دانشگاه خلیج فارس
بوشهر

www.engclubs.net

دینامیک سازه ها

دکتر علیرضا فیوض

فصل اول

مقدمه

۱-۱ دینامیک سازه ها

موضوع علم دینامیک سازه عبارت است از محاسبه پاسخ سازه ها و بررسی رفتار آنها در برابر بارهای دینامیکی. منظور از پاسخ سازه کمیت هایی نظیر تغییرمکان، سرعت، شتاب، عکس العمل تکیه گاه، نیروهای داخلی و تنش ها و کرنش ها می باشد. منظور از بارهای دینامیکی بارهایی است که مقدار یا محل اثر یا جهت آنها تابعی از زمان باشد. معمولاً تحلیل دینامیکی سازه ها بجز در حالت های خاصی، پیچیده، دشوار و از نظر محاسباتی وقت گیر می باشد. بنابراین معمولاً این نوع تحلیل بوسیلهٔ نرم افزارهای کامپیوتری انجام می شود.

۱-۲ انواع بارهای دینامیکی

بارهای دینامیکی را به دو دسته می توان تقسیم بندی نمود:

الف- بارهای متعیّن(Deterministic) یا بارهای از پیش تعریف شده (Prescribed)

ب- بارهای غیر متعیّن (Nondeterministic) یا تصادفی (Random) یا احتمالی(Probabilistic)

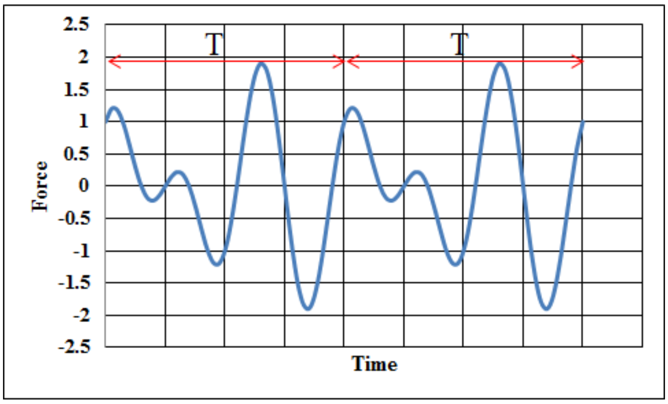
بارهای متعیّن بارهایی هستند که تغییرات زمانی آنها معلوم است ولی بارهای غیر متعیّن بارهایی هستند که تغییرات زمانی آنها دقیقاً معلوم نیست ولی می توان بعضی از توابع آماری آنها نظیر میانگین، میانگین مربعات، واریانس و ... را تعریف نمود. می توان گفت که بارهای متعیّن بارهایی هستند که اتفاق افتاده اند ولی بارهای غیر متعیّن بارهایی هستند که در آینده به سازه وارد می شوند. مثلاً زلزله ای که اتفاق افتاده است متعیّن است چون تغییرات زمانی آن مشخص است. ولی زلزله ای که در آینده اتفاق می افتد و سازه برای آن طراحی می شود غیر متعیّن است چون تغییرات زمانی آن معلوم نیست.

به این ترتیب کلیه بارهایی که در هنگام طراحی سازه پیش بینی می شود به سازه وارد شوند بارهای تصادفی هستند. حتی بار مرده ساختمان نیز بار تصادفی است، چون بار مرده ای که در هنگام طراحی فرض می شود به سازه وارد

می شود را دقیقاً نمی توان پیش بینی نمود و احتمالاً در طول زمان تغییر خواهد کرد که تغییرات آن با زمان مشخص نیست.

موضوع این کتاب بارهای متعیّن است. این بارها را می توان به انواع مختلفی به شرح زیر تقسیم بندی نمود.

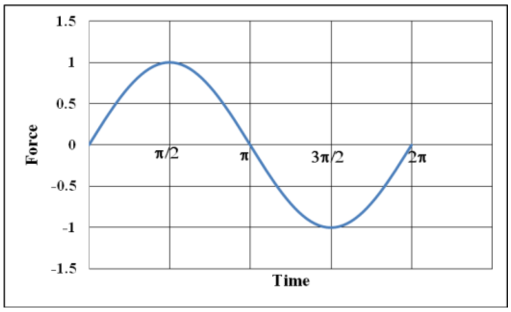
الف- بارهای متناوب(Periodic): بارهایی هستند که شکل آنها در یک محدوده زمانی تکرار می شود (شکل ۱-۱).

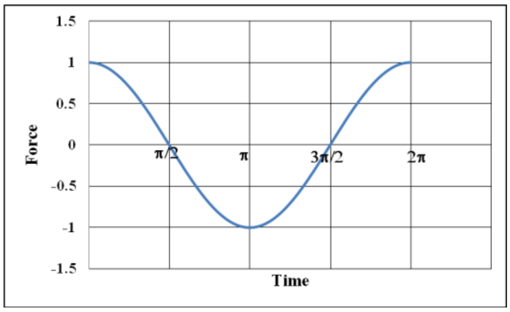


شکل ۱-۱ نمونه از بارهای متناوب

بارهای متناوب خود به دو دسته تقسیم بندی می شوند:

۱- بار هارمونیک ساده(Simple Harmonic) بارهایی که فقط از یک موج سینوسی یا کسینوسی تشکیل میشوند(شکل ۱-۲).

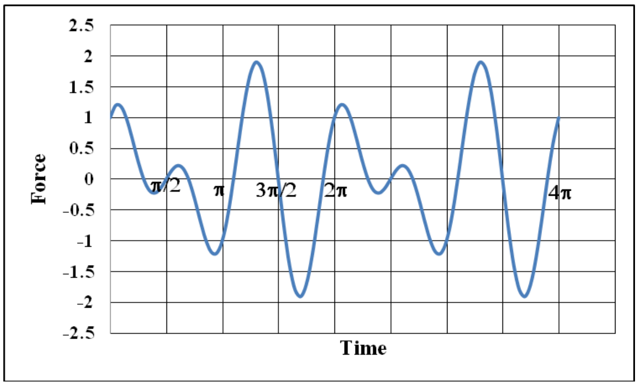




شکل ۱-۲ مثال هایی از بارهای هارمونیک ساده

۲- بار تناوبی پیچیده(Complex periodic)

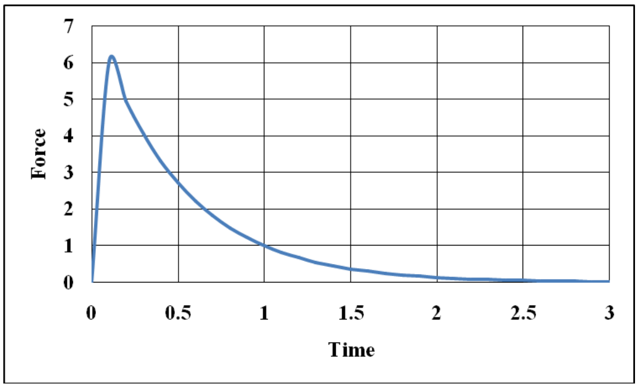
این نوع بار ترکیبی از چند بار هارمونیک ساده با فرکانس و دامنه های مختلـف (شـکل ۱-۳) و یـا حتـی نـامنظم میتواند باشد. نمونه ای از این بارها نیروی امواج بر سازه های دریایی یا اسکله ها هستند.



شکل ۱-۳ نمونه ای از بار تناوبی پیچیده

ب- بارهای ضربه ای(Impulsive loading)

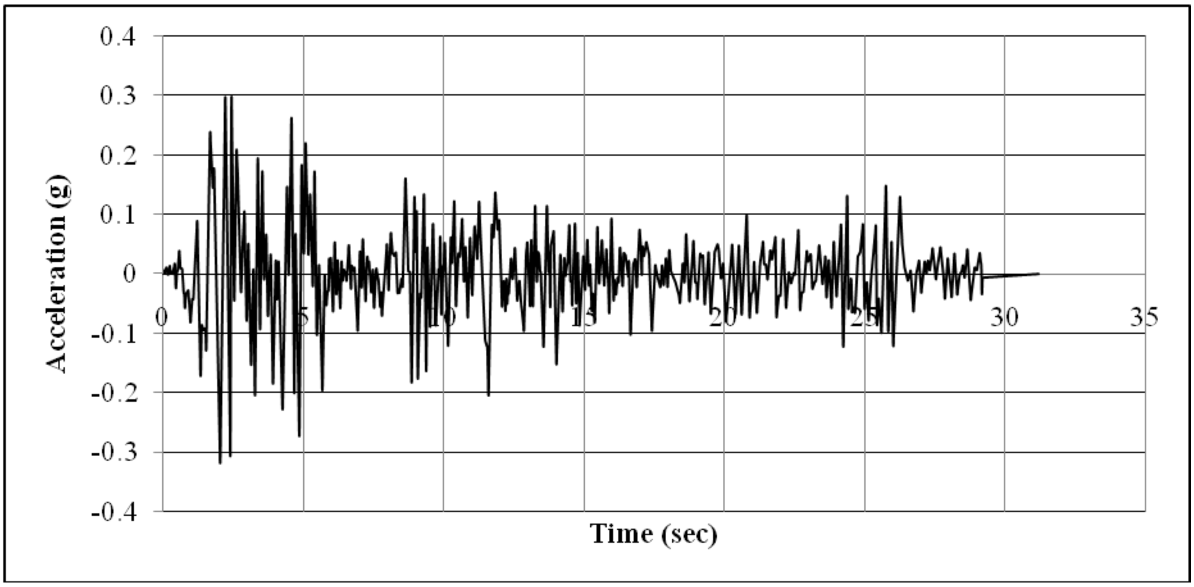
بارهایی که مدت زمان اعمال آنها بسیار کوتاه باشد.مثل نیروی انفجار یا ضربه آسانسور یـا برخـورد کـامیون بـه پایه پل (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴ نمونه ای از بار انفجاری

پ- بارهای نامنظم(Irregular)

بارهایی هستند که شکل هندسی خاصی ندارند مثل بار زلزله (شکل ۱-۵).



شکل ۱-۵ شتاب زلزله السنترو

۱-۳ مثال هایی از بارهای دینامیکی

الف- بار زلزله (Earthquake). بار زلزله یک نوع بار دینامیکی است. چون واضح است که وابسته به زمان می باشد. البته زلزله خود بار نیست بلکه حرکات زمین است که چون در جرم ساختمان شتاب ایجاد می کند، باعث تولید نیروی اینرسی در سازه شده که اصطلاحاً نیروی زلزله نامیده می شود.

ب- فشار باد(Wind). واضح است که فشار باد تابعی از زمان می باشد. یعنی در یک لحظه از زمان ممکن است مقداری باشد و پس از آن کم یا زیاد شود. بنابراین فشار باد نیز یک نوع بار دینامیکی محسوب می شود.

پ- موج(Wave). فشار امواج روی سازه های ساحلی و فراساحلی، نیرویی ایجاد می کند که تابعی از زمان و در نتیجه دینامیکی است.

ت- بارهای متحرک(Moving Load). حرکت اتومبیل روی پل باری است که مقدار آن را می توان ثابت درنظر گرفت (با صرفنظر کردن از اثرات ضربه) ولی موقعیت آن با زمان متغیر است. بنابراین بارهای متحرک نیز دینامیکی محسوب میشوند.

ث- ضربه اتومبیل(Impact). بعضی از سازه ها (مثل پایه پل ها یا حفاظ های اطراف جاده و...) در معرض برخورد اتومبیل هستند. این نیرو نیز تابعی از زمان ودینامیکی است.

ج- ماشین آلات ارتعاشی(Rotating Machinery). ماشین آلاتی که به سازه متصل می شوند در صورتی که یک موتور محرک داشته باشند(مثل آسانسور، چیلر، کمپرسور و...)، نیرویی به سازه وارد می کنند که تابعی از زمان و دینامیکی است.

چ- ارتعاشات محیطی(Ambient Vibration). ارتعاشاتی که بر اثر عوامل محیطی مثل ترافیک، وزش ملایم هوا، و لرزش های ریز زمین ایجاد می گردند نیز در زمره بارهای دینامیکی محسوب می شوند.

ح- بار زنده(Live Load). بار زنده وارد بر سازه ها نیز دینامیکی است زیرا این بار بعضی اوقات به سازه وارد می شود و بعضی اوقات این بار وجود ندارد.

خ - بار مرده(Dead Load). حتی بار مرده ساختمان را نیز می توان دینامیکی محسوب نمود زیرا این بار نیز به تدریج ودر طول زمان به سازه وارد می شود. حتی در زمان بهره برداری ممکن است بارمرده به ساختمان تغییر کند بنابراین بار مرده نیز تابعی از زمان میباشد.

۱-٤ تفاوت بین مسائل دینامیکی و استاتیکی

بین مسائل استاتیکی و دینامیکی سه تفاوت عمده وجود دارد:

۱- در مسائل استاتیکی نیروی وارد و پاسخ سازه نسبت به زمان ثابت هستند ولی در مسائل دینامیکی چون نیروی وارد به سازه تابعی از زمان است پاسخ سازه نیز تابعی از زمان می باشد. به همین دلیل تحلیل دینامیکی معمولاً مشکل تر و وقت گیرتر از تحلیل استاتیکی است.

۲- چون در مسائل دینامیکی تغییر مکان سازه تابعی از زمان است بنابر این المان های مختلف سازه دارای سرعت و شتاب نیز هستند. همانطور که می دانیم حاصل ضرب جرم المان در شتاب آنها نیرویی بوجود می آورد که نیروی اینرسی نامیده می شود. در مسائل استاتیکی این نیرو وجود ندارد ولی در مسائل دینامیکی باید اثر نیروی اینرسی درنظر گرفته شود.

۳- اگر سازه ای دارای تغییر مکان یا سرعت اولیه باشد و سپس به آن نیرو وارد نشود یک حرکت نوسانی خواهد داشت که به تدریج و به مرور زمان دامنه حرکت آن کاهش میابد تا بالاخره به صفر میرسد. علت این امر اتلاف انرژی است که خاص مسائل دینامیکی می باشد. عامل اتلاف انرژی در مسائل دینامیکی میرایی نامیده میشود. در مسائل استاتیکی میرایی وجود ندارد ولی در مسائل دینامیکی لازم است میرایی نیز درنظر گرفته شود. عوامل بوجود آمدن میرایی در سازه ها بسیار زیاد و تقریباً ناشناخته است. بعضی از این عوامل عبارتند از: اصطکاک در اتصالات فلزی، باز و بسته شدن ترک های مویی در بتن، اصطکاک بین سازه و عناصر غیر سازه ای و .... در تحلیل دینامیکی سازه ها، میرایی نیز به صورت یک نیرو در نظر گرفته می شود که این نیرو نیز همانند نیروی اینرسی بر خلاف جهت حرکت می باشد.

۱-٥ روش مدلسازی

به دو صورت می توان یک سازه را مدلسازی نمود:

(الف)مدل جرم متمرکز: در این روش جرم، سختی، میرایی و نیروی سازه در نقاط معینی به صورت متمرکزدر نظر گرفته می شود.

(ب) مدل جرم پیوسته: در این روش جرم، سختی، میرایی یا نیروی سازه به صورت پیوسته در نظر گرفته می شود.

می توان گفت که کلیه سازه های واقعی از مدل جرم پیوسته تبعیت می کنند ولی با فرضیاتی می توان آنها را به صورت جرم متمرکز درنظر گرفت .

۱-۶ فرضیات اصلی تحلیل دینامیکی سازه ها

فرضیاتی که برای تحلیل دینامیکی سازه ها در این درس درنظر گرفته می شود همان فرضیات اصلی تحلیل استاتیکی سازه ها می باشند که عبارتند از:

(الف) تغییر فرم های کوچک: بر اساس این فرض تغییر فرمها آنقدر کوچک هستند که روی روابط تعادل تأثیر زیادی نمی گذارند.

(ب) خطی بودن سازه: این فرض به این مفهوم در نظر گرفته می شود که رابطه بین تنش و کرنش به صورت خطی است. همچنین رفتار سیستم به صورت ارتجاعی است یعنی با برداشتن بار سازه به جای اول خود بر می گردد. با صادق بودن این فرض اصل جمع آثار قوا نیز برقرار خواهد بود.

در این کتاب بجز در جاهایی که صراحتاً ذکر می شود از این دو فرض استفاده می شود.

۷-۱ جرم و وزن (Mass and weight)

اختلاف بین جرم و وزن گاهی اوقات ابهام برانگیز است. به همین دلیل در اینجا این اختلاف شرح داده می شود. جرم مقدار مادهٔ موجود در جسم است در حالیکه وزن نیروی لازم برای ایجاد شتاب جاذبه در جسم می باشد. در سیستم های اندازه گیری مختلف واحدهای این دو کمیت متفاوت می باشد که در زیر شرح داده می شوند.

سیستم واحدهای استاندارد بین المللی (SI)

در این سیستم واحد وزن و نیرو نیوتن (N) و واحد جرم کیلوگرم (Kg) است. بنا به تعریف یک نیوتن مقدار نیرویی است که به جسمی به جرم یک کیلوگرم شتاب یک متر بر مجذور ثانیه می دهد.

$$F = ma \;\; \Rightarrow \;\; 1\,N = (1\,Kg) \times (1\,m/sec^2)$$

در این سیستم واحد تنش پاسکال (Pa) است که برابر است با فشاری که نیروی یک نیوتنی بر سطحی به مساحت یک متر مربع وارد می کند.

تذکر: در مسائل مهندسی معمولاً شتاب جاذبه برابر $10\,m/sec^2$ گرفته می شود.

مثال:

جرم یک متر مکعب فولاد　$\rho = 7850\,kg/m^3$

وزن یک متر مکعب فولاد　$\gamma = \rho g = 7850 \times 10 = 78500\,N/m^3$

ضریب الاستیسیتهٔ فولاد　$E = 2 \times 10^{11}\,Pa = 200\,GPa$

تنش تسلیم فولاد　$F_y = 240\,MPa$

سیستم واحدهای متریک (MKS)

این سیستم، سیستم رایج در مهندسی و عرف جامعه ایران است. در این سیستم واحد وزن کیلوگرم نیرو (Kgf) و واحد جرم کیلوگرم (Kg) می باشد. بنا به تعریف یک کیلوگرم نیرو، نیرویی است که به جسمی به جرم یک کیلوگرم شتابی برابر با شتاب جاذبه بدهد.

$$W = mg \;\; \Rightarrow \;\; 1\,\text{Kgf} = (1\,\text{Kg}) \times (10\,\text{m/sec}^2)$$

در اصطلاح عموم بجای کیلوگرم نیرو، فقط کیلوگرم گفته می شود.

مثال :

جرم یک متر مکعب فولاد $\rho = 785\,\text{kg/m}^3$

وزن یک متر مکعب فولاد $\gamma = \rho g = 785 \times 10 = 7850\,\text{Kgf/m}^3$

ضریب الاستیسیتهٔ فولاد $E = 2 \times 10^{10}\,\text{Kgf/m}^2 = 2 \times 10^{6}\,\text{Kgf/cm}^2$

تنش تسلیم فولاد $F_y = 2400\,\text{Kgf/cm}^2$

تذکر: بعضی وقت ها در این سیستم واحد جرم به صورت $\text{Kg} - \text{sec}^2/\text{m}$ بیان می شود.

