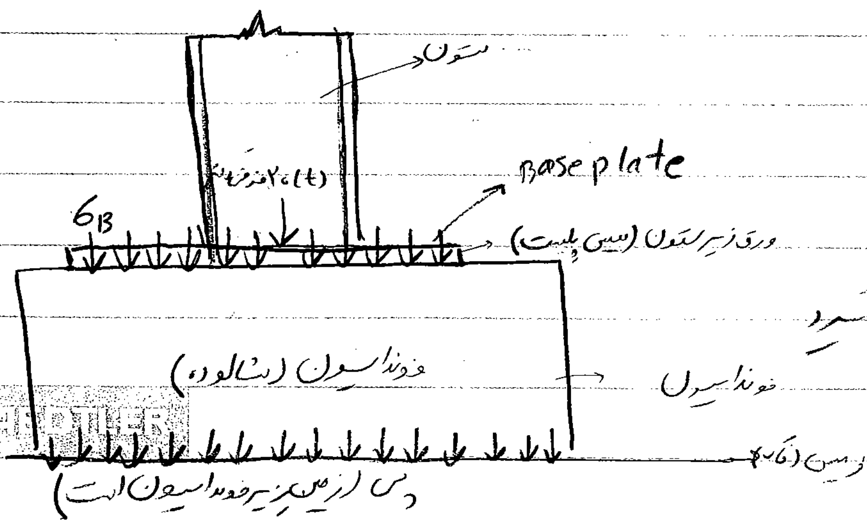
(حالت خاصی از تنش قائم است.)

و فرق آن با تنش قائم این است که اگر دو جسم را به طور تکیه‌گاهی به هم وصل کنیم امکان دارد یکی له شود (آن که σ کمتری دارد = ضعیف‌تر است له می‌شود)، به هم فشار وارد می‌کنند و له می‌شود.

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) بین ۲ دو جسم است و تنها نیرویی که مبادله می‌شود فشاری است و (خاص است)

اما تنش قائم داخل یک جسم است و نیروها هم کششی می‌توانند باشند و هم فشاری

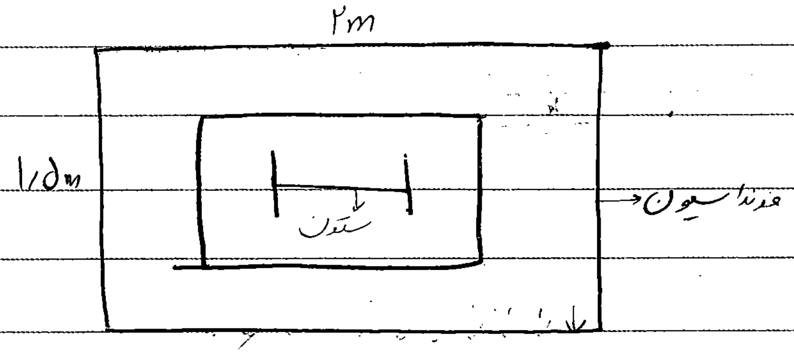
ستون فولادی



σ_B = تنش لهیدگی

کنترل: $\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{مجاز}}$

پی: خاکی که بار را روی آن قرار می‌گیرد



از بالا به شکل مقابل نگاه می‌کنیم

چندجا ممکن است لهیدگی اتفاق بیافتد (بین هر ۲ جسم) =

حتی بین جسم زیر فونداسیون را در نظر می‌گیریم (کنترل می‌کنیم) باید $A=2/5\times1/5$ (مساحت فونداسیون) و P آن هم می‌شود $20t$ به علاوه ω

وزن فونداسیون که: $\frac{20t+\omega}{2/5\times1/5} \le \sigma_B$ خاک (بی)

خاک را در نظر می‌گیریم چون ضعیف‌تر است،

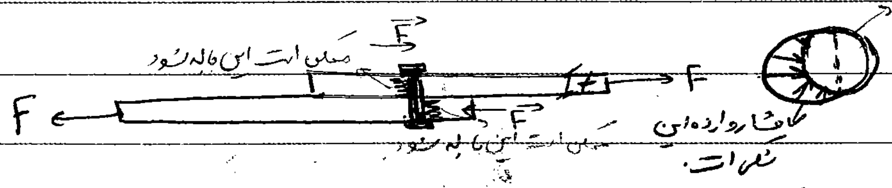
بین فونداسیون و بیس پلیت هم تنش لهیدگی وجود دارد:

$P=20t+\omega$

وزن بیس پلیت

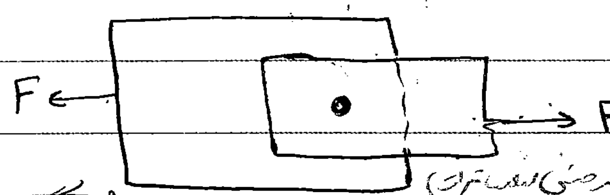
برای سطح مقطع اصل مشترک (همیشه این را می‌گیریم) به سطح مقطع کمتری دارد.

بین بیس پلیت و ستون بستگی به جنسشان دارد که کدام ضعیف‌تر و مقاوم‌تر است.



اگر سطح استوانه را تصویر کنیم

یک مستطیل به ابعاد $d\times t$ می‌شود)



$$\sigma_B = \frac{F}{t\cdot d} \le \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

از آن که ضعیف‌تر است را قرار می‌دهیم

بستگی به جنس دارد (آن که از نظر جنس ضعیف‌تر است)

را در نظر می‌گیریم

تنش لهیدگی

$$\sigma_B = \frac{F}{n\cdot t_{min}\cdot d} \le \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

n ← تعداد پیچ یا پرچ

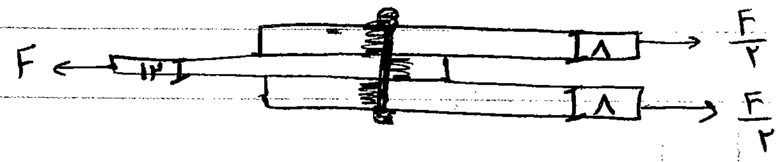
t_{min} ← کمترین ضخامت ورق

d → قطر پیچ یا پرچ

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

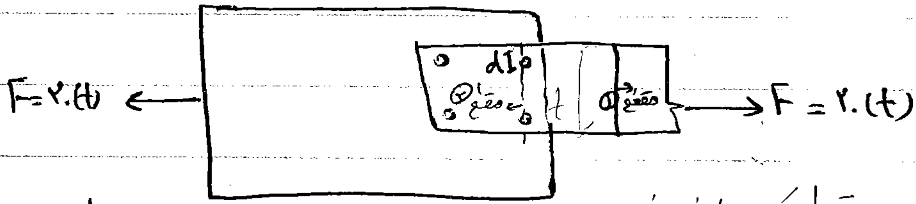
۲ برشی

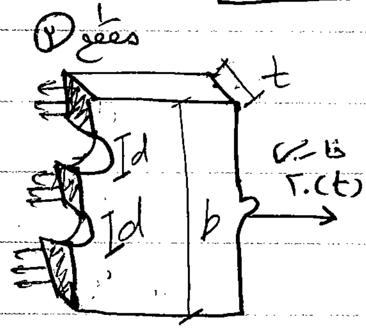


اگر ۱ برش بود t_{min} را در نظر گرفته مقاومت را بدست آوریم

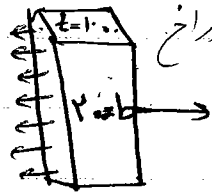
اگر ۲ برش بود ضخامت ۱ ورق را با مجموع ضخامت ۲ ورق دیگر در نظر می‌گیریم و آنی که کوچکتر است را می‌گیریم

اگر ۳ برش بود مجموع ۲ تا ورق را با مجموع ۲ تا ورق دیگر بررسی می‌کنیم و آنی که کوچکتر است را می‌گیریم





اگر F فشاری باشد در مقطع ۱ به سوراخ ها فقط جهت نیروها عوض می‌شود اما در پیچ سوراخ هم جهت بر می‌گردد و هم در داخل خود سوراخ نیرو وجود دارد



$$\sigma = \frac{20}{1\times 20} = 1 \ \frac{(t)}{cm^2}$$

(تعداد سوراخ‌ها مهم است)

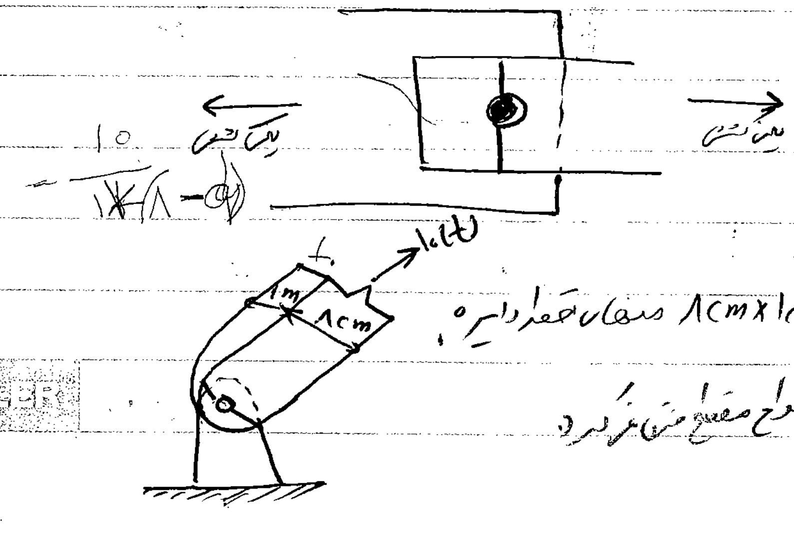
① مقطع $b\times t$

بیشترین تنش

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_n} = \frac{P}{t(b-2d)}$$

سطح مقطع خالص که در این جا سطح کل منهای ۲ مستطیل کوچک

$$\sigma = \frac{20}{1(20-2\times 2)} = 1.25$$



سطح مقطع $= 8cm\times 1cm$ منهای سطح دایره

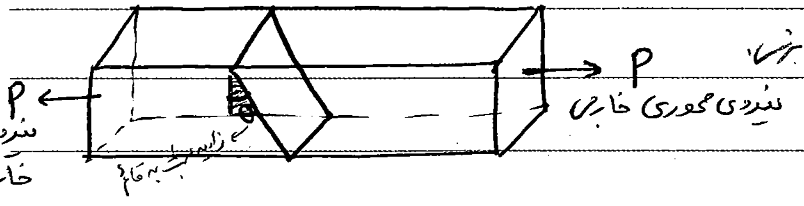
حتی اگر فشاری هم بود سطح مقطع عوض نمی‌شود

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

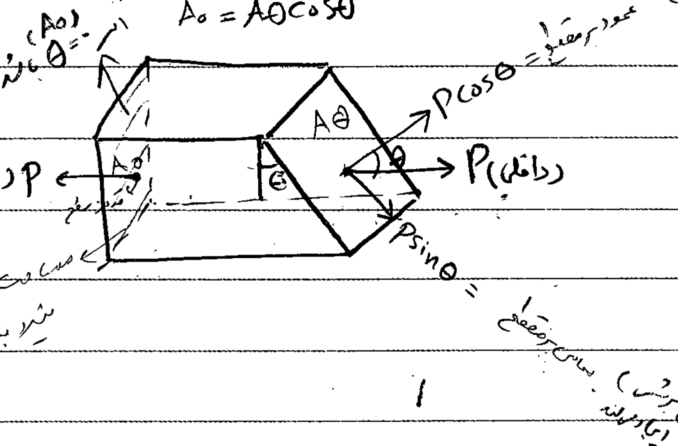
تنش در مقاطع مورب (مایل) تحت بار محوری :

پس در مقاطع مورب دو نوع تنش داریم { تنش قائم ، تنش برشی

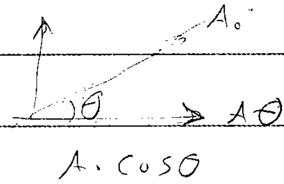


θ = زاویه‌ای است که سطح مورب با عمود بر نیرو می‌سازد (تنش قائم)

$A_0 = A_\theta \cos\theta$



A_0 = مساحت سطح مقطع عمود بر نیرو



با توجه به شکل بالا :

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \le \sigma \quad (1)$$

مجاز چسب یا جوش

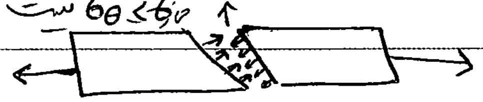
اگر θ = 0 باشد آن سطح مقطع ماست

$$\tau = \frac{P\sin\theta}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \le \tau \quad (2)$$

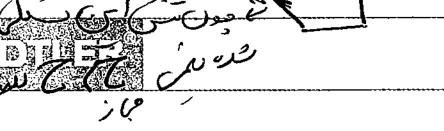
مجاز چسب یا جوش

اگر (1) و (2) برقرار نباشد :

چون تنش این شکلی است و چسب کنده شده پس $\sigma_\theta \le \sigma$ مجاز نیست



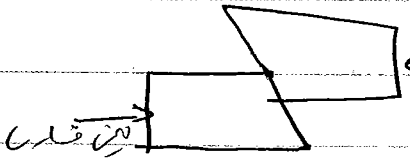
اگر (1) و (2) برقرار باشد دیگر هیچ اتفاقی در چسب یا جوش‌ها اتفاق نمی‌افتد



چون تنش این شکلی است و چسب برید شده پس $\tau \le \tau$ مجاز نیست

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



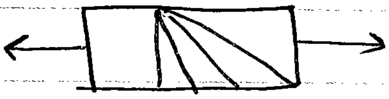
این با هم برش است

اما نیرو و فشاری است

به محیط شده ها ته به شود

اگر بخواهند دو تا چوب را به هم بچسبونیم بهترین زاویه کدام است؟

اگر یک مقطع یا یک پارچه یا چوب در اختیار داشته باشیم.



** 45° بیشترین تنش برش را دارا است **

هر عضوی که تحت کشش یا فشار باشد باید چک گردد

یعنی هر عضوی یا پارچه که داشتیم باید از فرمول تنش مشتق بگیریم و max و min آن را بدست آوریم.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq} \ \sigma \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

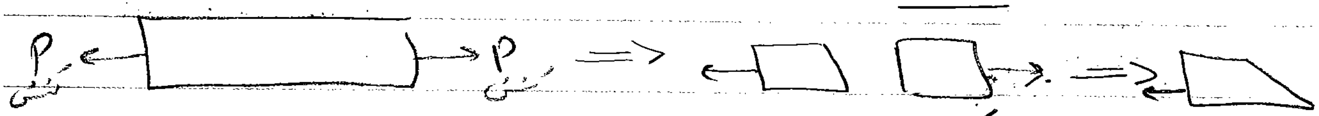
$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \qquad \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \leq} \ \tau \\ \theta = 0 , \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

- اگر یک عضو یا پارچه تحت کشش یا فشار بود در بیشترین تنش نرمال زاویه $\theta = 0$ باشد و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \sigma$

مجاز چسب یا فولاد یا دیگر چیزها

اگر عضوی یا پارچه ای را بخواهیم ببریم در صورتی بریده می شود که $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. و در صورتی کنده می شود که $\theta = 0$ باشد



کنده شد یعنی $\sigma_{max} \leq \sigma$ نیست

بریده شده

یعنی $\tau_{max} < \tau$ نیست

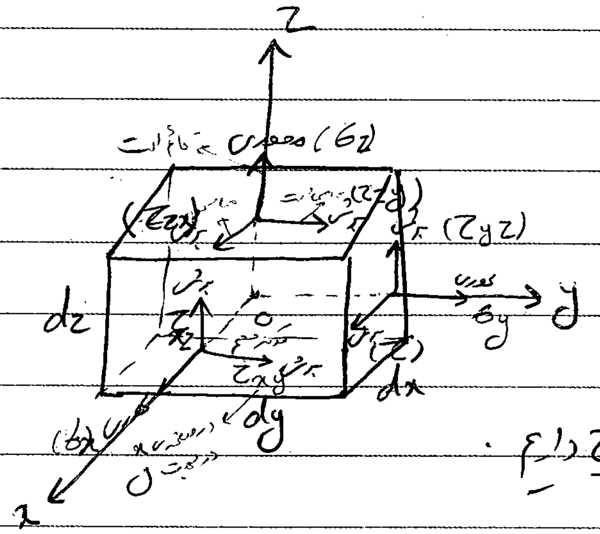
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر عضو یکپارچه داریم تنها $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} < \sigma_{مجاز}$ و $\tau_\theta = \frac{P}{2A_0} < \tau_{مجاز}$ را کنترل کنیم ولی اگر
یعنی چسب و جوش نداشتیم

یکپارچه نبود و چسب و جوش داشت باید این دو فرمول $\tau_{max} = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \le \tau$ و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta < \sigma$
را کنترل کرد و باید دو فرمول بالا را برای یکپارچه هم کنترل کنیم

مولفه‌های تنش:



یک المان است.

در هر مقطع یک تنش محوری و دو تا تنش برشی داریم.

پس همیشه در هر سطح دلخواهی یک σ و دو تا τ داریم.

بنابراین:

σ_x و σ_y ، σ_z

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

پس به جای ۹ تا مجهول ۶ تا مجهول داریم

در تنش برشی جای اندیس‌ها را می‌توان عوض کرد ①
و در دو سطح عمود بر هم تنش‌ها به هم‌دیگر ~~...~~ هستند با هم برابرند ②

نتیجه که باید اثبات شود

اثبات:

اگر $\Sigma M_z = 0$ باشد آنگاه اثبات می‌شود که $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ و اگر $\Sigma M_y = 0$

باشد آنگاه $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ اثبات می‌شود و اگر $\Sigma M_x = 0$ باشد $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ اثبات می‌شود

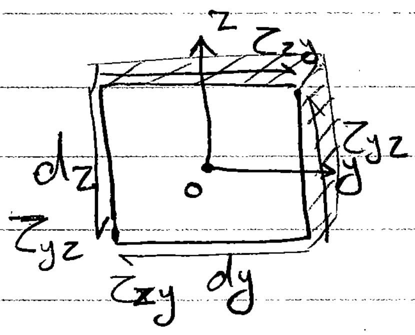
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اثبات : $\tau_{zy} = \tau_{yz}$:

صفحه ی zy را در نظر می گیریم : $\tau = \frac{P}{A}$



$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \tau_{zy}\underbrace{(\cancel{dx} \times dy)}_{\text{نیرو}} \times \underbrace{dz}_{\text{فاصله}} = \tau_{yz}\underbrace{(\cancel{dx} \times dz)}_{\text{نیرو}}\underbrace{dy}_{\text{فاصله}} \Rightarrow \overset{\text{ثابت شد}}{\boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}}$$

این تنش ها با هم برابرند

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

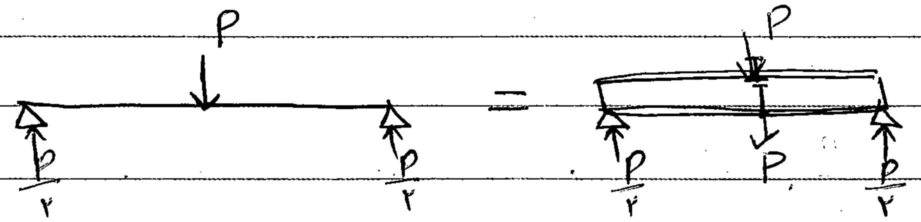
قطر اصلی تنش ها

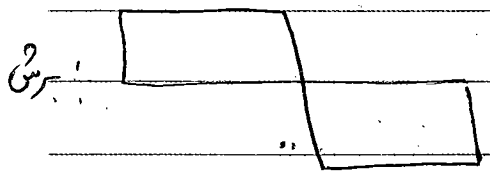
می توان این تنش ها را به صورت ماتریس متقارن نشان داد :

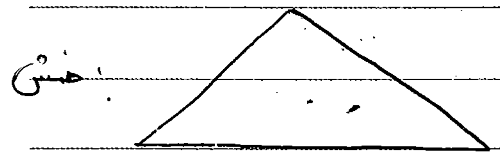
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

«فصل دوم» «رابطه‌ی تنش - تنمش و تغییر طول اعضا تحت بار محوری»







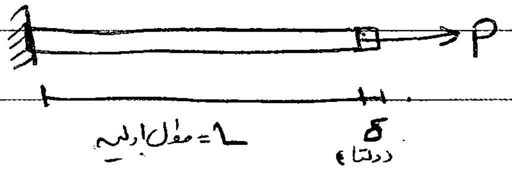
برای یک تیر آهن عملاً فرقی نمی‌کند بار روی آن باشد یا داخل آن باشد اما در استاتیک فرق می‌کند چون ما اجسام را صلب فرض می‌کردیم. وقتی در استاتیک صلب فرض می‌کردیم که فرض دقیقی نیست اما با این وجود به محاسبات استاتیک لطمه وارد نمی‌کرد چون در نهایت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که ما در استاتیک می‌خواستیم درست به دست می‌آمد (صلب = تغییر شکل نمی‌دهد)

(در این فصل منظور از تغییر شکل تغییر طول است که اگر نیرو + باشد (کششی) افزایش طول داریم و اگر نیرو - باشد (فشاری) کاهش طول داریم)

stress (تنش): نیروی وارد بر واحد سطح $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش قائم یا محوری

میله‌ی آلومینیومی

این میله تحت کشش است



دلتا

$\delta =$ تغییر طول

strain (تغییر طول نسبی / کرنش / تنمش)

تغییر طول نسبی، تغییر طول واحد طول، یعنی بدون بعد است

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$: تغییر طول واحد طول

تغییر طول — $L =$ طول اولیه

L همیشه مثبت است بنابراین علامت ε به δ بستگی دارد که اگر δ + باشد (کششی) ε هم مثبت است

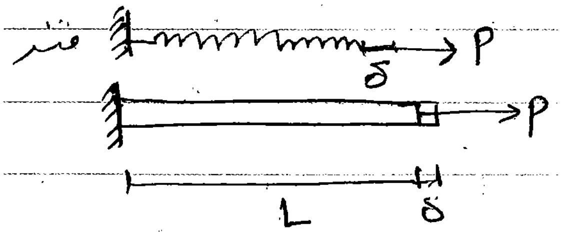
SUBJECT :

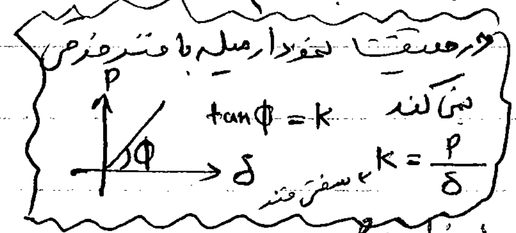
Year (   ) Month (   ) Date (   )

* ε تغییر طول واحد طول را می دهد یعنی مثلاً تغییر طول 1m یا 1mm یا 1in و ... را می دهد *

مثلاً اگر $\delta = 2mm$ و $L = 200mm$ باشد $\varepsilon = \frac{2}{200} = 0.01$ می شود یعنی 1mm ، 0.01 تغییر طول دارد.

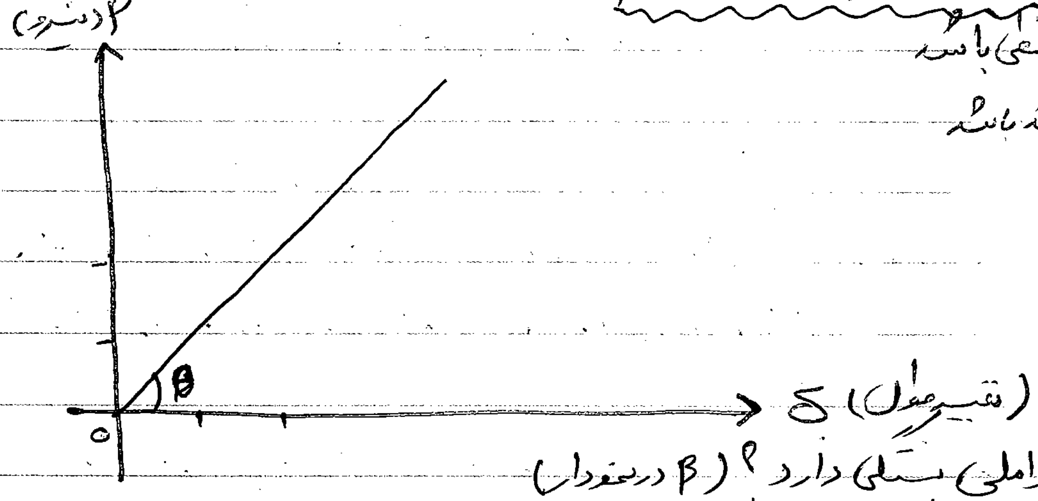
قطعاً بین تنش و کرنش رابطه وجود دارد یعنی طبق رابطه $\sigma = \frac{P}{A}$ هرچه P بیشتر باشد σ بیشتر می شود و در نهایت طبق رابطه $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ هرچه δ بیشتر و بیشتر باشد ε هم بیشتر می شود طبق شکل صفحه قبل (میله آلومینیومی)





فرض می کنیم رابطه خطی باشد

حتی منحنی هم می تواند باشد



شیب نمودار به چه عواملی بستگی دارد؟ (β در نمودار)

δ به 4 عامل بستگی دارد P ، L ، E و A طبق رابطه

تغییر طول

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$ بعداً اثبات می شود

E سختی (هرچه ماده قوی تر باشد تغییر طولش کمتر می شود)

A مساحت

شیب نمودار؟

شیب نمودار

$$\tan\theta = \frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

در حقیقت نقش K در فنر را بازی می کند

STAEDTLER

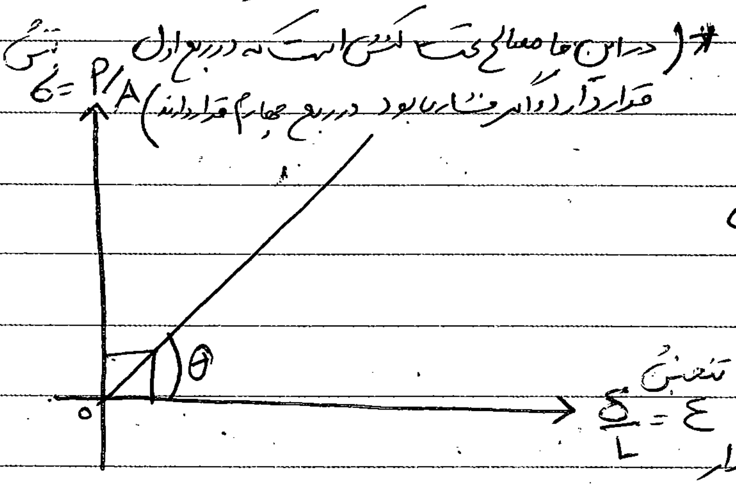
پس نمودار نیرو ـ تغییر طول به عوامل زیر بستگی دارد: (در حقیقت شیب نمودار هم به عوامل زیر بستگی دارد)

۱ـ جنس مصالح (آلومینیوم ـ فولاد ...) ۲ـ مساحت مقطع ۳ـ طول عضو

* و هر وقت ما بخواهیم نمودار نیرو ـ تغییر طول را معرفی کنیم برای یک شیء باید هر سه آن یعنی (جنس مصالح ـ مساحت مقطع و طول عضو را بدهیم) * = این نمودار زیاد در مقاومت کاربرد ندارد.

** ما در حقیقت نموداری را می‌خواهیم که فقط به جنس مصالح بستگی دارد یعنی ما نمودار تنش ـ تغییر شکل نسبی را می‌خواهیم **

* (در این جا مصالح تحت کشش است که در ربع اول قرار دارد و اگر فشاری بود در ربع چهارم قرار دارند)



(این نمودار فقط به جنس مصالح بستگی دارد و این نمودار برای ما مهم است)

اگر ما در این نمودار شیب را بدانیم این نمودار تعریف می‌شود پس برای ما $\tan\theta$ مهم است.

$$(1\text{-}1)\quad \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$ (واحد E هم واحد σ است) چون ε واحد ندارد

(همان جنس مصالح که قبلاً مطرح شد) مدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ)

نکته: σ و ε همواره در هر نقطه هم علامت هستند بنابراین نتیجه می‌شود که E همواره مثبت است.

ـ رابطهٔ ۱ـ۱ معمولاً به صورت: $\boxed{\sigma = E\cdot\varepsilon}$ کاربرد بیشتری دارد که به قانون هوک معروف می‌باشد.

E در صورت مسئله داده می‌شود.

نکته: E مثل k در فنر برای هر ماده ثابت است مثلاً:

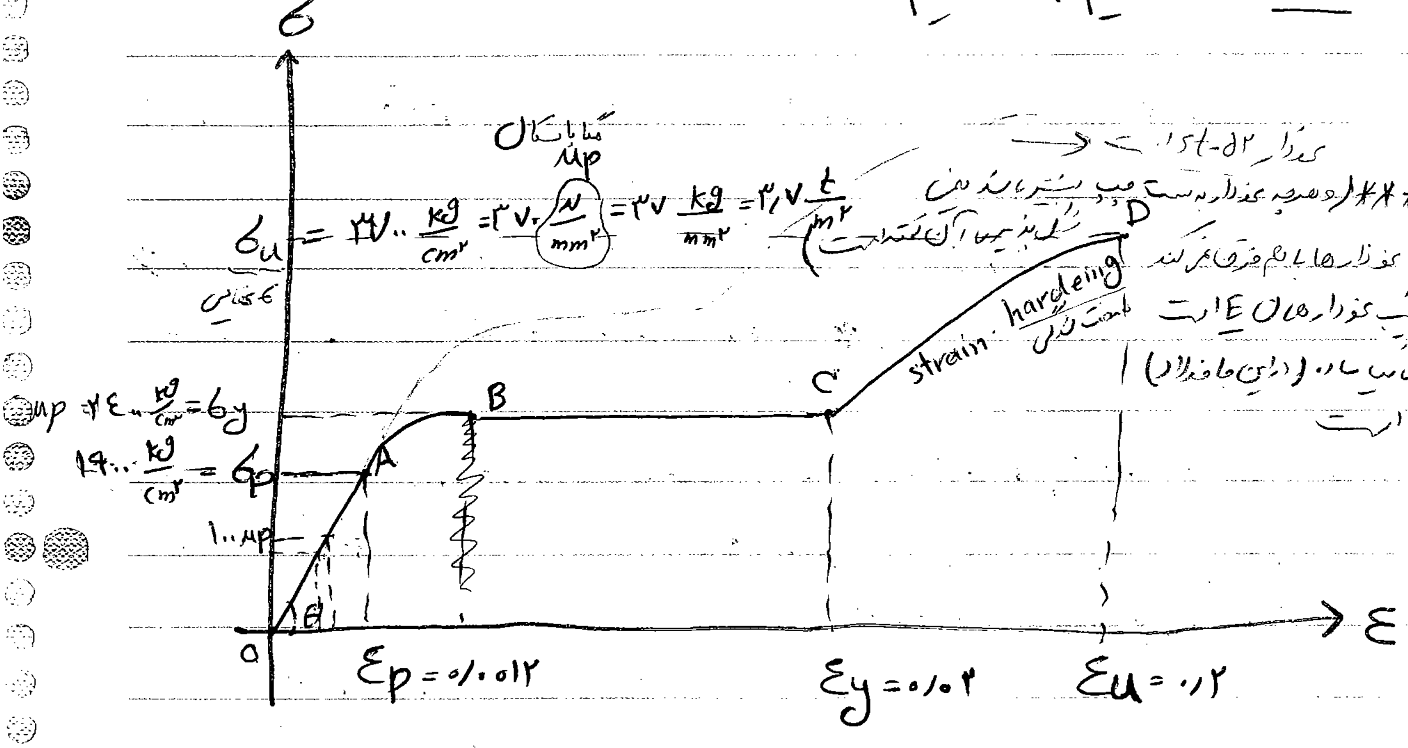
E_{st} (فولاد) $= 2.1\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2} = 2.1\times10^{5}\ \frac{N}{mm^2} = \ldots 29\times10^{6}\ \frac{Lb}{in^2}$ (پوند)

E_{Al} (آلومینیوم) $= 0.7\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$ E_c (بتن) $= (0.2 \text{ تا } 0.35)\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نمودار فولاد را می‌خواهیم بررسی کنیم :



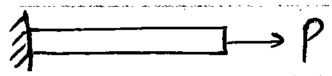
نمودار ۵۲-۳۷ ←

** از هرچه نمودار به سمت چپ بیشتر باشد نرم شکل‌پذیری آن کمتر است

و شیب نمودارها با هم فرق می‌کند

زیرا شیب نمودارها E است

E برای همه فولادها (در این حالت) ثابت است



اگر یک میله فولادی تحت کشش باشد و ما بخواهیم

نمودار تنش - تغییر شکل آن را رسم کنیم طبق نمودار بالا می‌شود.

الاستیک مثل فنر = یعنی اگر عضو تغییر طول داد آن را ول کنیم به حالت اولیه برمی‌گردد

یعنی

با توجه به نمودار بالا :

یعنی منحنی بیشتر (بیشتر در نمودار)

OA = منطقه الاستیک خطی

یعنی سرانجام بیشتر با ارتجاعی بازگشت (اندازه در نمودار)

دیر برگشتی

AB : منطقه الاستیک غیرخطی

BC : منطقه پلاستیک (تقریباً افقی است و شیب صفر است)

و الاستیک ارتجاعی نیست

CD : منطقه سخت‌شدگی مجدد تغییر شکل

و نقطه D ، نقطه گسیختگی (پاره‌شدن) فولاد است.

$\frac{15}{100} \times 5$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

st به معنای فولاد است

مثلاً st37 یعنی فولادی که نقطه‌ی گسیختگی آن $37 \frac{kg}{mm^2}$ است

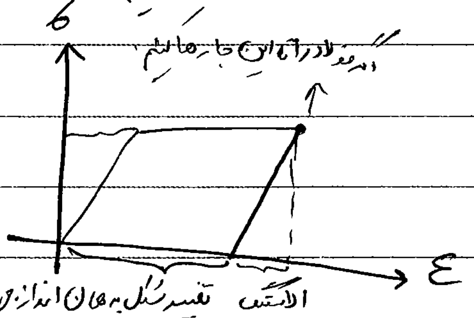
نکته در مورد نمودار تنش - کرنش:

در عمل وقتی ابعاد از منحنی AB (الاستیک غیرخطی) صرف‌نظر می‌کنند [اما در تئوری باید باشد]

و در عمل ملاک ما 370 Mp نیست بلکه 240 Mp است. یعنی اگر تنش بیش از 240 باشد تغییر شکل خیلی زیاد می‌شود.

[برای شکل‌پذیری به ε و برای سختی به σ توجه می‌کنیم]

فرض می‌کنیم که فولاد تا 240 تحمل می‌کند و ضریب اطمینان را 240 قرار می‌دهیم.



(معمولاً نمودار فولاد را تا همین جا رسم می‌کنند)

اثبات $\delta = \frac{PL}{EA}$:

قانون هوک:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

تغییر طول در اثر نیروی فشار

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Longrightarrow (I)\ \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

علامت δ به P بستگی دارد و طول L و E و A همواره مثبت هستند

الف) برای استفاده از فرمول (I) باید در تمام طول عضو (L) سه شرط زیر برقرار باشد:

1) عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)

2) همگن باشد (E ثابت باشد)

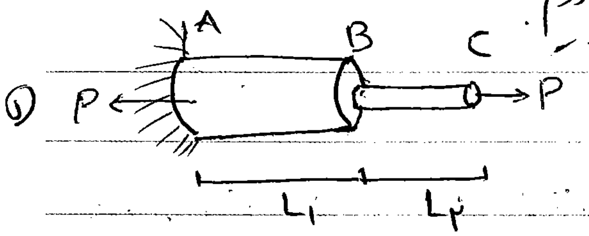
3) مقطع عضو یکنواخت باشد (A ثابت باشد)

در صورت برقراری این شروط از فرمول I استفاده می‌کنیم.

SUBJECT :

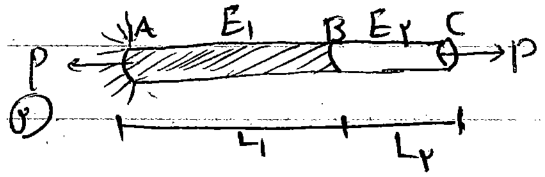
Year ( ) Month ( ) Date ( )

ب) اگر در طول عضو نیرو (P) یا جنس (E) یا مساحت مقطع (A) به طور ناگهانی یا غیر تدریجی تغییر نماید، عضو را به چند قسمت مجزا تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن به طور مجزا ۳ شرط صفحه قبل را دارا باشد و از فرمول زیر تغییر طول کل عضو را بدست می‌آوریم:

①


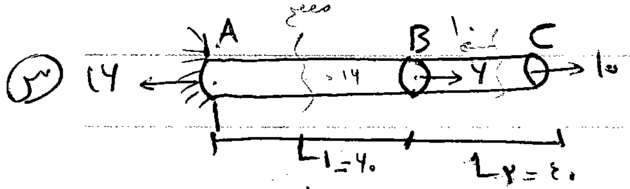
A ثابت است

$$\boxed{\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_iL_i}{E_iA_i}} \quad (II)$$

②


E ثابت است

$P + 4 - 16 = 0$

③


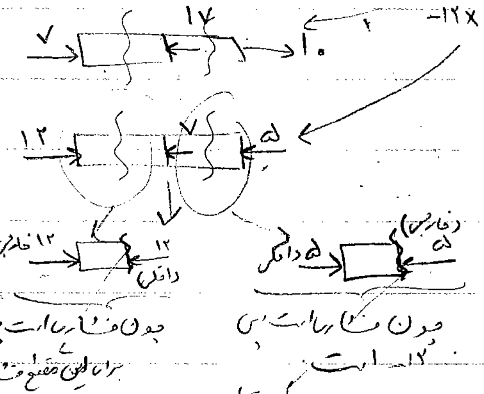
P ثابت نیست

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

$12\times60 \quad 10\times40$

$-7\times60 \quad 10\times40$

$-12\times60 \quad -5\times40$



برای شکل ①:

از آنجا که ثابت است آن را بیرون

$$\delta=\frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1}+\frac{L_2}{A_2}\right)$$

برای شکل ②:

$$\delta=\frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1}+\frac{L_2}{E_2}\right)$$

برای شکل ③:

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

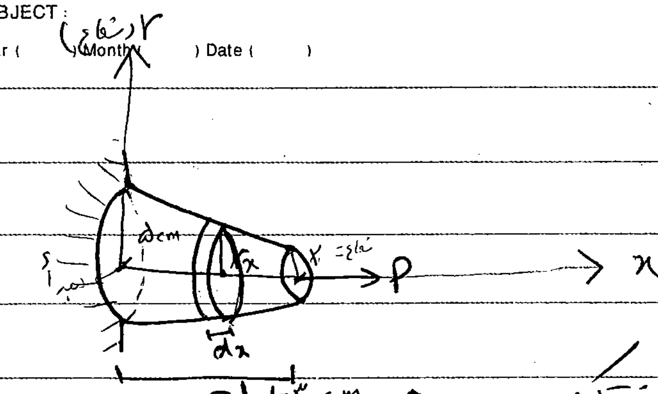
ج) اما اگر نیرو (P) و جنس (E) و یا مساحت (A) در طول عضو به طور تدریجی تغییر نماید از فرمول انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\delta=\int_0^L\frac{P_x\,dx}{E_xA_x}} \quad (III)$$

تابعی برحسب x

تابعی برحسب x

SUBJECT: (درس ۲)
Year ( ) Month ( ) Date ( )



مخروط ناقص
مساحت آن به طور تدریجی تغییر کرده

تغییر طول این المان می‌شود:

$$\delta = \frac{P\,dx}{E \cdot A}$$

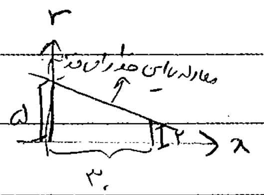
اما برای کل شکل باید از این المان انتگرال گرفت که می‌شود تغییر طول کل.

$$\boxed{\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A_x}} \longrightarrow \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi r_x^2}$$

$r = ax + b$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = ? \\ x = L \rightarrow r = ? \end{cases}$$

مثلاً در مثال زیر:



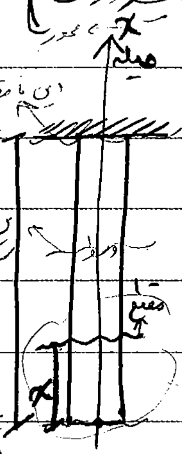
$r = ax + b$

$r_x = 5 - 0.1x$

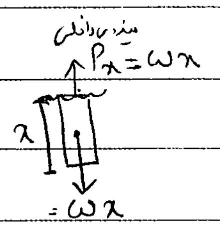
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = 5 \\ x = 30 \rightarrow r = 2 \end{cases}$$

$$\delta = \frac{P}{E}\int_0^{30} \underbrace{\frac{dx}{\pi(5 - 0.1x)^2}}_{\text{برای وقتی که مساحت تدریجی تغییر کند}}$$

* مثال برای این که P تدریجی تغییر کند و حالا کاربرد دارد) [مثال تغییر طول در اثر تغییر وزن]



A ثابت است
E ثابت است
P متغیر است



$$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^L P_x\,dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \omega \cdot x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\omega}{EA}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right] = \frac{\overbrace{\omega L}^{W = \omega \cdot L}{}^{2}}{2E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta = \frac{W \cdot L}{2EA}}$$

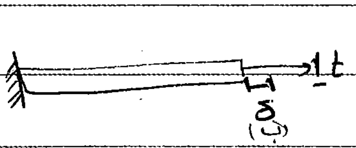
این فرمول برابر فرمول ... است.

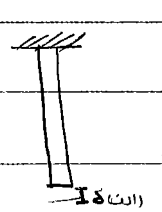
ω = وزن واحد طول

وزن کل میله $= W = \omega \cdot L$

نکته: نیروی داخلی در جایی که مقطع می‌شود وارد می‌شود.

$\delta = ?$



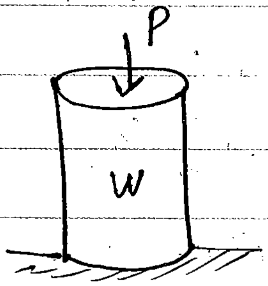


تغییر طول الف معادل تغییر طول ب است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نتیجه مهم: تغییر طول ناشی از وزن نصف تغییر طول ناشی از کشیدن است
کنکوری

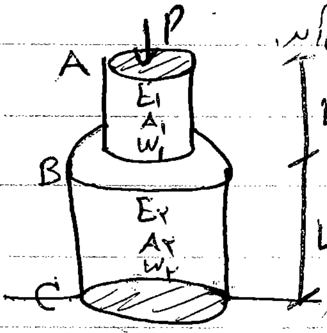


مثال: ستون است که کاهش طول ناشی از:

الف) مقدار کاهش طول $\frac{WL}{2EA} + \frac{PL}{EA}$ ج) $+$ ---

ب) $+$ ---   د) --- ✓ (تغییر طول خواسته شده در سوال)

تست: مقدار کاهش ارتفاع کل ستون ؟؟



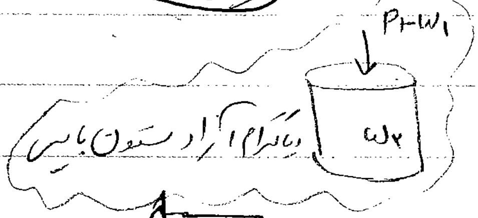
تغییر ارتفاع کل ستون یعنی تغییر ارتفاع AC که از جمع BC + AB بدست می‌آید

$$\delta_1+\delta_2$$

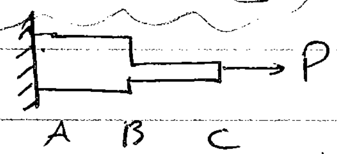
ستون بالایی

$$\delta_{AC}=\delta_{AB}+\delta_{BC}=\left[\frac{PL_1}{E_1A_1}+\frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right]+\left[\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2}+\frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right]$$

با دانستن مدل مسئله قبل هم استفاده کنیم هم به جواب می‌رسیم
آنالیز نکردیم چون



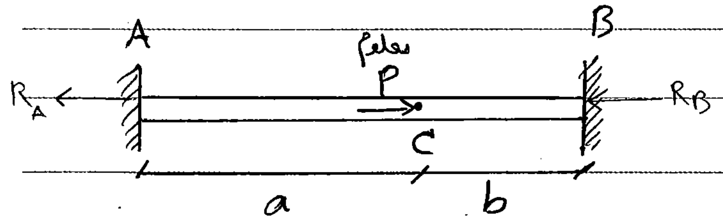
تست:



تغییر مکان (جابجایی) نقطه C = ؟؟

δ_C (تغییر مکان (جابجایی) نقطه C) $=\delta_{AC}$

حل مسائل نامعین استاتیکی :

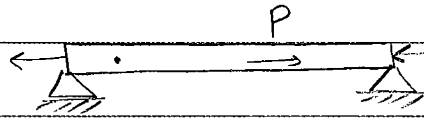


اگر نیروی P عمودی بود هر تکیه گاه ۳ عکس العمل داشت ، ولی چون نیرو افقی است هر تکیه گاه یک عکس العمل دارد

معادله ی تعادل : $\sum F_x = 0$ $\boxed{R_A + R_B = \overset{\text{معلوم}}{P}}$ ①

معادله ی سازگاری : تغییر شکل ها (تغییر طول ها) (در مقاومت) : $\delta_{AB} = 0 \Longrightarrow$

یا

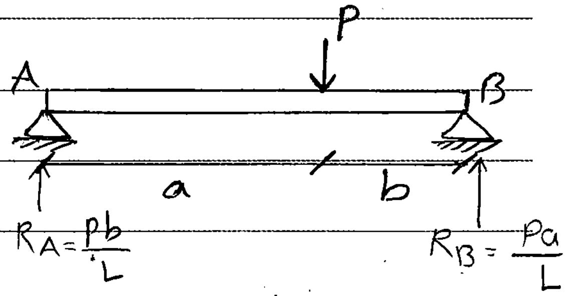


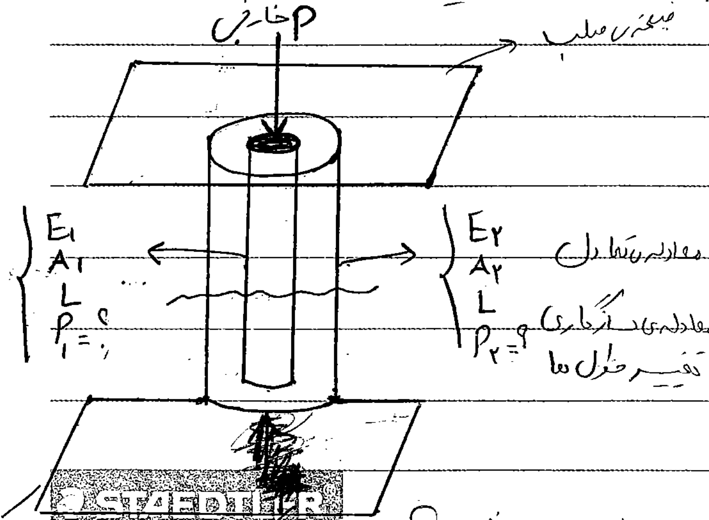
$$\delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$$

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}} \qquad \boxed{\frac{\overset{\text{کششی}}{R_A \cdot a}}{E \cdot A} + \frac{\overset{\text{فشاری}}{-R_B \cdot b}}{EA} = 0} \quad ②$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_A = P\dfrac{b}{L} \\ R_B = P\dfrac{a}{L} \end{cases}$$

** در استاتیک معین در ترم ۱ این جوری حل می کردیم و با حل در مقاومت نامعین در ترم دوم برابر بود **





مثال: نیروی میله و لوله را بدست آورید.

الف) $\sum F_y = 0$

معادله ی تعادل : $\boxed{P_1 + P_2 = P \text{ معلوم}}$ ①

معادله ی سازگاری تغییر طول ها : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول در لوله و میله یکسان است به خاطر وجود صفحه ی صلب

$$\boxed{\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$$

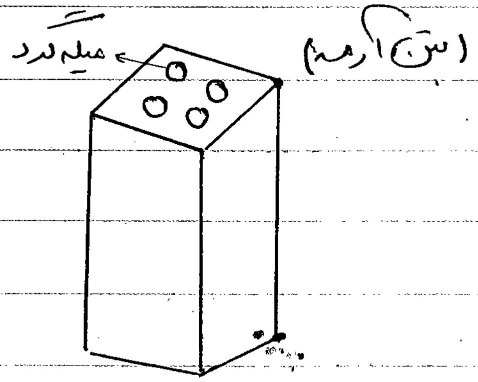
الف) میله ی فولادی داخل لوله آلومینیومی بین دو صفحه ی صلب قرار دارد. صفحه ی صلب روی آن قرار گرفته و بار گسترده P بر آن اعمال شده است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases}$$

می‌توانیم از فرمول بالا استفاده کنیم ؟



$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases} \Rightarrow$$

در ستون شکل مقابل سهم بتن نسبت به فولاد؟ $\dfrac{P_1}{P_2} = ?$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$ (به نسبت صلبیت محوری)

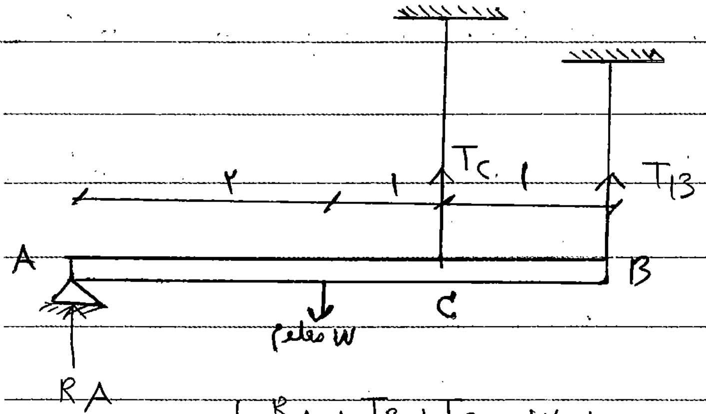
ب) تنش در هر کدام را بدست آورید؟

$$\left.\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P\dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\[2ex] \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P\dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases}\right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

به نسبت مدول الاستیسیته

ج)
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\[2ex] \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases} \qquad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

د)
$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \boxed{\dfrac{PL}{\Sigma EA}} \\[2ex] \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$



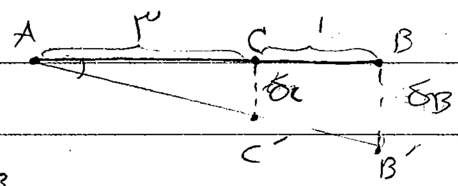
باوجود نیروی W میله حول نقطه A که ثابت است می‌چرخد و در کابل‌ها تغییر طول ایجاد می‌شود.

معادلات تعادل:

$$R_A + T_B + T_C = W_{\text{معلوم}}$$

حول A دوران: $4T_B + 3T_C = 2W$

معادلات سازگاری تغییر طول‌ها:

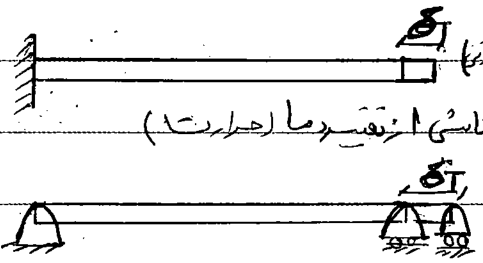


$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_C = \frac{3}{4}\delta_B$$

$$\frac{T_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} = \frac{3}{4}\,\frac{T_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B}$$

اثرات تغییر دما:

(در اثر دما تغییر طول داریم)



(تغییر طول حرارتی)

تغییر طول ناشی از تغییر دما (حرارت)

$$\boxed{\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T}$$

δ_T (mm)، α ($\frac{1}{°C}$)، L (mm)، ΔT (°C) $(T_2 - T_1)$

α: ضریب انبساط طول حرارتی — L: طول — ΔT: تغییر دما

به مساحت بستگی ندارد

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر کشش است.

کرنش حرارتی

$$\boxed{\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$$

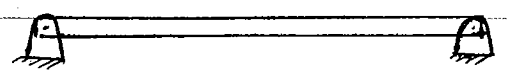
میله‌ای را گرم کنیم و افزایش طول دهد یا سرد کنیم و کاهش طول دهد تنش صفر است. تنش $\sigma_T = 0$

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

- اگر تغییر دما بر میله هایی که می توانند تغییر طول داشته باشند که یک سر میله آزاد است

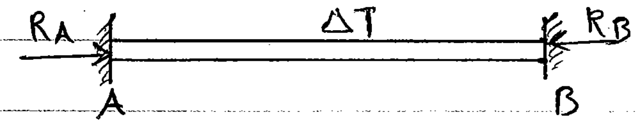
- اگر تغییر دما بر میله هایی که نمی توانند تغییر طول داشته باشند ؟



δ تغییر طول $= 0$

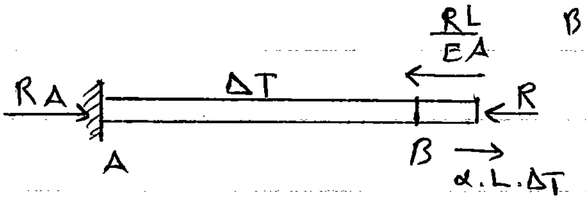
$\varepsilon = 0$

σ تنش $= ?$



معادله ی تعادل : $\Sigma F_x = 0 \implies R_A = R_B = R$

فرض: اگر تکیه گاه B نبود ؛



معادله ی سازگاری تغییر طول ها : $\delta_{AB} = 0$

$$(\alpha . L . \Delta T) + \left(\frac{RL}{EA}\right) = 0$$

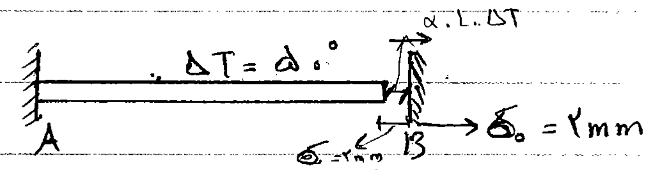
عکس العمل $\boxed{R = -EA . \alpha . \Delta T}$

اگر سرد کنیم $\Delta T \leftarrow - \leftarrow +R$

اگر گرم کنیم $\Delta T \leftarrow + \leftarrow -R$

$$\sigma_{\text{تنش}} = \frac{R}{A} = -E . \alpha . \Delta T$$

مثال: σ تنش $= ?$



δ_T تغییر طول $= \underbrace{\alpha . L . \Delta T}_{5}$ $\begin{cases} 5 \leq \underbrace{\delta_0}_{2} & \text{نمی خورد به تکیه گاه B} \\ 5 > \underbrace{\delta_0}_{2} & \text{می خورد به تکیه گاه B} \end{cases}$

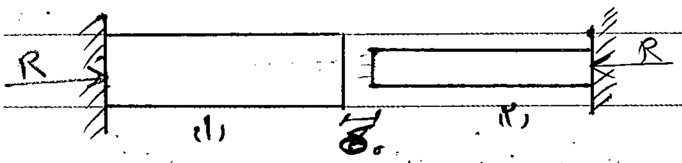
معادله ی سازگاری : $\delta_{AB} = 2mm$

$$\underbrace{\alpha . L \Delta T}_{5} + \frac{R . L}{\underbrace{E . A}_{-3}} = 2 \longrightarrow \boxed{R = 2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: $R = ?$



معادله‌ی سازگاری: $\delta_1 + \delta_2 = \delta_0$ (معلوم)

$$\left(\alpha_1 \cdot L_1 \cdot \Delta T + \frac{R \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}\right) + \left(\alpha_2 \cdot L_2 \cdot \Delta T + \frac{R L_2}{E_2 A_2}\right) = \delta_0$$

اگر دو میله‌ی بالا به هم چسبیده بود و تنش را می‌خواست: $\delta_0 = 0$ می‌گذاریم در معادله‌ی بالا

نسبت پواسون (ضریب پواسون): ص ۵۲ کتاب

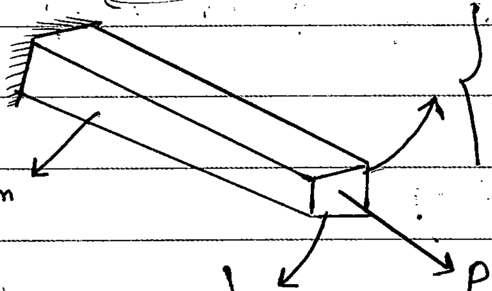
فرض: یک میله‌ی فولادی را در آزمایشگاه تحت کشش قرار می‌دهیم می‌بینیم که طول آن 1mm

$\sigma_x = \frac{P}{A}$

اضافه شده اما تغییر طول در راستای y و z کم‌تر می‌شود. $\sigma_y = \sigma_z = 0$ اما $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ← مدول کشسانی



$L_z = 20\,mm$

$\delta_z = -0.006\,mm$

$\varepsilon_z = -0.0003\,mm$

$L_x = 1000\,mm$

$\delta_x = 1\,mm$

$\varepsilon_x = 0.001 \quad \frac{\delta}{L}$

$L_y = 30\,mm$

$\delta_y = -0.009\,mm$

$\varepsilon_y = -0.0003$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

(برای مواد ایزوتروپ)

$$\underset{\text{(نسبت پواسون)}}{\overset{\text{نو}}{\nu}} = \frac{\text{تغییر طول نسبی جانبی}}{\text{تغییر طول نسبی محوری}} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad \text{یا} \implies$$

$$\implies \boxed{\underbrace{\varepsilon_y = \varepsilon_z}_{\text{کرنش‌های جانبی}} = -\nu \underbrace{\varepsilon_x}_{\text{کرنش محوری}}} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

E ← مدول الاستیسیته

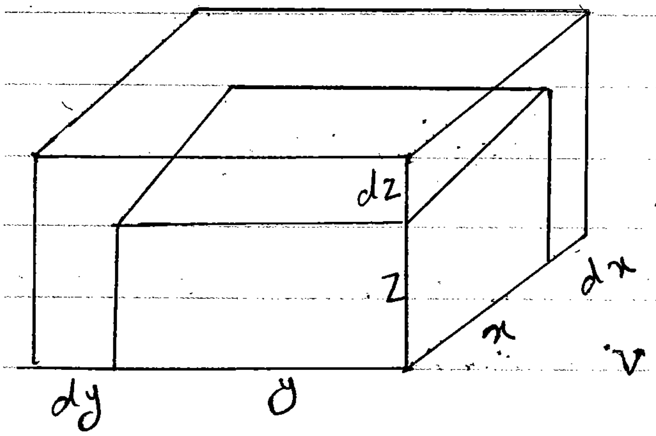
همگن: خواص ماده در تمام نقاط ماده یکسان و ثابت باشد. (خواص عددی) یا اسکالر

ایزوتروپیا: ماده‌ای ایزوتروپ است که کلیه‌ی خواص آن در تمام جهات یکسان باشد

مثال: مثلا اگر یک مکعب فولادی را در آب جوش بیندازیم به همان شکل مکعب می‌ماند چون تغییر طول در تمام بعدها یکسان است.

$v' - v$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی: $\left(\underbrace{\varepsilon_v}_{\text{تغییر حجم نسبی}} = \frac{\delta_v}{v}\right)$



$$V = x.y.z$$

حجم ثانویه $v' = [(x+dx)(y+dy)](z+dz)$

$$[xy + xdy + ydx](z+dz)$$

$$v' = xyz + yzdx + xzdy + xydz$$

$$\varepsilon_v = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ فرمول کلی (I)

** اگر حجمی به هر دلیلی تغییر کرد [نیرو یا دما] ، تغییر حجم نسبی برابر است با مجموع سه تغییر طول نسبی **

کاربرد فرمول: الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری: (تغییر نیرو)

SUBJECT :

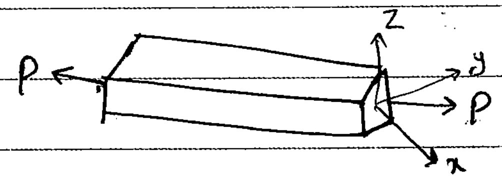
Year ( ) Month ( ) Date ( )

الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

$$\varepsilon_v = \underbrace{\varepsilon_x}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_y}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_z}_{\alpha\Delta T} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = 3\alpha \cdot \Delta T} \quad (II)$$

ضریب انبساط حجمی حرارتی

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری:



$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_y}_{-\nu\varepsilon_x} + \underbrace{\varepsilon_z}_{-\nu\varepsilon_x} \Longrightarrow$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x(1-2\nu)} \quad (III)$$

اگر $\nu = 0 \Longrightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x$

اگر $\nu = 0.5 \Longrightarrow \varepsilon_v = 0$

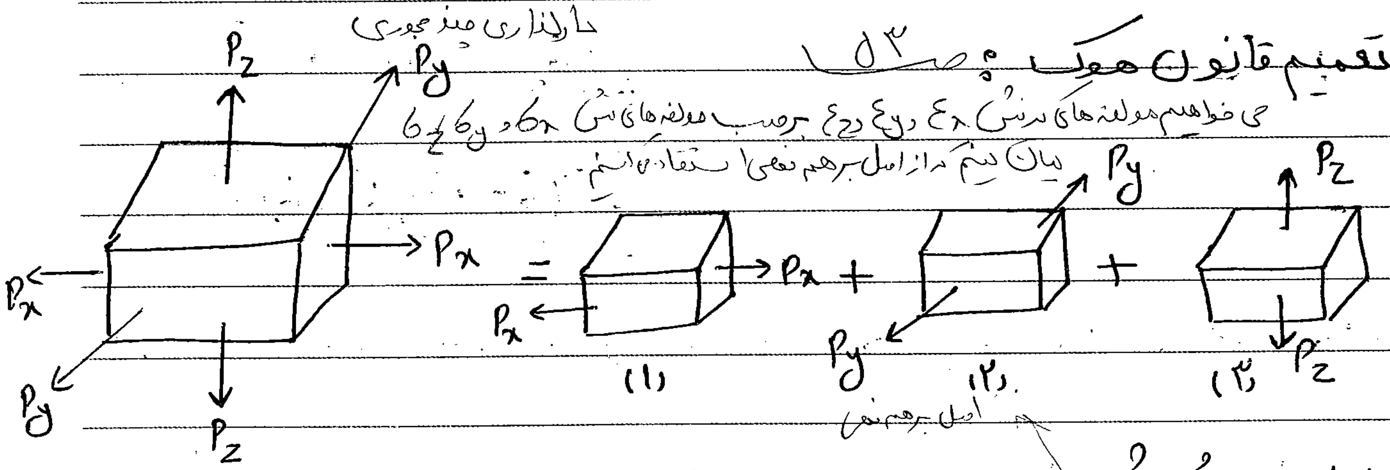
$$\Longrightarrow \boxed{0 < \nu < 0.5}$$

نتیجه: ν بین ۰ تا ۰٫۵ است. ν برابر صفر وجود ندارد. اگر $\nu = 0.5$ باشد امکان ندارد.

بارگذاری چند محوری

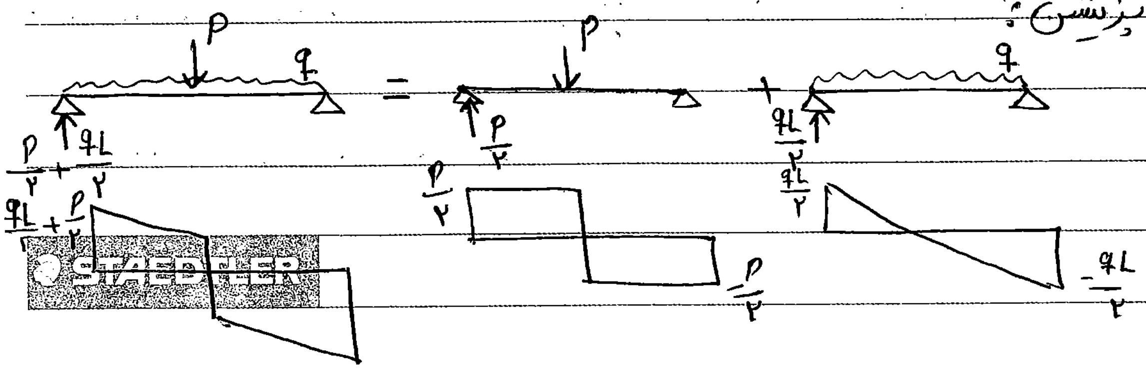
تعمیم قانون هوک: ص ۵۳

می خواهیم مولفه های کرنش ε_x و ε_y و ε_z را برحسب مولفه های تنش σ_x و σ_y و σ_z بیان کنیم. از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم.



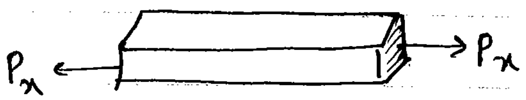
اصل برهم نهی

اصل سوپرپوزیشن:



هوک : $\sigma_x = E\varepsilon_x$

پواسون : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

تحت کشش

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & +\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & +\dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

بارگذاری در امتداد x (۱) — بارگذاری در امتداد y (۲) — بارگذاری در امتداد z (۳)

اگر از در ۳ جهت نیرو وارد شود، (کلاً اگر از تمام وجه ها تحت کشش یا فشار)

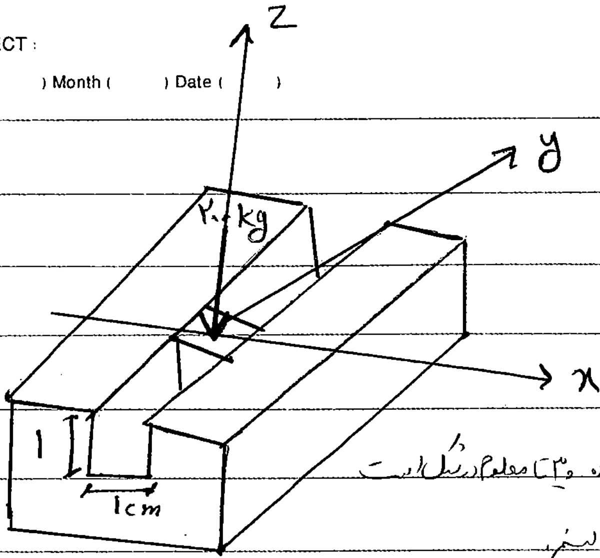
$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y = \text{———} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z = \text{———} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta T \end{cases}$$

اگر علاوه بر اعمال نیرو در هر سه جهت دما را نیز تغییر دهیم

مثال: مکعبی صلب فولادی یک شیار به عمق و عرض 1 cm و یک مکعبی (صلب) لاستیکی به ابعاد 1cm در داخل شیار کاملاً چسبانده شده است و یک فشار ۲۰۰ kg به لاستیک اعمال شده به لاستیک را تحت فشار قرار داده و E و ν لاستیک معلوم می باشد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



$\cancel{\varepsilon_x}$ ε_y ε_z

فشاری

σ_x $\cancel{\sigma_y}$ $\sigma_z \rightarrow -200 \frac{kg}{cm^2}$

نیروی وارد بر هر محور تنش آن وجه محسوب می‌شود.

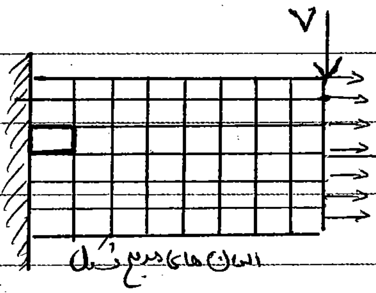
۳ تا مجهول داریم ۲ تا معلوم را مسئله داده و ۳ تا معلوم در شکل است

حال در ۳ معادله‌ی بالا قرار داده و حل می‌کنیم

ε_x صفر است چون دقیقاً داخل شیار است و ε نداریم، σ_y نداریم چون ε_y آن آزاد است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود.

مگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ ؟؟ پس چرا این جا $\varepsilon_x = 0$ است.