فصل ۲

معادله حرکت سیستم های یکدرجه آزاد

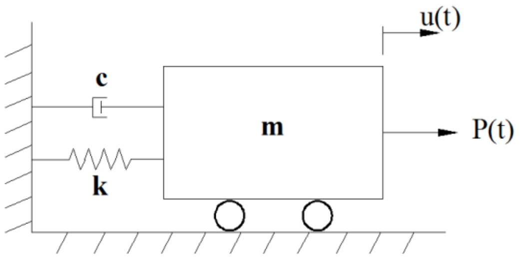
علیرضا فیض

۲-۱ معرفی سیستم های یک درجه آزاد

سیستم های یک درجه آزاد(Single Degree Of Freedom Systems, SDOF) سیستم هایی هستند که جابجایی کلیه نقاط آن را می توان بر حسب جابجایی یک نقطه بیان نمود. مثال هایی از این سیستم عبارت است از:

الف- سیستم جرم- فنر- میراگر

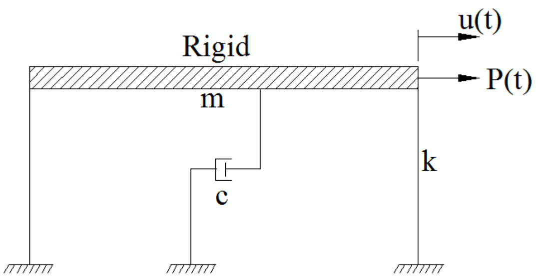
این سیستم ساده ترین سیستم دینامیکی می باشد که از یک جرم، یک فنر و یک میراگر تشکیل شده است. نمونه ای از این سیستم در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. جابجایی این سیستم در واقع بوسیله جابجایی جرم آن بیان می شود.



شکل ۲- ۱ سیستم جرم-فنر-میراگر

ب- مدل یک درجه آزاد از یک قاب یک طبقه

یک قاب یک طبقه که سقف آن صلب باشد را می توان به صورت یک سیستم یک درجه آزاد در نظر گرفت (شکل ۲-۲). صلب بودن سقف سبب می شود که سقف دوران نداشته باشد و تنها حرکتی که برای این قاب امکان پذیر است جابجایی افقی سقف است. این جابجایی به عنوان درجه آزادی در نظر گرفته می شود.



شکل ۲-۲ سیستم سقف صلب

نمونه های دیگری از سیستم های یک درجه آزاد نیز وجود دارند که در فصل ۹ به آنها پرداخته می شود.

۲-۲ اجزای سیستم های دینامیکی

سیستم های دینامیکی از اجزای زیر تشکیل شده اند:

الف- جرم (Mass)، سیستم های دینامیکی حتماً جرم دارند. به عبارت دیگر سیستم های بدون جرم، دینامیکی نیستند.

ب – سختی (Stiffness)، سیستم های دینامیکی حتماً دارای سختی هستند. سختی به معنی عامل مقاومت در مقابل تغییر فرم در نظر گرفته می شود. بنابراین اگر سیستمی سختی نداشته باشد، دینامیکی نیست. البته اگر سیستم سختی نداشته باشد حرکت آن به صورت جسم صلب است که یک نوع سیستم دینامیکی است که موضوع آن خارج از بحث این کتاب می باشد. در مورد سختی سیستم در بخش ۲-۱۰ توضیحات مفصل تر و جزیی تری داده می شود.

ج – میرایی (Damping)، میرایی جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی است و در کلیه این سیستمها وجود دارد. این موضوع جزء واقعیات سیستم های دینامیکی است و بیان کننده استهلاک انرژی در یک سیستم دینامیکی است.

د – نیرو (Force)، به سیستمهای دینامیکی ممکن است نیرو وارد شود. البته وارد شدن نیرو جزء شروط الزامی سیستم های دینامیکی نیست و ممکن است به یک سیستم دینامیکی نیرو وارد نشود.

۳-۲ معادله حرکت سیستم های یک درجه آزاد

برای نوشتن معادلهٔ حرکت سیستم های دینامیکی روش های مختلفی وجود دارد. این روش ها عبارتند از:

۱) اصل دالامبر: در این روش از قانون دوم نیوتن استفاده می شود که روابط تعادل دینامیکی بدست می آید.

۲) روش کار مجازی: این روش بر اساس این اصل بنا شده است که اگر سیستمی در حال تعادل (استاتیکی یا دینامیکی) باشد و به آن یک تغییر مکان کوچک که با تکیه گاههای آن سازگار باشد داده شود، مجموع کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر آن صفر است.

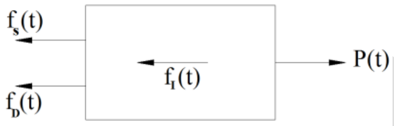
۳) اصل هامیلتون: این روش همان روش انرژی است. بر اساس آن مجموع انرژی پتانسیل وجنبشی سیستم در هر لحظه از زمان ثابت می ماند.

برای هر مسئله می توان از هر یک از این روش ها برای نوشتن معادلهٔ حرکت استفاده نمود. ولی در هر مسئله بسته به صورت مسئله یکی از این روش ساده تر است. در ادامه این روش ها توضیح داده می شود.

۲-۳-۱ اصل دالامبر (روش تعادل)

در این روش نمودار جسم آزاد سیستم در یک لحظهٔ دلخواه ترسیم می شود. سپس معادلهٔ تعادل نوشته خواهد شد.

برای توضیح این روش سیستم جرم-فنر-میراگر را در نظر بگیرید. نمودار جسم آزاد این سیستم در لحظه t در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ نمودار جسم آزاد سیستم جرم فنر

رابطه تعادل برای این سیستم به صورت زیر نوشته می شود.

$$f_I(t)+f_D(t)+f_s(t)=P(t) \quad (۲-۱)$$

که در آن:

$f_I(t)$ = نیروی اینرسی (Inertia force)

$f_D(t)$ = نیروی میرایی (Damping force)

$f_s(t)$ = نیروی فنر (Spring force)

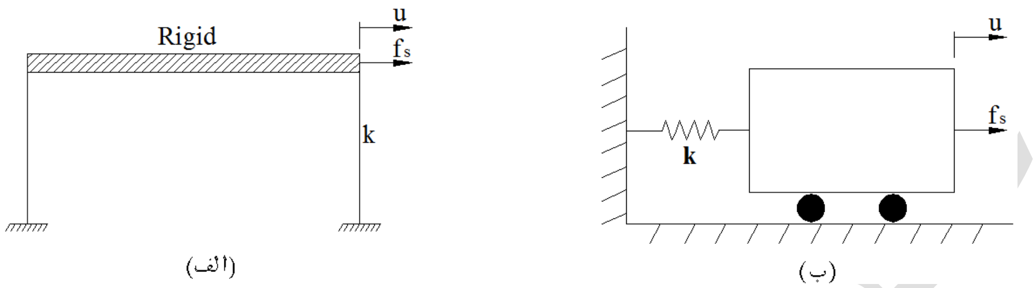
$P(t)$ = نیروی خارجی (External force)

در ادامه هر یک از این نیروها محاسبه می شود.

۲-۳-۱-۱- نیروی فنر

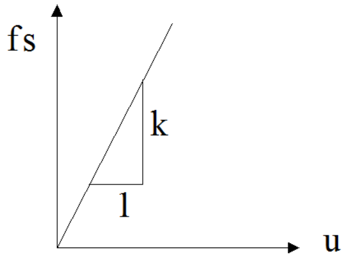
سیستم های یکدرجه آزاد شکل ۲-۴ را در نظر بگیرید که به آن نیروی f_S بدون هیچ تحریک دینامیکی وارد می شود. واضح است که در سیستم ۲-۴الف نیروی برشی در انتهای ستون های برابر f_S و در سیستم ۲-۴ب نیروی فنر برابر f_S

خواهد بود. به همین دلیل به آن نیروی فنر (Spring Force) و بعضی اوقات نیروی ارتجاعی (Elastic Force) گفته می شود. براثر این نیرو سیستم به مقدار u تغییر مکان می دهد.



شکل ۲-۴ سیستم یکدرجه آزاد تحت اثر نیروی ثابت

اگر نیروی f_S کم باشد تغییرمکان u نیز کم وسیستم به صورت ارتجاعی خطی (شکل ۲-۵) عمل می کند و رابطه نیرو-تغییرمکان به صورت شکل (۲-۵) است . در این شکل داریم:

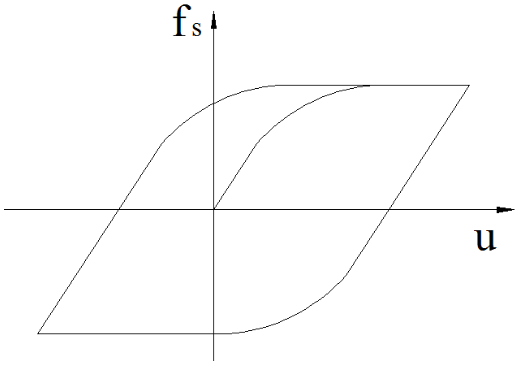


شکل ۲-۵ رابطه نیروی فنر با تغییر فرم

$$f_S = k.u \qquad (۲-۲)$$

در این رابطه فرض شده است که نیروی فنر با تغییر فرم آن متناسب است و ضریب تناسب سختی فنر، k، نامیده می شود. همچنین fs نیروی فنری و u تغییر مکان سیستم می باشند. بُعد k، نیرو بر طول است. هر چند محاسبه سختی سازه ها موضوع دروس تحلیل سازه ها و روش اجزای محدود می باشد لیکن در بخش ۲-۶ روش محاسبه سختی سیستم های یک درجه آزاد تشریح می شود.

اگر نیروی fs زیاد باشد رابطه نیرو – تعییر مکان به صورت غیرخطی و غیر ارتجاعی خواهد شد(شکل ۲-۶). برای تحلیل سیستم های غیر خطی باید رابطه بین نیرو و تغییر مکان مشخص باشد. معمولاً این قبیل سیستم ها را با روش های معمولی نمی توان تحلیل نمود و باید به روش های عددی متوسل شد که در فصل ۸ به آن پرداخته می شود.

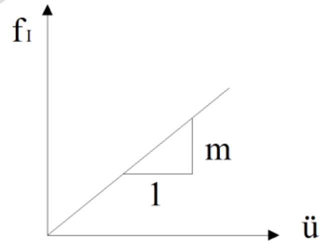


شکل ۲-۶ رفتار غیرخطی فنر

علیرضا فیروض

۲-۳-۱-۲- نیروی اینرسی

بر اساس قانون دوم نیوتن اگر برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر نباشد آن جسم حرکتی با شتاب خواهد داشت. مقدار این شتاب با نیروی وارد که نیروی اینرسی نامیده می شود نسبت مستقیم دارد و ضریب تناسب جرم جسم می باشد(شکل ۲-۷).



شکل ۲-۷ رابطه نیروی اینرسی با شتاب

بنابراین:

$$f_I(t)=m.\ddot{u}(t) \qquad (۲-۳)$$

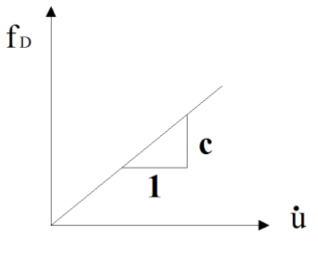
که در آن $f_I(t)$ نیروی اینرسی، m جرم سیستم و $\ddot{u}(t)$ شتاب سیستم (مشتق دوم تغییر مکان) می باشد.

۲-۳-۱-۳ نیروی میرایی

میرایی فرآیندی است که سبب استهلاک انرژی می شود. اتلاف انرژی بدلایل مختلف در سیستم های دینامیکی وجود دارد. اصطکاک یکی از پدیده هایی است که سبب اتلاف انرژی می شود. در سیستم های ساختمانی اتلاف انرژی بدلایلی نظیر باز و بسته شدن ترک ها در ساختمان های بتن آرمه در حرکت های رفت و برگشتی و اصطکاک بین اجزای سازه های فولادی، اصطکاک بین اجزای سازه ای و غیرسازه ای و ... صورت می گیرد.

برای اینکه تصور بهتری از میرایی داشته باشید، یک تار گیتار را در نظر بگیرید که کمی از حالت سکون منحرف شده باشد و سپس رها گردد. این تار شروع به ارتعاش می کند ولی پس از هر رفت و برگشت مقداری از دامنه ارتعاش آن کاسته می شود. این کاهش دامنه بدلیل استهلاک انرژی صورت میگیرد که بیشتر آن بدلیل اصطکاک تار با هوا و با اتصالات آن است که به صورت گرما در می آید.

نیروی میرایی وضعیت پیچیده تری نسبت به نیروهای فنری و اینرسی داشته و به پارامترهای زیادی بستگی دارد که شاید بعضی از آنها هنوز ناشناخته باقی مانده اند. در اصل رابطه ای که بتوان نیروی میرایی را بر اساس آن بدست آید و مورد قبول همه محققین باشد هنوز بدست نیامده است. ولی می توان میرایی سازه را به صورت ساده شده ای با یک میراگر مدلسازی نمود. در اصل میرایی واقعی سازه در کلیه نقاط آن وجود دارد ولی با فرض ساده کننده ای می توان میرایی را در یک نقطه و به صورت متمرکز در نظر گرفت. معمولاً فرض می شود که نیروی میرایی سازه متناسب با سرعت آن است (شکل ۲-۸) و ضریب تناسب، ضریب میرایی نامیده می شود. ضریب میرایی به گونه ای تعیین می شود که انرژی اتلاف شده توسط میراگر با انرژی اتلاف شده توسط کل سازه برابر باشد. لازم به ذکر است که میرایی سیستمی که در آن نیروی میرایی متناسب با سرعت باشد، میرایی لزج (viscous) نامیده می شود.



شکل ۲-۸ رابطه نیروی میرایی با سرعت

علیرضا فیوض

بنابراین با فرض خطی بودن رابطه نیروی میرایی با سرعت سازه می توان نوشت:

$$f_D(t)=c.\dot{u}(t) \quad (۴-۲)$$

که در آن $f_D(t)$ نیروی میرایی، C ضریب میرایی و $\dot{u}(t)$ سرعت (مشتق اول تغییر مکان) می باشد. بُعد ضریب میرایی نیرو-زمان بر طول می باشد. واحد ضریب میرایی در سیستم SI ، N.Sec/m می باشد.

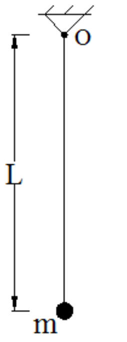
۲-۳-۱-٤- معادله تعادل

با جایگذاری روابط (۲-۲) تا (۲-۴) در رابطه (۲-۱) خواهیم داشت:

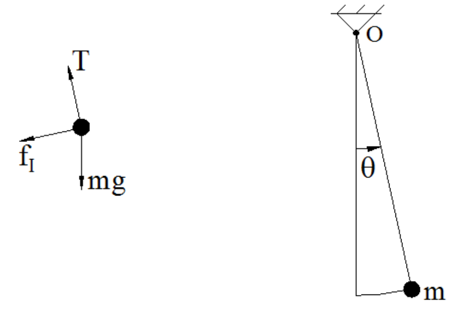
$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p(t) \quad (۵-۲)$$

این معادله، معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد است. همانطور که مشاهده می شود این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی، خطی، مرتبه ، ۲ با ضرایب ثابت است که حل آن بستگی به $p(t)$ دارد. در فصول آینده این معادله برای حالت های مختلف $p(t)$ حل می شود.

مثال- شکل زیر یک آونگ ساده که از یک طناب بدون جرم و یک جرم نقطه ای تشکیل شده است را نشان می دهد. معادلهٔ حرکت این آونگ را بدست آورید.



حل – در لحظهٔ دلخواه t تغییرفرم آونگ و نمودار جسم آزاد آن به صورت زیر است.



T نیروی کشش طناب، mg وزن جسم و f_I نیروی اینرسی هستند. نیروی اینرسی برابر است با :

$$f_I = mL\ddot{\theta}$$

گشتاور نیروها حول نقطهٔ O عبارتست از:

$$f_I L + mg \times L\sin(\theta) = 0$$

$$L\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0$$

چنانچه ملاحظه می شود این رابطه غیر خطی است. اگر زاویهٔ θ کوچک باشد، می توان نوشت:

$$L\ddot{\theta} + g\,\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

که در آن:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

۲-٤ اصل کار مجازی(Principle of virtual work)

در این روش نیز نیروهای وارد بر سیستم در یک لحظهٔ دلخواه در نظر گرفته می شود. سپس یک تغییرمکان مجازی که با شرایط تکیه گاهی سازگار باشد به سیستم داده می شود. بر اساس اصل کار مجازی، کار انجام شده توسط کلیهٔ نیروها در این تغییرمکان مجازی صفر است.

نمودار جسم آزاد سیستم همان است که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. اگربه سیستم تغییرمکان مجازی δu داده شود، کار انجام شده توسط این نیروها برابرند با:

$$\delta W = 0 \;\Rightarrow\; -f_I\delta u - f_D\delta u - f_s\delta u + P(t)\delta u = 0 \qquad (۲-۶)$$

علیرضا فیوض

علامت های منفی در این رابطه بدلیل اینستکه جهت نیروهای اینرسی، میرایی و فنر مخالف جهت تغییرمکان مجازی هستند، ولی نیروی خارجی و تغییرمکان مجازی هم جهت هستند بنابراین کار انجام شده توسط این نیرو مثبت می باشد. ملاحظه می شود که در معادلهٔ فوق تغییر مکان مجازی δu حذف می شود و همان معادلهٔ (۲-۱) بدست می آید.