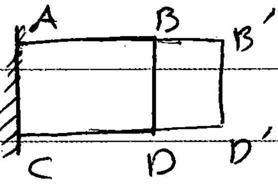
قانون هوک برای تنش‌ها و تنجش‌های (کرنش‌های) برشی:



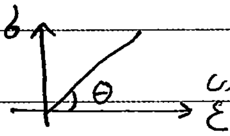
تحت کشش قرار می‌دهیم

در اثر کشش مربع مستطیل می‌شود

در اثر برش مربع متوازی‌الاضلاع می‌شود

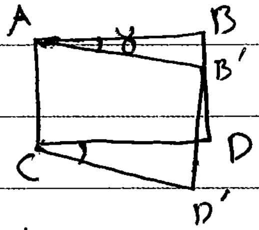


تنجش محوری $\varepsilon = \frac{BB'}{AB}$



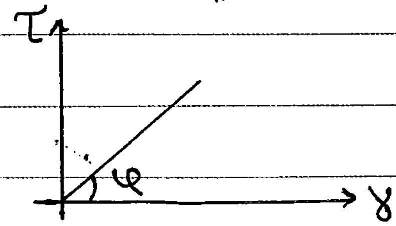
$\tan\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

تنش محوری / تنجش محوری / مدول الاستیسیته محوری



$\tan\gamma = \gamma = \frac{BB'}{AB}$

تنجش برشی



$\tan\varphi = G = \frac{\tau}{\gamma}$

تنش برشی / تنجش برشی

مدل الاستیسیته برشی

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش محوری $\sigma = E \cdot \varepsilon$ کرنش محوری
مدول الاستیسیته

تنش برشی $\tau = G \cdot \gamma$ کرنش برشی
مدول برشی — زاویه یا برش هم هست

اگر دوتا را داشته باشیم سومی بدست می‌آید.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

مثال! $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{G} = 2(1+\underset{0.5}{\overset{0}{\nu}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \frac{E}{G} < 3$

الف) $1 < \frac{E}{G} < 2$

ب) $2 < \frac{E}{G} < 3$ ✓

ج) $3 < \frac{E}{G} < 4$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

فصل سوم: پیچش:

پیچش مقاطع مدور:

در استاتیک ما P (نیروی محوری)، V (نیروی برشی)، T (گشتاور پیچشی) و M (گشتاور خمشی) را بدست می‌آوردیم.

در مقاومت می‌خواهیم ببینیم که P، V، T و M چه نتیجه‌ای می‌دهند (چه تنشی می‌دهند)

نیروی محوری $P \Rightarrow \sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ تنش محوری نتیجه می‌دهد و $\delta = \frac{P\overset{\uparrow}{L}}{E.A}$ (تغییر طول) ⇐ برای تغییر شکل

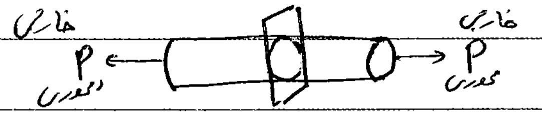
نیروی برشی $V \Rightarrow \tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ تنش برشی نتیجه می‌دهد.

گشتاور پیچشی $T \Rightarrow \tau = ?$ و $\phi = ?$ ⇐ برای تغییر شکل (تغییر زاویه)

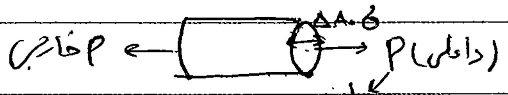
ما تیر را بپیچانیم تا حالتی که از حد آن خارج شود بریده شود و بنابراین تنش برشی ایجاد می‌کند

گشتاور خمشی $M \Rightarrow \sigma = ?$ در فصل چهارم خوانده می‌شود

ما تیر را خم کنیم



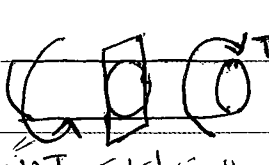
این میله در حال تعادل است پس هر مقطعی از آن هم باید تعادل داشته باشد.



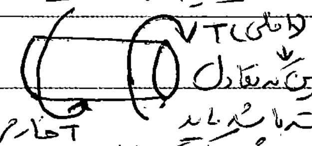
این نیرو ناشی از سطح است.

$$P = \int \sigma . dA$$

فرض: میله مدور داریم که تحت پیچش است (نه کشش و فشار)

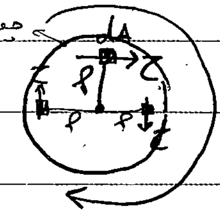


اگر مقطع بزنیم مقطع آن هم در حال تعادل است. T گشتاور پیچشی خارجی



برای اینکه تعادل داشته باشد باید گشتاور پیچشی عکس T خارجی به وجود آید

چون مماس بر سطح است τ ایجاد کننده است.



تنش در تعادل و متناسب بر ρ عمود است

که گشتاور داخلی ناشی از تنش است اما گشتاور خارجی این طور نیست

$$\underbrace{\tau dA}_{\text{نیرو}} . \underbrace{\rho}_{\text{فاصله}} = \underbrace{T}_{\text{گشتاور}} \Rightarrow$$

$P = \int \sigma dA$ ⇐ نیروی کل

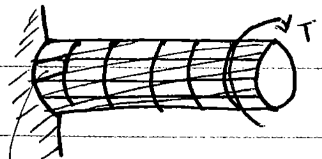
$P = \sigma . A$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\boxed{T=\int_A \rho\,\tau\, dA}$$ گشتاوری که به مقطع وارد می‌شود (این فرمول کاربردی است)

فرض: اگر این میله تحت گشتاور T قرار گیرد خطوط افقی مورب می‌شود و خطوط عمود بر افق دور محورش دوران کند و شکل آن تغییر می‌کند:



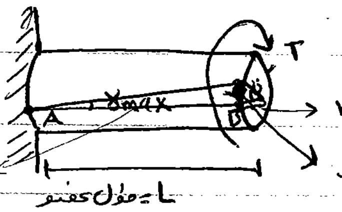
نتیجه: طول تغییر می‌کند (پس تنش برشی است) و زاویه ایجاد می‌شود.

شبیه متوازی الاضلاع شده پس برشی است.

هر تغییر طول ناشی از تنش و فشار است $\sigma = E\cdot\varepsilon$

ما تغییر زاویه ناشی از پیچش است $\tau = G\gamma$

* فرض:



وقتی میله تحت گشتاور پیچشی T قرار گیرد نقطه B تبدیل به B' می‌شود و زاویه γ ایجاد می‌شود که بی‌نهایت کوچک است (شعاع r)

ϕ = زاویه‌ی پیچشی (همان θ است در فصل قبلی)

می‌خواهیم رابطه‌ای بین γ و ϕ بنویسیم (هرچه γ بیشتر شود ϕ هم بیشتر می‌شود)

γ های که روی میله می‌بینیم max است هرچه داخل‌تر برویم γ کوچکتر می‌شود.

* برای اینکه بین γ و ϕ رابطه داشته باشیم باید فصل مشترک آن‌ها که قوس BB' است را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \overset{\text{کمان}}{BB'} = r\phi \\ BB' = L\gamma_{max} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}}$$

المان بی‌نهایت کوچک باشد کمان BB' مانند خط می‌شود

اگر گشتاور پیچشی شعاع r بعداً متمرکز شود

پس اگر میله‌ای فرضی در داخل میله‌ی اصلی بگیریم ϕ تغییر نمی‌کند اما γ تغییر می‌کند. پس γ های که روی میله اتفاق می‌افتد max ولی γ های که داخل‌تر اتفاق می‌افتد ~~کمتر~~.

$$\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$$ شعاع میله‌ی اصلی

$$\gamma = \rho\frac{\phi}{L}$$ شعاع میله‌ی داخلی

بس

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در نتیجه :

(۱) $$\boxed{T = \int_A \rho \tau \, dA}$$

(۲) $$\boxed{\gamma = \rho \frac{\phi}{L}}$$

که به صورت خطی برحسب ρ تغییر می‌کند.

(۳) $$\boxed{\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}}$$

(۴) $$\boxed{\gamma = \frac{\rho}{r}\gamma_{max}}$$

با توجه به قانون هوک $\tau = G\gamma$ اگر طرفین رابطه ۲ را در G ضرب کنیم تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$\tau = G\gamma = G\rho\frac{\phi}{L}$$

اگر طرفین رابطه ۳ را در G ضرب کنیم تنش برشی max ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = Gr\frac{\phi}{L}$$

پس τ_{max} در دورترین ~~نقطه~~ نقاط از مرکز ایجاد می‌شود.

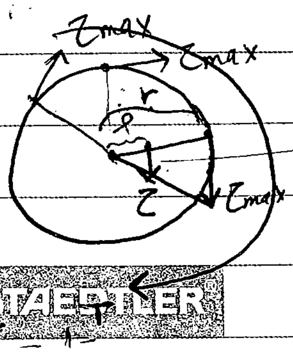
* بیشترین تنش در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود *

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{max}} \quad (۵)$$

اگر طرفین رابطه (۴) را در G ضرب کنیم

$$G\gamma = \frac{\rho}{r}G\gamma_{max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{max}} \quad (۶)$$ کاربردی

مهم.



با توجه به شکل مهم به رابطه بین τ_{max} و τ و r و ρ خطی است. یعنی:

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r}$$

T

معکوس گشتاور پیچشی قرار گرفته.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه‌ی مهم: تنش خطی تغییر می‌کند و به فاصله بستگی دارد [دورترین فاصله از مرکز بیشترین تنش]

طبق رابطه‌ی ۵ و ۱: ۵ را داخل ۱ می‌گذاریم.

$① , ⑤ \Rightarrow T=\int_A \rho\left(\frac{\rho}{r}\tau_{max}\right)dA \Rightarrow$

حل انتگرال در صفحه‌ی الف

$T=\frac{\tau_{max}}{r}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J}$ ممان اینرسی $\Rightarrow \boxed{T=\frac{\tau_{max}\cdot J}{r}}$ (۶) $\Rightarrow$ ظرفیت باربری $\boxed{T_{\text{مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}}\cdot J}{r}}$ حداکثر

مهم‌ترین فرمول

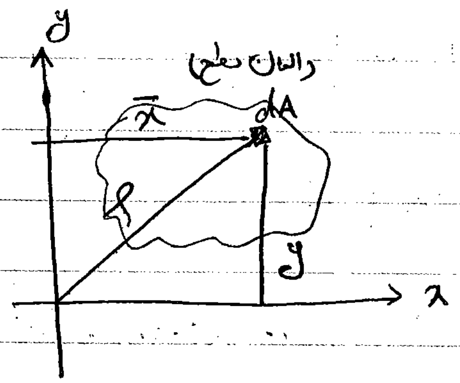
با کنترل فضای پیچشی $\boxed{\tau_{max}=\frac{T r}{J}}$ موجود موجود — فرمول کنترل (۷) فرمول مهم کاربردی

* بار یعنی پیچش یا گشتاور خارجی وارد بر سازه
پس ظرفیت باربری در مقطع یعنی یک مقطع حداکثر پیچش را تحمل می‌کند (T) *

$\boxed{\tau=\frac{T\rho}{J}}$ (۸) فرمول مهم کاربردی

شعاع داخلی (فاصله‌ی مرکز از نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن به دست آوریم)

یادآوری استاتیک (ممان اینرسی):



فاصله x همان چیز = گشتاور هر چیز
ساعت
پیچش

$Q_x=\int y\,dA$ کاربردی (ممان استاتیک نسبت به محور xها) (گشتاور اول سطح نسبت به محور xها) یا گشتاور سطح

$\boxed{\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}}$ مختصات y مرکز سطح

اگر این رابطه را بر A تقسیم کنیم $\bar{y}$ به دست آید یعنی.

$\boxed{\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}}$ مختصات x مرکز سطح

$\boxed{Q_y=\int x\,dA}$ کاربردی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مرکز جرم:
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{m} \quad (dm = \rho\, dV) \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{m}$$

مرکز ثقل:
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \quad (W = mg,\ dW = g\, dm) \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W}$$

همان مرکز جرم

مرکز حجم:
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V}$$

در صورتی که جسم همگن باشد مرکز جرم همان مرکز حجم است

و در صورتی که g ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم برابر است.

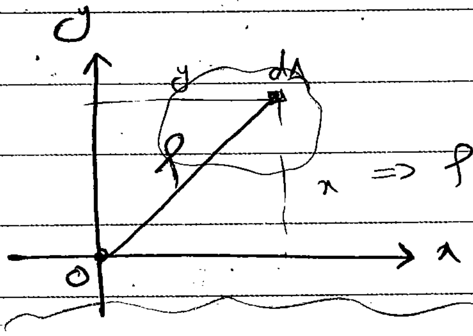
$$I_x = \int y^2\, dA$$ (ممان اینرسی نسبت به x) (گشتاور دوم سطح نسبت به محور x ها)

$$I_y = \int x^2\, dA$$ (گشتاور دوم سطح نسبت به محور y ها)

ممان اینرسی قطبی

$$J = \int \rho^2\, dA \xrightarrow[\rho^2 = x^2 + y^2]{I_x + I_y = J}$$

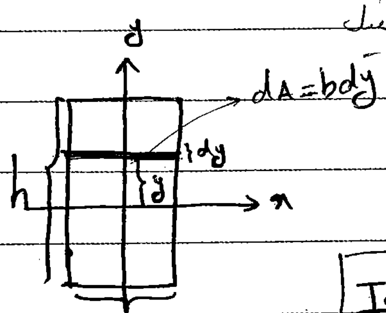
فاصله از محور z ها یعنی فاصله از محور x ها و y ها باشد یا فاصله از نقطه O



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

نکته: برای مقاطع مورد بحث می‌خواهیم (دایره، مثلث، مستطیل)

مستطیل



$$I_x = \int y^2\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b\, dy) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$ حفظ شود.

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}}$$ حفظ شود.

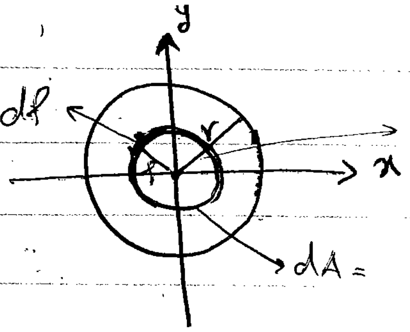
$$J = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$ برای مستطیل

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

حل الف

دایره :



تبدیل به مستطیل می‌شود ⟸ $2\pi\rho$, $d\rho$

$dA = 2\pi\rho\, d\rho$

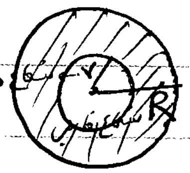
$$J=\int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \Rightarrow \boxed{J=\frac{\pi r^4}{2}}$$

برای دایره

برای دایره ⟸ $\boxed{I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi r^4}{4}}$

$$\begin{cases} I_x + I_y = J \\ I_x = I_y \\ I_x + I_x = J \Rightarrow I_x = I_y = \frac{J}{2} \end{cases}$$

سؤال : $J = ?$

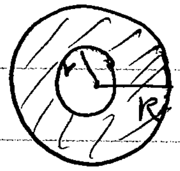


$$J = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) - \left(\frac{\pi r^4}{2}\right)$$

هاشور زده — دایره خارجی — دایره داخل

لوله‌ی توخالی

حالا حالت : میله‌ی توخالی (لوله‌ی توخالی)



$$J = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$

میله‌ی توپر :

τ_{max}

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

برای میله‌ی توپر :

کنترل : $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$, $J = \frac{\pi r^4}{2}$ برای توپر ⟹ $\tau_{max} = \frac{2T_{موجود}}{\pi r^3} \le \tau_{مجاز}$

در کنترل τ_{max} را قدامیم

ظرفیت باربری : $T_{حداکثر\ مجاز} = \frac{\tau_{مجاز}\, J}{r} = \tau_{مجاز} \times \frac{\pi r^3}{2}$

به سمت پایین رند شود

طراحی : $r_{لازم\ حداقل} = \sqrt[3]{\frac{2\times T_{موجود}}{\tau_{مجاز}\times \pi}}$

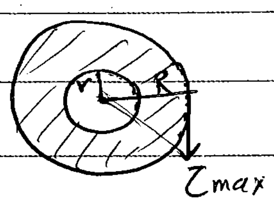
در رند کردن به سمت بالا رند شود

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

در میله توپر τ_{min} صفر است یعنی تنش در مرکز صفر است.

برای لوله :



$$\text{کنترل} : \tau_{max} = \frac{T_{\text{موجود}} \times R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \leq \tau_{\text{مجاز}}$$

$$\text{ظرفیت باربری} : T_{\text{مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}{R}$$

حداکثر
به سمت پایین رند شود.

در طراحی چون بی نهایت جواب داریم یعنی ۱ معادله و ۲ مجهول می شود : طراحی (جواب های متنوعی داریم) که در طراحی یا r یا R مجهول است و یا نسبت $\frac{r}{R}$ یا $\frac{R}{r}$ را می دهند یا مثلاً می گویند لوله ای داریم به ضخامت ... یعنی اختلاف R و r ضخامت ورق را می دهد

$$(7) \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tr}{J}$$

$$\text{هوک} : \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$$

$$(8) \quad \boxed{\gamma_{max} = \frac{Tr}{Gj}}$$ کاربردی است

$$(3) : \gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$$

$$(9) : \gamma_{max} = \frac{Tr}{Gj}$$

$$\cancel{r}\frac{\phi}{L} = \frac{T\cancel{r}}{Gj} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{Gj}} \quad (10)$$ خیلی مهم و کاربردی است.

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma$$ مجاز داریم
$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \leq \tau_{\text{مجاز}}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$
دلتا
تغییر شکل بند رو که (تغییر طول)

$$\phi = \frac{TL}{Gj}$$
زاویه پیچش (تغییر زاویه در پیچش)

EA صلبیت محوری - سختی

Gj صلبیت پیچشی
پیچیدن

ادامه در صفحه بعد

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

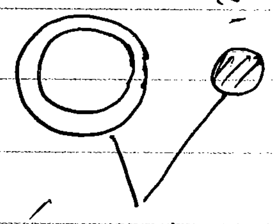
در کشش فشار مساحت مهم است اما در پیچش G مهم است.
در برش هم مساحت مهم است.

$$\underset{mm}{\delta} = \frac{P^{(N)}L^{(mm)}}{E_{(\frac{N}{mm^2})}A_{(mm^2)}}$$

رادیان (بدون بعد)

$$\Phi = \frac{T^{(N.mm)}L^{(mm)}}{G_{(\frac{N}{mm^2})}J_{(mm^4)}}$$

چند درجه بپیچد $x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x$



~~مقابل کشش قوی‌تر مقاومت~~

$$P = \sigma_{\text{مجاز}} \times A$$
معهود مجاز

تنش و مساحت یکسان

چون تنش و مساحت یکسان است طبق رابطه‌ی
$P = \sigma \times A$ معهود مجاز
پس هر دو در مقابل کشش و فشار گنجایش دارند.

هر دو هم: قوی‌ترین بود (τ مجاز بیشتر) در مقابل کشش و فشار
صلب‌تر بودن (Φ مجاز کمتر)

تغییر شکل نشان دهد

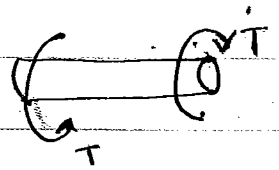
صلبیت پیچشی به G بستگی دارد.

صلبیت محوری به E و A بستگی دارد چون در این شکل
تنش و مساحت یکسان است پس صلبیت محورشان یکی است.

$$\varphi = \Phi = \frac{TL}{GJ}$$ کاربرد فرمول شماره‌ی ۱۰؟

الف) برای به کار بردن فرمول ۱۰ در تمام طول باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: گشتاور پیچشی (T) فقط در ۲ سر عضو اعمال شود (T ثابت باشد)



شرط دوم: همگن باشد (G ثابت باشد)

شرط سوم: مقطع یکنواخت باشد (J ثابت باشد)

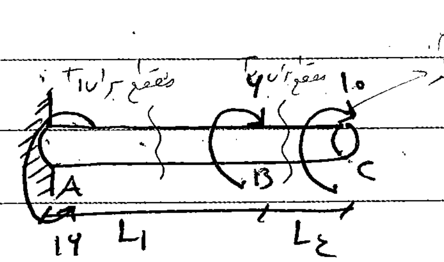
همه جا ثابت است و ۲ گشتاور اعمال شده است.

$x^{c}=\frac{\pi}{180}\times\pi$

ب) اگر T ، G یا J در طول عضو به طور ناگهانی (غیر تدریجی) تغییر نماید زاویه‌ی پیچش

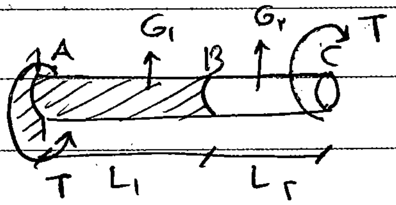
کلی میله [یعنی دو سر میله چقدر پیچیده] از مجموع زیر بدست می‌آید:

$$\varphi=\Phi=\sum_{i=1}^{n}\phi_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_iL_i}{G_iJ_i}$$



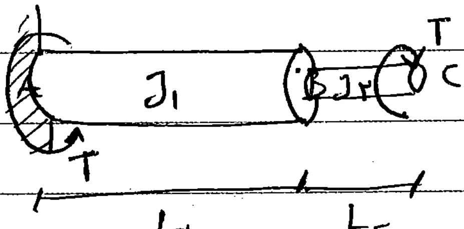
T تغییر کرد

$$\varphi=\frac{10}{GJ}\left(T_1L_1+T_2L_2\right)$$



جنس تغییر کرد (G)

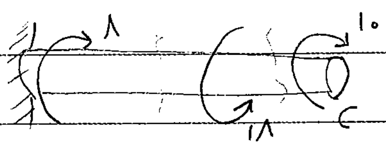
$$\varphi=\frac{T}{J}\left(\frac{L_1}{G_1}+\frac{L_2}{G_2}\right)$$



J تغییر کرد

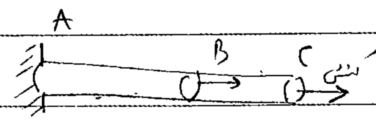
$$\varphi=\frac{T}{G}\left(\frac{L_1}{J_1}+\frac{L_2}{J_2}\right)$$

سؤال:



$$\varphi=\frac{1}{GJ}\left(T_1L_1+T_2L_2\right)$$

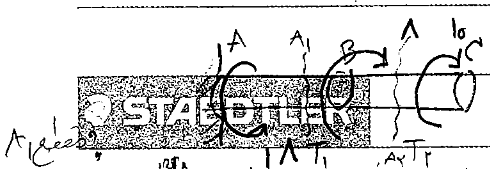
سؤال:



جابجایی نقطه

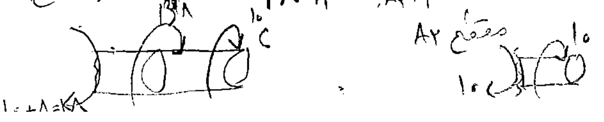
$$\delta_C=\delta_{AC}=\delta_{AB}+\delta_{BC}=\delta_{CA}=\delta_{BA}+\delta_{CB}$$

اما در پیچش این خاصیت نیست: $\varphi_{AB}\neq\varphi_{BA}$



$$\varphi_C=\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}\neq\varphi_{AB}+\varphi_{CB}$$

$\varphi_{CB}\neq\varphi_{BC}$



SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

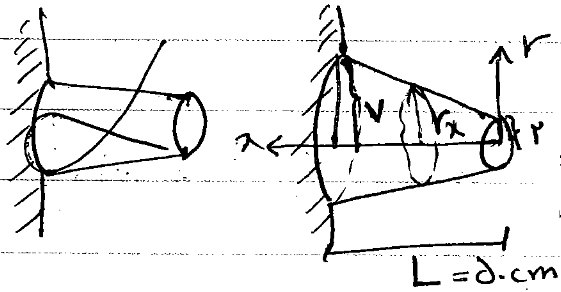
ج) اگر T، G و J در طول عضو به طور تدریجی تغییر کنند، از فرمول انتگرالی زیر زاویه ی φ را

بدست می آوریم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T_x\,dx}{G_x J_x}$$

که این فرمول سه حالت دارد یعنی J تدریجی تغییر کند

تبدیل به مخروط ناقص می شود:



$$\varphi = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{J_x} = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2} r_x^4}$$

معادله ی خط است.

$$\boxed{r_x = ۲ + ۰٫۱x}$$

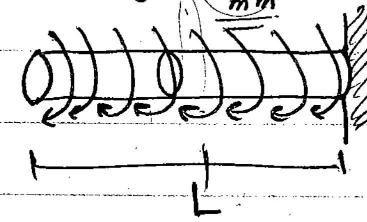
برای این که G تدریجی تغییر کند (جنس تدریجی تغییر کند نداریم)

** — حالت سوم گشتاور تدریجی تغییر کند (از همه مهم تر است):

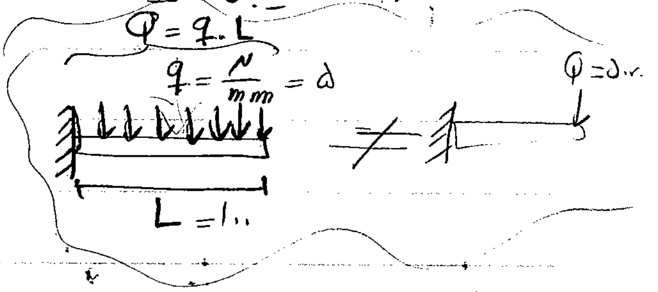
کل گشتاور پیچشی $\leftarrow T = t \cdot L$ (N.mm)

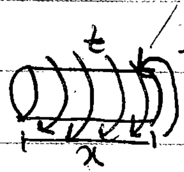
یعنی هر 1mm چقدر گشتاور تحمل می کند

$t = \frac{N.mm}{mm}$



شبیه $\Rightarrow$





$T_x = t \cdot x$ $\qquad \varphi = \frac{1}{GJ}\int_0^L T_x\,dx = \frac{1}{GJ}\int_0^L t \cdot x\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{t}{GJ}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{tL^2}{2GJ} = \boxed{\frac{T \cdot L}{2GJ}}$$

حالت نصف

(یعنی: اگر میله ای را به طور گسترده بپیچونیم زاویه ی پیچشی آن برابر است با نصف حالتی که یک گشتاور در سر میله داشته باشیم و بپیچونیم): خودم

اصلاً دو تا فرمول:

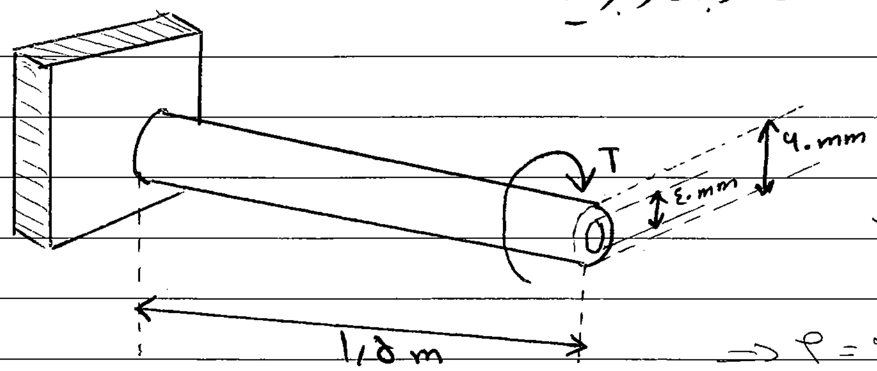
$$\left.\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}\right\}$$ که برای دایره هستند

No..............

مثال ۲.۳ ص ۹۲ :

چه گشتاوری باید بر انتهای میل گردان وارد کرد تا پیچشی برابر با 2° ایجاد شود؟ برای مد

صلابت فولاد مقدار $G = 77 Gpa$ را به کار برید



$T = ?$

$\varphi = 2^\circ = \frac{\pi}{180} \times 2 = 0.03491 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{\varphi G J}{L} = \frac{34.9\times10^{-3} \times 77\times10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left((30\times10^{-3})^4 - (20\times10^{-3})^4\right)}{1.5} = 1.830\ kN.m$$

* مثال ۳.۳ ص ۹۲ :

تنش برشی بر سطح داخلی میل گردان های فولادی توخالی مثال قبل $70 Mpa$ چه زاویه‌ی پیچشی را ایجاد کند؟

چون تنش در سطح داخلی را داده، یعنی ما دیگر به سطح خارجی احتیاج نداریم. و همه جا سطح داخ

می‌گذاریم

$\varphi = ?$ $\tau = 70\times10^{6} pa$ $\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \tau = \frac{TR}{J}$

$$T = \frac{\tau \cdot \frac{\pi}{2}(r^4)}{r} = \frac{70\times10^{6} \times \frac{\pi}{2}(20\times10^{-3})^4}{1319.468915 \quad 20\times10^{-3}} = 879.64\ (N.m)$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{879.64\times1.5}{77\times10^{9} \times \frac{\pi}{2}(20\times10^{-3})^4} = 0.06818 = 68.18\times10^{-3}\ rad$$

$$\boxed{\varphi^\circ = 68.18\times10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 3.91^\circ}$$

No.

SUBJECT :

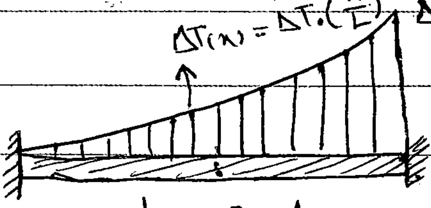
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین :

مقاومت ۱

$F_{محوری} = 0$

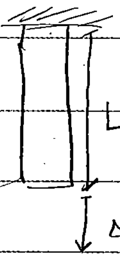
$\Delta T(x) = \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$ ΔT_0



L, α, E, A

$\underbrace{\Delta L}_{تغییر طول} = L \alpha \Delta T$

تنش مقاومت در برابر تغییر شکل

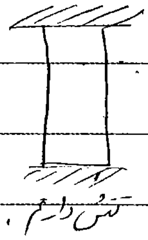


L

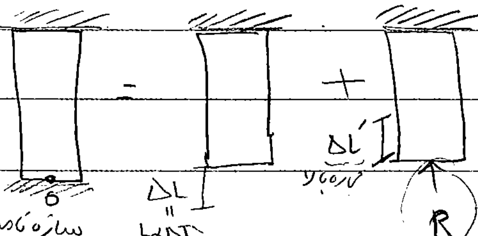
$\Delta L = L \times \alpha \times \Delta T$

چون تکیه‌گاه بازاست پس $\sigma = 0$ تنش است چون هرچقدر دما به آن اعمال شود طول آن افزایش می‌یابد ولی اگر آن را ببندیم در این صورت تنش داریم.

$\Longrightarrow$



تنش داریم.



ΔL $L\alpha\Delta T$ ناشی از حرارت

$\Delta L'$ ناشی از R

سازه نامعین بود

تبدیل به سازه معین شد

R چون نیرو فشاری است تنش فشاری طول داریم

اصل اصل برهم نهی

$\Delta L' = \frac{RL}{EA}$

طبق اصل سازگاری $\Longrightarrow$ $\Delta L + \Delta L' = 0$

چون افزایش طول است ⊕ می‌گیریم

چون کاهش طول است ⊖ می‌گیریم

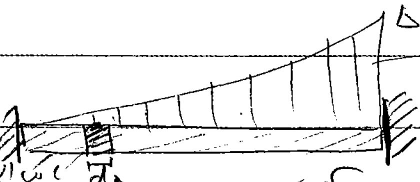
$L\alpha\Delta t - \frac{RL}{EA} = 0$

$L\alpha\Delta T = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{R = E \cdot A \cdot \alpha \Delta T}$

$\sigma = \frac{E \cdot A \cdot \alpha \Delta T}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \Longleftarrow \sigma = \frac{P}{A}$ اگر تنش را می‌خواست با توجه به اینکه

اگر نیروی داخلی را هم خواست هم همان R که بدست آوردیم می‌شود.



ΔT_0 چون دما به صورت متغیر است تغییر طول به راحتی بدست نمی‌آید تا تغییر طول یک جزء آن را در نظر بگیریم که طول قبل است dx آن

dx یک المان از آن را

حل مسئله :

$\underbrace{\Delta_{dx}}_{تغییر طول المان} = \underset{dx}{L} \times \alpha \cdot \Delta T = dx \times \alpha \times \Delta T$ انتگرال می‌گیریم

$\underbrace{\Delta}_{تغییر طول کل میله ناشی از دما} = \int_0^L \alpha \Delta T dx = \int_0^L \alpha \left(\Delta T_0 \frac{(x)^2}{L^2}\right) dx = \frac{RL}{EA} \Rightarrow \frac{\alpha \Delta T_0}{L^2} \int_0^L x^2 dx = \frac{RL}{E}$

$\Longrightarrow R = \frac{E \times \alpha \times A \times \Delta T_0}{3}$ $\sigma = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثل مهم (امتحانی)

** مثال: در شکل مقابل میله‌ی وسط را کشیده و به وسط قطعه‌ی صلب AB (نقطه‌ی C) متصل می‌کنیم سپس ۳ میله را به اندازه‌ی $\Delta T = 50^\circ C$ گرم می‌کنیم، تنش در ۳ میله را بدست آورید.

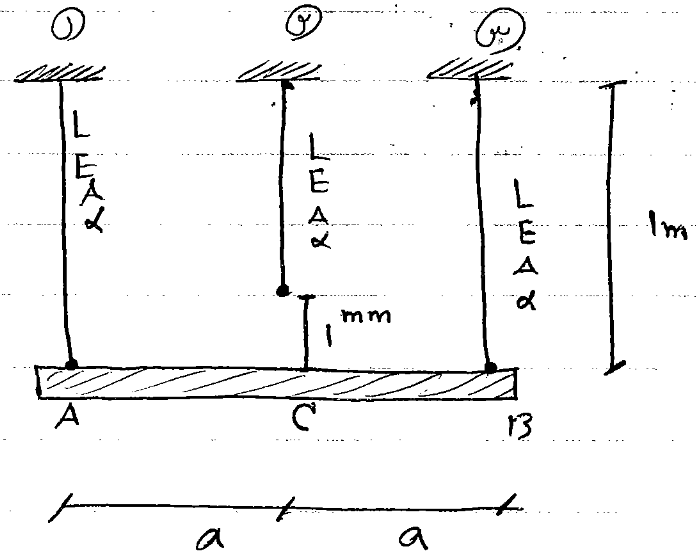
جدول الاستیسیته

$E = 2\times10^{5}\ (\frac{N}{mm^2})$

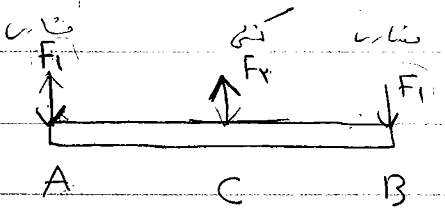
$A = 300\ mm^2$

$\alpha = 1.2\times10^{-5}\ \frac{1}{C^\circ}$

$L = 1m$



وقتی میله‌ی وسط کشیده می‌شود میله‌های کناری فشرده می‌شوند. یعنی در میله‌ی ۱ و ۳ تنش فشاری داریم و در میله‌ی ۲ تنش کششی داریم.



سه تا نیرو و سه تا مجهول داریم، و چون طبق استاتیک می‌دانیم اگر از نقطه‌ی وسط (C) گشتاور بگیریم آنگاه $F_1 = F_3$ برابر می‌شوند که ما F_1 فرض می‌کنیم. پس کلا دو نیروی مجهول داریم.

1^{mm} = کاهش طول میله‌های کناری + افزایش طول میله‌ی میانی

تعادل در راستای قائم: $F_2 - 2F_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = 2F_1$

افزایش طول میله‌ی میانی $= L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}$

کاهش طول میله‌های کناری $= L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}$ ← چون فشاری است برای میله‌ی کناری منفی

$$\left(L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}\right) + \left(L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow F_1 = \frac{\overset{2\times10^5}{E}\times \overset{300}{A}\times 1}{3\underset{1000\,mm}{L}} = \boxed{20,000\ (N)} = 20\,kN$$

$$\boxed{F_2 = 40,000} = 40\,kN$$

SUBJECT :

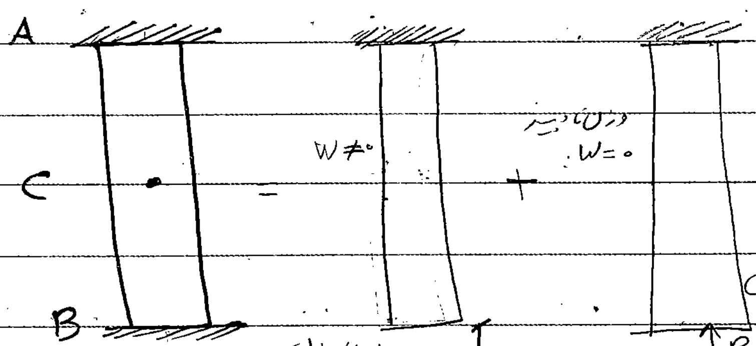
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\sigma_{1} = \frac{F_1}{A} = \frac{۲۰۰۰}{۳۰۰}$$

$$\sigma_{2} = \frac{۴۰۰۰}{۳۰۰} \qquad \sigma_{3} = \frac{۲۰۰۰۰}{۳۰۰}$$

مثال: میله‌ای با مشخصات داده شده (E و A و L و W) مطابق شکل به دو تکیه‌گاه صلب A و B متصل شده است تنش را در نقاط A و B و C (وسط میله) تعیین نمایید.

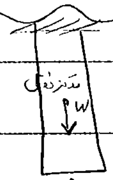
وزن میله



افزایش طول $\Delta = \dfrac{w(\frac{L}{2})}{EA}$

کاهش طول $\Delta' = \dfrac{RL}{EA}$

نکته:



$$\Delta L = \frac{W \times \frac{L}{2}}{EA}$$

تغییر طول میله تحت تاثیر وزن

وقتی وزن ناچیز نباشد وزن را باید در مرکز ثقل آن قرار داد که در این صورت L تبدیل به $\frac{L}{2}$ می‌شود.

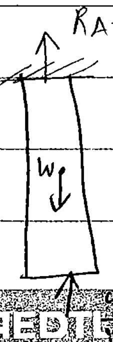
اما

$$\Delta L = \frac{PL}{EA}$$

تغییر طول میله تحت نیروی خارجی

معادله سازگاری: $|\Delta| = |\Delta'| \Longrightarrow \dfrac{wL}{2EA} = \dfrac{RL}{EA} \Longrightarrow \boxed{R = \dfrac{w}{2}}$

$R_A = \dfrac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_A = \dfrac{w}{2A}}$



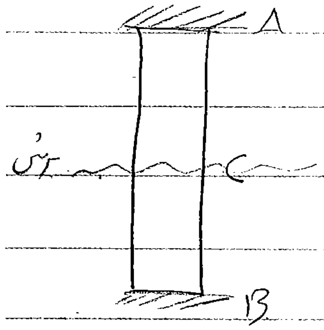
$R_B = \dfrac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_B = \dfrac{w}{2A}}$

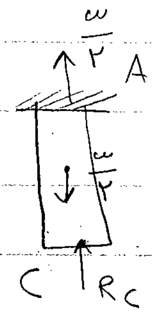
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش در نقطه‌ی C :

در هر نقطه‌ای تنش را خواهیم باید برش بزنیم .

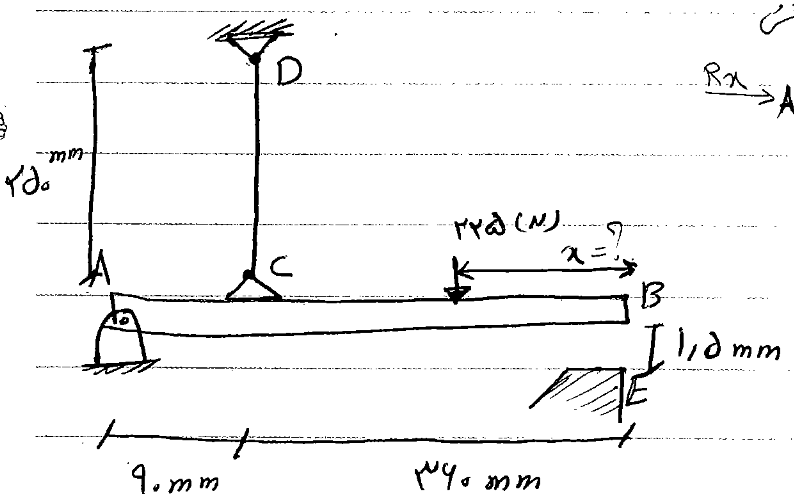


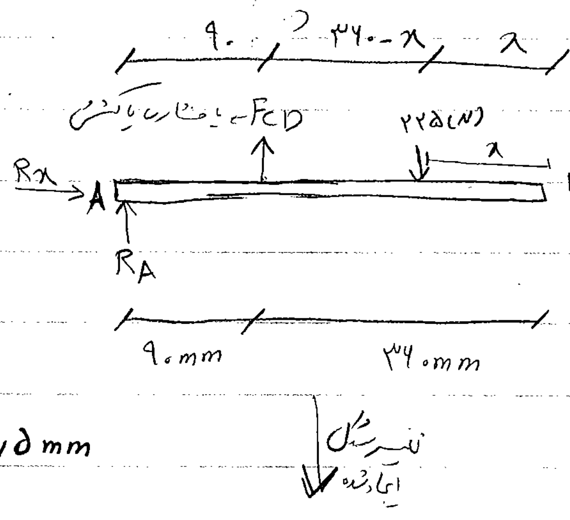


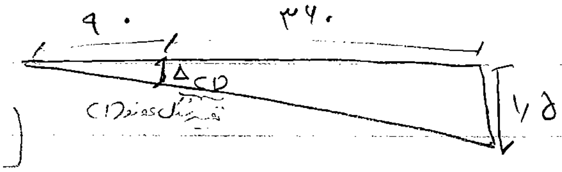
$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow \boxed{R_C = 0} \rightarrow \boxed{\sigma_C = 0}$

مثال: طول سیم فولادی CD به قطر 2mm طوری تنظیم شده است بدون این که باری بر آن وارد شود بین نقطه‌ی B (انتهای تیر صلب AB) و تکیه‌گاه E فاصله‌ی 1.5mm وجود داشته باشد. با دانستن $E = 200$ Gpa (گیگا) برای سیم فولادی کشش بایید در چه نقطه‌ای بار 225(N) را باید بر تیر وارد کرد تا بین نقاط B و E تماس حاصل شود؟

در محل تماس B و E هیچ عکس‌العملی نداریم چون فقط در حد تماس است







تالس (تشابه دو مثلث): $\frac{\Delta}{1.5} = \frac{90}{360} \Longrightarrow \boxed{\Delta = 0.3\,mm}$

$\Delta_{CD} = \frac{F_{CD} L}{EA} \Longrightarrow 10^{-3} \times 0.3 = \frac{F_{CD} \times 250 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{9} \times \pi (10^{-3})^2} \longrightarrow \boxed{F_{CD} = 754\,N}$

قطر = 2mm
شعاع = 1mm

جهت F_{CD} را درست در نظر گرفته‌ایم (+) درآمده

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر حول نقطه‌ی A گشتاور بگیریم جواب بدست می‌آید:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{x = 141.4\ mm}$$

مثال: صفحه‌ی آلومینیومی به ابعاد $20_{mm} \times 150_{mm} \times 200\ mm$ مطابق شکل تحت تنش $\sigma_x = 120\ MPa$ و $\sigma_y = -90\ MPa$ واقع شده است در صورتی که داشته باشیم

$E = 7 \times 10^4\ MPa$

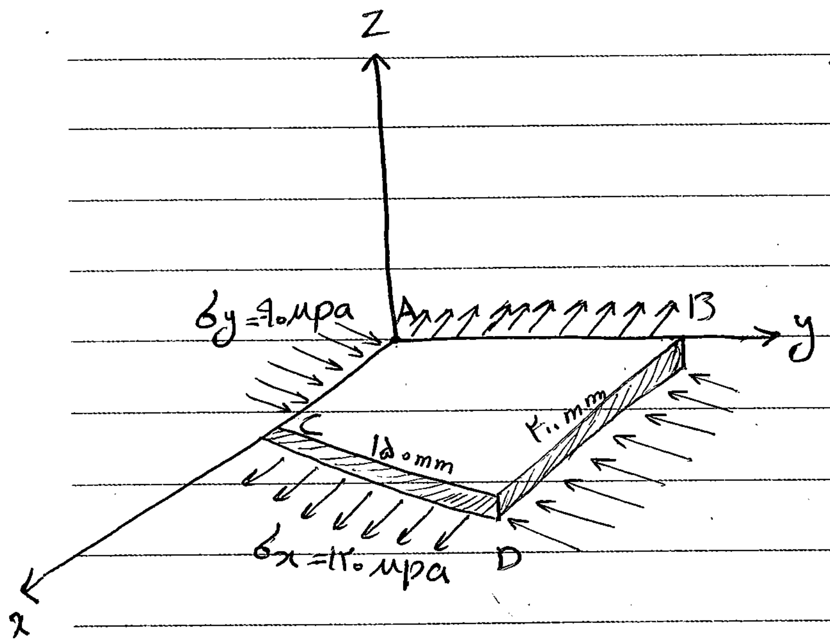
$\nu = \frac{1}{3}$ ضریب پواسون

پس از اعمال تنش‌های فوق مطلوب است:

الف) طول قطر AC

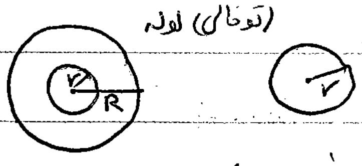
ب) ضخامت صفحه

ج) حجم صفحه



یادآوری: مقطع برای مقاطع مدور:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$ $\qquad$ $J = \frac{\pi}{2} r^4$ ← این فرمول ها چه جداره نازک باشد

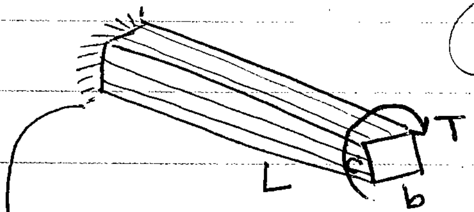
چه نباشد کاربرد دارد

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$$

پیچش مقاطع مستطیلی توپر: (یعنی میله‌ای که مقطع آن مستطیل است)

* $b > c$ باشد

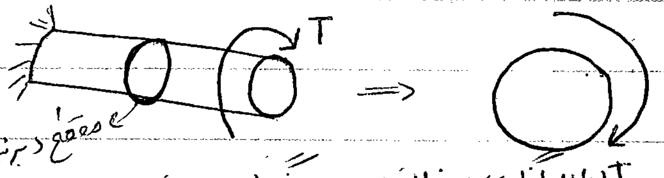


b = طول مقطع مستطیل شکل

c = عرض مقطع

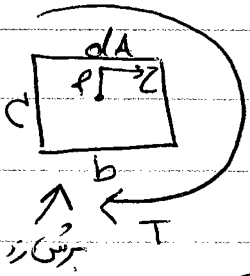
L = طول میله

مثلاً برای دایره:



$T = \int$

T را باید گشتاوری در خلاف جهت گشتاور اصلی اعمال کنیم



$$\boxed{T = \int \rho \tau dA}$$

* این قانون که اعمال بعد از گشتاور، خطوط موازی می‌مانند

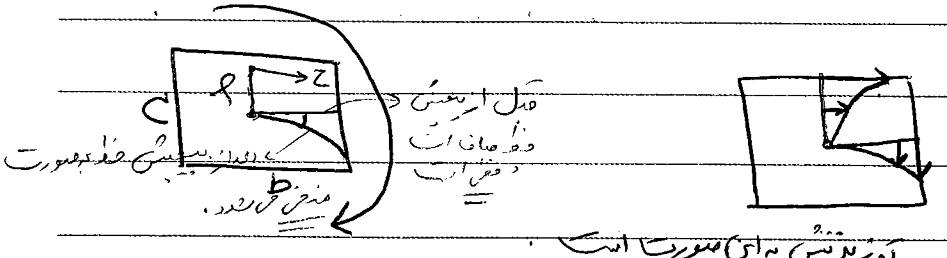
فقط برای دایره صادق است *

یعنی در اینجا برای مستطیل خطوط موازی که روی مستطیل توپر کشیده شده اگر تحت گشتاور T قرار

بگیرد خطوط آن موازی نمی‌مانند

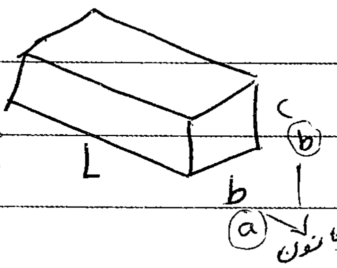
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



توزیع تنش به این صورت است.

در مقطع مستطیلی اگر فرض کنیم ابعاد مقطع b و c باشد و طول L باشد تحت پیچش قرار گیرد در آن گاه:



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3}$$

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{c}$		1	2	3	.....	10	>10
C_1	α	0.208	0.219			0.312	0.333
C_2	β	0.146				0.312	0.333

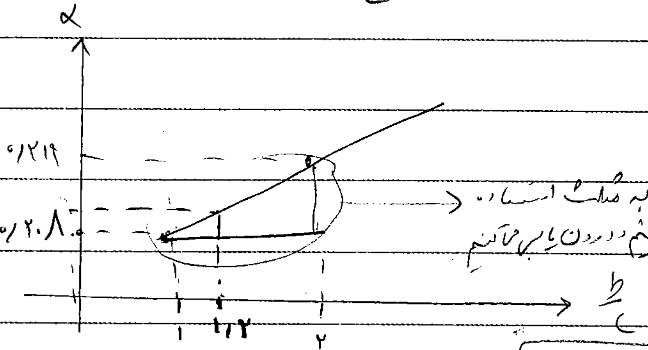
α و β را باید از جدول بیاورد

باید دقت کنیم α و β به $\frac{b}{c}$ بستگی دارد.

(α و β داده می‌شود یا از طریق جدول داده می‌شود)

if $\frac{b}{c} = 1$ یعنی مقطع مربع است

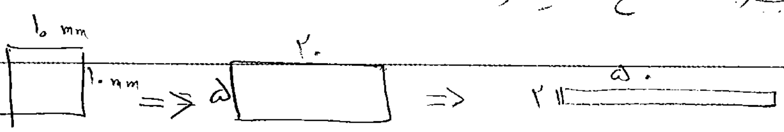
درون‌یابی:



از روش به مثلث استفاده می‌کنیم و درون‌یابی می‌کنیم

بهترین مقطع مستطیلی مربع است یعنی $\frac{b}{c} = 1$

هر چه $\frac{b}{c}$ بیشتر باشد مقطع ضعیف‌تر است.



$\frac{b}{c} = 1$ مثلاً

راحت‌تر از دوله پیچش می‌کند $\frac{b}{c} = 4$

راحت‌تر از همه می‌پیچد.

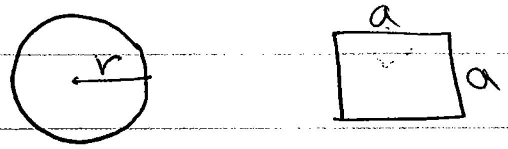
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی: میله ی توپر به شعاع r (سؤال معروفی)

مربع به اضلاع a



$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} = \frac{T}{0.208 a^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G \frac{\pi}{2} r^4} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3} = \frac{TL}{G (0.1406) a^4}$$

الف) در صورتی که جنس و مساحت یکسان باشد

باید نسبت بزرگتر از ۱ باشد؟ مربع ۱ بیشتر باشد.

وقتی جنس ها برابرند یعنی G و وزن مخصوص و ... یکسان

$$\frac{T_1 \text{ دایره مجاز}}{T_2 \text{ مربع مجاز}} = ?$$ نسبت ظرفیت بارپیچشی

چون مساحت یکسان است یعنی داریم: $\pi r^2 = a^2$ باید r^3 و a^3 را داشته باشیم

طرفین را به توان $\frac{3}{2}$ می رسانیم: $\pi\sqrt{\pi} r^3 = a^3$

چون جنس یکسان است

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1 \times \frac{\pi}{2} r^3}{\tau_2 \times (0.208) a^3} = \frac{\frac{\pi}{2} r^3}{(0.208)(\pi\sqrt{\pi} r^3)} = 1.356 > 1$$

هر دایره از هر مربع ۳۶٪ قوی تر است

یعنی یک میله ی دایره ای از یک میله ی مربع شکل گشتاور بیشتری تحمل می کند

ب) در صورتی که طول یکسان باشد و گشتاور پیچشی یکسان تحمل کند (یعنی علاوه بر موارد فوق)

می خواهیم ببینیم کدام φ کمتری دارد.

مساحت یکسان: $(\pi r^2 = a^2)^2$ باید r^4 و a^4 را داشته باشیم

$\pi^2 r^4 = a^4$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$ باید کمتر از ۱ باشد

$$\frac{\varphi_1 \text{ دایره}}{\varphi_2 \text{ مربع}} = \frac{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}\frac{\pi}{2} r^4}}{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}(0.1406) a^4}} = 0.88 < 1$$

$a^4 = \pi^2 r^4$

دایره از مربع ۱۲٪ کمتر می پیچد

یعنی دایره مناسب تر است (کمتر دوران می کند)

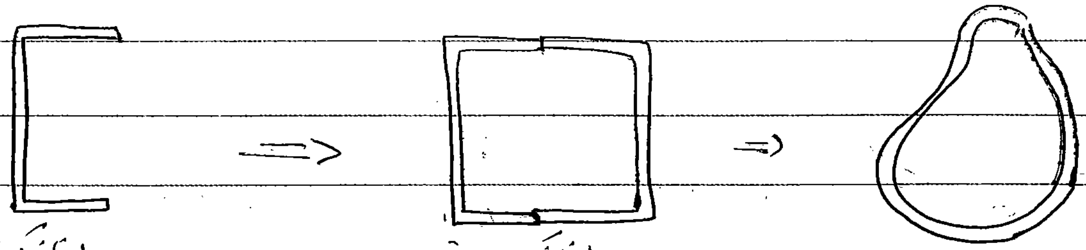
به طور کلی در ... تعداد ... بیشتر باشد بهتر است پس با فرض جنس و مساحت یکسان بهترین دایره است (چون ...) و بدترین مثلث است

از نظر ظرفیت بارپیچشی

هر چه T بزرگتر و φ کمتر باشد ظرفیت پیچشی بهتر است

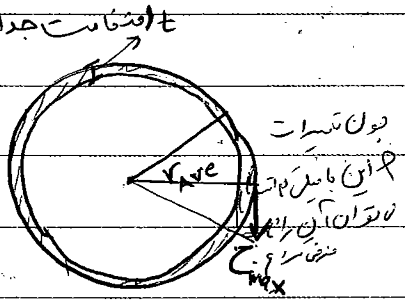
- پیچش مقاطع جدار نازک بسته [جدار نازک توخالی]:

ضخامت جداره کم باشد.



این نوع مقاطع به ۲ دسته تقسیم می‌شوند: مقاطع مدور - مقاطع کلی

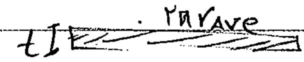
پیچش مقاطع مدور جدار نازک بسته:



چون تغییرات ρ این با مثل کم است می‌توان آن را ثابت فرض کرد

$$J=\int \underbrace{\rho^2}_{r_{Ave}} dA \cong r_{Ave}^2 \times A = r_{Ave}^2 \times (2\pi r_{Ave} \times t) = 2\pi r_{Ave}^3 t$$

تقریب



کنترل:

چون دایره است پس تنش برابر است $\Rightarrow$ $\tau_{max} = \frac{T r_{Ave}}{J} = \frac{T r_{Ave}}{2\pi r_{Ave}^3 \times t} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t} \le \tau_{مجاز}$

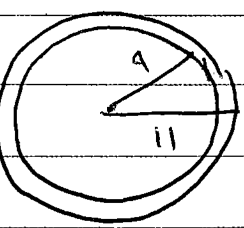
تنش

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 \times t}}$$

برای جدار نازک

اگر مقطع دایره‌ای شکل و ضخامت زیاد دارند نباید از این فرمول استفاده کرد. چون دیگر جدار نازک نیست

مثلا



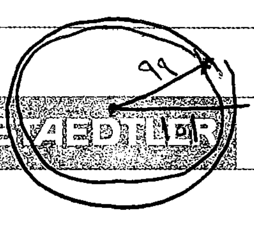
$J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(11^4 - 9^4)$

$J_{تقریبی} = 2\pi (\underbrace{10}_{r_{Ave}})^3 \times 2$

نکته مهم است:

پس: if $\frac{r_{Ave}}{t} \ge 10$ پس $\frac{t}{r_{Ave}} \le \frac{1}{10}$

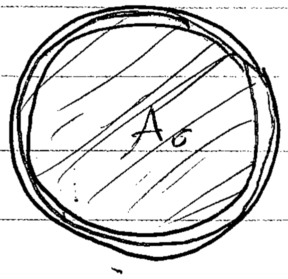
آن‌گاه جداره نازک است



$J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(101^4 - 99^4)$

$J_{تقریبی} = 2\pi (100)^3 \times 2$

پیچش مقاطع کلی جدار نازک بسته :



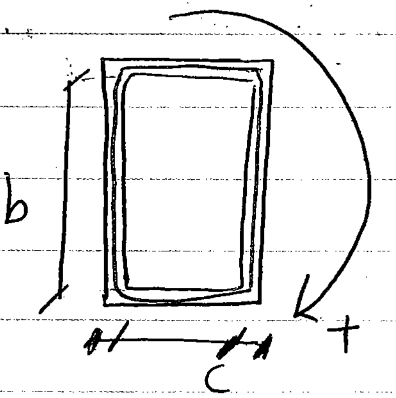
$$A_0 = \pi r_{Ave}^2$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}}$$

فرمول کلی

A_0 می تواند هر چیزی باشد

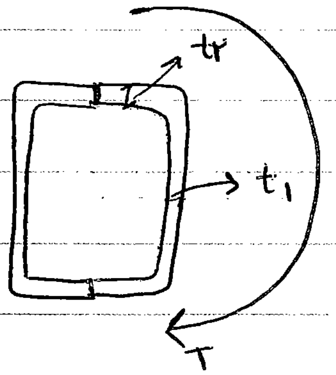
فرمول خیلی کاربردی است برای جدار نازک



$$\tau_{max} = \frac{T}{2\underbrace{bc}_{A_0}t} < \tau_{مج}$$

$$A_0 = b\times c \qquad \varphi = \frac{\tau_{max}\,[2(b+c)]\times L}{2bcG}$$

← با توجه به فرمول صفحه بعد



برای مقاطع مدور :

می دانیم : $\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max}\times 2\pi r_{Ave}^2\, t\times L}{G\times 2\pi r_{Ave}^3\, t} =$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max}\times L}{G\times r_{Ave}}}$$

برای مقاطع مدور جدار نازک

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

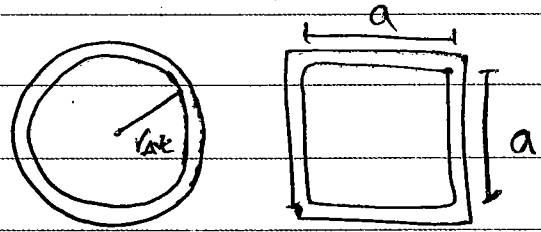
برای مقاطع بسته ، $(r \times t)$ را از صورت و مخرج با هم ساده می‌کنیم.

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^{2} t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^{3} t} =$$

$$= \frac{\overbrace{2\pi r_{Ave}}^{S = \text{محیط}} \times \tau_{max} \times L}{\underbrace{2\pi r_{Ave}^{2}}_{\text{مساحت} = A_0} \times G} \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot S \cdot L}{2A_0 \cdot G}}$$

فرمول برای مقاطع بسته جدار نازک

مثال : سؤال امتحان :



الف) در صورتیکه مساحت (t , S) و جنس یکسان باشد.

یعنی A_0 ثابت ... اگر دو شکل را بگیریم.

t ——— S

$$\frac{T_1 \;\text{دایره}}{T_2 \;\text{مربع}} = ? \qquad \frac{T_1 \;\text{دایره}}{T_2 \;\text{مربع}} = \frac{\cancel{\tau_{max}} \times 2\pi r_{Ave}^{2} t}{\cancel{\tau_{max}} \times 2a^{2} \times t} =$$

$$a^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4}$$

محیط یکسان : $2\pi r = 4a$

$\pi r = 2a$ ← به توان ۲ می‌رسانیم

$\pi^2 r^2 = 4a^2$

$$= \frac{4}{\pi} = 1.27 > 1$$

با شرایط یکسان لوله دایره‌ای گشتاور بیشتری از مقطع مربعی تحمل می‌کند.

ب) در صورتیکه طول یکسان و گشتاور یکسان قرار بگیرد.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$

از رابطه $\frac{TL}{GJ}$ استفاده نمی‌کنیم ، از τ_{max} استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{\tau_1 S L}{2A_{01} G}}{\frac{\tau_2 \cdot S \cdot L}{2A_{02} G}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \times \frac{(A_{02})}{(A_{01})} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} = 0.61 < 1$$

$$\frac{(A_0)_2}{(A_0)_1} = \frac{a^2}{\pi r_{Ave}^{2}} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4}$$

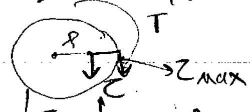
(در این جا هم برای پیچش مقطع دایره از همه بهتر است / مقطع ... از همه بهتر است)

$$\frac{(\tau_1)_{max}}{(\tau_2)_{max}} = \frac{\frac{T}{2A_{01} t}}{\frac{T}{2A_{02} t}} = \frac{\pi}{4}$$

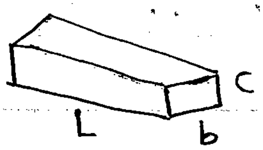
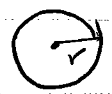
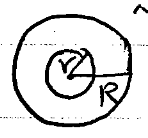
SUBJECT ( ) Year ( ) Month ( ) Date ( )

در این حال ما فرمول تنش را در یک نقطه ی دلخواه که در فاصله ی ρ از مرکز قرار دارد بدست آوریم

$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش در هر نقطه ی دلخواه



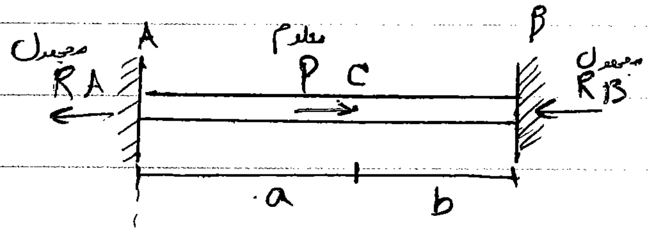
خلاصه :

پیچش مقاطع مدور		پیچش مقاطع مستطیل توپر	پیچش مقاطع جدار نازک بسته (جدار نازک توخالی)	
$\tau_{max}=\frac{Tr}{J}$ و $\varphi=\frac{TL}{GJ}$			مدور	کلی
میله 	لوله 			
$J=\frac{\pi}{2}r^4$	$J=\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)$	$\tau_{max}=\frac{T}{\alpha bc^2}$	$\tau_{max}=\frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t}$	$\tau_{max}=\frac{T}{2A_0 t_{min}}$
$\tau_{max}=\frac{T}{\frac{\pi}{2}r^3}$	$\tau_{max}=\frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)}$	$\varphi=\frac{TL}{G\beta bc^3}$	$\varphi=\frac{\tau_{max}\times L}{G\times r_{Ave}}$	$\varphi=\frac{\tau_{max}\cdot S\cdot L}{2A_0 G}$
$\varphi=\frac{TL}{G\frac{\pi}{2}r^4}$	$\varphi=\frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)}$			

حل مسائل نامعین : تعداد مجهولات > تعداد معادلات = نامعین از نظر استاتیکی

در میله ی دو سر گیردار :

یادآوری :



$$\begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

اگر P در وسط وارد شود (در حالت خاص) $\Rightarrow R_A = R_B$

SUBJECT :

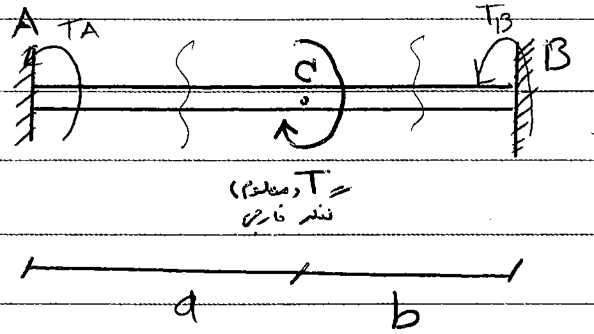
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل مسائل نامعین :

مثال : میله‌ی دو سر گیردار

جهت نگاه

$T_A = ? \quad T_B = ?$



وقتی T به آن وارد شود عکس‌العمل T_A و T_B به وجود می‌آیند که مجموع آن‌ها با T برابر است.

معادله‌ی تعادل : $\sum M_x = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_B = T_{\text{معلوم}}}$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل : $\varphi_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0}$ معادله‌ی سازگاری

$\frac{TL}{GJ} \qquad \frac{TL}{GJ}$

گشتاور پیچشی در مقطع بین C و A برابر با T_A است.   بین C تا B برابر ...

$$\frac{T_A \cdot a}{G \cdot J} + \frac{(T_A - T)\cdot b}{GJ} = 0$$

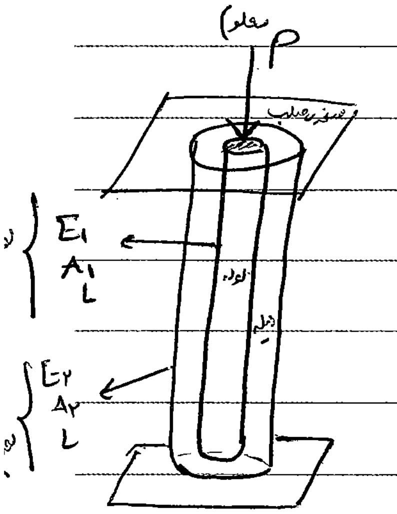
معادله‌ی یک مجهولی (T_A مجهول است) (T معلوم است)

$$T_A = T\frac{b}{L}$$

$$T_B = T\frac{a}{L}$$

گشتاور به هر تکیه‌گاهی که نزدیک‌تر باشد سهم آن تکیه‌گاه از گشتاور درونی بیشتر می‌شود.

مثال : برای ... داریم :



معادله‌ی تعادل : $P_1 + P_2 = P$

معادله‌ی سازگاری : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول

سختی محوری

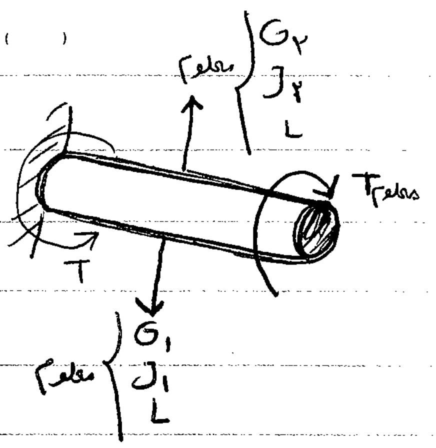
$$P_1 = P\frac{E_1 \cdot A_1}{\sum EA}$$

$$P_2 = P\frac{E_2 \cdot A_2}{\sum EA}$$

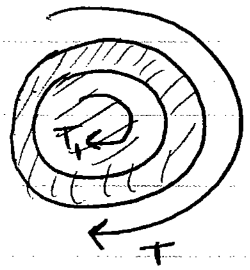
حال می‌خواهیم این میله و لوله را با هم بپیچانیم (یعنی میله و لوله با هم درگیر باشند) مثل شکل صفحه بعد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



مقطع مرکب است یعنی میله و لوله با هم ثابت هستند (روی هم سوار هستند) فرض کنیم تحت پیچش قرار گیرد.



معادله‌ی تعادل : $\underbrace{T_1 + T_2 = \overset{معلوم}{T}}$

معادله دو مجهول پس معادله سازگاری می‌خواهد.