۲-۵ اصل هامیلتون (روش انرژی) (Hamilton's principle)

بر اساس این اصل تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل به اضافه تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای غیر کانزرواتیو در طی هر فاصله زمانی صفراست. این اصل بصورت زیر بیان می شود :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta(T-V)+\delta W_{nc}\right]dt=0 \qquad (۲-۷)$$

که در آن:

T انرژی جنبشی سیستم

V انرژی پتانسیل سیستم

W_{nc} کار انجام شده توسط نیروهای غیر کانزرواتیو شامل نیروهای استهلاک و نیروهای خارجی

δ تغییرات در طی فاصله زمانی نشان داده شده

مزیت این روش اینست که سروکارش فقط با کمیتهای عددی است در حالیکه در روش کار مجازی گرچه جملات بصورت عددی هستند ولی نیروها و جابجائی بردار می باشند . انرژی جنبشی و پتانسیل از روابط زیر بدست می آیند.

$$T=\frac{1}{2}m\dot{u}^2 \quad , \quad V=\frac{1}{2}ku^2 \qquad (۲-۸)$$

بنابراین:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-V)dt=\int_{t_1}^{t_2}m\dot{u}\delta\dot{u}dt-\int_{t_1}^{t_2}ku\,\delta u dt \qquad (۲-۹)$$

جملهٔ اول سمت راست این رابطه با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر در می آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{u}\delta\dot{u}dt = m\dot{u}\,\delta u\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\,\delta u\,\ddot{u}dt \qquad (۲-۱۰)$$

u مقدار دلخواه و ثابتی است در نتیجه تغییرات آن صفر می باشد. یعنی عبارت اول رابطهٔ فوق صفر است. بنابراین رابطهٔ (۲-۹) برابر خواهدشد با:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-V)dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\delta udt - \int_{t_1}^{t_2} ku\,\delta udt \qquad (۲-۱۱)$$

نیروهای غیرکانزرواتیو عبارتند از نیروهای خارجی و نیروی میرایی. کار انجام شده توسط این نیروها در تغییرمکان دلخواه δu برابر است با:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w_{nc}dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[p(t)\delta u - c\dot{u}\delta u\right]dt \qquad (۲-۱۲)$$

با قراردادن روابط (۲-۱۱) و (۲-۱۲) در رابطهٔ (۲-۷) خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + p(t)\right]\delta udt = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \qquad (۲-۱۳)$$

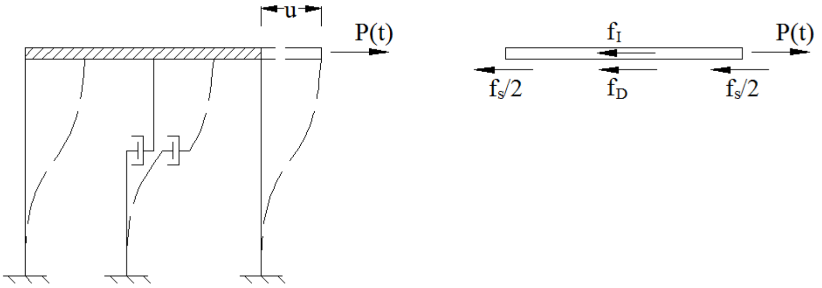
۲-۶ معادله حرکت سیستم سقف صلب تحت اثر نیروی وارد بر سقف

دیاگرام جسم آزاد سیستم سقف صلب در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. در این مورد نیز معادله تعادل به صورت زیر نوشته می شود.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t) \qquad (۲-۱۴)$$

در اینحالت نیز نیروی اینرسی برابر با حاصلضرب جرم سقف در شتاب آن، نیروی میرایی برابر با حاصلضرب ضریب میرایی در سرعت سقف و نیروی فنری برابر با حاصلضرب سختی ستون ها در جابجایی سقف می شود. باید توجه داشت که منظور از جابجایی سقف، تغییر مکان نسبی سقف نسبت به تکیه گاه است. منظور از سختی ستون نیز همان تعریف استاندارد سختی، یعنی نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد در سقف است.

علیرضا فیوض



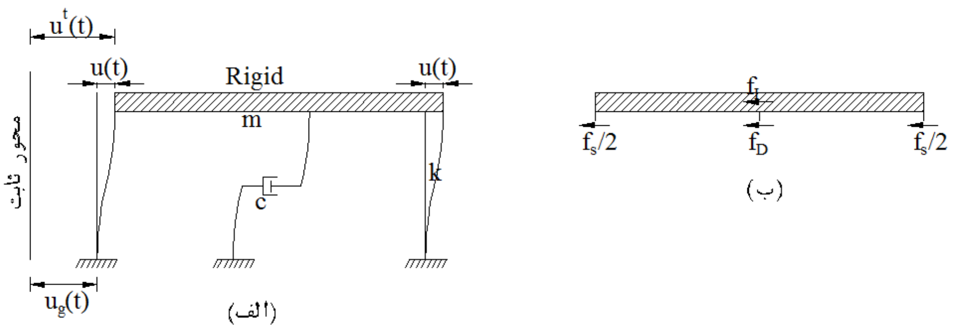
شکل ۲-۹ نمودار جسم آزاد سیستم سقف صلب

بنابراین در مورد سیستم های سقف صلب نیز معادله حرکت همان معادله (۲-۵) می باشد، ولی باید توجه نمود که منظور از u(t) تغییرمکان نسبی سقف نسبت به زمین است.

۲-۷ معادله حرکت سیستم سقف صلب تحت اثر شتاب پایه

در اینجا فرض بر این است که به سیستم سقف صلب نیروی خارجی وارد نمی شود، در عوض تکیه گاه آن حرکت افقی دارد. نمودار جسم آزاد سقف در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است. چنانچه در این شکل دیده می شود تکیه گاه سازه به اندازه $u_g(t)$ نسبت به یک محور فرضی ثابت جابجا شده است. همچنین سقف سازه به اندازه u(t) نسبت به تکیه گاه تغییرمکان پیدا کرده است. معادله تعادل سقف در این حالت به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \qquad (۱۵-۲)$$



شکل ۲-۱۰ نمودار جسم آزاد سقف صلب تحت اثر حرکت تکیه گاه

همانطور که انتظار می رود چون به سقف نیروی خارجی وارد نمی شود بنابراین سمت راست این معادله صفر است.

نیروی فنر از رابطه زیر بدست می آید:

$$f_S(t) = k.u(t) \qquad (۲-۱۶)$$

که در آن $u(t)$ تغییرمکان نسبی سقف نسبت به تکیه گاه و k مجموع سختی ستون ها است.

نیروی میرایی نیز از رابطه زیر بدست می آید:

$$f_D(t)=c.\dot{u}(t) \qquad (۲-۱۷)$$

که در آن $\dot{u}(t)$ سرعت نسبی سقف نسبت به تکیه گاه و c ضریب میرایی سیستم است.

نیروی اینرسی برابر با حاصلضرب جرم سقف در شتاب مطلق آن است. یعنی:

$$f_I(t)=m.\ddot{u}^t(t) \qquad (۲-۱۸)$$

که در آن $\ddot{u}^t(t)$ شتاب مطلق سقف و m جرم آن است. با توجه به شکل ۲-۱۰ می توان نوشت:

$$u^t(t)=u(t)+u_g(t) \qquad (۲-۱۹)$$

با مشتق گیری از آن داریم:

$$\dot{u}^t(t)=\dot{u}(t)+\dot{u}_g(t) \qquad (۲-۲۰)$$

$$\ddot{u}^t(t)=\ddot{u}(t)+\ddot{u}_g(t) \qquad (۲-۲۱)$$

بنابراین :

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t) + m\ddot{u}_g(t) \qquad (۲-۲۲)$$

با جایگذاری روابط (۲-۱۶)، (۲-۱۷) و (۲-۲۲) در رابطه (۲-۱۵) به رابطه زیر می رسیم:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t) \qquad (۲-۲۲)$$

ملاحظه می شود که این معادله همان معادله (۲-۵) است ولی در سمت راست آن بجای $P(t)$ عبارت $-m\ddot{u}_g(t)$ ظاهر شده است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سازه ای که تکیه گاه آن تحت اثر شتاب پایه $\ddot{u}_g(t)$ قرار گرفته است، معادل با سازه ای است که تکیه گاه آن ثابت است ولی سقف آن تحت اثر نیروی $-m\ddot{u}_g(t)$ قرار گرفته است. این نیرو، نیروی مؤثر زلزله نامیده می شود:

$$P_{eff}(t)=-m\ddot{u}_g(t) \qquad (۲-۲۳)$$

پس در این حالت نیز معادله حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=P_{eff}\ (t)$$ (۲۴-۲)

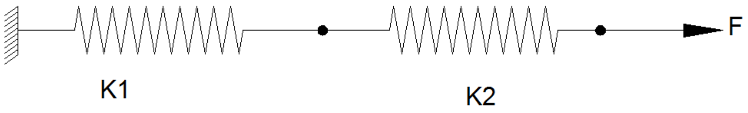
۲-۱۰ سختی سیستم های ارتجاعی

بدلیل اهمیت زیادی که سختی سازه ها در تحلیل دینامیکی سازه ها دارند، در این قسمت روش محاسبه سختی بعضی از سیستم های باربر جانبی شرح داده می شود. همانگونه که قبلاً گفته شد سختی سیستم های یک درجه آزاد برابر است با نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد.

$$P=k\Delta \quad \Rightarrow \quad k=\frac{P}{\Delta}$$ (۲۵-۲)

برای محاسبه این نیرو از روش های کلاسیک تحلیل سازه ها می توان استفاده نمود که در مثال های زیر توضیح داده می شوند.

مثال ۱ –دو فنر با سختی های K_1 و K_2 به صورت سری به یکدیگر متصل شده اند. سختی معادل آنها را پیدا کنید.



حل – به انتهای فنر نیروی F وارد می کنیم. نیروی داخلی در هر دو فنر مساویست و برابر با F می شود. بنابراین تغییرطول هر یک از فنرها برابر است با:

$$\Delta_1=\frac{F}{K_1} \quad , \quad \Delta_2=\frac{F}{K_2}$$

تغییر مکان انتهای آزاد فنر برابر با مجموع طول دو فنر است. بنابراین :

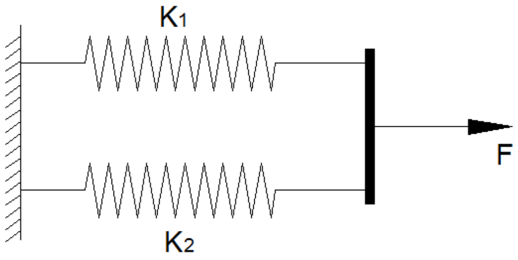
$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2=F\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)$$

با توجه به رابطه (۲-۱۷) سختی معادل دو فنر سری به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{K_{eq}}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}$$

*****

مثال ۲ - دو فنر با سختی های K_1 و K_2 به صورت موازی به یکدیگر متصل شده اند. سختی معادل آنها را پیدا کنید.



حل -

تغییر طول هر یک از دو فنر برابر با :

$$u_1 = \frac{F_1}{K_1} \qquad u_2 = \frac{F_2}{K_2}$$

در نتیجه :

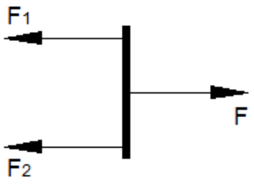
$$F_1 = K_1 u_1 \qquad F_2 = K_2 u_2$$

تغییر طول هر دو فنر با هم برابر است، پس:

$$u_1 = u_2 = u \quad \Rightarrow \quad F_1 = K_1 u \quad , \quad F_2 = K_2 u$$

از روی نمودار جسم آزاد مشخص است که مجموع نیروهای دو فنر با نیروی وارد برابر است .

$$F = F_1 + F_2$$



بنابراین:

$$F = K_1 u + K_2 u = (K_1 + K_2)u$$

پس سختی معادل برابر است با :

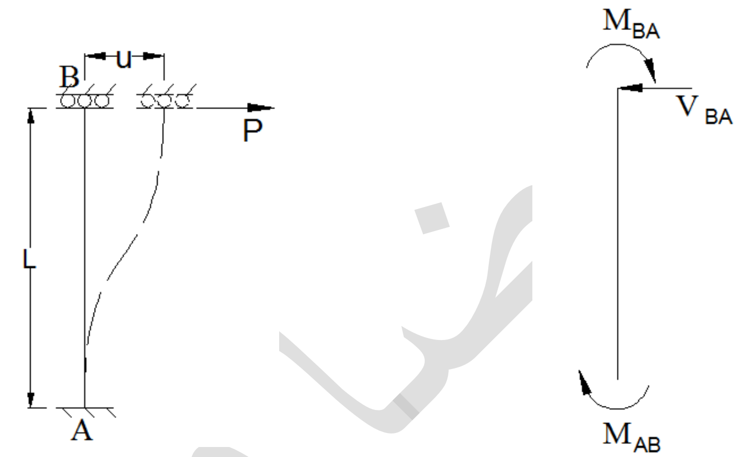
$$K_{eq} = K_1 + K_2$$

******

علیرضا فیوض

مثال ۳– سختی یک ستون که یک تکیه گاه آن گیردار و تکیه گاه دیگر آن هدایت شونده است را بدست آورید. سختی خمشی ستون EI و طول آن L است.

حل – برای محاسبه سختی، نیروی P را در انتهای B وارد کرده وتغییر مکان آن را محاسبه کرده و سپس از رابطهٔ (۲-۱۷) سختی را بدست می آوریم. برای محاسبهٔ تغییر مکان از هر یک از روش های تحلیل سازه میتوان استفاده نمود که برای این مثال از روش شیب–افت استفاده می کنیم.



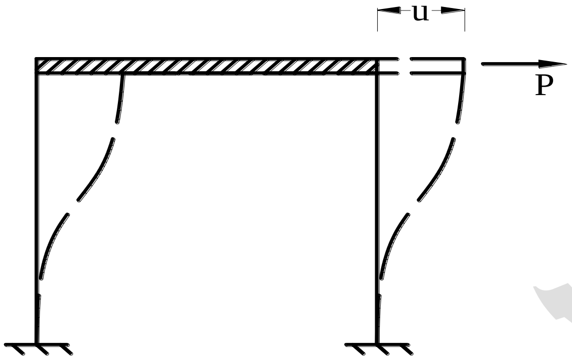
$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(-3\frac{u}{L}\right)\ \Rightarrow\ M_{AB}=M_{BA}=\frac{-6EIu}{L^2}$$

$$\sum M_A=0\ \Rightarrow\ V_{BA}L=M_{AB}+M_{BA}\ ,\ \ P=-V_{BA}\Rightarrow P=\frac{12EI}{L^3}u$$

$$k=\frac{12EI}{L^3}$$

******

مثال ٤ – سختی قاب یک طبقه با سقف صلب و ارتفاع h را بدست آورید.



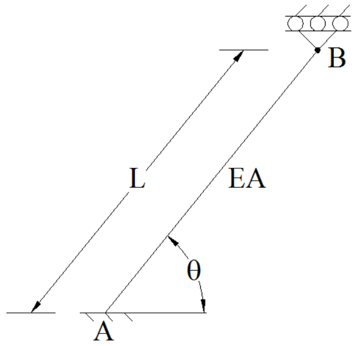
حل –

در این حالت چون سختی هر ستون $\frac{12EI}{h^3}$ است، سختی قاب برابر است با:

$$K=\frac{24EI}{h^3}$$

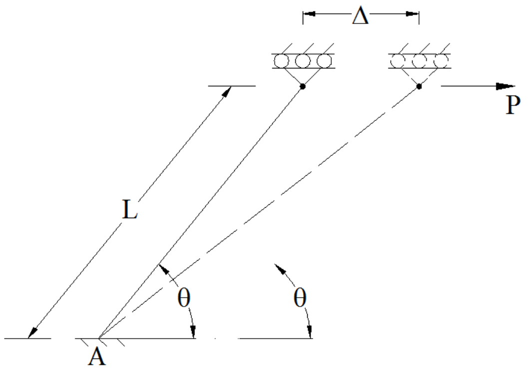
******

مثال ٥– یک مهاربند را می توان به صورت یک عضو مورب با یک انتهای مفصل و انتهای دیگر غلطک در نظر گرفت. بنابراین تنها درجه آزادی آن تغییرمکان افقی غلطک می باشد. اگر سطح مقطع عضو A ، طول آن L و ضریب الاستیسیته آن E باشد، سختی آن را بر حسب زاویه ای که با محور افقی (θ) می سازد بدست آورید.



حل – برای محاسبه تغییر مکان از روش انرژی(کاستیگلیانو) استفاده می شود. انرژی کرنشی عضوی که تحت اثر نیروی محوری است از رابطه زیر بدست می آید :

$$U=\frac{F^2L}{2EA}$$



علیرضا فیوض

که در آن F نیروی محوری عضو می باشد و برابر است با :

$$F = P / \cos\theta$$

در نتیجه :

$$U = \frac{P^2 L}{2EA\cos^2\theta}$$

تغییر مکان جانبی عضو بر اساس قضیه کاستیگلیانو برابر است با:

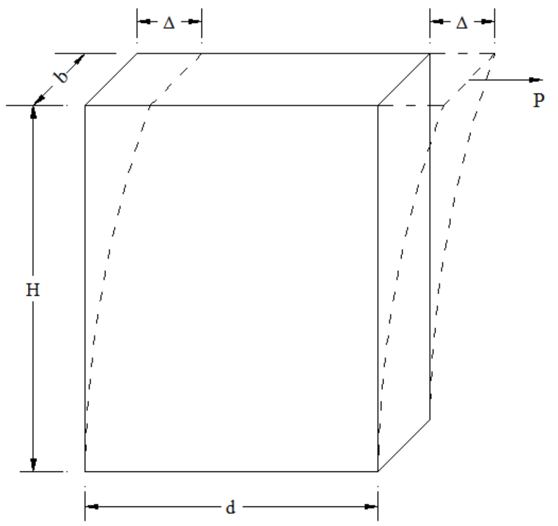
$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{\cos^2\theta . EA}$$

بنابراین سختی جانبی بادبند از رابطه زیر بدست می آید:

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{EA}{L}\cos^2\theta$$

******

مثال ٦ – دیوار برشی را می توان به صورت یک تیر طره با عرض زیاد به صورت شکل نشان داده شده مدلسازی کرد. سختی آن را محاسبه کنید. یادآوری می شود که در مورد دیوارهای برشی از تغییرفرم های برشی نمی توان صرفنظر نمود. ضریب الاستیسیته را E و ضریب پواسون را ν در نظر بگیرید.



حل –

برای این مثال نیز از روش انرژی استفاده می شود لیکن باید توجه نمود که در مورد دیوار برشی نمی توان از انرژی برشی صرفنظر نمود. انرژی کرنشی برابر است با:

$$U = U_b + U_v$$

که در آن U_b انرژی خمشی و U_v انرژی برشی می باشند و برابرند با:

$$U_b = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^H \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \times \frac{H^3}{3}$$

$$U_v = k\int \frac{V^2}{2GA} dx = k\int_0^H \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{kP^2 H}{2GA}$$

k ضریب شکل است که برای مقاطع مستطیلی ۱/۵ می باشد. بنابراین تغییر مکان برابر است با:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P}{EI} \times \frac{H^3}{3} + k\frac{PH}{GA} = \frac{PH^3}{3EI}\left(1 + k\frac{3EI}{H^2 GA}\right)$$

جمله دوم داخل پرانتز را به صورت زیر می توان نوشت:

$$k\frac{EI}{H^2 GA} = k \times \frac{E}{G} \times \frac{I}{H^2 A} = k \times \frac{E}{\frac{E}{2(1+\upsilon)}} \times \frac{bd^3/12}{H^2 \times bd} = k \times 2(1+\upsilon).\frac{d^2}{12H^2}$$

در نتیجه تغییر مکان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta = \frac{PH^3}{3EI}\left[1 + \frac{kd^2(1+\upsilon)}{2H^2}\right]$$

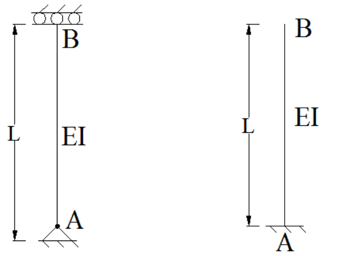
بنابراین سختی دیوار برشی از رابطه زیر بدست می آید:

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{H^3}\left[\frac{1}{1 + \frac{kd^2(1+\upsilon)}{2H^2}}\right]$$

******

تمرینات فصل ۲

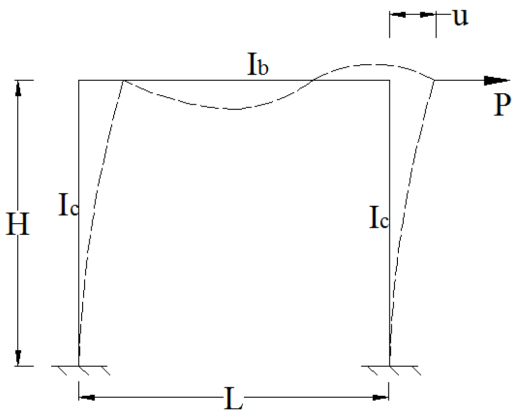
۱- سختی جانبی هر یک ستون های نشان داده شده را بدست آورید.