معادله‌ی سازگاری : $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\frac{T_1 L}{G_1 J_1} = \frac{T_2 L}{G_2 J_2} \Longrightarrow$$ از این رابطه T_1 برحسب T_2 بدست می‌آید

درصد از T سهم T_1 است

و اگر T_1 را در معادله تعادل قرار دهیم از آن T_2 بدست می‌آید

$$T_1 = T\frac{G_1 J_1}{\Sigma GJ}$$

$$T_2 = T\frac{G_2 J_2}{\Sigma GJ}$$ صلابت پیچشی

$$\Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\overset{صلابت پیچشی}{G_1 J_1}}{\underset{صلابت پیچشی}{G_2 J_2}}$$

نکته : σ : ε : مسائل طراحی

تحلیل < معین ← استاتیک ← معادله تعادل ؛ نامعین ← مقاومت ← معادله سازگاری

تعیین تنش‌ها و کنترل با مجاز

بارگذاری

تعیین نیروهای خارجی

$$(\overset{تنش}{\tau_1})_{max} = \frac{T_1 \overset{شعاع میله}{r_1}}{J_1} \le \tau_{مجاز} \qquad J_1 \Rightarrow \frac{\pi r^4}{2}$$

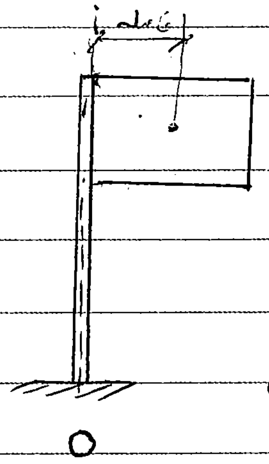
$$(\tau_2)_{max} = \frac{T_2 \overset{شعاع خارجی}{r_2}}{\underbrace{J_2}_{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}} \le \tau_{مجاز}$$

نکته : هر مسئله‌ی نامعین را اول باید نامعینی‌اش را بررسی کنیم یعنی معادلات سازگاری را بخواهیم

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

سوال امتحان ۳ یک تابلوی تبلیغاتی :



فشار باد داده شده است $\frac{N}{mm^2}$ یا $\frac{N}{Km^2}$

مساحت تابلو × فشار باد = نیرو ← این نیرو باعث گشتاور پیچشی می‌شود.

این نیرو در مرکز نیروها است در وسط تابلو وارد می‌شود.

فاصله × نیرو = گشتاور پیچشی

طول محور لوله

استاد: مساحت تابلو × فشار باد = F نیرو

$T_{\text{گشتاور}} = F \times e$

فاصله نیرو

اگر جدار نازک نبود

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{\text{مجاز}}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}} \le \varphi_{\text{مجاز}}$$

تبدیل درجه به رادیان

$3^\circ = \frac{\pi}{180} \times 3$

** وقتی زاویه از یک حدی بیشتر نباید بپیچد یعنی آن $\varphi_{\text{مجاز}}$ را به ما داده

نکته: لوله‌ها دو تا مجهول دارند یا R و r و یا r_{Ave} و t

تمام مسائل طراحی یکی از ۴ حالت زیر است.

در کدام

① یک معادله یک مجهول: $r_{Ave} = ?$ و t معلوم / $t = ?$ و r_{Ave} = معلوم

② دو معادله دو مجهول: $t = ?$ و $r_{Ave} = ?$

τ از τ مجاز بیشتر نشود / φ از φ مجاز بیشتر نشود (۲ معادله)

τ = مقدار = فرمول

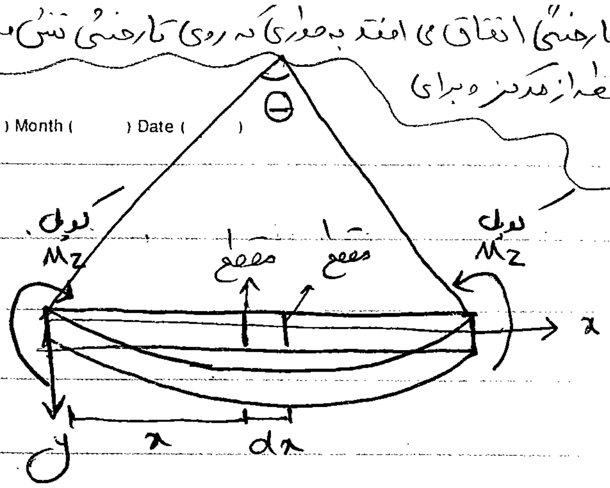
ϕ = مقدار = فرمول

③ یک معادله دو مجهول => بی نهایت جواب دارد (در امتحان نمی‌آید)

④ دو معادله یک مجهول => r_{Ave} = معلوم دو جواب بدست می‌آید که آن که بزرگتر است را انتخاب می‌کنیم ولی اگر جدار نازک باشد ۲ تا t بدست می‌آید و یا ۲ تا r_{Ave} بدست می‌آید که ما بزرگتر را باید در اینجا انتخاب کنیم.

ولی اگر شعاع خارجی ها دست ما باشد ما باید کوچکتر را انتخاب کنیم. یعنی شعاع داخلی را ... باید شعاع داخلی کوچکتر را انتخاب کنیم

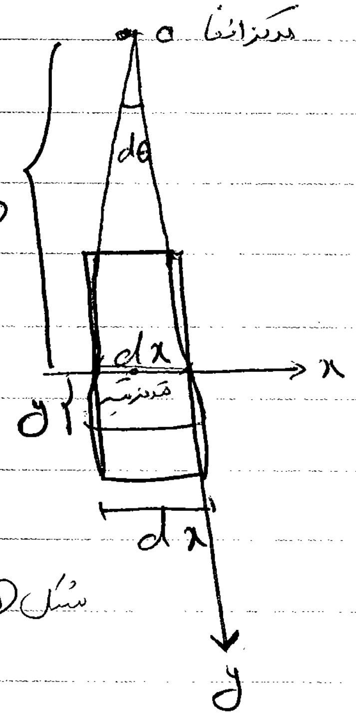
نکته: در بحث خمش بیشترین تنش در دورترین نقطه از تار خنثی اتفاق می‌افتد به طوری که روی تار خنثی تنش صفر است
اما در بحث پیچش برای مقاطع مدور بیشترین تنش در دورترین نقطه از مرکز و برای مقاطع مستطیلی در نزدیکترین نقطه به مرکز اتفاق می‌افتد



فصل ۶: خمش

وقتی تیر تغییر شکل می‌دهد انحنا پیدا می‌کند
در مرکز انحنا همه‌ی مقاطع را قطع می‌کنند

برای پیدا کردن مرکز انحنا به فاصله‌ی x یک مقطع می‌زنیم و مقطع دیگری به فاصله‌ی dx می‌زنیم این دو مقطع را امتداد می‌دهیم



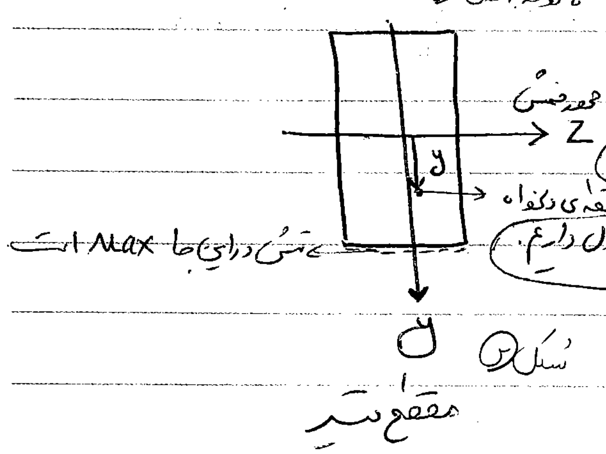
شعاع انحنا
ρ = فاصله‌ی مرکز انحنا تا مرکز تیر

$\Rightarrow$

بعد از تغییر شکل طول در بالا از dx کمتر است و در پایین طول از dx بیشتر است و در واقع فقط وسط dx است.

طبق شکل: $dx = \rho\, d\theta$

قبل از لنگر (شکل تیر خودکار آبی)
بعد از لنگر (شکل تیر خودکار قرمز)



مقطع تیر است (طول تیر نیست) که در این جا محور x دیده نمی‌شود: (برش از طول تیر)؛

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \quad (1)$$

یک نقطه‌ی دلخواه در این مقطع به فاصله‌ی y از محور zها در نظر می‌گیریم و هدف بدست آوردن تنش در این نقطه‌ی دلخواه است.

برای پیدا کردن تنش در این جا از رابطه‌ی اول ثابت می‌کنیم طبق قانون هوک:

$\sigma = E\,\varepsilon$
کرنش (تغییر طول نسبی)

جمع‌بندی
نکته: زیر تار خنثی ← $y>0$ ← افزایش طول ← کشش ← کشیده شدن و ترک خوردن
بالای تار خنثی ← $y<0$ ← کاهش طول ← فشار ← خطر لهیدگی و خرد شدن

طول اولیه تار $= dx = \rho\, d\theta$

طول ثانویه $= (\rho + y)\, d\theta = \left(1 + \frac{y}{\rho}\right)\rho\, d\theta = dx + \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول $= \delta = \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول نسبی $\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{y}{\rho}$

نقطه ای که می خواهیم تنش در آن را بدست آوریم

فاصله ی عمودی نقطه ی دلخواه از تار خنثی

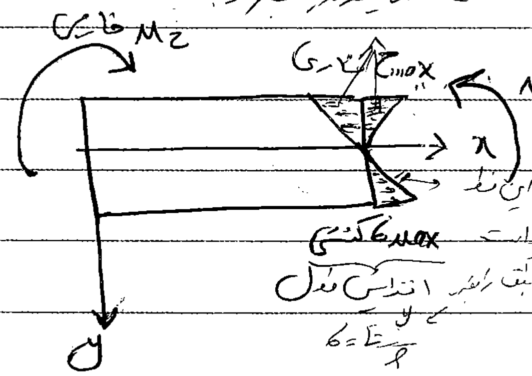
$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$ پس: (۲) $\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$ و $\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$ (۳)

ρ به سادگی در مسائل بدست نمی آید

علامت ε بستگی به y دارد (چون ρ همیشه + است) [زیر تار خنثی $y > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ و برعکس]

در معادله ۲ ، y و ε با هم به صورت خطی ارتباط دارند و (σ و ε) با هم رابطه ی خطی دارند

جهت تنش ها را قرمز یا سبز (به همراه وجود) نشان می دهند



(لنگر داخلی ناشی از تنش است) پس باید تنش وجود داشته باشد

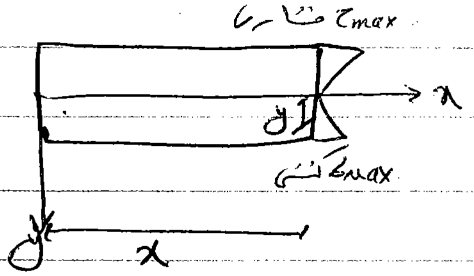
برآیند نیروی کششی پایین و برآیند نیروی فشاری بالا با هم یک لنگر ایجاد می کنند که اندازه اش معادل M داخلی است) $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

(مقدار نیرویی که به سطح کششی وارد می شود باید با مقدار نیرویی که به سطح فشاری وارد می شود برابر باشد تا تعادل داشته باشیم)

نکته: اگر شکل متقارن باشد تار خنثی از وسط شکل عبور می کند ولی اگر نامتقارن باشد باید مرکز سطح را بدست آوریم (مهم)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



در معادلات تعادل حل می‌کنیم.

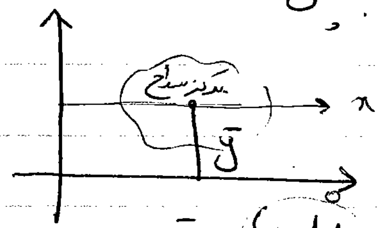
این معادله تعادل: $\sum F_x = 0 \Rightarrow$ یعنی نیروی خارجی در راستای x باید با نیروی داخل در راستای x برابر شود
نیروی خارجی که نداریم پس صفر است
و برآیند نیروهای داخلی هم که همان $\int \sigma dA$ می‌شود

$$\Rightarrow 0 = \int_A \overbrace{\sigma dA}^{\text{نیرو}} = \int_A \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho}\boxed{\int y dA = 0}$$

(4)

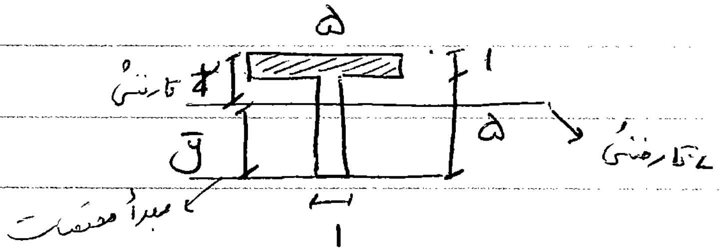
یعنی تار خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

پس: $\boxed{\int y dA = 0}$ گشتاور اول سطح نسبت به محورها صفر است
یعنی مرکز سطح روی محورها قرار دارد.



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = 0$$

مثلاً: برای شکل زیر



$$\bar{y} = \frac{(5\times5.5)+(5\times2.5)}{10} = 4\,cm$$

در معادله تعادل $\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = \underbrace{\int_A \underbrace{y}_{\text{فاصله}} \times \underbrace{\sigma dA}_{\text{نیرو}}}_{\text{گشتاور}} = \int_A y\left(E\frac{y}{\rho}\right) dA =$

گشتاور دوم نسبت به محور x که همان z است (با توجه به تار خنثی)

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{\text{ممان اینرسی} = I_z}} \quad (5) \quad \text{یا} \quad \boxed{M_z = \frac{EI_z}{\rho}} \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{صلبیت خمشی}}}} \quad (6)$$

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

فاصله ی نقطه ی مورد نظر از محور z ها (محور خمشی)

(۳) , (۴) $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma = \dfrac{M_z y}{I_z}}$ (۷)

(۳) : $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$

(۴) : $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از خمش

مهم ترین فرمول (که فرمول شماره ی 3 کاربرد زیادی دارد چون ؟)

ممان اینرسی نسبت به محور خمشی می خواهد

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از ~~پیچش~~ پیچشی $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$ $\longrightarrow$ $\tau_{max} = \dfrac{T_{max} \times r}{J}$

همان ρ_{max} است

فاصله ی نقطه ی مورد نظر از مرکز (محور پیچشی)

ممان اینرسی نسبت به محور z ها (ممان اینرسی قطبی) (محور پیچشی)

$J = \int \rho^2 dA$

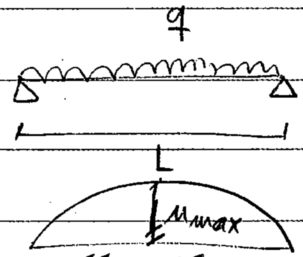
$\sigma_{max} = \dfrac{M_{max} \cdot c}{I} \leq \sigma_{مجاز}$

همان y_{max} است

این را min می خواهیم

حالا M_{max} را پیدا کنیم ؟؟

مثلاً :



$M_{max} = \dfrac{qL^2}{8}$

** M_{max} را باید با رسم دیاگرام لنگر بدست آوریم **

صلبیت محوری EA $\Longrightarrow$ $\delta = \dfrac{PL}{EA}$

یادآوری :

صلبیت برشی GA

** آن چه که در این فرمول ها

صلبیت پیچشی GJ $\Longrightarrow$ $\varphi = \dfrac{TL}{GJ}$

مهم است خاصیت هندسی آن هاست.

اگر مقطع را بکشیم یا فشار دهیم یا

صلبیت ~~پیچشی~~ خمشی EI $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

برش بزنیم A (مساحت) مهم است

و اگر مقطع را بپیچیم J مهم است

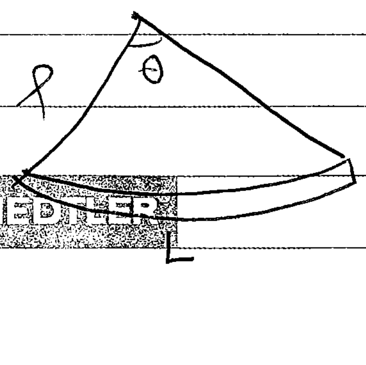
و اگر خم شود I مهم است. **

اگر مقطعی بخواهد در برابر خمش مقاوم بشود باید I را زیاد

کنیم که در این صورت ρ زیاد بشود. هرچه قدر I را زیاد کنیم تنش کمتر می شود.

$\sigma = \dfrac{Mc}{I}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

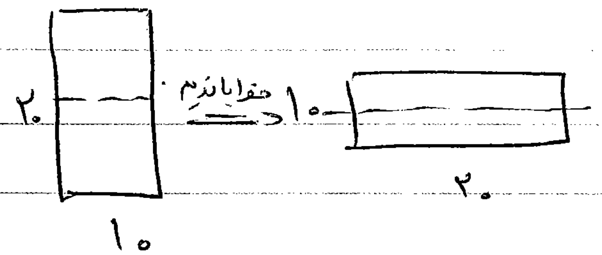
(هرچه قدر ρ بیشتر باشد یعنی کمتر خم شده است)



SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثلاً تیر چوبی با ابعاد ۲۰×۱۰ داریم می‌خواهیم آن را بخوابانیم.



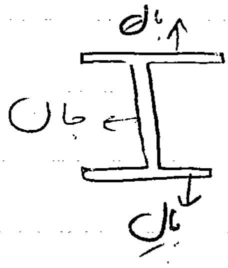
$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{10(20)^3}{12} > I=\frac{20\times(10)^3}{12} \Rightarrow$$

هرچه I بزرگتر باشد σ کمتر می‌شود و M بیشتر می‌شود.

$$I=\int \underbrace{y}_{\text{فاصله از محور خنثی}}{}^2\,dA$$

در خمش همیشه باید I را زیاد کنیم یعنی y را زیاد کنیم مثلاً:

در تیر I شکل:



~~طوری عمل کنیم که بتوانیم جان را نازک بگیریم~~ و
زیاد جان را نازک نمی‌گیریم و زیاد ارتفاع آن را
هم افزایش نمی‌دهیم

نکته: به نسبت $\frac{I}{c}$، S هم گفته می‌شود که مدول مقطع (اساس مقطع) نام دارد.

$$\frac{I}{c}=S \quad (cm^3 , mm^3)$$

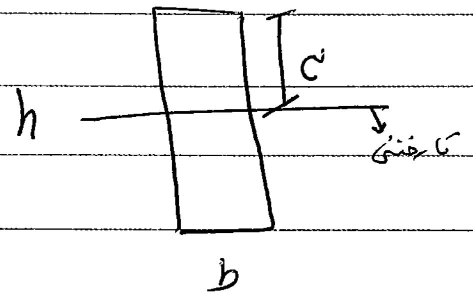
S: مدول مقطع (اساس مقطع)

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M_{max}\cdot c}{I}=\frac{M_{max}}{S}\le\sigma_{\text{مجاز}}}$$

(۸) در واقع فرمول تنش است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$ حفظ شود

کنترل : $\sigma_{max\,موجود} = \dfrac{M_{max\,موجود} \times c}{I_{موجود}} = \dfrac{M_{max}}{S} \le \sigma_{مجاز}$

اگر شکل، نامتقارن بود باید σ کششی و σ فشاری را جداگانه بررسی کنیم.

ظرفیت باری : $M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times \dfrac{I_{موجود}}{c} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود}$

حداکثر (به سمت پایین)

درحقیقت برای طراحی ما I را می‌خواهیم

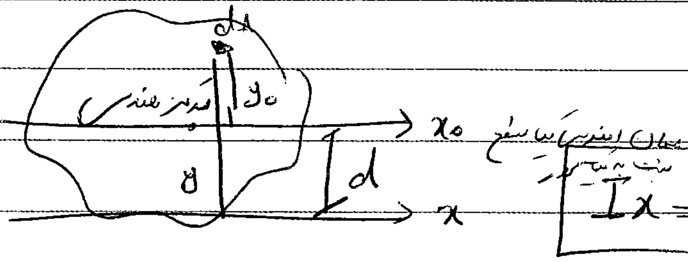
طراحی : $S_{لازم} = \dfrac{M_{max\,موجود}}{\sigma_{مجاز}}$

حداقل (به سمت بالا)

اما اگر I را می‌خواستیم آن گاه c هم مجهول بود پس در این جا برای طراحی ما S را می‌خواهیم.

مقاطع ساده با شکل مستطیل به $I = \frac{bh^3}{12}$ و $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$ ، $S = \frac{bh^2}{6}$ است.

اما در مقاطع مرکب I را بیابید.



I_{x_0} = معلوم　　I_x = مجهول

ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح

$$\boxed{I_x = I_{x_0} + Ad^2}$$

اثبات :

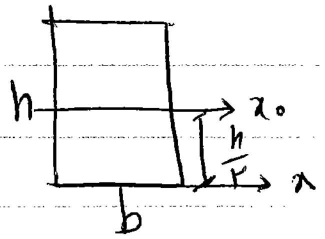
ممان استاتیک نسبت به مرکز سطح صفر است

$$I_x = \int y^2 dA = \int (y_0 + d)^2 dA = \underbrace{\int y_0^2 dA}_{I_{x_0}} + \underbrace{d^2 \int dA}_{Ad^2} + 2d \cancel{\int y_0 dA}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

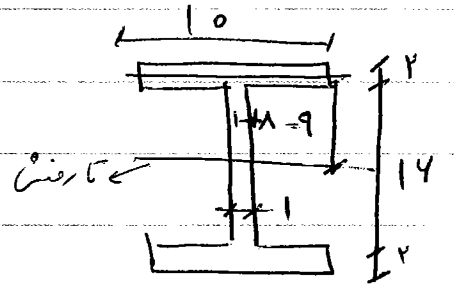
مثال:



$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \overbrace{(bh)}^{A}\overbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{d^2} = \frac{bh^3}{3}$$

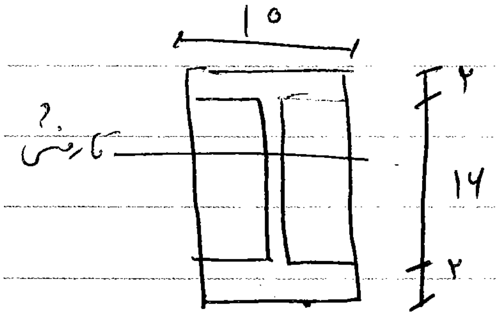
(دایره به درد پیچش می‌خورد اما مستطیل به درد خمش می‌خورد)

مثال ۲:

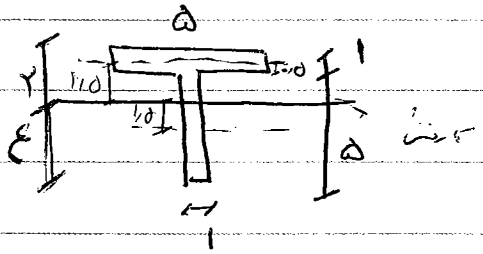


$$I_{\text{کل شکل}} = I_{\text{جان}} + 2I_{\text{بال}}$$

$$\left[\frac{1(14)^3}{12}\right] + 2\left[\frac{10(2)^3}{12} + (10\times 2)(9)^2\right]$$



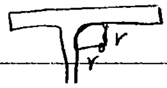
$$I = \frac{10(20)^3}{12} - 2\left[\frac{4.5(14)^3}{12}\right] =$$

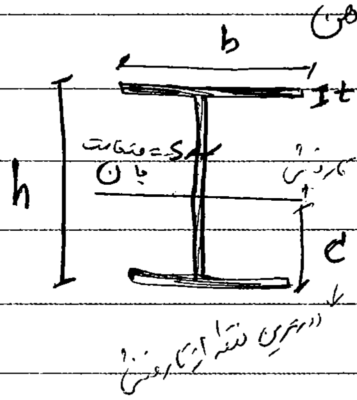


$$I = I_{\text{بال}} + I_{\text{جان}}$$

$$\left[\frac{5(1)^3}{12} + \underbrace{5(1.5)^2}_{Ad^2}\right] + \left[\frac{1(5)^3}{12} + 5(1.5)^2\right]$$

STAEDTLER





تیرآهن

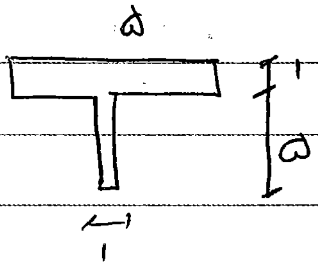
ارتفاع تیرآهن = نمره آن

مساحت مقطع   ممان اینرسی

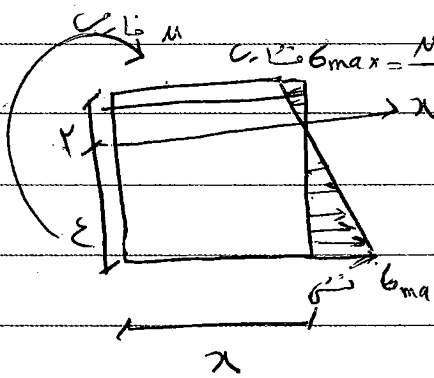
X   Y

IPE	h	b	t	s	r	A	G	I	S	
۸۰										
۱۰۰										
۱۲۰										
⋮										
۶۰۰										

سومین مقطع ، مقاطع پروفیل های استاندارد (کارخانه‌ای)



مقطع نامتقارن



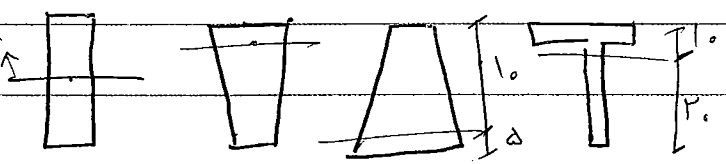
فشاری $\sigma_{max} = \frac{M \times 2}{I} = 30 \le \sigma$ مجاز مثلا ۲۵

کششی $\sigma_{max} = \frac{M \times 4}{I} = 60 \le \sigma$ مجاز مثلا

سازه نامتقارن

مثال : مساحت ها مساوی [اگر

برای چون کدام مناسب است .



چون فشار را بهتر تحمل میکند

الف   ب   ج   د

برای متقارن ها مناسب است.

اگر کششی باشد (ج) درست است

ولی اگر فشاری باشد ب و د درست است

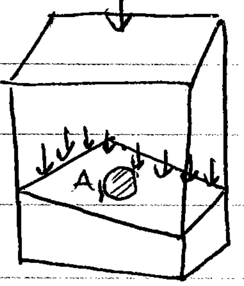
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته ۱: اگر عضوی تحت کشش باشد (منظور تحت نیروی محوری باشد) و مساحت کل سطح A باشد و اگر بخواهیم ببینیم بخش از این سطح مثلاً سطح A_1 چقدر نیرو تحمل کند

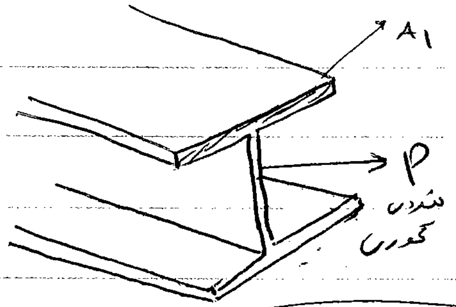
(P نیروی محوری = فشاری)

متمرکز نیست برآیند نیرو است



با فرض این که تنش یکنواخت باشد (یعنی تنش ثابت است از انتگرال بیرون می‌آید) نیرو به نسبت مساحت توزیع برای هر بخش بدست می‌آید

سهم A_1 از کل نیروی محوری برابر است با:



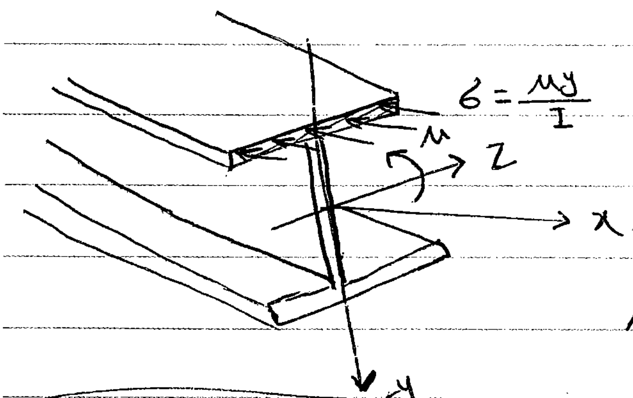
$$P_1=\int_{A_1}\sigma\, dA=\frac{P}{A}\underbrace{\int_{A_1}dA}_{A_1}=\boxed{P\frac{A_1}{A}}$$

نتیجه بسیار مهم

می‌خواهیم ببینیم P_1 چند درصد P است

سهم نیروی ناشی از نیرو

نکته‌ی ۲:



چقدر از لنگر را سطح A_1 تحمل می‌کند؟

$$M_1=\int_{A_1}y\sigma\, dA=\int_{A_1}y\left(\frac{My}{I}\right)dA=$$

$$=\frac{M}{I}\underbrace{\int_{A_1}y^2dA}_{I_1}=\boxed{M\frac{I_1}{I}}$$

نتیجه بسیار مهم

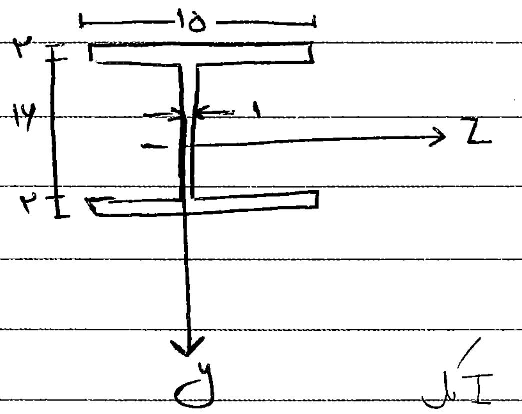
سهم لنگر ناشی از لنگر

اگر عضوی تحت خمش قرار بگیرد و بخشی از آن (مثلاً سطح A_1) چند درصد لنگر را تحمل می‌کند به نسبت ممان اینرسی است ولی برای نیرو به نسبت مساحت است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال برای نکته ی ۲: تیرآهن



سؤال: چند درصد لنگر را بال و چند درصد را جان تحمل می‌کنند؟

وقتی می‌گوید چند درصد یعنی نسبت $\frac{I_1}{I}$ را می‌خواهیم و

M را هم نداشته باشیم اشکال ندارد

I کل را باید با جمع ۳ مستطیل بدست آوریم

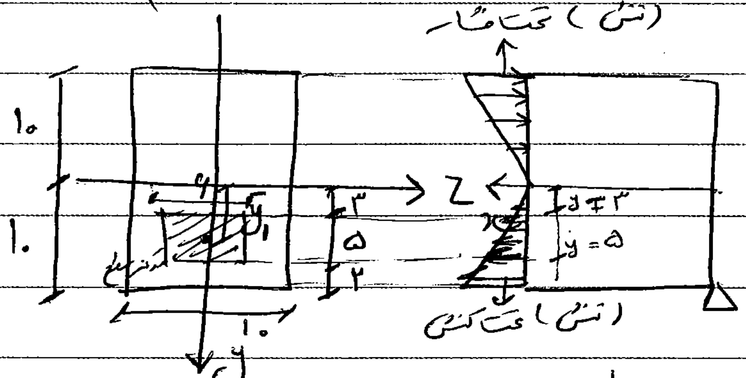
$$I_{\text{کل}} = I_{\text{جان}} + 2 I_{\text{بال}}$$

چند درصد را جان تحمل می‌کند $= \frac{I_{\text{جان}}}{I_{\text{کل}}}$

هر چه مساحت دورتر از تار خنثی باشد تأثیرش بیشتر است

چند درصد را بال‌ها تحمل می‌کنند $= \frac{2 I_{\text{بال}}}{I_{\text{کل}}}$

شکل (الف)



نکته ی ۳:

وقتی تحت لنگر قرار است نیرویی به بال وارد می‌شود مشخص است؟

$\sigma = \frac{My}{I}$

کشش در پایین بیشتر است.

فرق نکته ی ۳ با نکته ی ۱ و ۲:

مقطع (برش زدیم = مقطع سمت راست را گرفتیم) (در این جا نیرویی که در اثر لنگرها ایجاد می‌شود)

بهترین روش ← روش اول

سهم نیرو ناشی از لنگر

نیرویی که به مقطع وارد می‌شود

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma \, dA = \int_{A_1} \left(\frac{My}{I}\right) dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y \, dA = \frac{MQ}{I}$$

نیرویی که به سطح هاشور خورده وارد می‌شود.

ناشی از لنگر است یعنی در اثر لنگر به وجود آمده

ممان استاتیک $= Q$ ممان استاتیک سطح نسبت به تار خنثی

ممان اینرسی کل مقطع نسبت به تار خنثی

ممان استاتیک سطح هاشور خورده نسبت به تار خنثی

اگر در مقطعی دارای ولی تحت لنگر است چه نیرویی به آن مقطع وارد می‌شود:

باید از فرمول $\frac{MQ}{I}$ استفاده شود.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\bar{y}_1$: فاصله مرکز سطح سطح هاشور خورده از تار خنثی

روش دیگر

$$F_1 = \underbrace{\frac{M}{I}(\bar{y}_1 A_1)}_{Q_1} = \left(\underbrace{\frac{M\bar{y}_1}{I}}\right) . A_1$$

تنش در مرکز سطح هاشور خورده

تنش مرکز سطح هاشور خورده

این تنش در یک نقطه است در یک مقطع

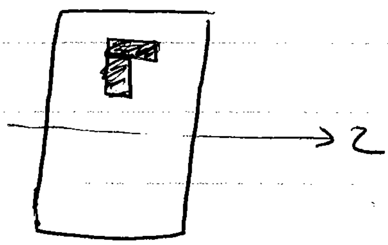
(با توجه به شکل الف
$\bar{y}_1$ در شکل نشان داده شده)

(مثلاً برای مثلث این مورد ثابت است) تنش مرکز سطح برای این مقطع به مستطیل شکل ... نمی شود

روش سوم : $F_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} . A_1$

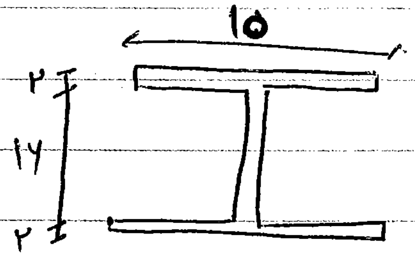
که تنش ~~مرکز سطح~~ [تنش در بالای مقطع (σ_1)
و تنش در پایین مقطع (σ_2)
را بدست می آوردم و تقسیم بر ۲ می کنیم

مثال:



Q سطح هاشور خورده
برابر است با جمع Q در مستطیل.