(ب) (الف)

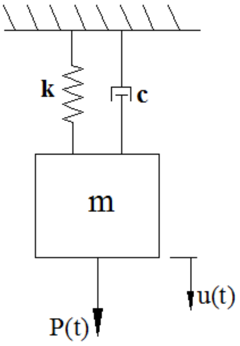
جواب: (الف) $3\frac{EI}{L^3}$ (ب) $3\frac{EI}{L^3}$

۲- یک قاب یک طبقه و یک دهانه دارای ستون هایی با ممان اینرسی I_c و ارتفاع H و تیری با ممان اینرسی I_b و طول L می باشد. ضریب الاستیسیته مصالح قاب E می باشد. با فرض اینکه تنها درجه آزادی قاب تغییرمکان افقی تیر باشد و از تغییرفرم های محوری و برشی صرفنظر شود، مطلوب است: (الف) سختی قاب بر حسب نسبت $\alpha=\frac{I_cL}{I_bH}$ ، (ب) نمودار سختی قاب بر حسب نسبت α و (پ) مقدار سختی قاب در دو حالت حدی $I_b=\infty$ و $I_b=0$.

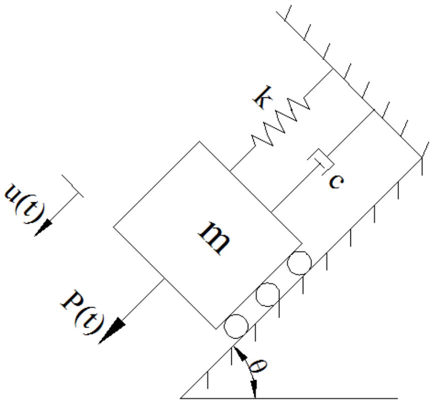


جواب : (الف) $K=\frac{24EI_c}{H^3}\times\frac{\alpha+6}{4\alpha+6}$

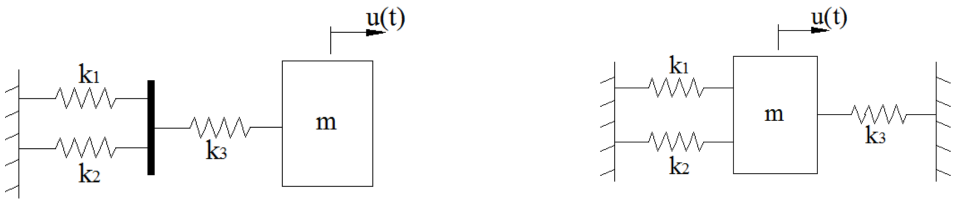
۳- جسمی به جرم m تحت اثر وزن خود از یک فنر به سختی K و یک میراگر با ضریب C آویزان می شود تا به حالت تعادل استاتیکی می رسد. سپس به آن نیروی P(t) وارد می شود. معادله حرکت جسم را بر حسب تغییرمکان آن نسبت به حالت تعادل استاتیکی ($u(t)$) بدست آورید.



۴- جسمی به جرم m روی یک سطح شیبدار با زاویه θ قرار دارد و بوسیله یک فنر به سختی K و یک میراگر با ضریب C نگه داشته می شود تا به حالت تعادل استاتیکی برسد. سپس به آن نیروی P(t) وارد می شود. معادله حرکت جسم را بر حسب تغییرمکان آن نسبت به حالت تعادل استاتیکی بدست آورید.



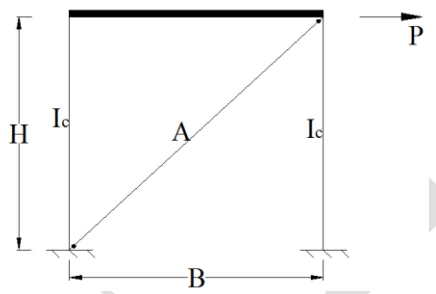
۵- سختی معادل سیستم های زیر را بدست آورید.



(ب)   (الف)

جواب: (الف) $K_1+K_2+K_3$ (ب) $\dfrac{(K_1+K_2)K_3}{K_1+K_2+K_3}$

۶- قاب یک طبقه و یک دهانه نشان داده شده دارای ستون هایی از قوطی ۱۴ و بادبند با ناودانی ۱۲ انتهای مفصلی می باشد. سقف این قاب صلب می باشد. سختی معادل این قاب را بدست آورید. سهم ستون ها و بادبند از سختی سیستم چقدر است؟ H=3 m , L=4m $E=2.1\times10^6\ kg/cm^2$

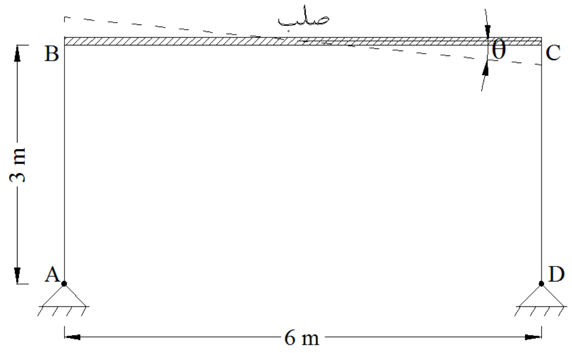


جواب : سهم ستون=۴٪ ، سهم بادبند=۹۶٪

۷- سقف قاب نشان داده شده فقط می تواند حول مرکز خود دوران کند. سختی سیستم را بدست آورید.

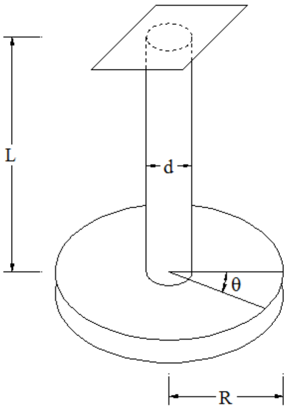
سطح مقطع ستون ها $A=69\ cm^2$

ضریب الاستیسیتهٔ ستون ها $E=200\ GPa$



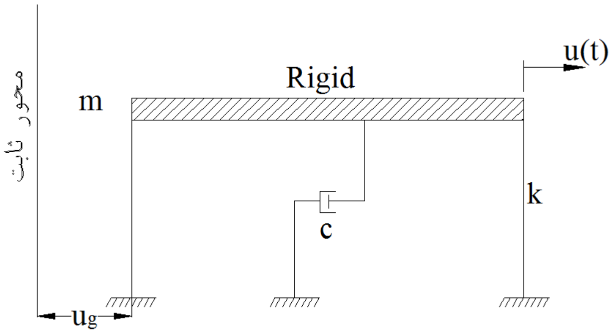
جواب : $k=16560\ KN.m/rad$

۸- یک دیسک صلب به جرم m و به شعاع R به انتهای یک میله انعطاف پذیر بدون جرم، به طول L و قطر d و مدول برشی G متصل شده است. معادله حرکت دورانی دیسک را بر حسب زاویه دورانی آن (θ) بدست آورید.

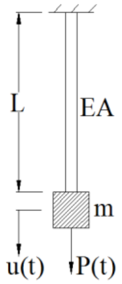


جواب : $\frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}+\frac{G\pi d^4}{32L}\theta=0$

۹- سازه نشان داده شده تحت اثر تغییر مکان زمین قرار گرفته است. اگر تغییر مکان زمین را بتوان با رابطه $u_g(t)=u_{g0}\sin(\omega_g t)$ بیان کرد که در آن u_{g0} تغییرمکان حداکثر زمین و ω_g فرکانس زمین است و مقادیر ثابتی می باشند، معادله حرکت سقف را بدست آورید.



۱۰- جسمی به جرم m از میله بدون جرمی به سطح مقطع A و طول L و ضریب الاستیسیته E آویزان شده و تحت اثر نیروی P(t) قرار گرفته است. معادله حرکت طولی جسم را بر حسب تغییر مکان آن نسبت به وضعیت تعادل بنویسید.



جواب: $m\ddot{u}+\frac{EA}{L}u=P(t)$

فصل ۳

ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزاد

۳-۱ مقدمه

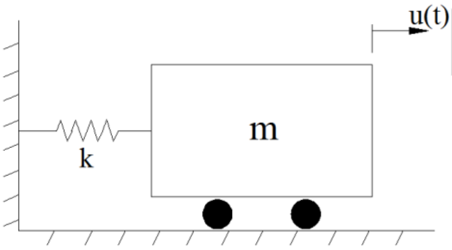
در فصل قبل دیدیم که معادله حرکت سیستم های یک درجه آزاد به صورت زیر است:

$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P(t)$

حل این معادله دیفرانسیل بستگی به نیروی P(t) دارد. اولین حالتی که در نظر گرفته می شود اینستکه نیروی P(t) را برابر صفر قرار دهیم. این حالت بسیار مهم در معادلات دیفرانسیل، حالت همگن و در دینامیک سازه ها ارتعاش آزاد نامیده می شود. منظور از ارتعاش آزاد ارتعاشی است که بدون حضور نیرو انجام می شود. سیستم را به دو صورت می توان در نظر گرفت: نامیرا و میرا. در این فصل معادله ارتعاش آزاد سیستم های نامیرا و میرا بدست می آید.

۳-۲ ارتعاش آزاد نامیرا

در این حالت فرض به این است که در سیستم، میرایی وجود ندارد و داریم C=0. در واقع در این حالت سیستم دینامیکی فقط از یک جرم و یک فنر تشکیل شده است(شکل ۳-۱). واضح است که برای اینکه این سیستم ارتعاش کند به یک تحریک اولیه نیاز دارد. این تحریک می تواند تغییرمکان اولیه، سرعت اولیه یا ترکیبی از این دو باشد.



شکل ۳-۱ سیستم دینامیکی نامیرا

در نتیجه معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u}+ku=0 \quad (۳-۱)$$

با تقسیم معادله فوق بر جرم (m) خواهیم داشت:

$$\ddot{u}+\frac{k}{m}u=0 \quad (۳-۲)$$

پارامترهای k و m کمیت هایی مثبت هستند و بنابراین نسبت آنها نیز مثبت خواهد شد. حاصل تقسیم آنها ω^2 نامیده می شود.

$$\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۳-۳)$$

بنابراین معادله حرکت به صورت زیر خواهد شد:

$$\ddot{u}+\omega^2u=0 \quad (۳-۴)$$

جواب این معادله عبارتست از :

$$u(t) = Ce^{\lambda t} \tag{۳-۵}$$

که در آن پارامتر λ از قرار دادن این رابطه و رابطه $\ddot{u}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ در معادله (۳-۴) بدست می آید.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0 \tag{۳-۶}$$

چون تابع $e^{\lambda t}$ هیچگاه صفر نمی شود، پس:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{۳-۷}$$

این معادله بسیار مهم، معادله مشخصه (characteristic equation) نامیده می شود که از حل آن دو مقدار موهومی برای λ بدست می آید:

$$\lambda_1=+i\omega \ , \ \lambda_2=-i\omega \tag{۳-۸}$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$. چون دو مقدار متمایز برای λ بدست آمده است پس جواب معادله حرکت به صورت زیر می شود:

$$u(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}=c_1 e^{i\omega t}+c_2 e^{-i\omega t} \tag{۳-۹}$$

در این رابطه c_1 و c_2 ثابتهای انتگرال گیری می باشند که از شرایط اولیه بدست می آیند. این رابطه جواب معادله حرکت است که می توان آن را به صورت ساده تری نیز نوشت.

با استفاده از اتحاد اولر ($e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$) داریم:

$$u(t)=c_1\left(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right)+c_2\left(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\right) \tag{۳-۱۰}$$

و یا:

$$u(t)=\left(c_1+c_2\right)\cos(\omega t)+\left(ic_1-ic_2\right)\sin(\omega t) \tag{۳-۱۱}$$

از آنجایی که c_1 و c_2 مقادیر ثابتی هستند، مقادیر (c_1+c_2) و (ic_1-ic_2) نیز ثابت هستند و می توان فرض کرد:

$$A=c_1+c_2 \quad , \quad B=ic_1-ic_2 \tag{۳-۱۲}$$

بنابراین معادله حرکت را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{۳-۱۳}$$

که در آن B,A همان ثابتهای انتگرال گیری می باشند.

همچنین می توان معادله $u(t)$ را به فرم زیر نیز نوشت:

$$u(t)=\rho\cos(\omega t+\theta) \tag{۳-۱۴}$$

در این رابطه ρ و θ ثابت های انتگرال گیری هستند که با A و B به صورت زیر رابطه دارند:

$$\rho^2=A^2+B^2 \quad , \quad \tan\theta=\frac{-B}{A} \tag{۳-۱۵}$$

وبالاخره $u(t)$ به فرم زیر نیز نوشته می شود:

$$u(t)=\rho'\sin(\omega t+\theta') \tag{۳-۱۶}$$

که در آن θ',ρ' ثابتهای انتگرال گیری هستند که رابطه آنها با A و B به صورت زیر است:

$$\rho'^2=A^2+B^2 \quad , \quad \tan\theta'=\frac{A}{B} \qquad (۱۷-۳)$$

پس معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی که در حالت ارتعاش آزاد نامیرا می باشد را می توان به چهار فرم زیر نوشت:

$$u(t)=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}$$
$$u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$
$$u(t)=\rho\cos(\omega t+\theta)$$
$$u(t)=\rho'\sin(\omega t+\theta')$$

۳-۲-۱- شرایط اولیه(Initial Condition)

برای یافتن ثابتهای انتگرال گیری نیاز به شرایط اولیه می باشد. فرض می شود که در زمان صفر تغییر مکان و سرعت برابر u_0 و $\dot{u}_0$ هستند. یعنی :

$$@t=0 \ : \ u(t)=u_0 \quad , \quad \dot{u}(t)=\dot{u}_0 \qquad (۱۸-۳)$$

با قرار دادن این شرایط در یکی از جواب ها، ثابت های انتگرال گیری بدست می آیند. مثلاً با قرار دادن رابطه (۳-۱۸) در رابطه (۳-۱۳) داریم:

$$A=u_0 \quad , \quad B=\frac{\dot{u}_0}{\omega} \qquad (۱۹-۳)$$

بنابراین جواب معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

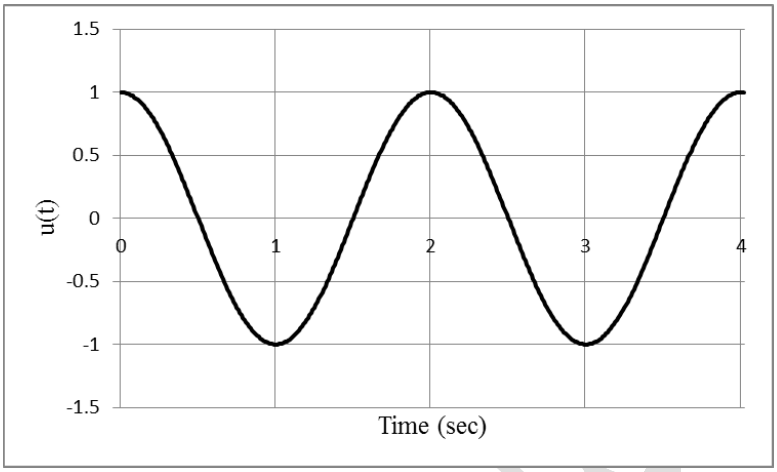
$$u(t)=u_0\cos\omega t+\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (۲۰-۳)$$

همچنین ρ و θ از روابط زیر بدست می آیند:

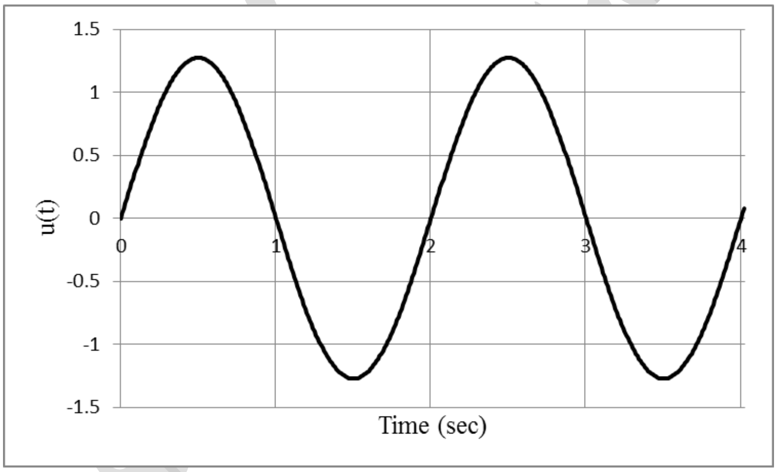
$$\rho=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{u_0^2+(\frac{\dot{u}_0}{\omega})^2} \quad , \quad \tan\theta=-\frac{B}{A}=-\frac{\dot{u}_0}{u_0\omega} \qquad (۲۱-۳)$$

لازم به ذکر است که ρ حداکثر جابجایی سیستم است که به آن دامنه حرکت گفته می شود و θ نیز اختلاف فاز نام دارد.

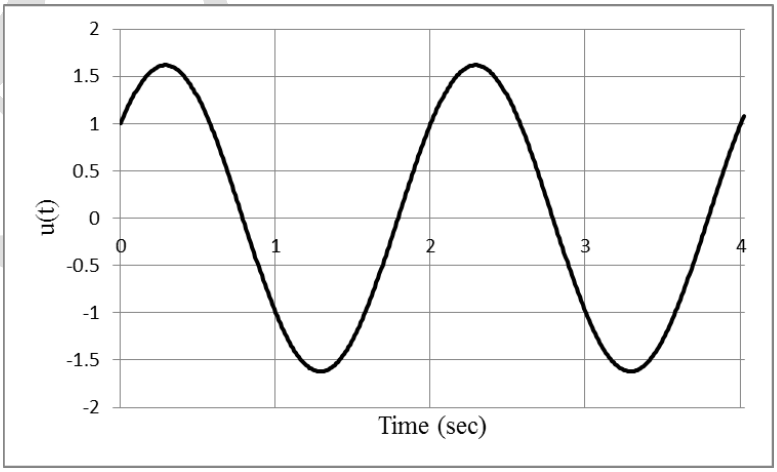
نمودار معادله (۳-۲۰) برای حالت های مختلف در شکل ۳-۲ ترسیم شده است. در شکل ۳-۲ الف تغییرمکان اولیه برابر ۱/۰ ، سرعت اولیه برابر صفر و فرکانس برابر π در نظر گرفته شده است. معنی این شرایط این است که به سیستمی که فرکانس آن π رادیان است فقط یک تغییرمکان اولیه داده می شود. چنانچه ملاحظه می شود تغییرمکان از ۱/۰ شروع می شود، بتدریج کاهش می یابد تا به صفر (حالت تعادل استاتیکی) می رسد، مجدداً کاهش یافته تا به مقدار حداقل خود که ۱/۰ است می رسد و پس از آن افزایش می یابد تا دوباره به صفر رسیده و سپس به مقدار حداکثر خود



$u_0 = 1\ ,\ \ \dot{u}_0 = 0\ \ ,\ \ \omega = \pi$ (الف)



$u_0 = 0\ ,\ \ \dot{u}_0 = 4\ \ ,\ \ \omega = \pi$ (ب)



$u_0 = 1\ ,\ \ \dot{u}_0 = 4\ \ ,\ \ \omega = \pi$ (پ)

شکل ۳-۲ ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزاد نامیرا

یعنی ۱/۰ می رسد. پس از آن مجدداً عین همین حرکت تکرار می شود و این تکرارها تا بی نهایت ادامه می یابد. نکته دیگری که در این شکل مشاهده می شود اینستکه ۲ ثانیه طول می کشد تا اینکه حرکت به نقطه اول خود برسد.
لازم به ذکر است که با توجه به شکل ۳-۱ اعمال تغییرمکان ۱/۰ به معنی اینستکه سیستم به اندازه ۱/۰ به سمت راست جابجا شده و سپس رها می گردد. حرکت سیستم به سمت چپ شروع می شود به حالت تعادل می رسد سپس به سمت چپ می رود تا به مقدار حداقل ۱/۰ می رسد. پس از آن حرکت به سمت راست شروع می شود و پس از اینکه به حالت تعادل رسید به مقدار حداکثر یعنی ۱/۰ می رسد. از اینجا به بعد عیناً همین حرکت ها تا بی نهایت ادامه می یابد.
به عبارت دیگر معادله (۳-۲۰) یک حرکت رفت و برگشتی است که اصطلاحاً هارمونیک ساده(simple harmonic) گفته می شود.
در شکل ۳-۲ب تغییرمکان اولیه صفر و سرعت اولیه برابر ۴/۰ درنظر گرفته شده است. چنانچه ملاحظه می شود حرکت از صفر و با شیب ۴/۰ شروع می شود، به مقدار حداکثر می رسد سپس کاهش می یابد، به صفر می رسد، به مقدار حداقل می رسد، بعد افزایش می یابد و دوباره به صفر می رسد. این حرکت تا بی نهایت ادامه می یابد.
در شکل ۳-۲پ تغییرمکان اولیه ۱/۰ و سرعت اولیه برابر ۴/۰ در نظر گرفته شده است. این حرکت از ۱/۰ و با شیب ۴/۰ شروع می شود و در ادامه روالی مثل دو شکل قبل دارد.
در رابطه با حرکت هارمونیک ساده و بر اساس توضیحاتی که در شکل ۳-۲ داده شد، تعاریف زیر انجام می شود.

دوره تناوب (Period): مدت زمانی است که طول می کشد تا یک رفت و برگشت انجام گردد. معمولاً زمان تناوب با T نشان داده می شود. واحد دوره تناوب ثانیه (sec) می باشد. در شکل ۳-۲ دوره تناوب ۲/۰ ثانیه می باشد. به عبارت دیگر برای اینکه سیستم شکل ۳-۱ یک رفت و برگشت انجام دهد ۲/۰ ثانیه طول می کشد.

فرکانس دایره ای (cyclic frequency): حرکت هارمونیک را می توان مشابه حرکت یک ذره با سرعت ثابت روی دایره در نظر گرفت. تعداد دورهایی که این ذره در ثانیه می زند فرکانس دایره ای نامیده می شود. به عبارت دیگر فرکانس دایره ای تعداد رفت و برگشت های سیستم در یک ثانیه است. بنابراین فرکانس دایره ای معکوس دوره تناوب است. واحد فرکانس دایره ای دور در ثانیه یا هرتز (Hz) می باشد و با f نشان داده می شود.

$$f=\frac{1}{T} \qquad (۳-۲۲)$$

مثلاً اگر دوره تناوب یک سازه ۲/۰ ثانیه باشد، فرکانس دایره ای آن ۰/۵ هرتز است یعنی در هر ثانیه ۰/۵ دور می زند.

فرکانس زاویه ای (Angular frequency): با توجه به اینکه یک دور دایره 2π رادیان است، بنابراین تعداد دورهایی که ذره نوسانگر در یک ثانیه می زند را می توان بر حسب زاویه نیز بیان کرد. مقدار زاویه ای است که ذره در

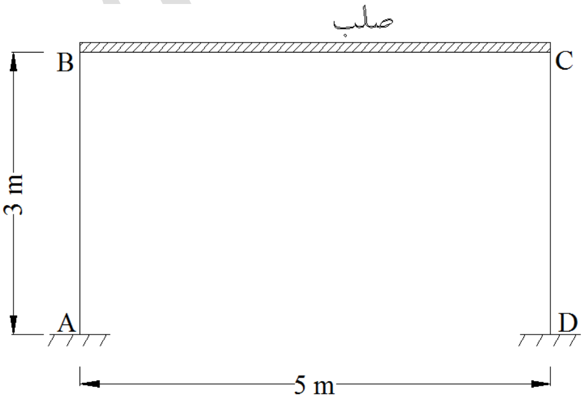
یک ثانیه طی می کند فرکانس زاویه ای نامیده شده و واحد آن رادیان بر ثانیه (rad/sec) می باشد. بعضی وقت ها به فرکانس زاویه ای فرکانس طبیعی ارتعاش نیز گفته می شود. معمولاً فرکانس زاویه ای با ω نشان داده می شود. رابطه بین فرکانس دایره ای، فرکانس زاویه ای و دوره تناوب یک سیستم عبارت است از:

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \qquad (۳-۲۳)$$

در رابطه ۳-۳ دیدیم که ω جذر نسبت سختی به جرم سیستم است ($\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$). از رابطه (۳-۲۳) مشخص است که ω همان فرکانس زاویه ای سیستم می باشد. بنابراین فرکانس زاویه ای و به تبع آن فرکانس دایره ای و دوره تناوب سیستم به سختی و جرم سیستم بستگی دارد و چون سختی و جرم جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی هستند، پس دوره تناوب و فرکانس هم جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی است. به بیان دیگر چون هر سیستم دینامیکی حتماً سختی و جرم دارد، حتماً فرکانس و دوره تناوب هم دارد.

دامنه حرکت(Amplitude): به حداکثر مقدار تغییرمکان، دامنه حرکت گفته می شود. واضح است که دامنه حرکت به تغییرمکان و سرعت اولیه بستگی دارد.

مثال – سقف سازه نشان داده شده صلب است و ستون های آن از قوطی ۱۴ تشکیل شده است. بار مرده وارد بر سقف ۸۰۰ کیلوگرم بر متر و بار زنده ۱۵۰ کیلوگرم بر متر است. با فرض اینکه ۲۰٪ از بار زنده در محاسبه جرم ساختمان مؤثر است، زمان تناوب طبیعی قاب را بدست آورید. $E=204\,GPa$



حل – از روی جدول اشتال ممان اینرسی یک ستون برابر است با :

$$I=885\,cm^4$$

در نتیجه سختی قاب از رابطه زیر بدست می آید:

$$k = 2\times\frac{12EI}{L^3} = 24\times\frac{204\times10^9\times885\times10^{-8}}{3^3} = 1604800\ \ \text{N/m}$$

جرم سقف عبارت است از:

$$m = (800+150\times0.2)\times5 = 4150\ \ \text{kg}$$

فرکانس زاویه ای قاب از رابطه زیر بدست می آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1604800}{4150}} = 19.665\ \ \text{rad/sec}$$

فرکانس دایره ای قاب برابر است با:

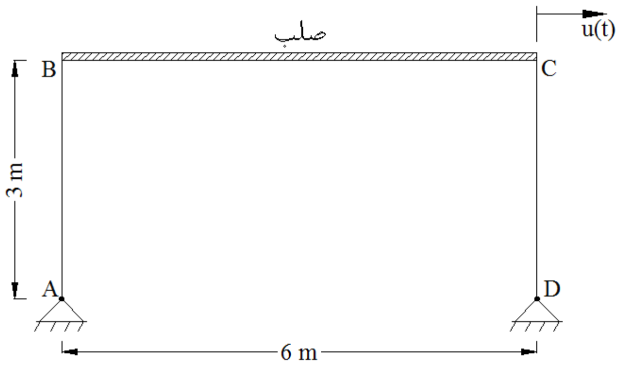
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19.665}{2\pi} = 3.130\ \ \text{Hz}$$

زمان تناوب طبیعی قاب برابر است با:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.130} = 0.320\ \ \text{sec}$$

****

مثال : قاب نشان داده شده از ستون هایی با ممان اینرسی $I = 9800\text{cm}^4$ و تیر صلب با جرم واحد طول $\overline{m} = 30000\ \text{kg/m}$ تشکیل شده است. به سقف این قاب تغییرمکان اولیه برابر $u_0 = 1.0\ \text{cm}$ و سرعت اولیه برابر $\dot{u}_0 = 2.0\ \text{cm/sec}$ داده شده و سپس رها می گردد. مطلوبست : (الف) معادله تغییرمکان، سرعت و شتاب سقف (ب) معادله نیروی برشی و لنگرخمشی در نقطه B (پ) معادله نیروی برش پایه $E = 2\times10^6\ \text{kg/cm}^2$



حل -

(الف)

جرم کل سقف برابر است با : $m = 30000\times6 = 180000\ \text{Kg}$

با توجه به اینکه انتهای ستون ها مفصلی است، سختی هر ستون برابر $k = 3EI/L^3$ و سختی کل قاب برابر است با :

$$k = 2\times\frac{3EI}{L^3} = 2\times\frac{3\times 2\times 10^6\left(\frac{kg}{cm^2}\right)\times 9800cm^4}{(300)^3 cm^3} = 4355.55\ kg/cm = 4355.55\ KN/m$$

بنابراین فرکانس سازه برابر می شود با :

$$\omega = \sqrt{\frac{4355555\ (N/m)}{180000\ (kg)}} = 4.919\ rad/sec$$

معادله تغییر مکان سقف عبارت است از :

$$u = A\sin(\omega t + \theta)$$

ضرایب A و θ ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند :

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases} t=0 \\ u = 1.0\ cm\end{cases} \Rightarrow 1.0 = A\sin(\theta) \\ \begin{cases} t=0 \\ \dot{u} = 2\ cm/s\end{cases} \Rightarrow 2.0 = A\,\omega\cos(\theta)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1.0}{2.0} = \frac{1}{\omega}\tan(\theta) \Rightarrow \theta = 1.1846\ rad\ ,\quad A = 1.079cm$$

بنابراین معادلات حرکت سیستم برابرند با :

$$u = 1.079\sin(4.919t + 1.1846)\ cm$$
$$\dot{u} = 5.310\cos(4.919t + 1.1846)\ cm/s$$
$$\ddot{u} = -26.121\sin(4.919t + 1.1846)\ cm/s^2$$

(ب) با استفاده از روش شیب–افت می توان نیروی برشی و لنگر خمشی را در انتهای ستون ها به راحتی بدست آورد.

در شکل زیر نمودار جسم آزاد ستون AB ترسیم شده است. روابط شیب–افت برای این ستون عبارت است از:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_A - 3\frac{u}{L}\right) = 0 \Rightarrow \theta_A = 1.5\frac{u}{L}$$

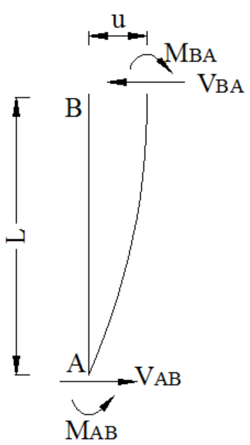
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(\theta_A - 3\frac{u}{L}\right) = -\frac{3EIu}{L^2}$$

$$M_{BA} = -\frac{3\times 2\times 10^6\times 9800}{300^2}\times 1.079\sin(4.919t + 1.1846)$$

$$M_{BA} = -705269.1\sin(4.919t + 1.1846)\ \ kg\text{-}cm$$

$$M_{BA} = -7.05\sin(4.919t + 1.1846)\ \ ton\text{-}m$$

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{M_{BA}}{L} = 2350.9\sin(4.919t + 1.1846)\ \ kg$$



$$V_{AB}=V_{BA}=23509\sin(4.919t+1.1846)\ N$$

لازم به ذکر است که مجموع نیروی برشی در دو انتهای ستون برابر با نیروی اینرسی در سقف می باشد. از این نکته می توان برای کنترل محاسبات استفاده نمود.

مجموع نیروی برشی در دو انتهای ستون

$$V=V_{AB}+V_{BA}=47017.9\sin(4.919t+1.1846)\ N$$

نیروی اینرسی سقف

$$f_I=m\ddot{u}=180000\times 26.121\sin(4.919t+1.1846)=4701794\sin(4.919t+1.1846)\ \ kg\text{-}cm/sec^2$$

$$f_I=47017.9\sin(4.919t+1.1846)\ \ N$$

(پ) نیروی برش پایه برابر با مجموع نیروی برشی در انتهای دو ستون است که با نیروی اینرسی سقف برابر می باشد.

$$V=47017.9\sin(4.919t+1.1846)\ N$$

****

۳-۳ ارتعاش آزاد میرا (Damped Free Vibration)

در بخش قبل ملاحظه گردید که دامنه ارتعاش تا بی نهایت ثابت می ماند. این موضوع بدلیل اینستکه فرض شده بود میرایی سیستم صفر است. در واقع هیچگاه چنین موردی پیش نمی آید و در واقع همواره مقداری کاهش دامنه وجود خواهد داشت که بدلیل وجود میرایی و استهلاک انرژی در سیستم است. فرض عدم وجود میرایی فرضی است که با واقعیت سیستم های دینامیکی سازگار نیست و تنها برای این درنظر گرفته شده بود که فرکانس و دوره تناوب سیستم معرفی گردد. در این بخش استهلاک انرژی به صورت یک میراگر با ضریب c در نظر گرفته می شود. بنابراین معادله حرکت عبارت است از :

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \qquad (۳-۲۴)$$

با تقسیم طرفین این معادله بر m داریم:

$$\ddot{u}+\frac{c}{m}\dot{u}+\frac{k}{m}u=0 \qquad (۳-۲۵)$$

با تعریف c/m به صورت زیر:

$$\frac{c}{m}=2\xi\omega \qquad (۳-۲۶)$$

و استفاده از رابطه (۳-۳) معادله تعادل به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2u=0 \quad (۳-۲۷)$$

در روابط فوق ξ که مقدار بدون بعدی است، نسبت میرایی نامیده می شود. لازم به ذکر است که مقدار ضریب میرایی یا نسبت میرایی قابل محاسبه نیست و فقط برای سازه های موجود توسط آزمایش قابل اندازه گیری است. نسبت میرایی، ξ، مقدار کوچکی است و بر اساس آزمایشات انجام شده روی سازه های موجود نسبت آن بین ۲ تا ۷ درصد می باشد. در صورت موجود نبودن اطلاعات دقیقی راجع به میرایی سازه، معمولاً نسبت میرایی ۵ درصد در نظر گرفته می شود.

جواب معادله (۳-۲۷) به صورت زیر است:

$$u(t)=e^{\lambda t} \quad (۳-۲۸)$$

که مشتقات آن عبارتند از:

$$\dot{u}(t)=\lambda e^{\lambda t} \quad , \quad \ddot{u}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t} \quad (۳-۲۹)$$

با جایگذاری این روابط در معادله (۳-۲۷)، معادله (۳-۳۰) بدست می آید.

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+2\xi\omega\lambda e^{\lambda t}+\omega^2 e^{\lambda t}=0 \quad (۳-۳۰)$$

و چون $e^{\lambda t}\neq 0$ بنابراین:

$$\lambda^2+2\xi\omega\lambda+\omega^2=0 \quad (۳-۳۱)$$

این معادله همان معادله مشخصه است که از حل آن فرکانس سیستم بدست می آید، به همین دلیل به آن معادله فرکانس نیز گفته می شود. جوابهای این معادله عبارتند از:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\omega\sqrt{\xi^2-1} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-\omega\sqrt{\xi^2-1} \quad (۳-۳۲)$$

در این حالت نیز دیده می شود که معادله مشخصه دو ریشه دارد، ولی بسته به مقدار ξ، این دو ریشه ممکن موهومی، حقیقی و یا تکراری باشند. در ادامه این سه حالت مورد بررسی قرار می گیرند.

حالت اول: $\xi<1$

در سازه های معمولی نسبت میرایی خیلی کمتر از ۱ است و چنانکه قبلاً گفته شد، در حدود ۵ درصد است. این حالت، میرایی زیر بحرانی (Undercritically damped) نامیده می شود. در این حالت جواب های معادله مشخصه به صورت موهومی در می آیند و آنها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_1=-\xi\omega+i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (۳-۳۳)$$

برای ساده شدن روابط، فرکانس میرا (damped frequency) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (۳-۳۴)$$

به همین ترتیب دوره تناوب میرا به صورت زیر تعریف می شود.

$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۳۵)$$

دوره تناوب میرا نیز مدت زمانی است که طول می کشد تا سیستم میرا یک رفت و برگشت انجام دهد. البته چون نسبت میرایی عدد خیلی کوچکی است، می توان گفت:

$$\omega_d \approx \omega \ , \quad T_d \approx T \tag{۳-۳۶}$$

به این ترتیب جواب معادله (۳-۲۷) عبارت است از:

$$u(t) = c_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_d)t} + c_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_d)t} = c_1 e^{-\xi\omega t} \times e^{i\xi\omega_d t} + c_2 e^{-\xi\omega t} \times e^{-i\xi\omega_d t} \tag{۳-۳۷}$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند. این معادله به صورت زیر ساده میشود:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(c_1 e^{i\omega_d t} + c_2 e^{-i\omega_d t}\right) \tag{۳-۳۸}$$

با مقایسه این معادله با معادله ارتعاش آزاد نامیرا، (معادله ۳-۹)، ملاحظه می شود که عبارت درون پرانتز این رابطه شبیه به معادله ارتعاش آزاد است ولی بجای ω ، ω_d وجود دارد. البته چون $\omega_d \approx \omega$ می باشد، این تغییر خیلی مهم نیست. تفاوت مهم این دو معادله عبارت جلوی پرانتز در رابطه (۳-۳۸) می باشد. این عبارت یک تابع نمایی با توان منفی است بنابراین نزولی می باشد. با یادآوری اینکه عبارت درون پرانتز یک تابع هارمونیک است وقتی در تابع نزولی ضرب می شود دامنه آن کاهش می یابد.

در این مورد نیز با استفاده از اتحاد اولر معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_d t)+B\sin(\omega_d t)] \tag{۳-۳۹}$$

که در آن A و B ثابت های انتگرال گیری هستند. قابل توجه اینکه اگر در این رابطه $\xi=0$ باشد، همان رابطه ارتعاش آزاد نامیرا بدست خواهد آمد.