مثال: M و I و ابعاد مقطع و E و ν = معلومات مسئله
(مدول الاستیسیته مثلاً فولاد) (به ترتیب پواسون)
الف) عرض بال فوقانی = مجهول (بعد از اعمال لنگر)



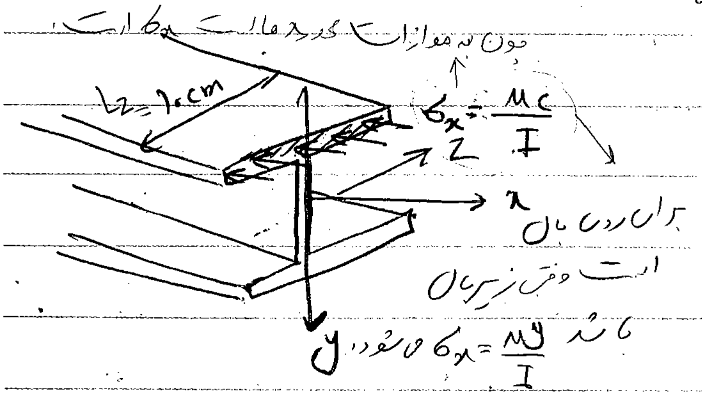
یعنی باید δ_z را بدست آورم
تغییر طول در جهت Z
چون فشار ماست باید منفی بذاریم $\frac{Mc}{I}$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] =$$

جواب + بدست می آید.
یعنی افزایش پیدا می کند

$$\delta_z = \varepsilon_z \cdot L_z$$

در اینجا $10cm$



ب) ضخامت بال فوقانی = ?

یعنی اول باید δ_y را بدست آورم

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

جواب + است
پس ضخامت بال هم زیاد می شود.

$$\delta_y = \varepsilon_y \times L_y = \varepsilon_y \times 2cm$$

$$\sigma_x = -\frac{M \times 9}{I}$$

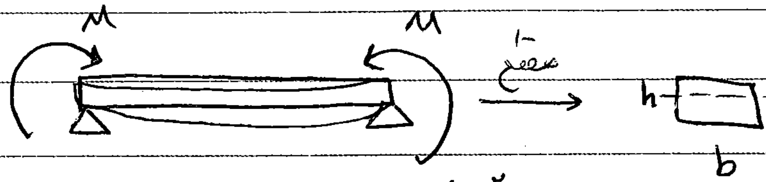
(پس در کل چون بال کم می شود ولی عرض بال و ضخامت زیاد می شود

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: تیر چوبی:

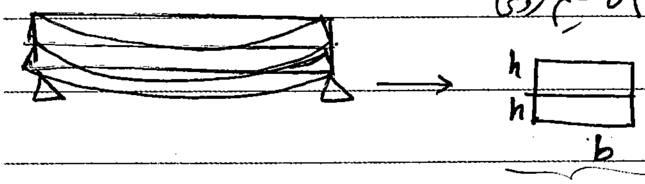
حالت اول: یک تیر چوبی



$M_{1\,مجاز} = \sigma_{مجاز\,چوب} \times S_{1\,موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت دوم:

دو تیر چوبی شبیه هم را روی هم می‌گذاریم (بدون اتصال) (بدون جوش = بدون چسب)
فرض آن‌ها را هم می‌کنیم روی
هم می‌لغزند.



یادآوری: $\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} < \sigma_{مجاز}$

$S_{موجود} \cdot \sigma_{مجاز} = M_{مجاز}$

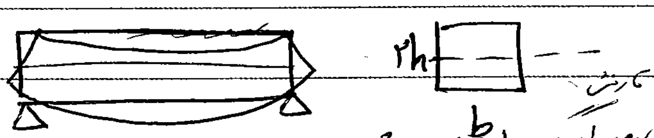
$S_{لازم} = \frac{M}{\sigma}$

$S_{مستطیل} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

دو تار خنثی داریم چون شکل مرکب نیست و هرکدام از تیرها جداگانه در پایین افزایش طول و در بالا کاهش طول دارند.

$M_{مجاز} = 2M_{مجاز} = 2\sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت سوم: دو تیر را آن‌ها را به هم می‌چسبانیم (در واقع یک تیر داریم):



چون با چسب به هم متصل کردیم
دیگر روی هم نمی‌لغزند یعنی چسب جلوی این لغزیدن را گرفته است (تنش برشی)
۴ برابر مقاومت حالت قبلی است.

$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{b(2h)^2}{6} = 4M_{1\,مجاز}$

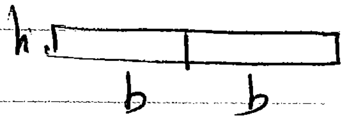
فرض روی این تیر بار بیاید یعنی بار چه
تغییر شکل می‌دهد (چون در واقع ایستا
است)

** نکته: در خمش ملاک اساس مقطع است (S) و
یا I ممان اینرسی است)

SUBJECT :

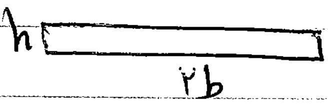
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالت چهارم:



کنار هم هستند (بدون اتصال)

$M_{\text{مجاز}} = 2\,M_{1\,\text{مجاز}}$



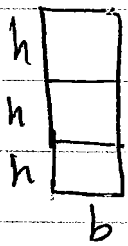
کنار هم جوش کردیم

$M_{\text{مجاز}} = \sigma_{\text{مجاز}} \times S = \sigma_{\text{مجاز}} \times \frac{(2b)h^2}{6} = 2\,M_{1\,\text{مجاز}}$

پس اگر دو تیر کنار هم باشند [چه جوش کنیم چه نکنیم مقاومت خمشی آن ها یکسان است]

ولی اگر روی هم بگذاریم [جوش کنیم (برای مستطیل) ۴ برابر می شود و اگر جوش نکنیم (برای مستطیل) ۲ برابر می شود]

وقتی می گوییم وقتی روی هم بگذاریم جوش کردن مهم است با فرض این است که بار از بالا به آن وارد می شود (بار ثقلی وارد شود) وقتی اگر بار افقی وارد شود جای h و b عوض می شود: $S = \frac{hb^2}{6}$

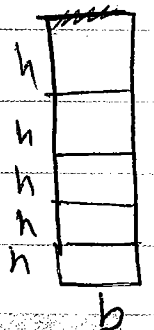


تست کنکوری: سه تیر می خواهیم آن ها را بچسبانیم

مقاومت چند برابر حالت است که نچسبانیم

چسباندن $= 9 M_1$ برابر تکی

نچسباندن $= 3 \times M_1$ برابر تکی



بچسبونیم $= 5 M_1$

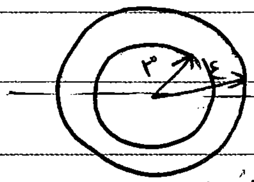
نیرو هم افقی بود.

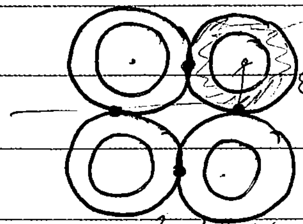
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال:

لوله فولادی به شعاع داخلی ۳ و شعاع خارجی ۴ داریم که حول محور رنگ شده خم می‌شود.





$\pi(4^2-3^2)$

شعاع فاصله ۴

تار خنثی

چون جوش داده‌ایم با هم واحد شده و یک تار خنثی دارد

اگر ۴ تا از این لوله‌ها را استفاده می‌کنیم

حول این محور خم می‌شود.

ممان مقاومت برابر می‌شود:

$$S_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{\frac{\pi}{4}(4^4-3^4)}{4}$$

c دورترین نقطه از تار خنثی

الف) اگر این ۴ تا را جوش ندهیم $\Rightarrow$ $4M_1$ جایز

ب) اگر جوش بدهیم $\Rightarrow$ باید I مجموع را حول محور c با بدهیم یعنی باید $\frac{I}{c}$ را حساب کنیم (برای مستطیل فقط هستیم که $\frac{bh^2}{6}$ می‌شود)

برای ۴ تا لوله جوش شده

$$I = 4\left[I_1 + A_1 d^2\right] = 4\left[\frac{\pi}{4}(4^4-3^4) + \pi(4^2-3^2)(4)^2\right]$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{8}$$

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = 7.2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

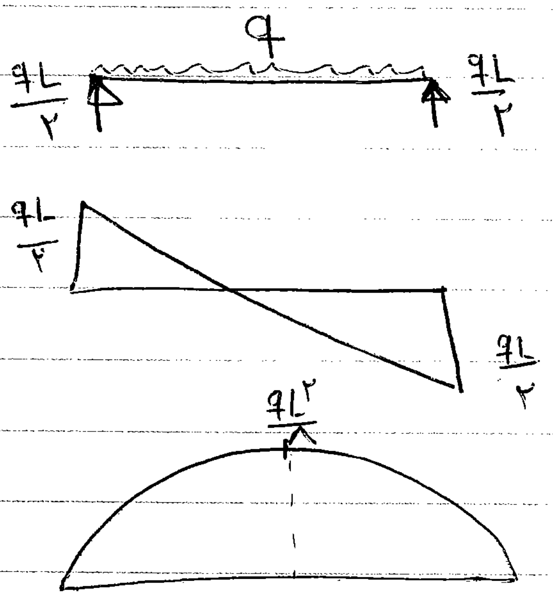
«فصل پنجم» «تنش برشی در تیرها»

در تیر باید تنش برشی باید کنترل شود و دیگری تنش خمشی باید کنترل شود
یعنی باید کنترل کنیم تیر ما جوابگو هست یا نه

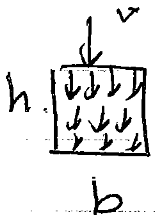
معمولاً در امتحان فصل ۴ و ۵ با هم می‌آیند یعنی
هم تنش برشی و هم تنش خمشی کنترل شود.

$$\sigma = M\frac{c}{I} \le \sigma_{مجاز}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{مجاز}$$



مقطع

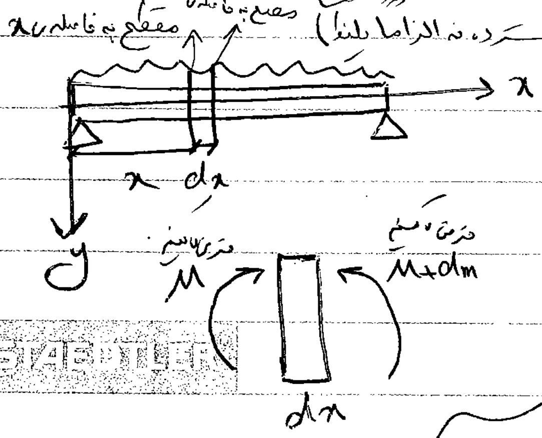


$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} \le \tau_{مجاز}$ اگر توزیع تنش یکنواخت باشد.

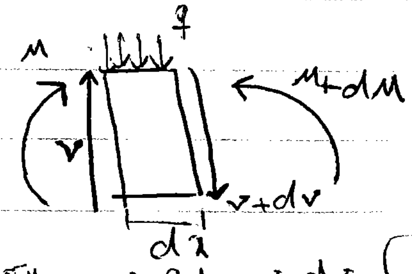
در فصل اول گفتیم $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ ایراد داشت

یعنی از $\tau_{مجاز}$ باید مقطعی بزنیم که تیر گسیخته تر شود باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد.

تیری را در نظر بگیریم که تحت بار است: (تحت بار گسترده، نه الزاماً یکنواخت)



یادآوری از استاتیک: $V = \frac{dM}{dx}$



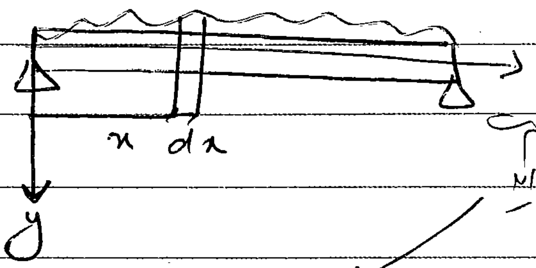
معادلات تعادل: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = q\,dx + V + dV \Rightarrow q = -\frac{dV}{dx}$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M + V\,dx = q\,dx(\frac{dx}{2}) + M + dM \Rightarrow \boxed{V = \frac{dM}{dx}}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

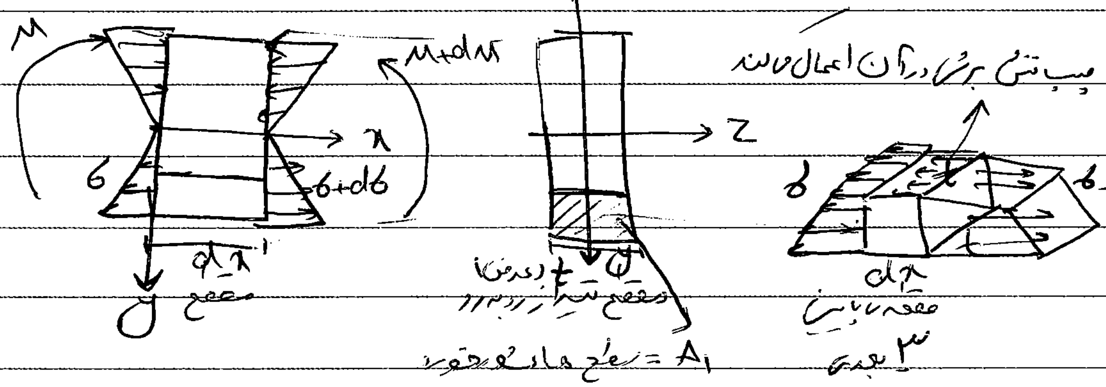
پس: $V = \frac{dM}{dx} \Longrightarrow M = \int V dx$



M باعث تنش فشاری در بالا و تنش کششی در پایین می‌شود

چون تنش داخلی ناشی از تنش است

پس تنش به وجود می‌آید



$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow \underbrace{\int_{A_1} \sigma\, dA}_{\text{نیرو از راست به چپ}} + \tau t\, dx = \int_{A_1} (\sigma + d\sigma)\, dA$$

$$\int_{A_1} \frac{My}{I}\, dA + \tau t\, dx = \int_{A_1} \frac{(M+dM)y}{I}\, dA$$

$$\tau t\, dx = \frac{dM}{I} \underbrace{\int_{A_1} y\, dA}_{Q} \Longrightarrow$$

ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به تار خنثی

(سطحی که از مقطع تیر جدا می‌شود (سطح هاشورخورده))

نیروی برشی (در طول تیر V_{max} در نظر گرفته شده است)

$$\Longrightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q}{It} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

$\frac{dM}{dx} = V$ ← مهم

مهم‌ترین فرمول تمام مسائل برشی

(فرمول دقیق برشی) فرمول حل مسئله

تنش برشی در هر نقطه از تیر

ضخامت مقطع مورد نظر

ممان اینرسی مقطع حول تار خنثی

فرمول تقریبی برش: $\tau = \frac{V}{A}$

STAEDTLER

SUBJECT
Year (Month (Date (

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

- σ: تنش قائم در نقطه‌ی مورد نظر (ناشی از خمش) (برای تیر)
- M: لنگر خمشی در مقطع مورد نظر
- y: فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (خیلی مهم)
- I: ممان اینرسی کل مقطع / مقطع مورد نظر

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

- V: نیروی برشی در مقطع مورد نظر
- Q: ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر
- τ: تنش برشی در نقطه‌ی مورد نظر [در تیر]
- I: ممان اینرسی مقطع مورد نظر
- t: ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر

نتیجه:

نقطه‌ی مورد نظر: مثلا نقطه‌ای که حساب می‌خورد

نیرو و لنگر برای مقطع است = در استاتیک باید بدست آوریم

تنش برای نقطه است = در مقاومت مصالح

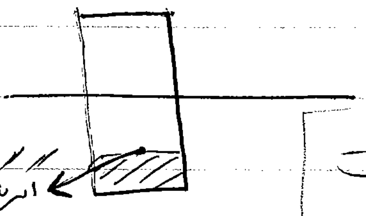
مهم

نکته: طبق فرمول $\tau_{max} = \frac{V \cdot Q_{max}}{I\, t_{min}}$، Q_{max} و t_{min} باشد بیشترین تنش

برای رسیدن به نقطه باید اول مقطع معلوم شود. پس مقدار M

(چه در خمش چه در برش ممان اینرسی مقطع مورد نظر را می‌خواهیم)

نکته:

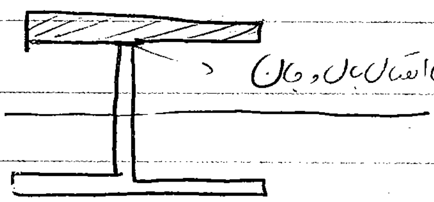


اگر بخواهیم تنش در این نقطه Q می‌شود سطح هاشور خورده

Q_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد یعنی در تار خنثی τ ماکزیمم است

کلا ممان استاتیک بخشی از مقطع با بقیه‌ی مقطع همیشه برابر است.

مثال: تنش برشی را در محل اتصال بال به جان پیدا کنید



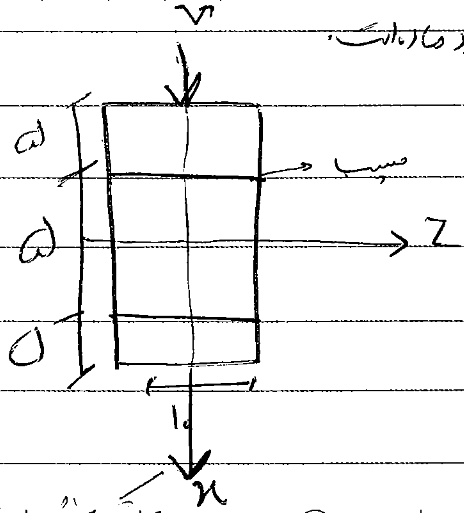
t = ضخامت جان می‌شود

ممان استاتیک کل سطح صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فقط برای چسب تیپ برای خود ماده است.



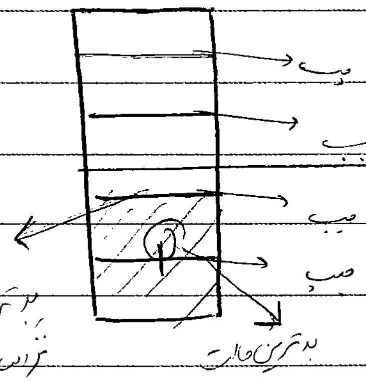
$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز چسب}}$$ چسب = جایی که چسب خورده.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز چوب}}$$ چوب = تار خنثی

باید هر دو تا را کنترل کنیم (مثل صفحه)

در این فرمول V از روی دیاگرام برشی حد اکثر است، t = عرض چسب است، Q = ممان استاتیک بخش از محل چسب تا تار خنثی یا ممان استاتیک بخش مقطع آن برابر است

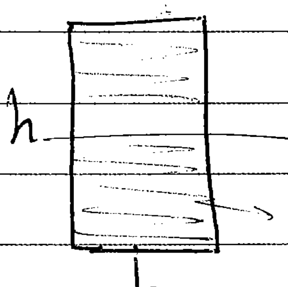
هر چه چسب به تار خنثی نزدیک تر باشد Q بزرگتر است (وضعیت بحرانی است).



$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز چسب}}$$

کنترل چسب اگر چند لایه بود باید کدام لایه کنترل کنیم که به تار خنثی نزدیک تر است.

اگر تیر چوبی یکپارچه به عرض b و ارتفاع h داشتیم



تک تک لایه ها ممکن است روی لایه ی بالایی یا پایینی بلغزند.

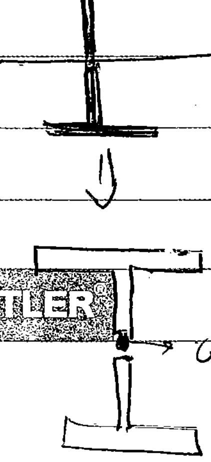
برای تیر چوبی که یکپارچه است V حداکثر باید $\tau \leq \tau_{\text{جاز چوب}}$ باشد.

اما برای تیری که واقعا چسب خورده $\tau \leq \tau_{\text{جاز چسب}}$ در بدترین نقطه ای که چسب خورده (نزدیک ترین به تار خنثی) برای مقاطع لایه های چوب

$\tau \leq \tau_{\text{جاز چوب}}$

اگر تعداد چسب ها زوج باشد به تعداد قطعه های زوج شوند آنگاه: $\tau_{\text{چوب}} = \tau_{\text{چسب}}$

مثال: یک گلدر (تیر ورق) داریم (جوش کنترل)



$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز جوش}}$$ t: ضخامت جوش

$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز فولاد}}$$

باید Q مربوط به تار خنثی را بگذاریم (برای کنترل خود ماده)

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date

(نیروی برشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر نسبت به تار خنثی

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad *$$

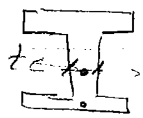
τ تنش برشی در تیر با صلیب یا جوش

I ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

t ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر (در مقاطع منشوری ضخامت ثابت است و در غیر اینصورت تابع مکان است)

یادآوری:

برای ضخامت بستگی به شکل دارد که نقطه دارد.



گسترش داده

گسترش داده

(لنگر خمشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

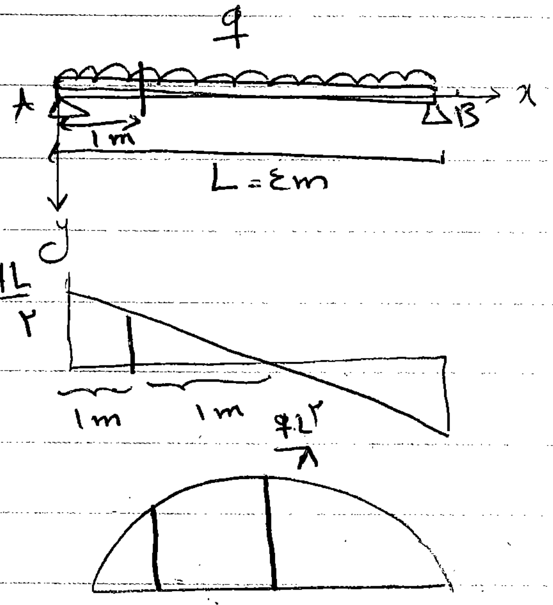
$$\sigma = \frac{My}{I} \quad *$$

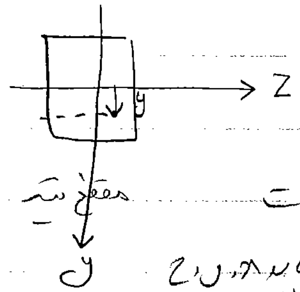
σ تنش قائم در تیر

y فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی

I ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

مثال: (یعنی تیر را باید خمش و برش با هم تحلیل کرد = فصل ۴ و ۵)





منظور از تنش قائم در تیر باید در یک نقطه‌ی مشخص باشد.

نقطه‌ی مشخص دارای مشخصاتی است

که ما باید آن نقطه را پیدا کنیم یعنی باید y و z آن نقطه را بدانیم: این که x آن کجاست

یعنی مقطع (یعنی وقتی گفتند در ابتدای تیر باید در ابتدای مقطع بزنیم) تکیه‌گاه A

y = فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (یعنی نقطه را باید در مقطعی که در ابتدای تکیه‌گاه A زدیم، پیدا کنیم که x آن ابتداست ولی y آن در مقطع تیر مشخص شد)

تنش برشی به V ربط دارد که جای V بیشتر است (که V_{max} از روی دیاگرام برش بدست می‌آید به بحرانی‌ترین‌ها) *

در مورد σ_{max} باید هم مقطع بحرانی و هم نقطه‌ی بحرانی را پیدا کنیم (M_{max} = از روی دیاگرام خمشی و y_{max}) *

همیشه در تار خنثی τ max است و هرچه از تار خنثی دور تر شدیم بدتر است و بدترین مقطع روی تار خنثی است

بهتر؟!

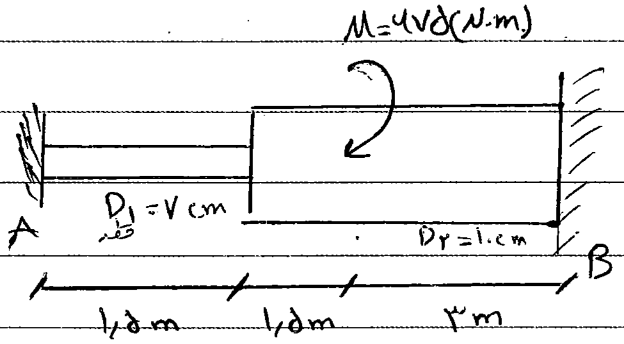
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین مقاومت

تمرین ۱) مثال: در شکل مقابل در صورتی که جنس میله ی AB یکنواخت باشد گشتاورهای پیچشی تکیه گاهی

را در A و B بدست آورید.



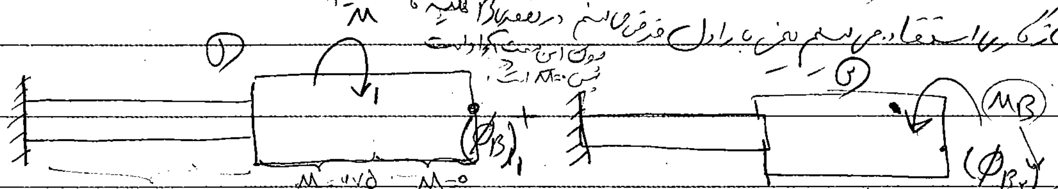
دو مقطع متفاوت داریم

(پس نیاز به تفکیک است)

عکس العمل ها ناشی از M است از جنس

چرخشی هستند یعنی گشتاور هستند

از اصل سازگاری استفاده می کنیم یعنی با روش فرض می کنیم در نقطه B تکیه گاه نداریم



پس عکس العمل در نقطه B

$$\phi_{B_1}=\frac{475\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)}+\frac{975\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)}+0 \qquad \frac{(M_B)(1.5)}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)}+\frac{(M_B)(4.5)}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)}$$

چون می دانیم $\phi_B=0$ است پس در B تکیه گاه داریم است پس در دو شکل بالا باید برابر هم باشند ϕ_B (تمرین ۱)

$$|\phi_{B_1}|=|\phi_{B_2}|$$

$\phi=\frac{TL}{GJ}$ باید از کجای فرمول استفاده کنیم یعنی با ضریب ها برسیم

$J=\frac{\pi R^4}{2}$

در شکل ① => $T=M$ است (در شکل ① G ثابت است)

در شکل ② => $T=M_B$ است (در شکل ② G ثابت است)

$|(\phi_B)_1|=|(\phi_B)_2| \rightarrow M_B=?$ بدست می آید (حساب شود)

و M_A هم وقتی برآیند گشتاورها حول نقطه A حساب کنیم بدست می آید.

$M_A=475-M_B=$ بدست آید

اگر در بدست سؤال گفته بشد ϕ_D را بدست آورید؟

باید در نقطه D برش بزنیم و تکیه گاه در نقطه B را حذف می کنیم و به جای آن M_B قرار می دهیم ... نداشتم

باید از فرمول $\tau_{max}=\frac{TR}{J}$ و نقطه D را در نظر بگیریم (البته اول باید تکیه گاه عکس العمل را در نقطه B بدست آوریم بعد ...)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال مهم

مثال: ستون بتنی به طول $1,2m$ توسط ۴ میله گرد به قطر $19mm$ تقویت شده است

مدول الاستیسیته فولاد

$E_s = 200\,Gpa$ و $\alpha_c = 9,9\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$ و $\alpha_s = 11,7\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$ اگر داشته باشیم

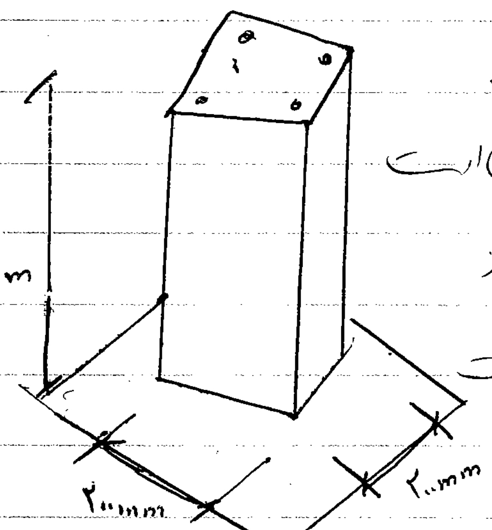
ضریب انبساط فولاد حرارتی

$E_c = 25\,Gpa$ ضریب انبساط حرارتی بتن

وقتی ستون را به اندازه‌ی $45^\circ C$ حرارت می‌دهیم تنش را در فولاد و بتن بدست آورید.

تنش ناشی از افزایش حرارت که باعث افزایش طول می‌شود.

$\Delta\Theta = 45^\circ C \uparrow$
افزایش حرارت



فولاد و بتن را به طور مجزا در نظر بگیریم طول اولیه هر دو یکسان است

و ΔT و L اولیه آن‌ها $\Delta L = L.\alpha.\Delta T$ افزایش طول ناشی از افزایش حرارت

هم یکسان و فقط α آن‌ها فرق می‌کند

چون فولاد α بزرگ‌تری دارد افزایش طول آن بیشتر است

ولی در مصالح به طور همگن داخل هم قرار گرفته‌اند.

پس شرط سازگاری را باید بدهیم $\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$

چون میله‌گرد تمایل به افزایش طول بیشتری دارد و بتن تمایل دارد که فولاد را به سمت خود بکشد (مقاومت می‌کند) و فولاد تمایل دارد که جلو برود (عمل و عکس العمل). فولاد فشاری و در بتن کششی است.

عامل ایجاد تغییر طول در فولاد همین افزایش حرارت است و عامل دیگر تغییر طول تنش فشاری ایجاد شده است

که تنش فشاری، نیروی فشاری هم می‌خواهد.

P_s = نیروی فشاری (کاهنده −) $\qquad$ P_c = نیروی کششی (افزاینده +)

$\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$

در راستای قائم یک نیروی کششی به بتن وارد می‌شود. و نیروی فشاری که به فولاد وارد می‌شود

$$\underbrace{(L.\alpha_s.\Delta T)}_{ناشی\ از\ حرارت} - \underbrace{\frac{P_s L}{E_s}}_{کاهنده\ -\ ناشی\ از\ تنش} = (L.\alpha_c.\Delta T) + \underbrace{\frac{P_c.L}{E_c A_c}}_{افزاینده}$$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P$ مجهول

نتیجه

یک معادله‌ی دو مجهولی است (P_s و P_c) که ما P_s و P_c را از روابط استاتیکی $\Sigma F_y = 0$ بدست می‌آوریم که معادل آن P است

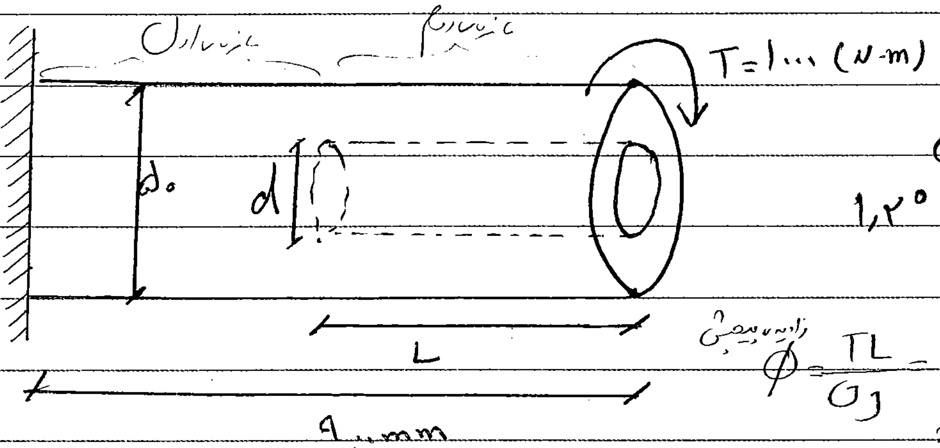
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

ادامه: $\sum F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P \Rightarrow P = 14895\,N$

$$\begin{cases} \sigma_s = \dfrac{14895}{\pi(19)^2} = 13/13\ \text{Mpa} & \text{فشاری} \\ \sigma_c = \dfrac{14895}{\pi(20.2^2-19^2)} = 383\ \text{Mpa} & \text{کششی} \end{cases}$$

مثال: یک محور استوانه‌ای به قطر 50 mm و طول 900 mm مطابق شکل تحت گشتاور پیچشی معادل 1000 N.m قرار دارد. در صورتیکه داشته باشیم $G = 0/84 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}$، $T = 1000\ N.m$، مقدار d و طول L سوراخ ایجاد شده را چنان بیابید که اولاً تنش برشی حداکثر در محور داده شده از 56 Mpa تجاوز نکند، و ثانیاً حداکثر زاویه پیچش کل محور از 1/2° بیشتر نشود.



زاویه پیچش $\phi = \frac{TL}{GJ}$ = رادیان — باید درجه تبدیل شود.

$x^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$

$\tau_{max} = 56\ \text{Mpa}$

فرمول کلی تنش برشی: $\tau = \frac{T\rho}{J}$ در مقطع ما T ثابت است و ρ هم باید تبدیل به R شود (دورترین فاصله) که در این شکل T و R ثابت است پس تنش برشی و به ازای J کمتر τ ماکزیمم می‌شود:

$\tau = \frac{TR}{J}$ ← ماکزیمم می‌شود

$$\tau_{max} = \frac{1000 \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{2}(25^4 - r^4)} = 56 \longrightarrow r = 18\,mm$$

$\boxed{D = 36\,mm}$

بیشترین ϕ در لبه‌ی بازه‌ها رخ می‌دهد پس باید مجموع زاویه پیچش در مقطع انتهای را بنویسیم.