همچنین میتوان معادله حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \times \rho\sin(\omega_d t + \theta) \tag{۳-۴۰}$$

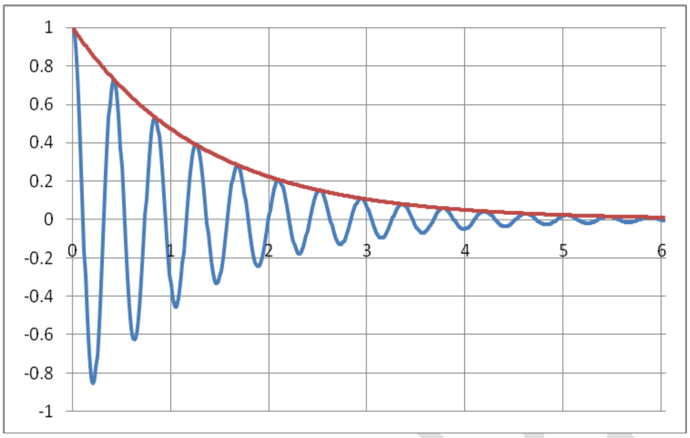
در این رابطه ρ و θ ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. در این حالت نیز شرایط مرزی عبارتند از:

$$@t=0 \ : \ u=u_0 \ , \ \dot{u}=\dot{u}_0 \tag{۳-۴۱}$$

که با اعمال آنها معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}[(\frac{\dot{u}_0+u_0\xi\omega}{\omega_D})\sin\omega_D t+u_0\cos\omega_D t] \tag{۳-۴۲}$$

نمودار حرکت سیستم در حالت ارتعاش آزاد میرای زیربحرانی در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ ارتعاش آزاد سیستم میرا

در رابطه با معادله و نمودار حالت زیربحرانی دو نکته وجود دارد. اول اینکه عبارت دورن کروشه در رابطهٔ (۳-۴۲) نشان دهندهٔ حرکت هارمونیک است. دوم اینکه دامنهٔ حرکت بدلیل وجود ضریب $e^{-\xi\omega t}$ به صورت کاهشی است. یعنی دامنه ارتعاش پس از هر سیکل رفت و برگشت کاهش می یابد و به سمت صفر میل می کند.

مثال – یک سیستم یکدرجه آزاد به جرم ۵۰ کیلوگرم به فنری به سختی 20 KN/m قرار گرفته است. میرایی این سیستم را می توان به صورت میرایی لزج با ضریب 80 N.s/m درنظر گرفت. سیستم ابتدا در حال سکون بوده و سپس به آن سرعت اولیه به میزان 150 mm/s داده می شود. مطلوب است:

(الف) معادلهٔ تغییرمکان و سرعت سیستم

(ب) میزان تغییرمکان و سرعت در زمان $t = 0.5\,s$

(ج) مقدار حداکثر تغییرمکان

حل:

(الف)

$$\omega = \sqrt{\frac{20000}{50}} = 20\ rad/s$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{80}{2\times 50\times 20} = 0.04$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 19.984\ rad/s$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\times\left[\frac{\dot{u}_0}{\omega_D}\sin(\omega_D t)\right] = e^{-0.8t}\times\frac{150}{19.984}\sin(19.984t) = 7.506\times e^{-0.8t}\times\sin(19.984t)$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_0 e^{-\xi\omega t}\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_D t)+\cos(\omega_D t)\right] = 150\times e^{-0.8t}[-0.04\sin(19.984t)+\cos(19.984t)]$$

(ب)

$$t = 0.5\,s \Rightarrow u = -2.70\,mm \quad , \quad \dot{u} = 38.85\,mm/s$$

ج)

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow \tan(\omega_D t_{max}) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 24.98 \Rightarrow t_{max} = 0.0766\,sec \Rightarrow u_{max} = 7.054\,mm$$

حالت دوم) $\xi=1$

این حالت میرایی بحرانی (Critically Damped) نام دارد. در این حالت میرایی سیستم از رابطه زیر بدست می آید:

$$\xi=1 \Rightarrow c_c=2m\omega=2m\sqrt{\frac{k}{m}}=2\sqrt{km} \qquad (۳-۴۳)$$

قبلاً دیدیم که سختی و جرم و میرایی جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی هستند واین سه پارامتر مستقل از یکدیگر می باشند. اگر بین این سه پارامتر رابطهٔ (۳-۵۴) برقرار باشد، میرایی سیستم میرایی بحرانی است.

در این حالت ریشه های معادلهٔ مشخصه (۳-۳۰) برابرند با:

$$\lambda_1=\lambda_2=-\omega \qquad (۳-۴۴)$$

یعنی معادلهٔ مشخصه ریشه های تکراری دارد. بنابراین جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۳-۲۵) به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=(c_1+c_2t)e^{-\omega t} \qquad (۳-۴۵)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$@t=0\ :\ u=u_0,\dot{u}=\dot{u}_0 \qquad (۳-۴۶)$$

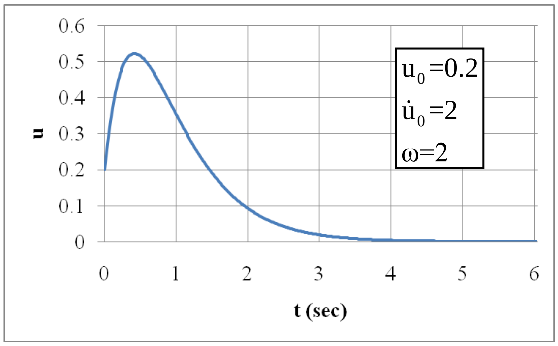
با اعمال این شرایط در معادلهٔ (۳-۴۵) خواهیم داشت:

$$c_1=u_0 \quad , \quad c_2=\dot{u}_0+u_0\omega \qquad (۳-۴۷)$$

در نتیجه پاسخ سیستم به صورت معادلهٔ (۳-۴۸) خواهد شد:

$$u(t)=[u_0+(\dot{u}_0+u_0\omega)t]e^{-\omega t} \qquad (۳-۴۸)$$

نمودار این معادله در شکل (۳-۴) ترسیم شده است. این حرکت از u_0 شروع شده، با شیب $\dot{u}_0$ ادامه می یابد تا به ماکزیمم جابجایی برسد و سپس به صورت نمایی کاهش یافته تا به صفر برسد. چنانچه ملاحظه می شود این حرکت نوسانی نیست. یادآوری می شود که در حالت $\xi<1$ حرکت به صورت نوسانی بود. در اصل می توان گفت که $\xi=1$ بیشترین مقدار نسبت میرایی است که به ازای آن حرکت از حالت نوسانی به غیرنوسانی تبدیل می شود. به همین دلیل به آن میرایی بحرانی گفته می شود.



شکل ۳-۴ نمودار جابجایی سیستم در حالت میرایی بحرانی

حالت سوم $\xi>1$

این حالت میرایی فوق بحرانی (Overcritically damped) نامیده می شود. در این حالت جواب هـای معادلـهٔ مشخصه به صورت زیر در می آید:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\omega\sqrt{\xi^2-1} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-\omega\sqrt{\xi^2-1} \tag{۳-۴۹}$$

برای سادگی روابط پارامتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\omega}=\omega\sqrt{\xi^2-1} \tag{۳-۵۰}$$

با این تعریف ریشه های معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\hat{\omega} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-\hat{\omega} \tag{۳-۵۱}$$

این دو ریشه حقیقی متمایز هستند، در نتیجه جواب معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$u(t)=c_1e^{(-\xi\omega+\hat{\omega})t}+c_2e^{(-\xi\omega-\hat{\omega})t} \tag{۳-۵۲}$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند و از شرایط مرزی بدست می آیند. با توجه به روابط زیر:

$$e^x=\cosh(x)+\sinh(x) \quad , \quad e^{-x}=\cosh(x)-\sinh(x) \tag{۳-۵۳}$$

معادلهٔ (۳-۶۱) را به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}[A\cosh(\hat{\omega}t)+B\sinh(\hat{\omega}t)] \tag{۳-۵۴}$$

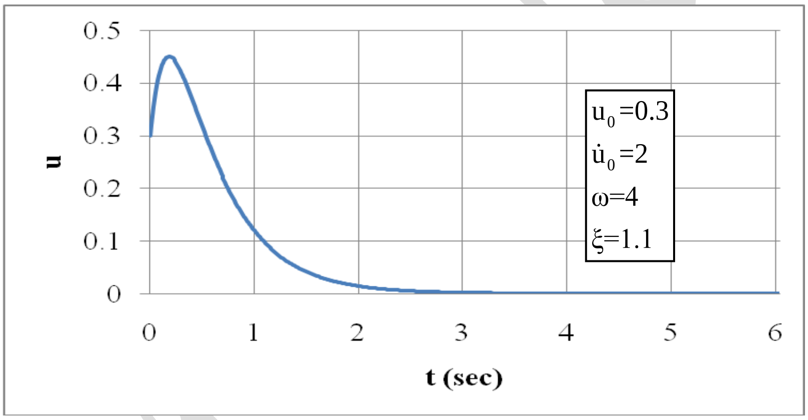
که در آن A و B ثابت های انتگرال گیری هستند. در این حالت نیـز همـان شـرایط اولیـهٔ قبلـی (معادلهٔ ۳-۵۷) درنظر گرفته می شود که با اعمال آن ثابت های انتگرال گیری به صورت زیر بدست می آیند:

$$A=u_0 \quad , \quad B=\frac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\hat{\omega}} \tag{۳-۵۵}$$

بنابراین در این حالت تغییرمکان سیستم به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[u_0\cosh(\hat{\omega}t)+\frac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\hat{\omega}}\sinh(\hat{\omega}t)\right] \tag{۳-۵۶}$$

نمودار این معادله در شکل ۳-۵ نشان داده شده است.چنانچه ملاحظه می شود این نمودار هم نظیر نمودار معادله حرکت سیستم با میرایی بحرانی است. در این حالت نیز تغییر مکان به صورت نوسانی نیست.



شکل ۳-۵ نمودار تغییرمکان بر حسب زمان برای سیستم های با میرایی فوق بحرانی

۳-٤ – استفاده از نتایج آزمایش ارتعاش آزاد برای پیدا کردن نسبت میرایی سیستم

همانطور که قبلاً گفته شد، ضریب میرایی و نسبت میرایی از طریق آزمایش بدست می آیند. روش های مختلفی برای این کار وجود دارد که یکی از آنها استفاده از آزمایش ارتعاش آزاد است. در اینجا بدون وارد شدن به جزییات انجام آزمایش فرض می شود که نمودار تغییر مکان بر حسب زمان در آزمایش ارتعاش آزاد به صورت شکل ۳-۶ بدست آمده است.

دو زمان مختلف t_m و t_{m+n} را درنظر بگیرید. فرض کنید u_m تغییرمکان در لحظه t_m و u_n تغییرمکان در لحظه t_{m+n} باشد. فاصله زمانی بین این دو لحظه برابر با n سیکل است. چون هر سیکل ارتعاش برابر T_D ثانیه است، بنابراین

$$t_{m+n}=t_m+nT_D=t_m+\frac{2n\pi}{\omega_D} \qquad (۵۷-۳)$$

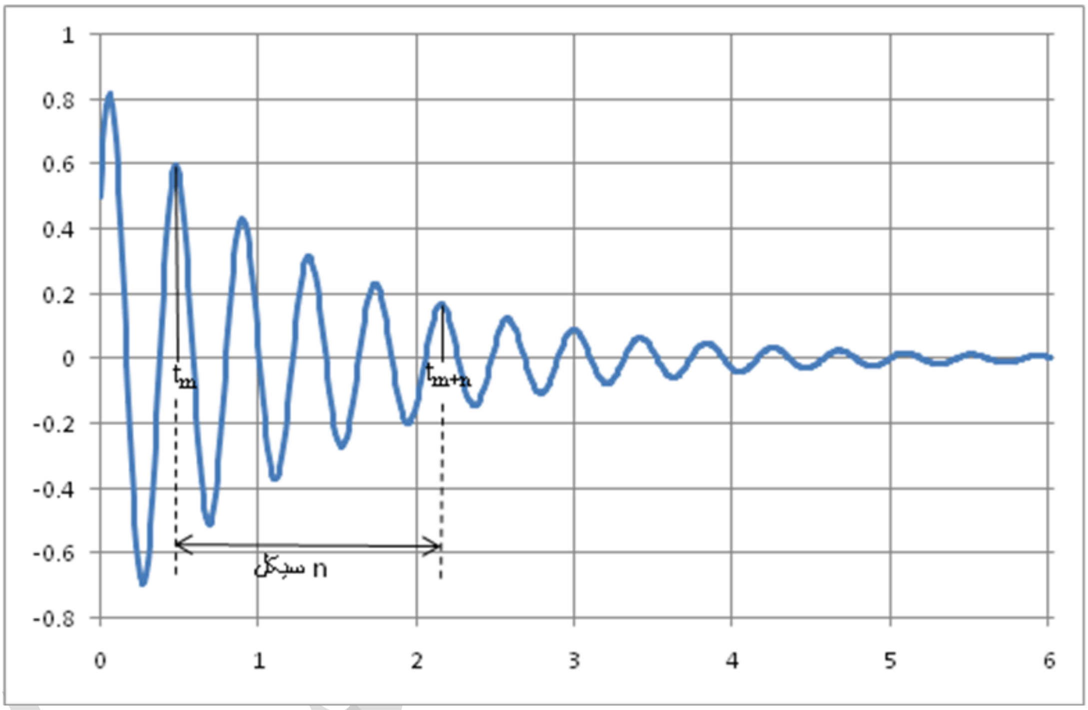
تغییر مکان در لحظه های t_m و t_{m+n} با استفاده از رابطهٔ (۳-۳۷) برابر است با:

$$u_m=e^{-\xi\omega t_m}[\rho\cos(\omega_D t_m+\theta)] \qquad (۵۸-۳)$$

$$u_{m+n}=e^{-\xi\omega t_{m+n}}[\rho\cos(\omega_D t_{m+n}+\theta)] \qquad (۳-۵۹)$$

عبارت $\omega_D t_{m+n}$ را با استفاده از رابطه (۳-۵۷) می توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega_D t_{m+n}=\omega_D\left(t_m+nT_D\right)=\omega_D t_m+n\omega_D T_D=\omega_D t_m+n\times 2\pi \qquad (۳-۶۰)$$



شکل ۳-۶ نمونه ای از نمودار تغییرمکان بر حسب زمان در آزمایش ارتعاش آزاد

بنابراین:

$$\cos(\omega_D t_{m+n}+\theta)=\cos(2n\pi+\omega_D t_m+\theta) \;\Rightarrow\; \cos(\omega_D t_{m+n}+\theta)=\cos(\omega_D t_m+\theta) \qquad (۳-۶۱)$$

با قرار دادن این رابطه در رابطه (۳-۵۹) خواهیم داشت:

$$u_{m+n}=e^{-\xi\omega t_{m+n}}[\rho\cos(\omega_D t_m+\theta)] \qquad (۳-۶۲)$$

از تقسیم رابطهٔ (۳-۵۸) بر (۳-۶۲) داریم:

$$\frac{u_m}{u_{m+n}}=\frac{e^{-\xi\omega t_m}}{e^{-\xi\omega t_{m+n}}} \qquad (۳-۶۳)$$

با استفاده از رابطهٔ (۳-۵۷) ، رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\omega t_{m+n}=\omega(t_m+nT_D)=\omega t_m+n\omega\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (۳-۶۴)$$

در نتیجه

$$\frac{u_m}{u_{m+n}}=\frac{e^{-\xi\omega t_m}}{e^{-\xi\omega t_m}\times e^{\left(\frac{-2n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}}=e^{\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (۳-۶۵)$$

اگر از طرفین این رابطه لگاریتم گرفته شود، رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\ln\left(\frac{u_m}{u_{m+n}}\right)=2n\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۶۶)$$

این رابطه به رابطهٔ تنزل لگاریتمی معروف است. اگر فرض کنیم:

$$\delta=\ln\left(\frac{u_m}{u_{m+n}}\right) \quad (۳-۶۷)$$

آنگاه:

$$\delta=2n\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۶۸)$$

از این رابطه میتوان نسبت میرایی را بدست آورد. لازم به یادآوری است که فرض بر این است که تغییر مکان بر حسب زمان اندازه گیری شده است و مقادیر u_mو u_{m+n} معلوم هستند در نتیجه δ را می توان از رابطهٔ (۳-۶۷) بدست آورد و آنگاه از رابطهٔ (۳-۶۸) مقدار نسبت میرایی را محاسبه نمود.

اگر نسبت میرایی کوچک باشد(که در سازه های معمولی اینچنین است)، مخرج رابطهٔ (۳-۶۸) تقریباً برابر یک می شود و می توان نوشت:

$$\delta\approx 2n\pi\xi \quad \Rightarrow \quad \xi\approx\frac{\delta}{2n\pi} \quad (۳-۶۹)$$

اگر تعداد سیکل ها نیز یک انتخاب شود، رابطهٔ محاسبهٔ نسبت میرایی به صورت سادهٔ زیر در می آید:

$$\xi=\frac{\delta}{2\pi} \quad (۳-۷۰)$$

در جدول (۳-۱) نسبت میرایی چند نوع سازه متداول نشان داده شده است.

جدول (۳-۱) نسبت میرایی برای چند نوع سازه متداول

(مرجع: Earthquake Engineering handbook, W.F. Chen)

نوع سازه	سطح تنش ۱[a]	سطح تنش ۲[a]
سازه های فلزی جوشی و پیچی اصطکاکی	۰/۰۲	۰/۰۴
سازه های فلزی پیچی اتکایی	۰/۰۴	۰/۰۷
سازه های بتنی پیش تنیده	۰/۰۲	۰/۰۵

علیرضا فیوض

سازه های بتن آرمه	۰/۰۴	۰/۰۷

a: در سطح تنش ۱ نیروهای اعضا کمتر از نصف مقاومت نهایی برای اعضای بتن آرمه و کمتر از نصف مقاومت تسلیم برای اعضای فلزی است.

مثال – یک ساختمان یک طبقه را می توان به صورت یک سقف صلب روی ستون های بدون جرم در نظر گرفت. به منظور تعیین خصوصیات دینامیکی این سازه، آزمایش ارتعاش آزاد به این ترتیب روی آن انجام شده است که به وسیله جک به سقف آن نیرویی برابر ۱۰ کیلونیوتن وارد شده است. بر اثر این نیرو سقف تغییرمکانی برابر با ۵ میلیمتر داده است. پس از آن سقف رها شده و به صورت آزاد ارتعاش می کند. پس از اولین برگشت جابجایی سقف به میزان ۴ میلیمتر ثبت شده که در زمان ۱/۴ ثانیه اتفاق افتاده است. مطلوب است: (الف) وزن سقف، (ب) فرکانس طبیعی ارتعاش، (پ) ضریب میرایی، نسبت میرایی و میرایی بحرانی و (ت) دامنه ارتعاش پس از ۶ سیکل.

فرض کنید: $g = 10\,\mathrm{m/sec^2}$

حل–

(الف) سختی سازه برابر است با: $k = \frac{F}{\Delta} = \frac{10000}{5} = 2000\ \mathrm{N/mm} = 2\times10^6\ \mathrm{N/m}$

با توجه به صورت مسئله دوره تناوب سازه ۱/۴ ثانیه است. بنابراین :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 1.4 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\times10^6}} \Rightarrow m = 99294.8\ \mathrm{kg} \Rightarrow W = mg = 992948\,\mathrm{N} \approx 993\,\mathrm{KN}$$

(ب) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.4} = 0.714\,\mathrm{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 4.488\,\mathrm{rad/sec}$

(پ) $\ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) = 2\pi\xi \Rightarrow \xi = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{2\pi} = 0.0355 \Rightarrow \xi = 3.55\%$

$$c = 2m\omega\xi = 2\times99294.8\times4.488\times0.0355 = 31653\,\mathrm{N.sec/m}$$

$$c_c = 2m\omega = 2\times99294.8\times4.488 = 891270\,\mathrm{N.sec/m}$$

(ت) $\ln\left(\frac{u_0}{u_6}\right) = 2n\pi\xi = 2\times6\times\pi\times0.0355 = 1.3383 \Rightarrow u_6 = 1.311\,\mathrm{mm}$

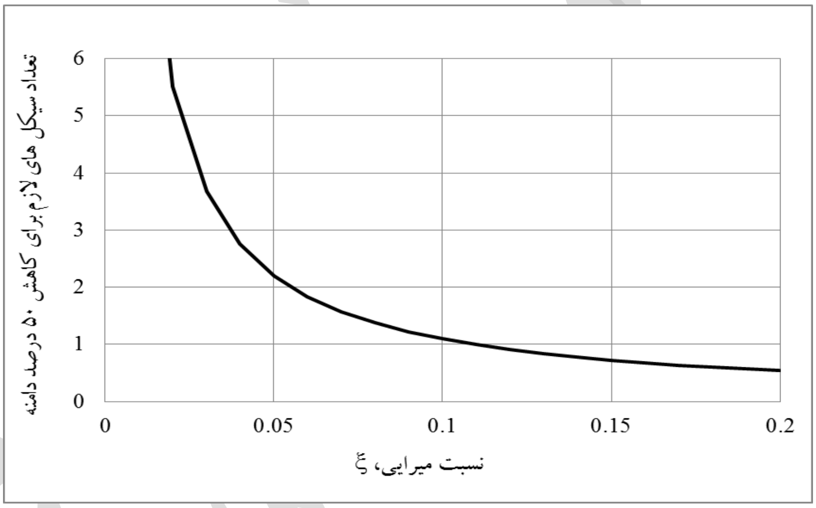
****

مثال – در یک حرکت ارتعاش آزاد چند سیکل لازم است تا دامنه حرکت نصف شود.

حل – با استفاده از رابطه (۳-۶۶) داریم:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{0.5}\right)}{2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.11\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

چنانچه ملاحظه می شود تعداد سیکل های لازم برای کاهش دامنه به نسبت میرایی بستگی دارد. نمودار تعداد سیکل های لازم برای کاهش ۵۰ درصد دامنه حرکت در شکل زیر نشان داده شده است. مثلاً برای نسبت میرایی ۲/۲ درصد پس از ۵ سیکل ، برای نسبت میرایی ۵/۵ درصدپس از ۲ سیکل و برای نسبت میرایی ۱۱ درصد پس از یک سیکل دامنه حرکت نصف می شود.



تمرینات

۱- ارتعاش آزاد سیستمی بوسیله معادله $u(t)=25\sin(5\pi t-5\pi/3)\,mm$ که در آن t بر حسب ثانیه می باشد. مطلوبست : (الف) فرکانس زاویه ای، فرکانس دایره ای و دوره تناوب سیستم، (ب) تغییرمکان، سرعت و شتاب سیستم در زمان t=1.2 sec و (پ) حداکثر تغییر مکان، سرعت و شتاب سیستم

جواب : (الف) 15.71 rad/sec ، 2.5 Hz ، 0.4sec (ب) 21.65 mm ، 196.3 mm/sec ، $-5342\ mm/sec^2$ (پ) 25 mm ، 392.7 mm/sec ، $6168.5\ mm/sec^2$

۲- ارتعاش آزاد سیستمی بوسیله معادله $u(t)=\rho\sin(5t+\theta)$ بیان می شود. شرایط اولیه عبارتند از : $u(0)=3.0\,mm\,,\dot{u}(0)=20\,mm/sec$. (الف) مقادیر ρ و θ را پیدا کنید. (ب) معادله حرکت را به فرم $u(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$ بنویسید و مقادیر A و B را بدست آورید.

جواب: (الف) ρ=5 mm ، $\theta=36.87^0$ (ب) A=4 mm ، B=3 mm

۳- ارتعاش آزاد سیستمی بوسیله معادله $u(t)=\rho\sin(100t+\theta)=A\sin(100t)+B\cos(100t)$ بیان می شود. برای هر یک از شرایط زیر مقادیر ρ و θ و A و B را بدست آورید.

(الف) $u(0.1)=-8.796mm\ ,\ u(0.2)=10.762mm$

(ب) $u(0.1)=-8.796mm\ ,\ \dot{u}(0.1)=-621.5mm/sec$

(پ) $u(0.1)=-8.796mm\ ,\ \ddot{u}(0.2)=-10.76\times10^4\ mm/sec^2$

(ت) $u(0)=4\,mm\ ,\ \ddot{u}(0.2)=-10.76\times10^4\ mm/sec^2$

جواب: A=10 , B=4 , ρ=10.77 , θ=0.38

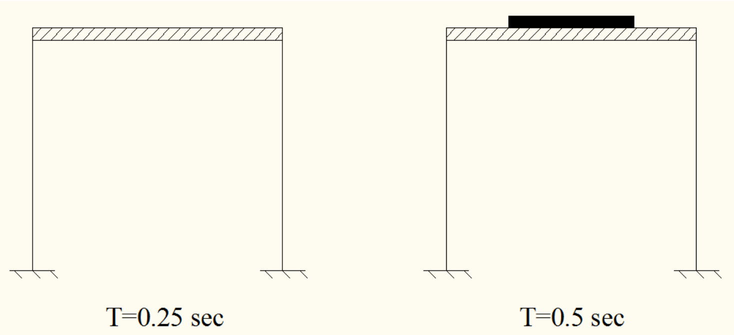
۴- دو حرکت هارمونیک u_1 و u_2 به صورت زیر تعریف شده اند:

$$u_1=2\sin(\omega t+\pi/3)\ ,\quad u_2=3\sin(\omega t+2\pi/3)$$

مجموع این دو تابع را به صورت $\rho\sin(\omega t+\theta)$ نوشته و مقادیر ρ و θ را بدست آورید.

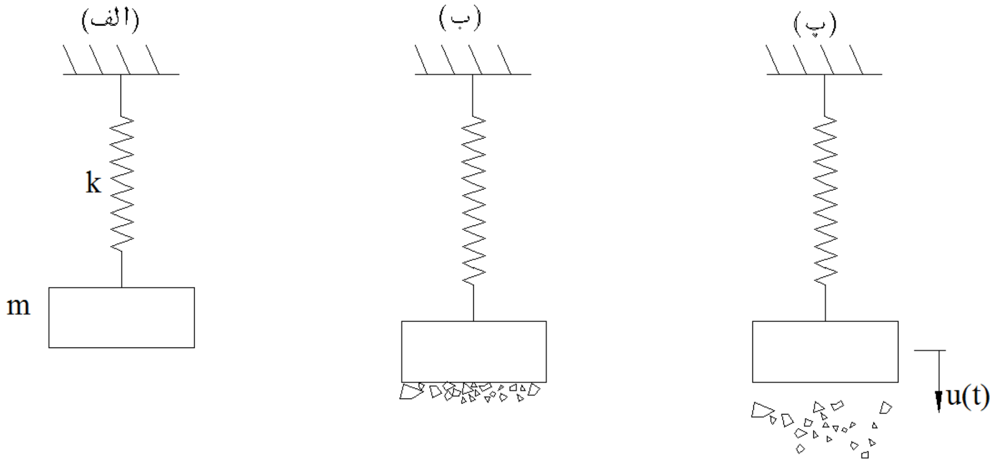
جواب: $-4.3589\sin(\omega t-1.45583)$

۵- یک قاب یک طبقه شامل یک سقف صلب روی چهار ستون می باشد. دوره تناوب ارتعاش آن ۰/۲۵ ثانیه است. پس از اینکه وزنه ۵۰ کیلوگرمی به آن پیچ می شود دوره تناوب آن به ۰/۵ ثانیه افزایش می یابد. وزن سقف و سختی قاب را بدست آورید.



جواب : m=16.67 kg , k=10527 N/m

۶- یک آهنربای الکتریکی به جرم ۱۸۰ کیلوگرم از فنری با سختی 18 kg/cm مطابق شکل الف آویزان شده است. مطابق شکل ب این آهن ربا ۹۰ کیلوگرم آهن برمی دارد و مقداری تغییرمکان می دهد. سپس برق آهن ربا به طور ناگهانی قطع شده و قراضه های آهن فرو می ریزند(شکل پ). معادله ارتعاش آهنربا را بدست آورید.



جواب : $u(t)=5\cos(10t)$ cm

۷- یک سکوی نفتی که وزنی برابر 180KN دارد، بر روی چهار ستون قرار دارد. تکیه گاه این ستون ها گیردار است. اعمال نیروی افقی استاتیکی به میزان F= 4.5 KN بر سکو تغییر مکانی برابر Δ=0.25cm ایجاد مینماید. نسبت میرایی برابر ۰/۰۵ است. مطلوبست: ($g=10\ m/sec^2$)

الف – فرکانس طبیعی نامیرا

ب- ضریب میرایی

ج- تنزل لگاریتمی

د- پس از چند سیکل دامنه حرکت از مقدار اولیه 0.25cm به 0.025cm می رسد.

جواب: (الف) 10 rad/sec ، (ب) 18000N.sec/m ، (ج) 0.314 ، (د) 7

۸- جسمی به وزن 10 kg از فنری به سختی 10 kg/cm آویزان شده است. این جسم از وضعیت تعادل خود به میزان ۵ سانتیمتر به طرف پایین کشیده شده و با سرعت 7.5cm/sec به طرف بالا رها می شود. مطلوبست:

(الف) فرکانس و زمان تناوب ارتعاش (ب) سرعت حداکثر سیستم (پ) شتاب حداکثر سیستم (ث) زاویه فاز حرکت

جواب : (الف) T=0.2 sec ، (ب) 1.58 m/sec ، (پ) $50\ m/sec^2$ ، (ت) 87.0^o

۹- یک سیستم یکدرجه آزاد دارای سختی 6 KN/m ، میرایی 0.3 N.sec/mm ، و نسبت میرایی **۳۰** درصد است. این سیستم تحت اثر تغییر مکان اولیهٔ صفر و سرعت اولیهٔ 1.0 m/sec دارای ارتعاش آزاد می باشد. حداکثر تغییر مکان آن چقدر است؟

جواب : 55.96 mm

۱۰- یک سیستم یکدرجه آزاد میرا دارای سختی 6000N/m و میرایی بحرانی 0.3N.s/mm و نسبت میرایی 0.3 می باشد. این سیستم در حال سکون است و به آن سرعت اولیه ای به میزان 1m/sec داده می شود. حداکثر تغییرمکان آن را بدست آورید.

جواب: 16.79 mm

۱۱- ماشینی به وزن ۱۲۵۰ نیوتن روی ۴ عدد فنر و دامپر قرار گرفته است. تغییرفرم فنرها تحت اثر وزن ماشین ۲ سانتیمتر است. دامپرها طوری طراحی شده اند که بتوانند دامنه ارتعاش را پس از دو رفت و برگشت به میزان $\frac{1}{8}$ کاهش دهند.

مطلوبست: (الف) فرکانس طبیعی سیستم (ب) نسبت میرایی (پ) ضریب میرایی

جواب : (الف) 0.28 sec (ب) 16.3% (پ) 911 N.Sec/m

علیرضا فیوض

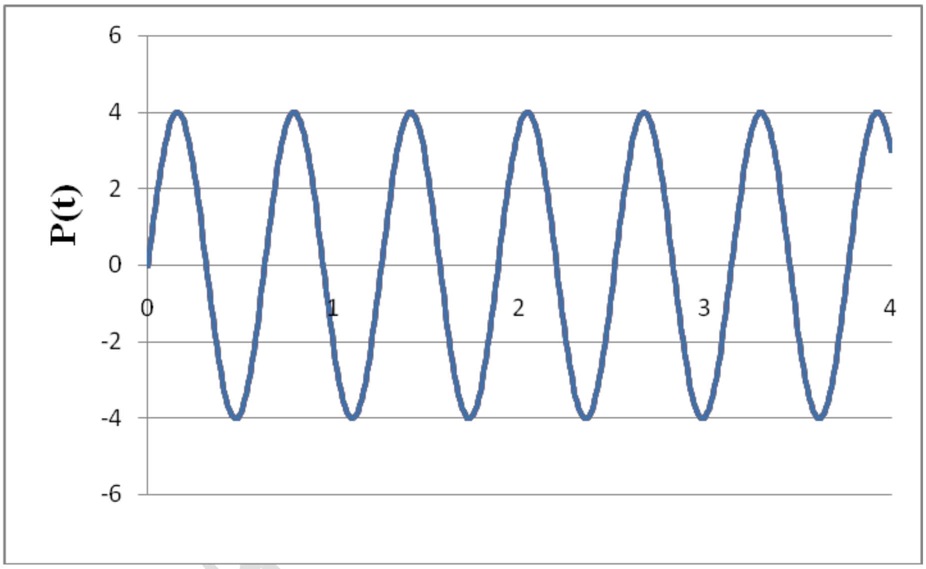
فصل ۴

بارهای هارمونیک

٤-١- مقدمه

در این فصل فرض می شود که بار وارد بر سیستم به صورت هارمونیک است. نمونه ای از این نوع بار در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. بار هارمونیک به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(t)=P_0\sin(\bar{\omega}t) \qquad (۱-۴)$$



شکل ۴-۱ نمودار بار هارمونیک

P_0 دامنه بار و $\bar{\omega}$ فرکانس آن است. زمان تناوب بار هم از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\bar{T}=\frac{2\pi}{\bar{\omega}} \qquad (۲-۴)$$

معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد تحت اثر بار هارمونیک به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P_0\sin(\bar{\omega}t) \qquad (۳-۴)$$

برای حل این معادله آن را بر m تقسیم کرده و از تعاریف (۳-۳) و (۳-۲۶) استفاده می کنیم.

$$\ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2u=\frac{P_0}{m}\sin(\bar{\omega}t) \qquad (۴-۴)$$

این معادله، معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد تحت اثر نیروی هارمونیک است که در ادامه آن را حل می کنیم .

٤-٢ پاسخ سیستم

جواب معادله حرکت از دو قسمت جواب همگن وجواب خصوصی تشکیل می شود:

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t) \qquad (۵-۴)$$

که در آن $u_h(t)$ جواب عمومی یا جواب همگن و $u_p(t)$ جواب خصوصی است و در ادامه بدست می آیند.

جواب همگن:

$u_h(t)$ جواب همگن است و برابر با جواب معادله (۳-۲۷) می باشد. همانطور که در فصل ۳ دیدیم این حالت، ارتعاش آزاد نام دارد و جواب آن به صورت زیر نوشته می شود.

$$u_h = e^{-\xi\omega t}\left[A\sin(\omega_D t)+B\cos(\omega_D t)\right] \qquad (۶-۴)$$

جواب خصوصی :

$u_p(t)$ جواب خصوصی است که جوابی است که در معادله (۴-۴) صدق می کند. این جواب به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_p=G_1\sin\bar{\omega}t+G_2\cos\bar{\omega}t \qquad (۷-۴)$$

ضرایب G_1 و G_2 از قرار دادن رابطه (۴-۷) در معادله (۴-۴) بدست می آید. مشتقات رابطه (۴-۷) عبارتند از:

$$\dot{u}_p=G_1\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t-G_2\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t \quad , \quad \ddot{u}_p=-G_1\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t-G_2\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}t \qquad (۸-۴)$$

با قراردادن روابط (۴-۷) و (۴-۸) در رابطه (۴-۴) داریم:

(۹-۴)

$$\left(-G_1\bar{\omega}^2\sin(\bar{\omega}t)-G_2\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t)\right)+2\xi\omega\left(G_1\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t)-G_2\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t)\right)+\omega^2\left(G_1\sin(\bar{\omega}t)+G_2\cos(\bar{\omega}t)\right)=\frac{P_0}{m}\sin(\bar{\omega}t)$$

این رابطه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\left[G_1\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_2\times2\xi\omega\bar{\omega}-\frac{P_0}{m}\right]\sin(\bar{\omega}t)+\left[G_2\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_1\times2\xi\omega\bar{\omega}\right]\cos(\bar{\omega}t)=0 \qquad (۱۰-۴)$$

چون توابع سینوس و کسینوس مستقل از یکدیگر هستند، شرط برقراری تساوی فوق این است که عبارتهای درون کروشه در رابطه (۴-۱۰) صفر باشد:

$$\begin{cases} G_1\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_2\times2\xi\omega\bar{\omega}=\dfrac{P_0}{m} \\ -G_1\times2\xi\omega\bar{\omega}+G_2\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)=0 \end{cases} \qquad (۱۱-۴)$$

از حل این دو معادله، ضرایب G_1 و G_2 به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} G_1=\dfrac{p_0}{m}\times\dfrac{(\omega^2-\bar{\omega}^2)}{(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+(2\xi\omega\bar{\omega})^2} \\ G_2=\dfrac{p_0}{m}\times\dfrac{(-2\xi\omega\bar{\omega})}{(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+(2\xi\omega\bar{\omega})^2} \end{cases} \tag{۱۲-۴}$$

اگر صورت و مخرج روابط فوق را بر ω^2 تقسیم کنیم و از رابطه $m=k/\omega^2$ نیز استفاده کنیم، آنگاه

$$\begin{cases} G_1=\dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \\ G_2=\dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{(-2\xi\beta)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \end{cases} \tag{۱۳-۴}$$

β نسبت فرکانس (Frequency Ratio) نامیده می شود و برابر است با :

$$\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega} \tag{۱۴-۴}$$

در اصل β نسبت فرکانس نیروی وارد به فرکانس طبیعی سیستم است.