مجموع ϕ در دو بازه

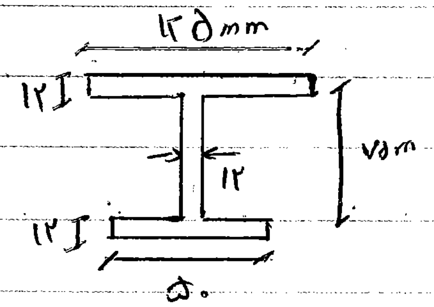
$$\phi_{\text{انتهای میله}} = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{10^6 \times L}{0/84 \times 10^5 \times \frac{\pi}{2}(25^4 - 18^4)} + \frac{10^6(900 - L)}{0/84 \times 10^5 \times \frac{\pi}{2}(25)^4} = 1/2 \times \underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\text{تبدیل به رادیان}} \Rightarrow \boxed{L = 488/6\ mm}$$

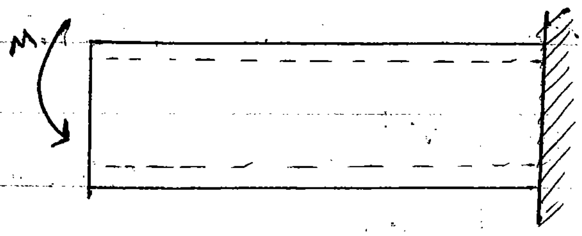
M = خمش
T = پیچش

مثال: در تیر شکل مقابل در صورتیکه داشته باشیم $\sigma_{\text{مجاز کششی}} = 40\, MPa$ ،

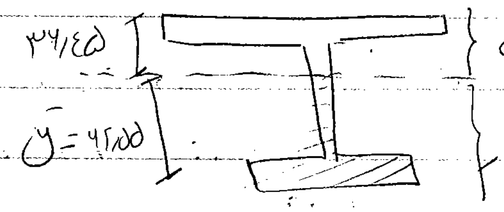
$\sigma_{\text{مجاز فشاری}} = 105\, MPa$

تعیین کنید حداکثر مجاز کوپل M چقدر است؟





اول تار خنثی (محور خنثی) را بدست آوردیم (استاتیک)



$I = 3.91 \times 10^6 \, (mm)^4$ نسبت به تار خنثی

در این مقطع ناحیه فشاری و ناحیه کششی داریم که (طبق شکل پایین تار خنثی تحت فشار و بالای تار خنثی تحت کشش است)

حداکثر فاصله از تار خنثی = ۳۶/۴۵

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} \begin{cases} \underbrace{\sigma_{max\,\text{کششی}}}_{\text{معلوم}} = \frac{M\,C}{(I)_{\text{معلوم}}} \Rightarrow M_1 = 4.29 \times 10^6 \, (N.mm) \\ \sigma_{max\,\text{فشاری}} = \frac{MC}{I},\ C = 42.55 \Rightarrow M_2 = 9.64 \times 10^6 \, (N.mm) \end{cases}$$

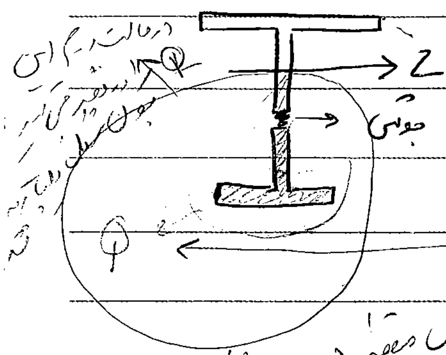
M ای قابل قبول است که هم در ناحیه کشش و هم در ناحیه فشار جواب دهد یعنی M کمتر پس M کمتر قابل قبول است

$$M_{\text{مجاز}} = \min\{M_1, M_2\} = M_1 = 4.29 \times 10^6 \, (N.mm)$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

کنترل جوش؟



تا وقتی از [illegible] سطح شکل عبور می‌کند

$$\tau_{\text{جوش}} = \frac{VQ_{\text{جوش}}}{It} < \tau_{\text{مجاز جوش}}$$

معلوم

ضخامت جوش (بحرانی جوش)

همان اندازه شکل مقطع (در این شکل ۳ تا مستطیل)

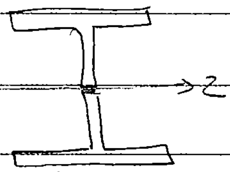
اگر جواب داد

یعنی تبدیل به یک شکل یکپارچه شد

حال باید Q تا وقتی را حساب کنیم

$$\tau_{\text{فولاد}} = \frac{VQ_{\text{فولاد}}}{It} < \tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

اما اگر شکل $Q_{\text{جوش}} > Q_{\text{فولاد}} \Rightarrow$

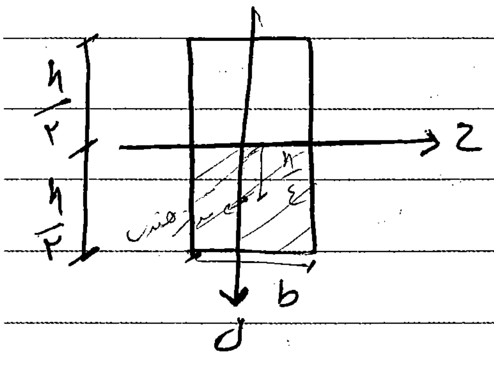


تا وقتی روی جوش ماند، اگر $\tau_{\text{فولاد}}$ ، $\tau_{\text{جوش}}$ باید $\tau_{\text{مجاز}}$ آن را حساب کنیم و

هر کدام که بحرانی‌تر است را کنترل می‌کنیم

توضیح این که چطور $\frac{Q}{t}$ max شود؟

مثال: $\tau_{max} = ?$



$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left[b\frac{h}{2}\times\frac{h}{4}\right]}{\frac{bh^3}{12}\times b} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A}$$

سطح مقطع

τ_{Ave}

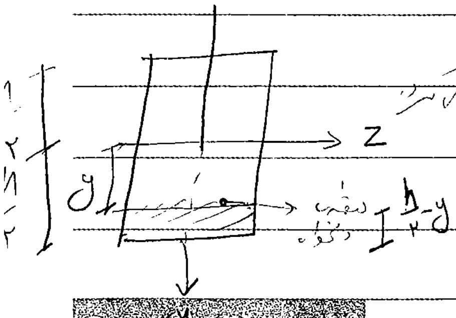
تنش در نقطه برش

پس برای مستطیل توپر:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\times\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}}, \quad A = b\times h$$

سطح کل مقطع

حال اگر بخواهیم در یک نقطه دلخواه یک فرمول کلی بدست آوریم:



$$\tau = \frac{V\left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+y}{2}\right)\right]}{\underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I}\times \underbrace{b}_{t}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

سطح مقطع

چون y^2 است سهمی است یعنی تنش برشی خطی تغییر نمی‌کند اما کج خطی تغییر می‌کند

فرمول کلی **

فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

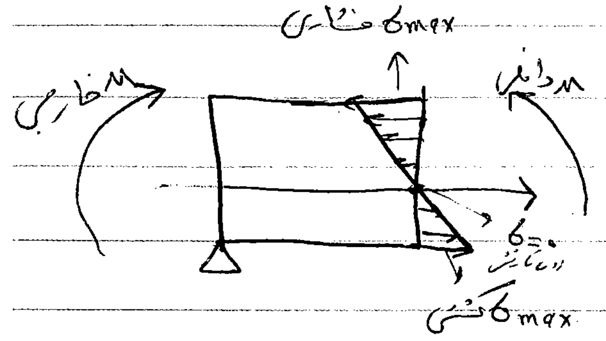
اگر $y=0$ باشد $\leftarrow \tau_{max} = 1.5\frac{V}{A}$ می‌شود.

اگر $y=\pm\frac{h}{2}$ باشد $\tau_{min}=0$ می‌شود **

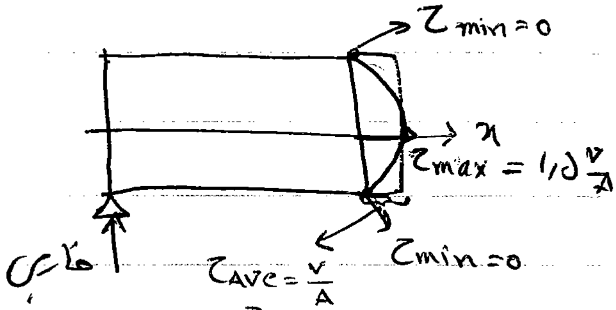
STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



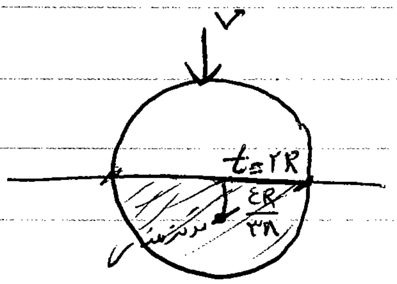
(خمشی)



(برشی)

تنش در اثر خمشی بالا یا پایین max می‌شود ولی اثر برشی در وسط max (نتیجه مهم)

حال برای دایره‌ی توپر:

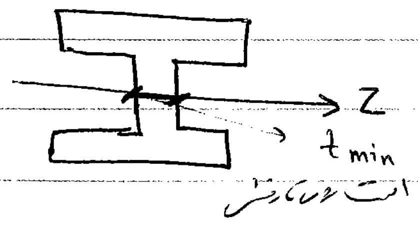


$$\tau_{max} = \frac{V\left[\overbrace{\frac{\pi R^2}{2}}^{\text{مساحت}} \cdot \overbrace{\frac{4R}{3\pi}}^{\text{مرکز سطح نیم دایره}}\right]}{\underbrace{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)}_{I}\underbrace{(2R)}_{t}} = \frac{4}{3}\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{ave}}$$

پس در دایره توپر: $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

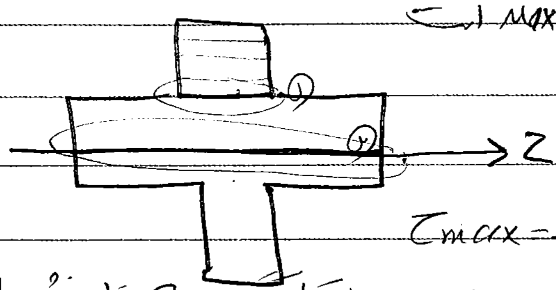
پس برای τ_{max} باید $\frac{Q}{t}$ max شود و V هم max شود

و برای شکل غیر از مستطیل برای τ_{max}، Q_{max} و t_{min} باید باشد:
یعنی در همان جایی که Q_{max} است، t_{min} باشد.



مثال: پس این دو تا رو خواهیم ببینیم $\frac{Q}{t}$ max است

باید محاسبه کنیم



ما τ_{max} را می‌خواهیم و می‌دانیم که $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q_{max}}{I \cdot t_{min}}$

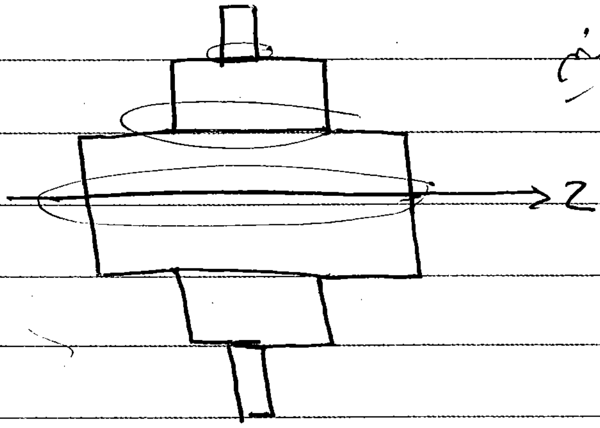
باید مقطعی را در نظر بگیریم که در آن $\frac{Q}{t}$ max است ابتدا می‌گوییم ① در تار خنثی Q_{max} است ولی

t در تار خنثی min نیست پس باید در ① و ② $\frac{Q}{t}$ را محاسبه کنیم هر جا که این max است max شده

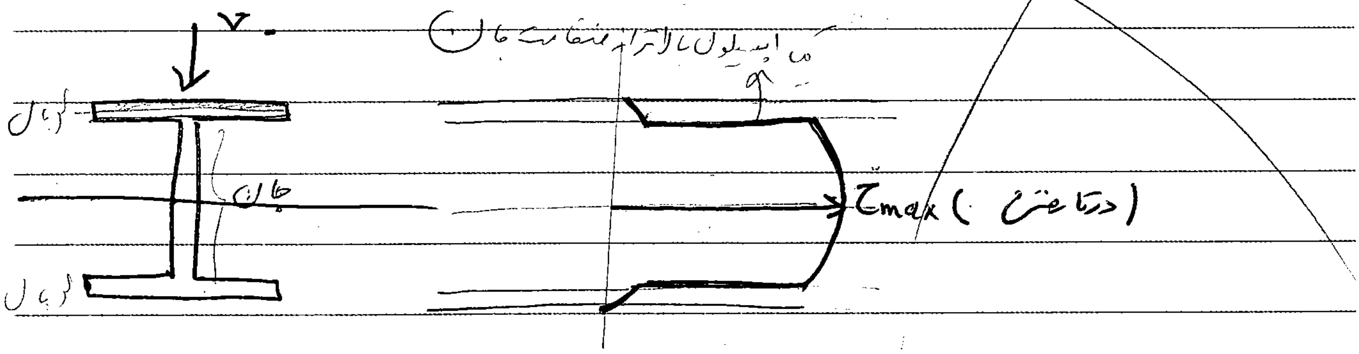
مقطع را در نظر بگیریم

مثال: پس این ۴ تا نقطه را باید حساب کنیم

که کجا $\frac{Q}{t}$ max می‌شود.



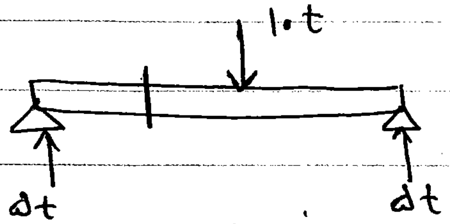
مثال: تنش برشی را رسم کنید.



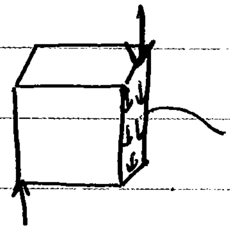
در مقطع خمشی عمده با لنگر به بال است I ها

یعنی برش را به جان می‌دهیم خمش را به بال می‌دهیم.

چه داده‌ای



V = 5t داخلی



5t خارجی

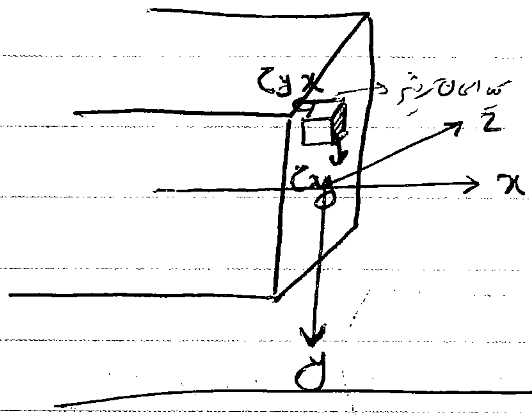
τ_{xy} = تقریبی

$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$ ← تنش در صفحه قائم (تقریبی)

$$\underbrace{\tau}_{\tau_{yx} = \text{دقیق}} = \frac{V \times Q}{It}$$ ← تنش در صفحه افق (دقیق)

می‌دانیم : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

در صفحه x در جهت y

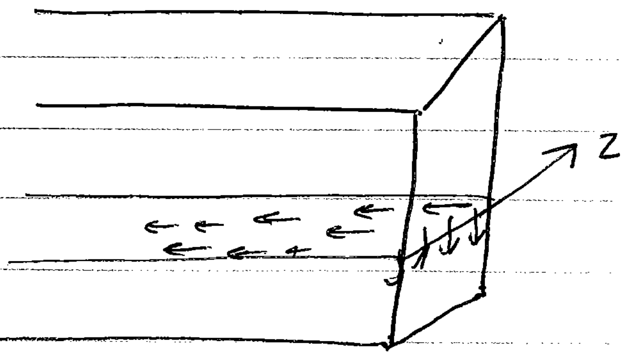


یادآوری: بیشترین تنش برشی در تار خنثی

بیشترین تنش خمشی در دورترین نقطه از تار خنثی

Q = 0

بنابراین در بالاترین و پایین‌ترین نقطه مقطع تنش برشی صفر است و در تار خنثی تنش برشی max است



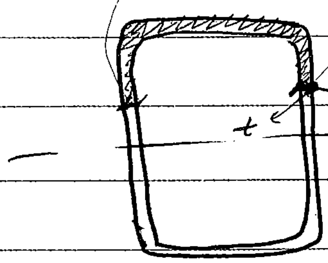
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مقاطع توخالی

برای بدست آوردن

بدون تنش در این دو نقطه برابر است پس Q را نسبت به سطح هاشور خورده

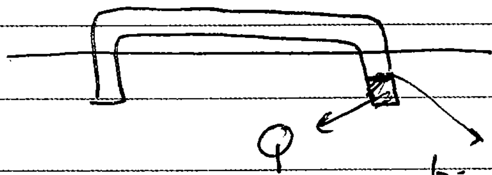


$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

سطح داخلی - سطح خارجی

تنش در این نقطه را می‌خواهیم

پس در این نقطه برش می‌زنیم.



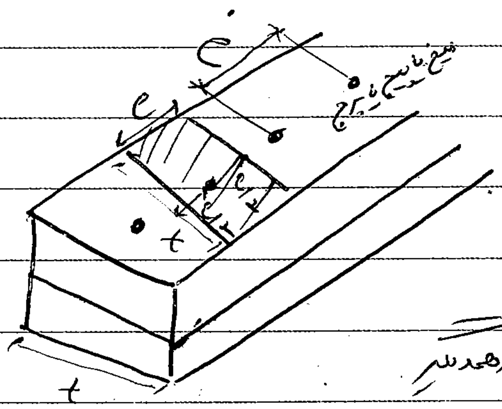
تنش در این نقطه

ارتباطش

نقاطی که به یک فاصله هستند V هم تنشی هستند

اما نقاطی که قرینه هستند تنش صفر می‌شود.

دو قطعه را روی هم می‌گذاریم و پیچ می‌زنیم.



فرمول

فاصله ۲ پیچ یا پرچ یا میخ متوالی از همدیگر

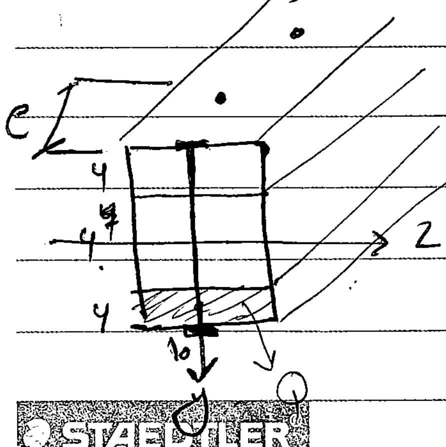
$$F = \tau \times A = \frac{VQ}{It} \cdot t \cdot e = \frac{VQ}{I} \cdot e \leq F$$

نیروی برشی در هر میخ یا پیچ یا پرچ

تنش برشی در جسب / مساحت چسب / مساحت

محاز هر میخ یا پیچ یا پرچ

دیفرانسیل چسب است ولی به جای چسب میخ آمده.

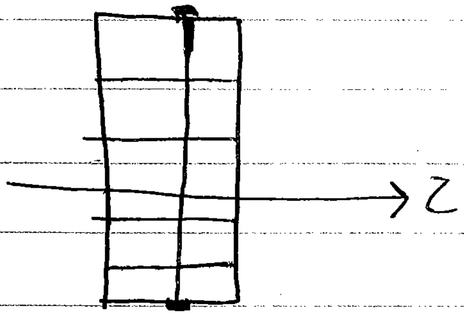


$$F_{4+4+4} = \frac{V\left[\overset{10\times 4}{40\times 4}\right]}{\frac{10(18)^3}{12}} \cdot e \leq F$$

مجاز هر میخ

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

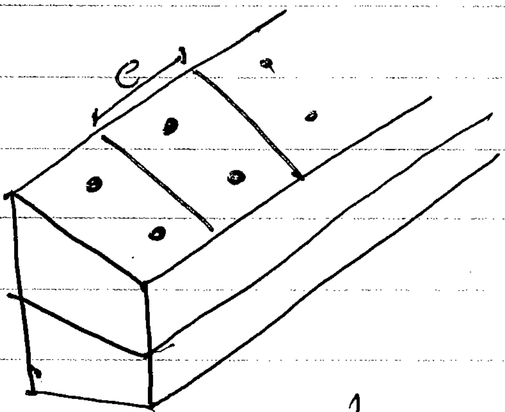


$$F = qe$$

$$\underset{\text{جریان برش}}{q} = \frac{VQ}{I}$$

پس در این جا هم وقتی جای میخ ها فرق کند برای کنترل هم باید مال میخ و هم مال مقطع ها را کنترل کرد

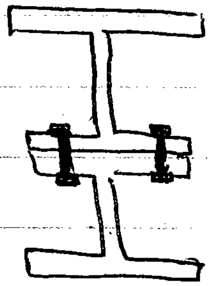
در برش



$$\boxed{\text{۲}F_1 = \tau \times A}$$

۲

امتحانی



$$\boxed{\text{۲}F_1 = \tau \times A}$$

نکته مهم ***

در کدام دست بالا (مقدار پیچ به سمت بالا و فاصله بین پیچ ها به سمت پایین) در تعداد پیچ به سمت بالا

(پس پارامتر باشد که e باید به سمت پایین رند شود)

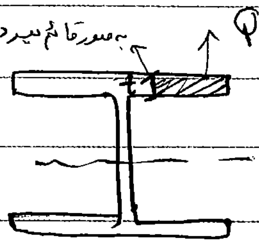
جریان برش q

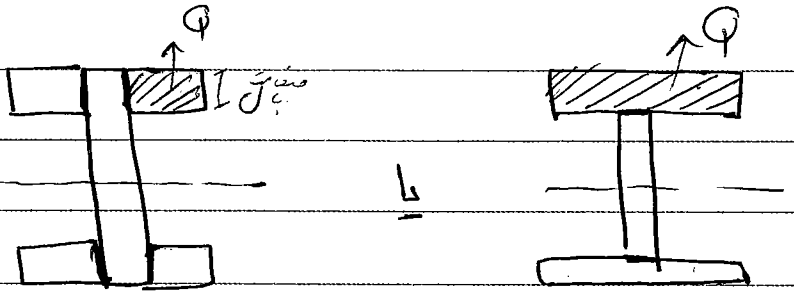
در مورد جریان برش تنش برای شکل محاسبه می شود:

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$\tau = \dfrac{VQ}{It}$

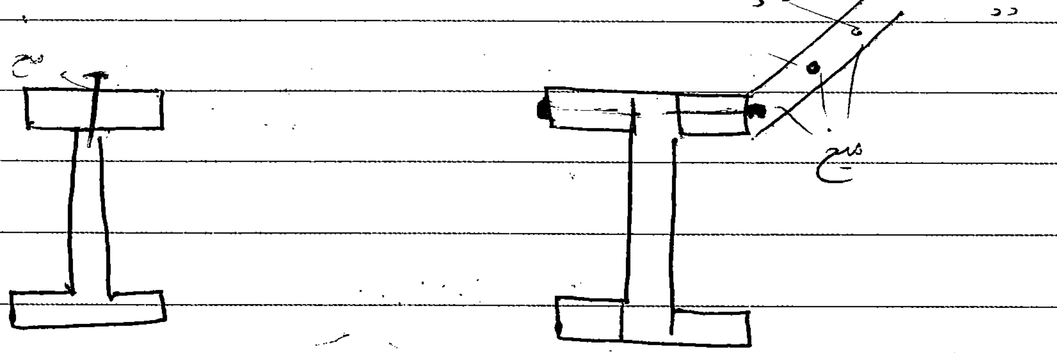




تیرها چسب هستند

$\tau = \dfrac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز چسب}}$

$\tau_{\text{چسب}} = \dfrac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز چسب}}$



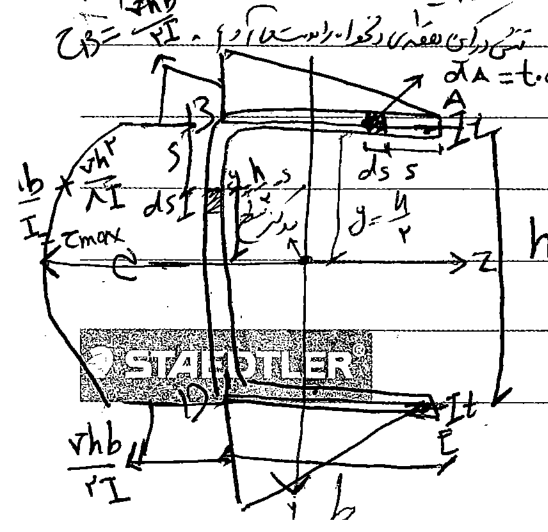
$F = \dfrac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز}}$

$F = \dfrac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز هر میخ}}$

اگر بخواهیم تنش را در تیر I شکل یا مقاطع دیگر به عبارت دیگر جریان برش را بدست آوریم

** (توزیع تنش برشی در مقاطع جدار نازک)

مثال: تیر ناودانی



حل در صفحه بعد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\underset{\text{(تنش در داخل بال)}}{\tau_{AB}} = \frac{V}{It}\overbrace{\int y\,dA}^{Q} = \frac{V}{I\cancel{t}}\int \underbrace{\frac{h}{2}}_{y}\cdot \cancel{t}\,\underbrace{ds}_{dA} = \frac{Vh}{2I}s$$

$$\text{در بال}\ \tau_{BD} = \frac{\overset{\text{در بال}}{VQ'}}{It} + \frac{V}{It}\int y\,dA = \tau_B + \frac{V}{I\cancel{t}}\int \left(\frac{h}{2} - s\right)\cdot\cancel{t}\,ds$$

$$\text{در بال}\ \tau_{BD} = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh}{2I}s - \frac{Vh}{2I}\times\frac{s^2}{2}$$

درجه ۲ است (s^2) سهمی است

$$\text{در بال}\ \tau_{max} = \tau_C = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh^2}{8I}$$

مثال عددی :

برای شکل صفحه قبل

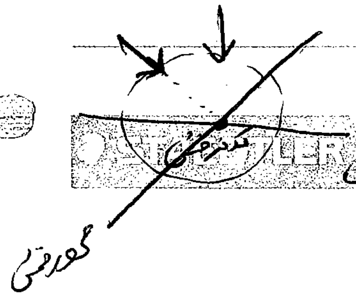
$$I = \overset{\text{جان}}{\frac{th^3}{12}} + 2\left[\underbrace{\overset{\text{بال}}{\frac{bt^3}{12}}}_{0} + \underbrace{(bt)\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{Ad^2 = \text{اشتاینر}}\right] = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

$$\text{if}\ \begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tau_B &= 14.22\ MPa \\ \tau_{max} &= 19.54\ MPa \end{aligned}$$

نکته : ما جریان برش را برای مرکز برشی بدست می آوریم

ما دو تا مرکز داریم : ۱- مرکز سطح (مرکز خمشی) : اگر نیرو از مرکز سطح عبور کند تولید خمش می کند

۲- مرکز برش (مرکز پیچشی)



نکته: محل برخورد دو محور خنثی (مرکز خمشی = مرکز سطح) هم هست

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مرکز سطح نقطه ای است که اگر بخواهیم خمش نداشته باشیم باید نیرو از آن عبور کند

(خمش ناشی از نیروی محوری و پیچش ناشی از نیروی برشی است) ##

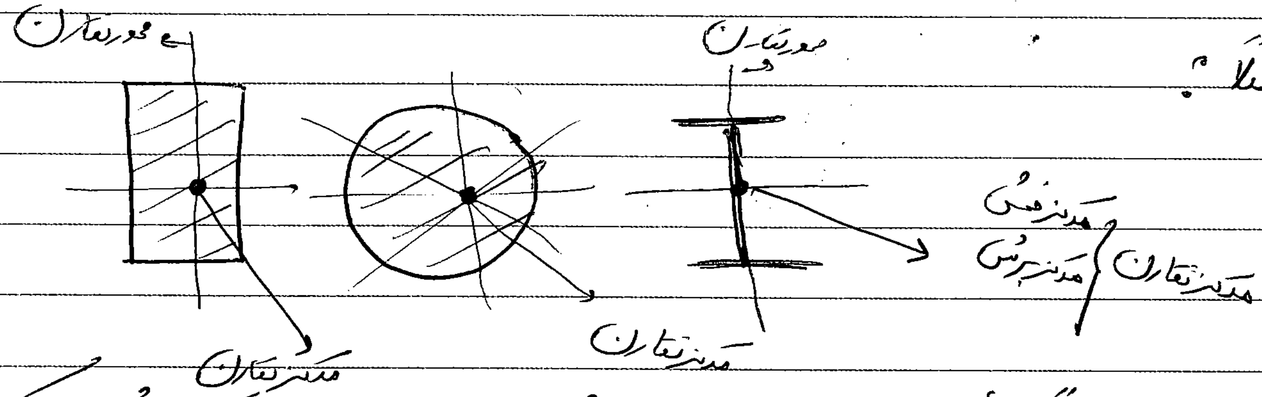
اگر بخواهیم پیچش ایجاد نشود باید نیروی برشی از مرکز برشی بگذرد.

مرکز برشی: نقطه ای است که اگر نیروی برشی از آن بگذرد پیچش به وجود نیاید

مرکز سطح: " " " " نیروی محوری " " خمش " "

* اگر یک شکل مرکز تقارن داشته باشد آن گاه مرکز سطح و مرکز برشی بر هم منطبق هستند

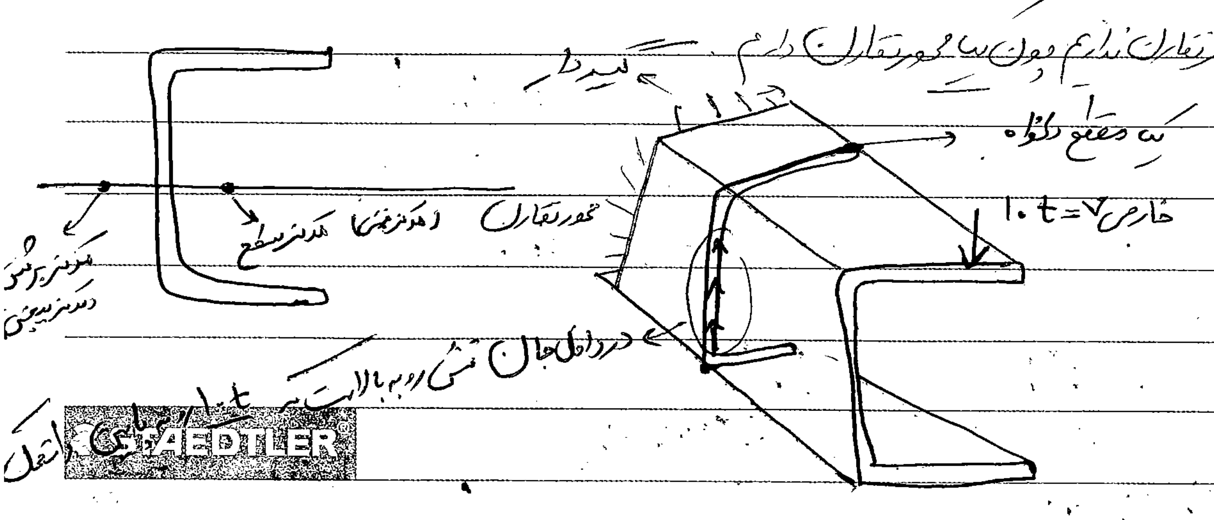
مثلا:



* نیرو لزوما قائم نیست هم می تواند افقی باشد و هم مورب که از مرکز برشی عبور کند #

حال اگر شکلی دارای مرکز تقارن نشود باید مرکز برشی آن را بدست آوریم: (ناودانی)

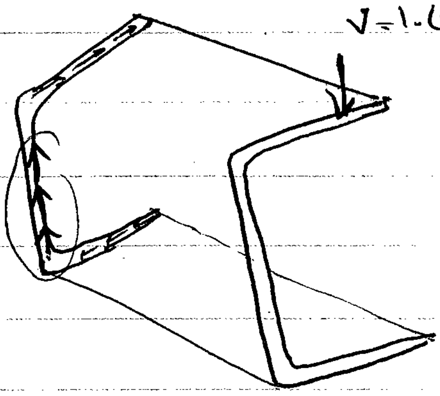
در ناودانی مرکز تقارن نداریم چون یک محور تقارن داریم



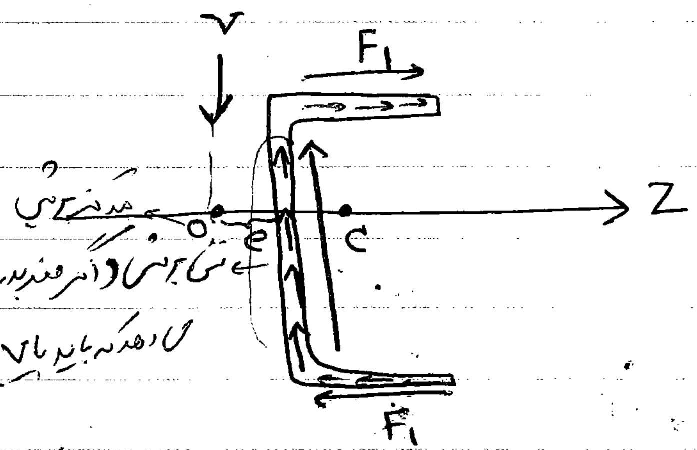
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

دیاگرام آزاد:



نمایی از روبه رو:



دو تا F_1 کوپل ایجاد می‌کنند که باید V را خنثی کنند یعنی باید ضرب در مساحت شود

e = فاصله‌ی مرکز برشی تا مرکز جان

مرکز برشی همیشه روی محور تقارن است

F_1 = مساحت بال × تنش در بال   در صورتی که تنش یکنواخت باشد

بال τ_{Ave} تنش متوسط در انتهای بال

$$\overbrace{F_1 \cdot h}^{\text{کوپل}} = V \cdot e \Rightarrow \boxed{e = \frac{F_1 \cdot h}{V}}$$

$$F_1 = \tau^{\text{بال}}_{Ave} \times A_{\text{بال}} = \frac{Vhb}{4I} \times bt = \frac{Vthb^2}{4I}$$

(با توجه به شکل آخر صفحه‌ی صفحه‌ی الف)

$$e = \frac{Vth^2b^2}{V(4I)} = \frac{\cancel{V}t^2h^2b^2}{\cancel{4}\,\frac{th^2(6b+h)}{3}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{3b^2}{h+6b} = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}}$$

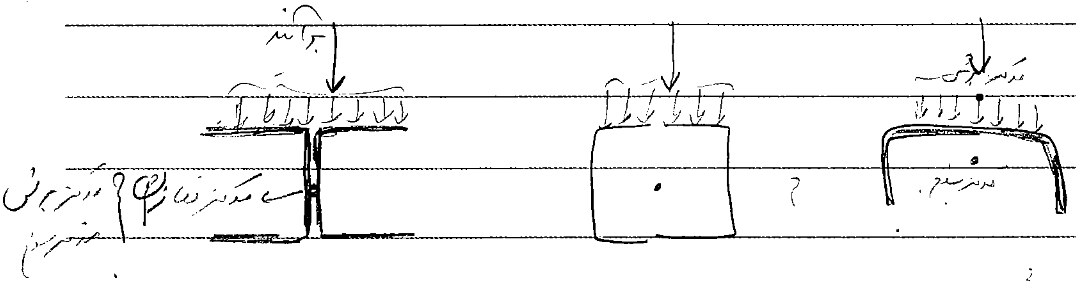
$$I = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e = 40\,mm}$$

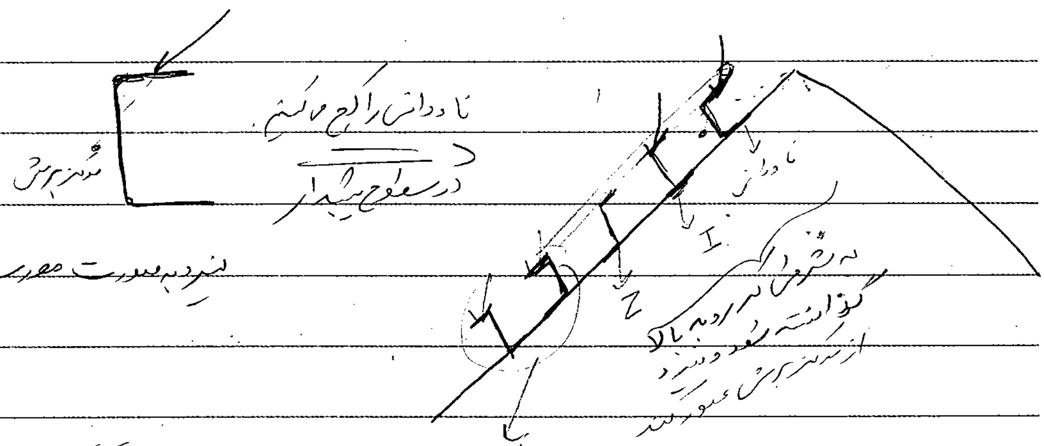
پس نتیجه: اگر یک چنین ناودانی داشتیم باید نیرویی که به آن وارد می‌کنیم در 40mm به سمت بیرون ناودانی باشد.

سؤال: در ناودانی چه جوری نیرو وارد شود؟ چون این جوری که در شکل نشان داده شده نیرو چون بیرون ناودانی است نمی‌ایستد

راه حل: ناودانی را دوبل می‌کنیم (در صورتی که بخواهیم به عنوان تیر استفاده کنیم که نپیچد) باید به شکل زیر در بیاوریم.



همین حالت :



نیرو به صورت مورب وارد شود

شکل بد این مدل (چون رو به پایین گذاشته شده دچار پیچش می‌شود)

مثال 5.6 و 6.6 ص 240 ، 241

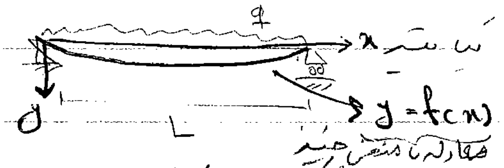
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فصل ۹: تغییر شکل تیرها

اهمیت تنش و مقاومت تیر
در این

می‌خواهیم بررسی کنیم مثلاً یک تیر چه مقدار تغییر شکل می‌دهد (هر تیر با هر شرایطی)



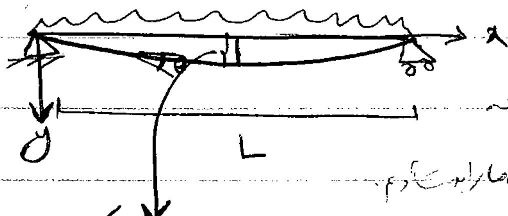
تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری چه مقدار تغییر شکل می‌دهد (یعنی معادله‌ی $y=f(x)$ را می‌خواهیم بدست آوریم) = هدف این فصل
درجه ۳ یا ۴ و ...

که به $y=f(x)$ معادله‌ی منحنی الاستیک تیر گفته می‌شود

حال چه اطلاعاتی را می‌خواهیم؟

وقتی معادله‌ی منحنی را بدست آوردیم y هر نقطه را به راحتی می‌توان بدست آورد.

(شکل الف)



خیز ماکزیمم
نقطه‌ای که بیشترین تغییر شکل را دارد

برای بدست آوردن خیز ماکزیمم از منحنی $y=f(x)$ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و xای که بدست می‌آید را در معادله‌ی y قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی ماکزیمم بدست آید

* بیشترین شیب در تکیه‌گاه‌ها است *

$\tan\theta = y' =$ شیب

از نقاط دیگری که برای ما مهم است شیب است. ... که باید $y'=0$ قرار دهیم

هدف دیگر از این مبحث تحلیل تیرهای نامعین است (مثلاً تیری که ۳ تا تکیه‌گاه دارد باید معادله‌ی سازگاری تغییر شکل‌ها را بنویسیم)

تغییر شکل تیرها:

(در صفحه‌ی بعد)

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

در فصل خمش فرمول شماره ۱ : $\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}$

چون θ زاویه است خیلی کوچک است $\Rightarrow \theta=\tan\theta=\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{شیب} = y'}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

در فصل خمش فرمول شماره ۵ : $\frac{1}{\rho}=\boxed{\frac{M}{EI}}$

$\frac{M}{EI}=-\frac{d^2y}{dx^2}$ منفی

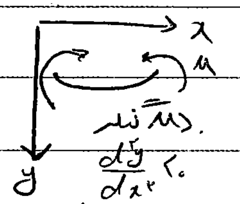
معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک

$EIy''=-M_x \longrightarrow$ ادامه در پایین صفحه

M بر حسب x است

دوبار انتگرال می گیریم تا y بدست آید.

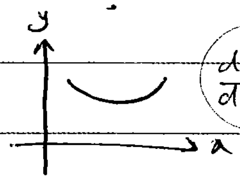
M را هم باید مقطع بزنیم و بر حسب x بدست آوریم.



M مثبت

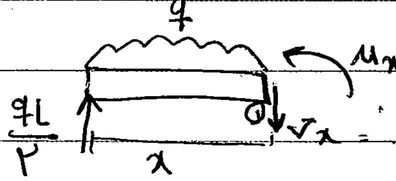
$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

هر چند تقعر به سمت بالا است اما چون جهت محور y به سمت پایین است منفی در نظر گرفته می شود



$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

با توجه به شکل الف صفحه قبل یک مقطع به فاصله x در تیر می زنیم (پیدا کردن Mx = هدف)



نکته: در تیر ها با هر بارگذاری و هر نوع تکیه گاهی باید دوبار انتگرال بگیریم تا y را بدست آوریم.

و ثابت ها را C_1 و C_2 و ... را هم باید با بارگذاری نقاط مرزی

$y=0 \leftarrow x=L$ و $y=0 \leftarrow x=0$

$\sum M_O=0$

$$\underbrace{M_x+qx\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{qL}{2}x}_{\text{معادله ای که Mx بدست آمد}}$$

ادامه حل معادله ۵

$$EIy''=\frac{qx^2}{2}-\frac{qL}{2}x \xrightarrow{\text{انتگرال}} EIy'=\frac{qx^3}{6}-\frac{qLx^2}{4}+C_1 \quad \text{انتگرال}$$

$$EIy=\frac{qx^4}{24}-\frac{qLx^3}{12}+C_1x+C_2 \xrightarrow{\text{پس}}$$ (در صفحه بعد)

شرایط مرزی $\Rightarrow \boxed{C_2=0}$

شرایط مرزی $\left.\begin{matrix}x=L\\ y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=\frac{qL^4}{24}-\frac{qL^4}{12}+C_1L \Rightarrow \boxed{C_1=\frac{qL^3}{24}}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\cancel{EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} +}$

پس: $y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x\right]$

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$$

$\cancel{y = f(x)}$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]}$$

حال اگر خیز ماکزیمم را بخواهند [که در این مسئله تیر شکل الف، به علت تقارن

داریم خیز در وسط است]

برای بدست آوردن خیز $y'=0$ قرار می‌دهیم

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$x = \frac{L}{2}$ را در $y = f(x)$ قرار می‌دهیم:

شدت بار

$$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$$ طول تیر

اگر شیب تیر در تکیه‌گاه را بخواهند (شیب حداکثر = شیب تکیه‌گاه‌ها)

شیب حداکثر یعنی $y' = max$ شود پس باید $y'' = 0$ قرار دهیم

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \xrightarrow{x=0} y'_{max} = \underbrace{\theta_{max}}_{\theta = \tan\theta} = \frac{qL^3}{24EI}$$

x ها را در y' قرار دهیم

$$x = L \Rightarrow y'_{min} = \theta_{min} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر جواب ندهد تیر را عوض کن

برای تیرها مثل Q آنچه ... کنترل برش - کنترل تنش برشی $\tau_{max} = \frac{V_{max}\cdot Q}{It} \le \tau_{مجاز}$ ✓ مثل ۵

اگر جواب ندهد ابعاد تیر را عوض کنند

در کنترل تیر برشی و خمشی = کنترل تنش قائم $\sigma_{max} = \frac{M_{max}\cdot C}{I} \le \sigma_{مجاز}$ ✓ مثل ۴

باید کنترل برش و خمش

کنترل خیز ⇐ خیز ماکزیمم ≤ خیز مجاز ⇐ $\frac{5qL^4}{384EI} \le$ خیز مجاز ✓

خیز مجاز را به صورت $\frac{L}{عدد}$ می دهند

اگر جواب ندهد به خاطر این که خیز زیاد شود، مصالح دیگر یا ساختمان ... ترک می خورند

دلیل ... سازه های بتنی (سازه های ...)

اگر در زیر سقف یا شیشه ... خیز داشته باشد از نظر ظاهری مشکل دارد.

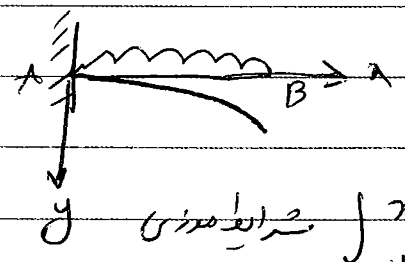
هر وقت خیز وجود داشت دلیل بر این است که تنش وجود دارد.

برای تیرهای کوتاه ... برشی ملاک است (τ_{max} بحرانی است)

... σ_{max} بحرانی است

... تیرهای بزرگ خیز ... بحرانی است (مخصوصا اگر بار وارده بحرانی هم باشد)

نکته: اگر شرایط تکیه گاهی به صورت زیر باشد



معنی این تیر با شرایط این است که معادله M مورد نیاز است

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ $\Rightarrow C_1=?\ C_2=?$

شیب صفر است در تکیه گاه

هر تکیه گاه مفصلی یک شرط مرزی دارد که $y=0$ است.

هر تکیه گاه گیردار دو شرط مرزی دارد که $y=0$ و $y'=0$ است

تکیه گاه آزاد شرط مرزی ندارد.

STAEDTLER

(تا این جا سوال یک ... مخصوص است) از این به بعد ...

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

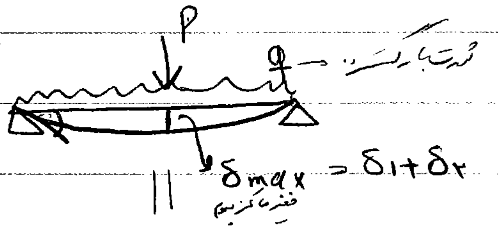
از این جا به بعد کاربردی است. (برای حل مسئله های این مبحث جدول تغییر شکل به ما می دهند)

منحنی مهم

* تحلیل تیرهای نامعین : (جدول صفحه ۶۴۸ جانسون ببینید)

مقدمه : مثال برای کاربرد جدول

مثال ۱ :

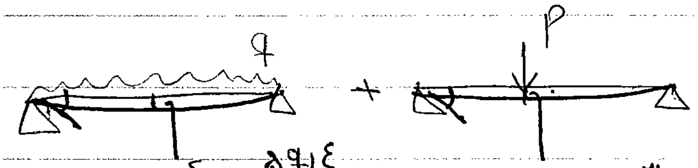


$$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2$$

خیز ماکزیمم

خیز ماکزیمم و شیب را بدست آوریم؟

کاربرد اصل برهم نهی (جمع آثار قوا)

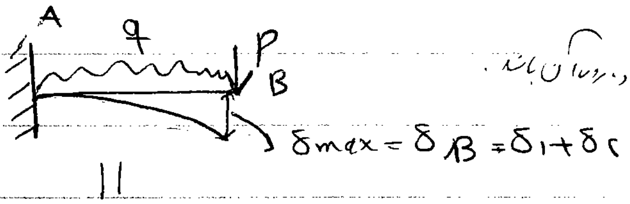


$$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$$

از جدول بدست می آید. از جدول بدست می آید.

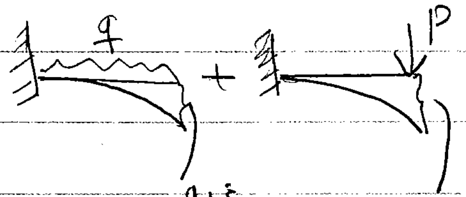
تمام مشخصات تیر مجموع این دو تیر می شود. حتی تغییر شکل تیر اصلی ($y=f(x)$) هم مجموع تغییر شکل این دو تیر است. پس این دو معادله را با هم جمع می کنیم (خیز ماکزیمم (δ_{max}) هم از جمع δ_1 و δ_2 بدست می آید).

مثال ۲ : تیر کنسول



$$\delta_{max} = \delta_B = \delta_1 + \delta_2$$

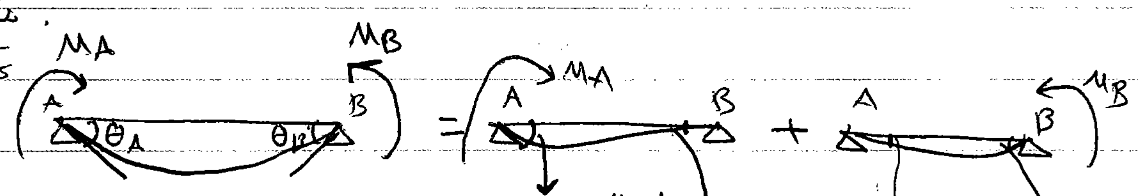
اگر بار متمرکز از پایین به تیر وارد شود و بار گسترده در بالای آن باشد. آن گاه $\delta_{max} = \delta_1 - \delta_2$ می شود.



$$\delta_1 = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$$

مثال ۳ :

گشتاور در طول [illegible] M_B و M_A گسترده



زاویه A $= \frac{M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه A $= \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

پس $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

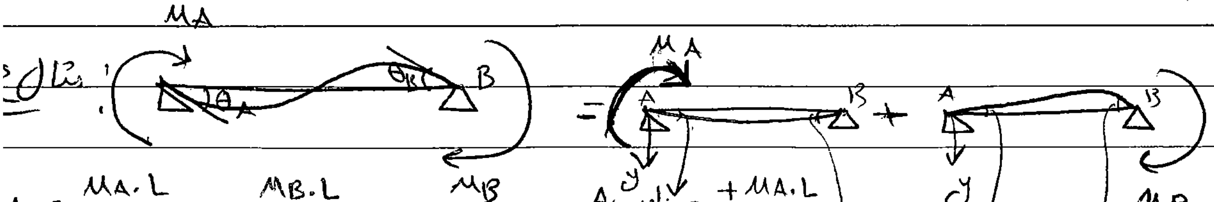
$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{6EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

زاویه B $= \frac{M_A \cdot L}{\underset{2\times3}{6EI}}$ زاویه B $= \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

نصف زاویه A است

No...............

(دوم)



$\theta_A = \dfrac{M_A \cdot L}{3EI} - \dfrac{M_B \cdot L}{6EI}$

A زاویه $= \dfrac{+M_A \cdot L}{3EI}$

A زاویه $= \dfrac{-M_B \cdot L}{6EI}$

در این حالت هم داریم

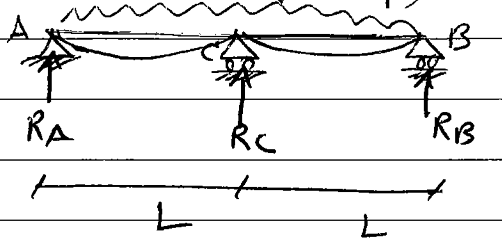
$\theta_B = \dfrac{-M_A \cdot L}{6EI} + \dfrac{ML}{3EI}$

B زاویه $= \dfrac{-M_A \cdot L}{6EI}$

B زاویه : $\dfrac{ML}{3EI}$

حالت اول

تیر نامعین : (عامل‌های نامعین را به عنوان بار خارجی در نظر می‌گیریم و سوپرپوزیشن می‌کنیم)



دو معادله تعادل داریم $\Sigma F_y = 0$ است

$\Sigma M = 0$

و برای ΣM هم حالت به معادلات تعادل در راستا

نگاه می‌کنیم

با توجه به شکل آخر صفحه

معادله سازگاری تغییر : $\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{5q(2L)^4}{384EI} + \left(-\dfrac{R_C(2L)^3}{48EI}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R_C = \dfrac{5}{4}qL}$

در این فصل اول به سراغ معادلات تعادل نمی‌رویم چون دو تا است سازگاری

سه معادله سه مجهول است پس اول معادلات سازگاری را حل می‌کنیم و بعد به سراغ معادلات تعادل می‌رویم.

معادلات تعادل : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B + R_C = 2qL}$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = R_B} = \dfrac{3}{8}qL$

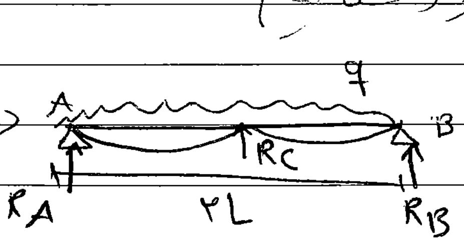
۲ معادله و ۳ مجهول پس نامعین است

وقتی R_C برابر $\frac{5}{4}qL$ است پس $\frac{3}{4}$ باقی مانده به بین R_A و R_B تقسیم می‌شود

$(2qL - \frac{5}{4}qL = \frac{3}{4}qL)$ و به هر کدام $\frac{3}{8}qL$

در این شکل اگر ۲ تا تکیه‌گاه داشت حالت اول بود (استاتیکی)

اگر تکیه نبود $\Rightarrow$

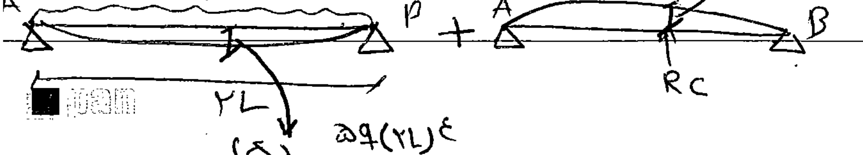


ولی برای اینکه این شکل با شکل اصلی برابر باشد باید R_C را به عنوان یک نیروی عکس‌العمل در نظر بگیریم به عنوان عمل در نظر می‌گیریم

حال این شکل را سوپرپوزیشن می‌کنیم

||

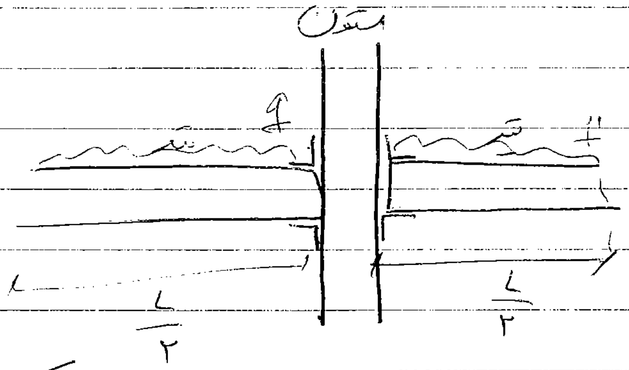
$(\delta_C)_2 = \dfrac{-R_C(2L)^3}{48EI}$



$(\delta_C)_1 \; \dfrac{5q(2L)^4}{384EI}$

سوپرپوزیشن ـ بارگذاری تیرها با بار گسترده

نتیجه: عکس العمل تکیه‌گاه وسط دو برابر تکیه‌گاه‌های کناری نشد بلکه از آن‌ها بیشتر شده است



در این جا تیر قطع شده

که ستون qL و تیرهای کناری

$\frac{qL}{2}$ بار می‌گیرد

اما در شکل صفحه‌ی قبل تیر قطع نشده و به صورت سراسری است که R_C که

همان نقش ستون را بازی می‌کند $\frac{5}{4}$ بار می‌گیرد و دو برابر کناری‌ها نیست

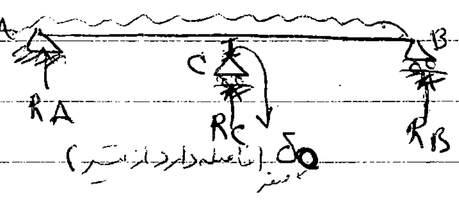
در این جا یک مسئله مطرح می‌شود:

عکس العمل‌ها = ?

حالت دوم:

معادلات تعادل آن مثل حالت اول است

اما: δ_0 صفر نیست



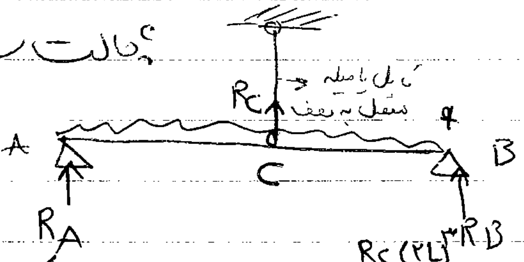
معادله‌ی سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \delta_0 \implies \boxed{R_C = \text{محاسبه می‌شود}}$$

مشابه حالت اول

حالت سوم:

کابل فقط کشیده می‌شود.



سازگاری:

$$\delta_C = \underbrace{\delta_1}_{\frac{5q(2L)^4}{384EI}} + \overbrace{\delta_2}^{\frac{R_C(2L)^3}{48EI}} = \underbrace{\frac{R_C \cdot L}{EA}}_{\frac{PL}{EA}} = \frac{R_C}{\frac{EA}{L}}$$

ناشی تیر

$\frac{PL}{EA}$ → کابل

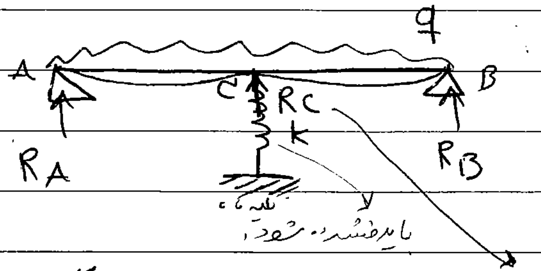
همان k در فنر است

No.............

در این با معادله سازگاری یا فنر است یا ...

R تکیه‌گاه باعث فنر ... که باعث دوران و ... می‌شود.

حالت چهارم: فنر به سقف متصل شود یا فنر به زیرش ...



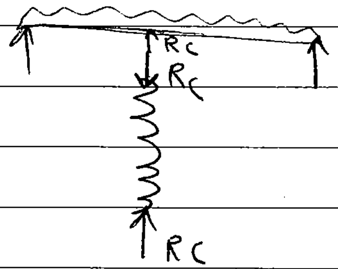
تغییر طول فنر

$$F = k.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k}$$

سازگاری:

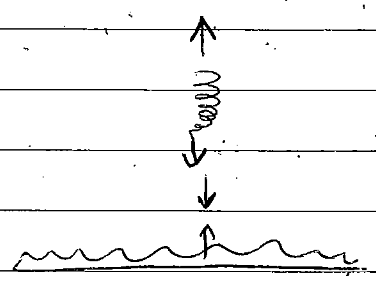
$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C}{k}$$

نیرویی که از فنر به تیر وارد می‌شود.



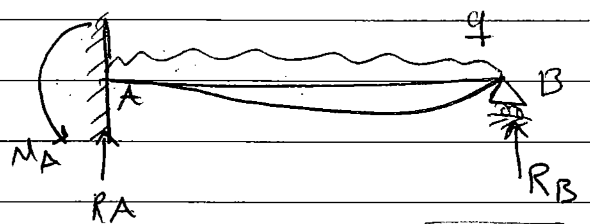
دیاگرام فنر:

اگر فنر بالا باشد.



یا R_B اضافه است و یا M_B الزام است

حالت اول: R_B الزام است



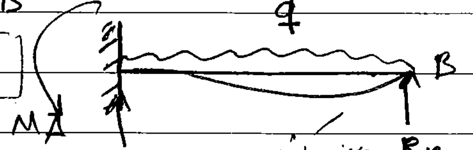
معادلات تعادل

$$\Sigma F_y = R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8} qL}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2}$$

$$\boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

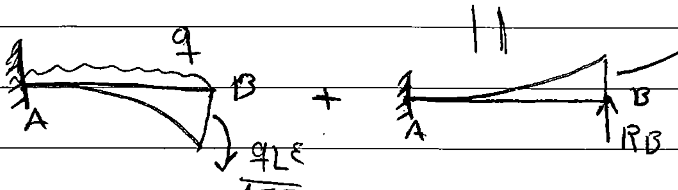
مانند هم ...



$$qL - \frac{3}{8} qL = \frac{5}{8} qL = R_A$$

مجهول می‌شود $R_B = \frac{3}{8} qL$

R_B تکیه‌گاه ثابت و ...



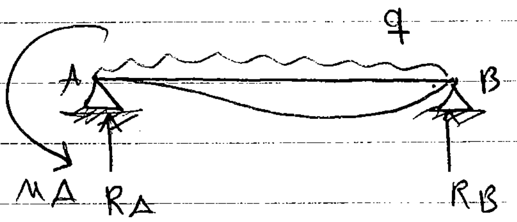
$$\frac{qL^4}{8EI} \qquad \frac{-R_B L^3}{3EI}$$

معادله سازگاری

$$; \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8} qL}$$

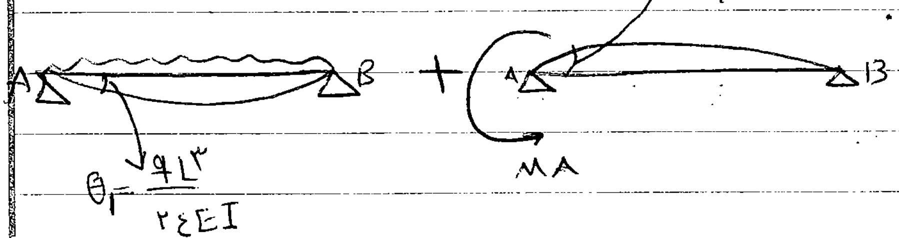
طبق شکل خیز B صفر است

حالت دوم = M_A مجهول است:



اگر ما M_A را صفر کنیم یعنی تکیه‌گاه،
گیردار مفصلی شود.
(یعنی M_A را از حالت تکیه‌گاه (عکس‌العمل)
خارج می‌کنیم)

$$||$$



$$\theta_1 = \frac{qL^3}{24EI} \qquad \theta_2 = \frac{-M_A \cdot L}{3EI}$$

معادله‌ی سازگاری:

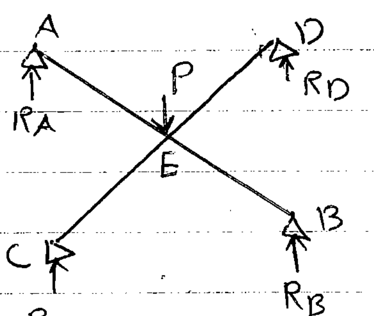
چون یک عامل مجهول M_A داریم
پس معادله سازگاری
باید بنویسیم

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0 \implies \boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \implies \frac{qL^2}{8} + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2} \implies \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL} \\ \Sigma F_y = 0 \implies R_A + R_B = qL \implies \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL} \end{cases}$$

چند مسأله:

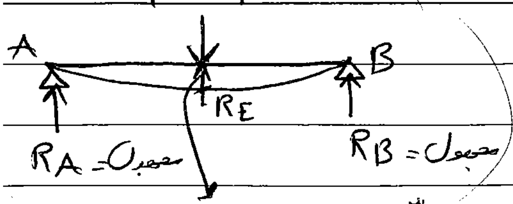


مثال ۱: (امتحانی)

(وسط تیر AB روی وسط تیر CD تکیه کرده)
تیر AB از روی تیر CD عبور کرده
و با آن تماس دارد
بار P مستقیم روی AB است
و CD به طور غیرمستقیم بار P را تحمل می‌کند
فرض کنیم مشخصات AB ، 1 باشد
و مشخصات CD ، 2 باشد
برای تعیین تعداد معادلات تعادل تیرها
استفاده می‌کنیم (درجه ...)

در اصل باید سوپرپوزیشن کنیم (اما در این جا نشود در

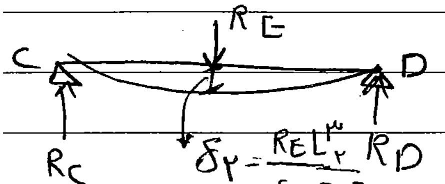
No. ($P - R_E$, E



$$\delta_1 = \frac{(P-R_E)L_1^3}{48E_1I_1}$$

تیر پایینی برای تیر بالایی به منزله تکیه‌گاه است

اما تیر بالایی به منزله قرار گرفتن بار روی تیر پایینی است



$$\delta_2 = \frac{R_E L_2^3}{48E_2I_2}$$

پس در کل ۵ تا مجهول داریم و برای هر تیر دو

معادله تعادل داریم : ۲ تا در هر تا هستش

۴ معادله ، ۵ مجهول

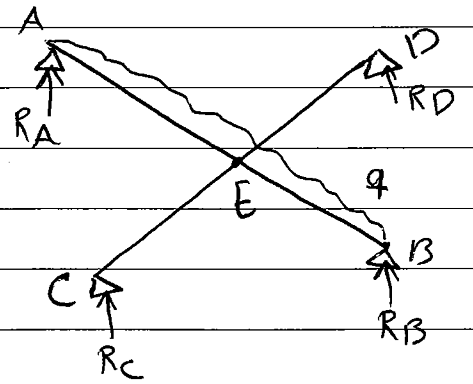
در نقطه E باهم برابرند $\Longleftarrow$ خیز CD = خیز AB

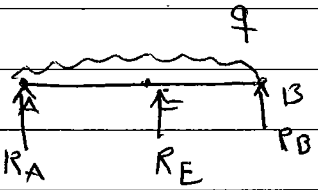
معادله سازگاری : $\delta_1 = \delta_2 \Longrightarrow R_E$ = بدست می‌آید

نکته : اگر تیرها بدون بار به ما دادند باید وزن تیر را به صورت ... در نقطه تکیه‌گاه ... مجموع ...

در مقاومت ... سرها را با وزن تیر در نقطه آن معادل نماییم

مثال ۱ : بار تقسیم

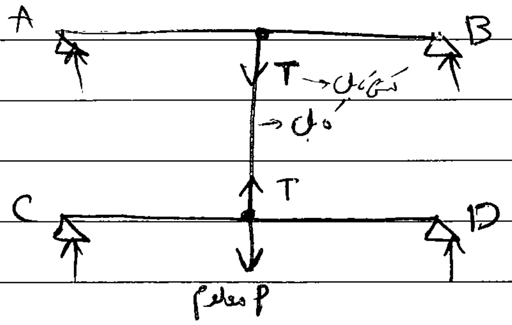




باید سوپرپوزیشن شود

اما باز هم $\delta_1 = \delta_2$ برابرات

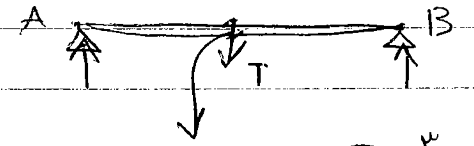
مثال ۲ : نکته : نیروهایی که به کابل وارد می‌شود کشش است



و زمانی به تیر پایینی وصل کردیم .

۵ مجهول

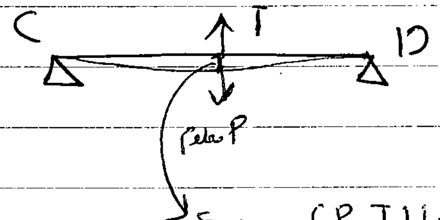
دیگر کدام آزاد شد



$$\delta_1 = \frac{TL_1^3}{48E_1I_1}$$

سازگاری : $\delta_2 - \delta_1 = \delta_{\text{کابل}}$

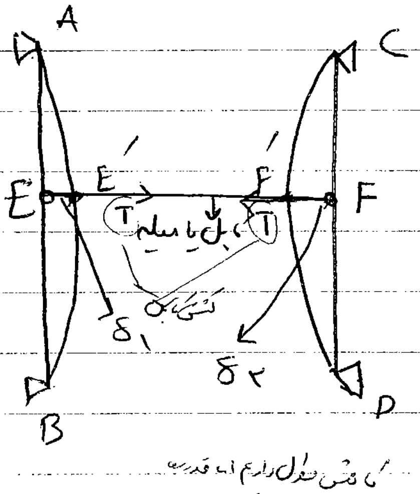
$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL_3}{E_3A_3}$$



$$\delta_2 = \frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}$$

مثال ۳:

کابل را سرد کنیم و دو طرف تیر را جا کند



با بیشی طول داریم از قدر مطلق

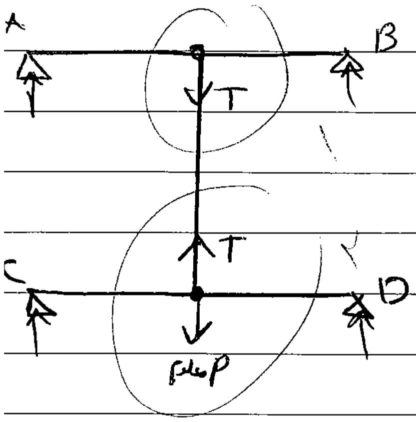
سازگاری : $|\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_{\text{کابل}}|$

$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{TL_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha \cdot L\Delta T| - \frac{TL}{EA} \Rightarrow \boxed{T = \text{بدست می‌آید}}$$

چون کابل را سرد کردیم

اگر کابل در سردش یا ایستگی آزاد بود فقط تغییر طول ناشی از دما بود اما چون در سردش از دو طرف بسته است پس تغییر طول ناشی از نیرو را هم باید بیاوریم

No...............



مثال:

$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{(T-P)L_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha L \Delta T| - \frac{TL}{EA}$$

$$\overset{\text{فنر ۲}}{\delta_2} - \overset{\text{فنر ۱}}{\delta_1} = \delta_{\text{کابل}}$$

$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \underbrace{\frac{TL}{EA} + \alpha L \underbrace{\Delta T}_{-20}}_{\text{کابل}}$$

فنر ۱ > فنر ۲ ← چون فنر ۲ زیر P قرار دارد

No.