با قرار دادن روابط (۴-۱۳) در رابطه (۴-۷) جواب مخصوص به صورت زیر بدست می آید:

$$u_p=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t-(2\xi\beta)\cos\bar{\omega}t\right] \tag{۱۵-۴}$$

این جواب را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$u_p=\frac{P_0}{k}\times D\times\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۱۶-۴}$$

که در آن:

$$D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\quad,\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \tag{۱۷-۴}$$

جواب کلی :

جواب کلی معادله (۴-۴) از جمع روابط (۴-۶) و (۴-۱۵) بدست می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[A\sin(\omega_D t)+B\cos(\omega_D t)\right]+\frac{P_0}{k}\times D\times\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۱۸-۴}$$

A و B ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. یکی از مهمترین شرایط اولیه، شرایط سکون (at rest condition) است. یعنی در ابتدای حرکت تغییرمکان و سرعت صفر است:

$$@t=0\ :\ u=0\quad,\quad \dot{u}=0 \tag{۱۹-۴}$$

با قرار دادن این شرایط در رابطهٔ (۴-۱۸) ثابت های انتگرال گیری به صورت زیر بدست می آید:

علیرضا فیوض

$$A=\frac{-P_0}{k}\times\frac{D}{\sqrt{1-\xi^2}}\times\left[\xi\sin(\theta)+\beta\cos(\theta)\right]=\frac{P_0}{k}\times\frac{\beta}{\sqrt{1-\xi^2}\left[\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2\right]}\times\left[2\xi^2-1+\beta^2\right]$$

$$B=\frac{-P_0}{k}\times D\times\sin(\theta)=\frac{P_0}{k}\times\frac{2\xi\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}$$

(۴-۲۰)

همانطور که قبلاً گفته شد جواب معادلهٔ حرکت (معادلهٔ ۴-۱۸) دو قسمت دارد. قسمت اول مربوط به جواب همگن و قسمت دوم مربوط به جواب مخصوص است. این جوابها در شکل (۴-۲) ترسیم شده اند. همانطور که مشاهده می شود قسمت اول این جواب (شکل ۴-۲ الف) مربوط به ارتعاش آزاد می باشد که بدلیل وجود ضریب $e^{-\xi\omega t}$ کاهش یابنده است و به همین دلیل به این قسمت از جواب، ارتعاش گذرا (Transient) نیز گفته می شود. ولی قسمت دوم جواب (شکل ۴-۲ ب) که مربوط به جواب مخصوص است، حالت هارمونیک دارد که دامنه آن ثابت است و تا بی نهایت ادامه دارد. به همین دلیل به این قسمت از جواب حالت دائمی (steady state) یا ماندگار نیز گفته می شود. مجموع این دو جواب نیز در شکل ۴-۲ پ نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود اثر ارتعاش آزاد بسیار کم بوده و در سیکل های ابتدایی است و پس از آن پاسخ کلی و پاسخ ماندگار یکی می شوند. بنابراین با دقت بسیار خوبی می توان پاسخ کلی و پاسخ حالت ماندگار را برابر در نظر گرفت، یعنی :

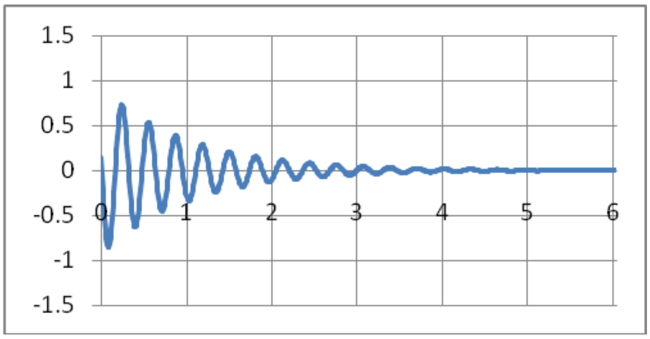
$$u(t)\approx u_p(t)$$ (۴-۲۱)

٤-۳ تغییر مکان استاتیکی (Static Displacement)

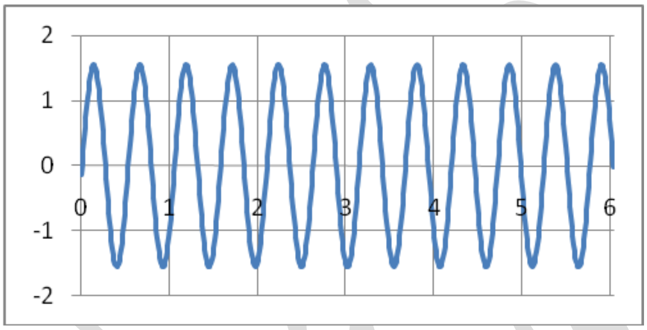
نیروی $P(t)$ از دو ترم تشکیل شده است. ترم اول دامنه نیرو یعنی P است و ترم دوم $\sin(\omega t)$ است که به نیرو حالت دینامیکی می دهد. اگر این نیرو به صورت استاتیکی وارد شود یعنی از جمله $\sin(\omega t)$ صرفنظر گردد آنگاه تغییر مکان سیستم نیز به صورت استاتیکی شده و برابر با P_0/k می باشد.

$$u_{st}=\frac{P_0}{k}$$ (۴-۲۲)

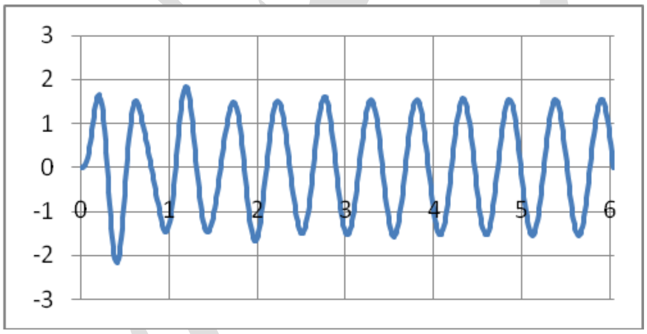
به این تغییر مکان، تغییر مکان استاتیکی گفته می شود.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۴-۲ پاسخ هارمونیک: (الف) جواب همگن، (ب) جواب مخصوص، (پ) جواب کلی

٤-٤ نسبت پاسخ (Response ratio)

نسبت تغییر مکان های دینامیکی به تغییر مکان استاتیکی را نسبت پاسخ می گویند:

$$R_h(t)=\frac{u_h(t)}{u_{st}} \quad , \quad R_p(t)=\frac{u_p(t)}{u_{st}} \quad , \quad R(t)=\frac{u(t)}{u_{st}} \qquad (۲۳-۴)$$

مثال: به یک سیستم یکدرجه آزاد با سختی 4000 N/m و جرم 10 Kg نیروی هارمونیک به معادلهٔ $P(t)=10\sin(16t)\,N$ وارد می شود. اگر سیستم از حالت سکون شروع به حرکت نماید نسبت پاسخ های گذرا، دائمی و کلی سیستم را بدست آورده و رسم نمایید. $\xi=0.05$

حل:

فرکانس سیستم و نسبت فرکانس برابرند با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=20\,\text{rad/sec} \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{\overline{\omega}}{\omega}=\frac{16}{20}=0.80$$

از رابطهٔ (۴-۱۷) ضرایب D و θ و از رابطهٔ (۴-۲۰) ضرایب A و B بدست می آیند.

$$D=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}}=2.712 \quad , \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)=-0.219\,\text{rad}$$

$$\frac{A}{P_0/k}=\frac{-D}{\omega_D}\times\left[\overline{\omega}\cos(\theta)+\xi\,\omega\sin(\theta)\right]=-2.091 \quad , \quad \frac{B}{P_0/k}=-D\times\sin(\theta)=0.588$$

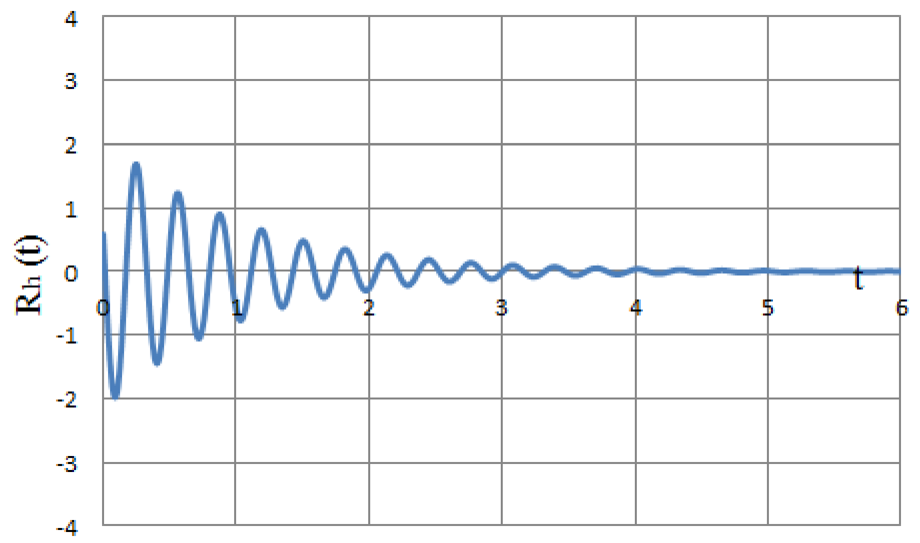
نسبت پاسخ های ارتعاش گذرا، دائمی و کلی به صورت زیر است:

$$R_h(t)=e^{-\xi\omega t}\left[\frac{A}{P_0/k}\sin(\omega_D t)+\frac{B}{P_0/k}\cos(\omega_D t)\right]=e^{-t}\left[-2.091\sin(19.975t)+0.588\cos(19.975t)\right]$$

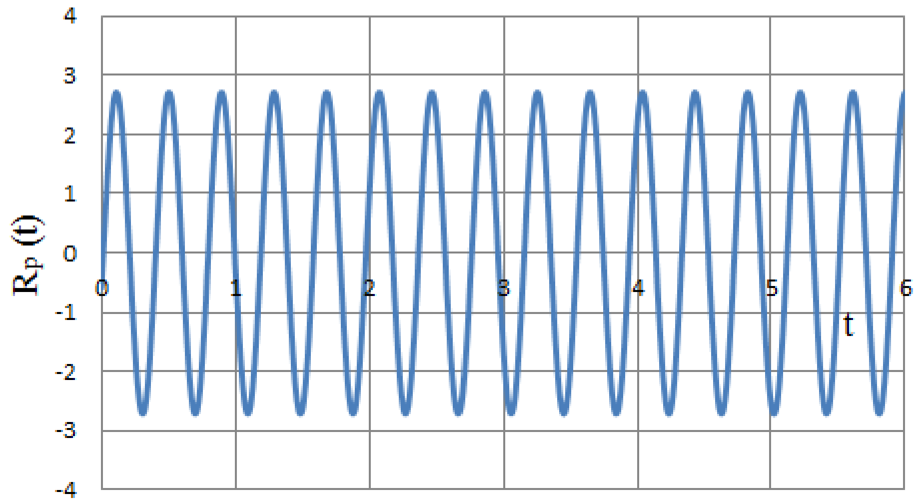
$$R_p(t)=D\sin(\overline{\omega}t+\theta)=2.717\sin(16t-0.219)$$

$$R(t)=R_h(t)+R_p(t)$$

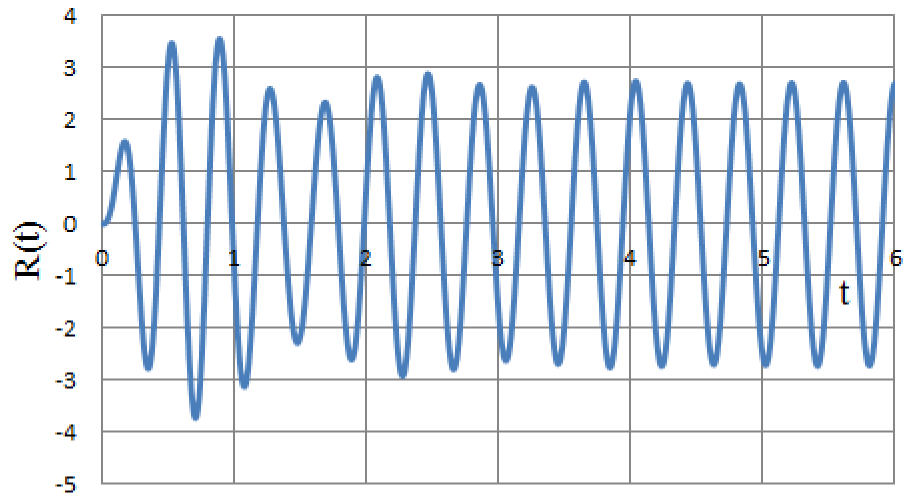
نمودار پاسخ ها در شکل صفحهٔ بعد ترسیم شده است.



(الف) نسبت پاسخ عمومی



(ب) نسبت پاسخ خصوصی



(ج) نسبت پاسخ کلی

٥-٤ ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic Amplification Factor)

با توجه به رابطهٔ (۴-۱۶) می توان گفت که حداکثر پاسخ سیستم در حالت ماندگار برابر است با :

$$u_{max}=u_{st}\times D \qquad (۴-۲۴)$$

که در آن D ضریب بزرگنمایی دینامیکی نامیده می شود و برابر است با:

$$D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \qquad (۴-۲۵)$$

به عبارت دیگر تغییر مکان ماکزیمم دینامیکی برابر است با تغییر مکان استاتیکی ضربدر ضریب بزرگنمایی دینامیکی. رابطه (۴-۲۵) رابطه بسیار مهمی است زیرا با استفاده از آن می توان بدون انجام تحلیلی دینامیکی، تغییر مکان ماکزیمم سیستم را بدست آورد. باید توجه داشت که محاسبه تغییر مکان استاتیکی، ساده است و برای استفاده از رابطه (۴-۲۴) تنها کافیست ضریب بزرگنمایی دینامیکی محاسبه شود. لازم به ذکر است که در حالتیکه نیروی وارد بر سیستم به صورت هارمونیک باشد ضریب بزرگنمایی دینامیکی از رابطه (۴-۲۵) بدست می آید ولی برای سایر نیروها باید این ضریب محاسبه گردد.

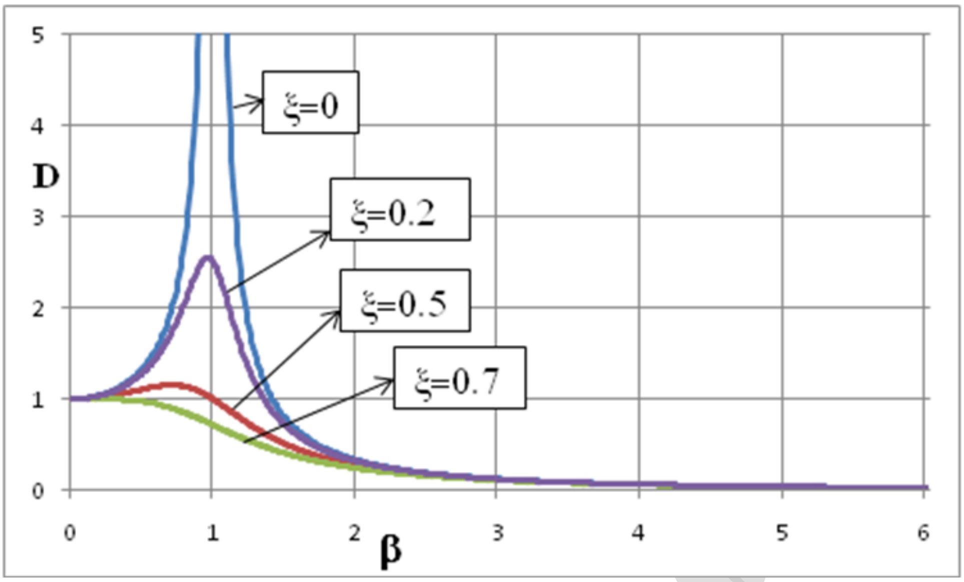
ضریب بزرگنمایی دینامیکی بار هارمونیک به نسبت فرکانس و نسبت میرایی بستگی دارد. نمودار آن در شکل ۴-۳ ترسیم شده است. نکته ای که در این شکل وجود دارد اینستکه با افزایش نسبت میرایی، ضریب بزرگنمایی کاهش می یابد.

٦-٤ پاسخ تشدید (Resonant Response)

چنانچه دیدیم ضریب بزرگنمایی دینامیکی تابعی از نسبت فرکانس است. برای پیدا کردن مقدار ماکزیمم آن از رابطهٔ (۴-۲۵) نسبت به β مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\frac{\partial D}{\partial \beta}=0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{Peak}=\sqrt{1-2\xi^2} \qquad (۴-۲۶)$$

در این رابطه دیده می شود که حداکثر β به نسبت میرایی بستگی دارد. البته برای سازه های واقعی که نسبت میرایی خیلی کوچک است، حداکثر β نزدیک ۱/۰ می شود. اگر نسبت میرایی صفر باشد ($\xi=0$)، آنگاه $\beta_{Peak}=1$. این



شکل ۴–۳ نمودار ضریب بزرگنمایی بار هارمونیک

حالت خیلی مهم، تشدید یا رزونانس (Resonance) نامیده می شود. در حالت تشدید ضریب دینامیکی و در نتیجه پاسخ دینامیکی ماکزیمم خواهد شد.

با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (۴–۲۵)، ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی بدست می آید:

$$D_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (۴–۲۷)$$

برای نسبت های میرایی سازه ها می توان نوشت:

$$D_{max}\approx\frac{1}{2\xi} \qquad (۴–۲۸)$$

این رابطه به این مفهوم است که مثلاً اگرنسبت میرایی سازه ۰/۰۵ باشد، پاسخ دینامیکی نسبت به پاسخ استاتیکی ۱۰ برابر خواهد شد.

حال تغییر فرم سیستم را وقتی که $\beta=1$ باشد بررسی می کنیم. در این حالت پاسخ سیستم از رابطهٔ (۴–۱۸) بدست می آید که عبارت است از:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)-\frac{p_0/k}{2\xi}\cos\bar{\omega}t \qquad (۴–۲۹)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه سکون ضرایب A و B به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$A=\frac{P_0}{k}\frac{\omega}{2\omega_D}=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \quad , \quad B=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\xi} \qquad (۳۰-۴)$$

در نتیجه پاسخ سیستم عبارت است از:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left((\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})\sin\omega_D t+\cos\omega_D t\right)-\cos\bar{\omega}t\right] \qquad (۳۱-۴)$$

با توجه به اینکه مقدار ξ کوچک است، ضریب جمله $\sin\omega_D t$ در مقابل ضریب ۱ در عبارت درون پرانتز رابطهٔ ۴-۳۱ کوچک می شود و می توان از آن صرف نظر نمود. همچنین $\omega_D \approx \omega$ در نتیجه :

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\times\frac{1}{2\xi}\cos\omega t(e^{-\xi\omega t}-1) \qquad (۳۲-۴)$$

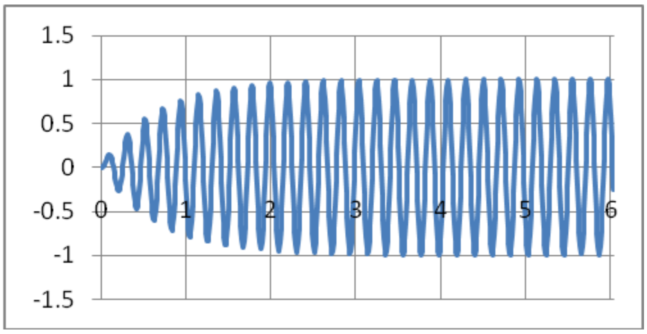
همچنین نسبت پاسخ به صورت زیر بدست می آید:

$$R(t)=\frac{u(t)}{P_0/k}=\frac{1}{2\xi}\cos\omega t(e^{-\xi\omega t}-1) \qquad (۳۳-۴)$$

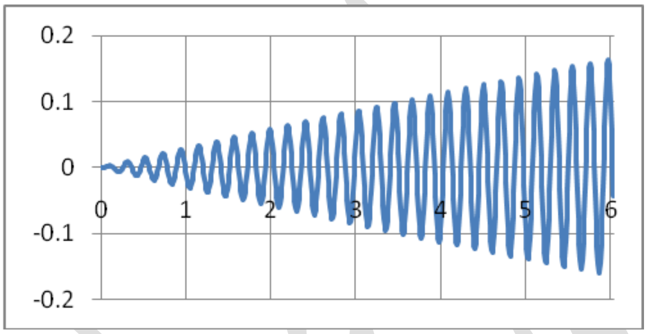
اگر $\xi=0$ باشد آنگاه $R(t)$ بصورت مبهم خواهد بود. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می شود که پس از این کار نسبت پاسخ به صورت زیر در می آید.

$$R(t)=\frac{1}{2}\times(-\omega t\cos\omega t) \qquad (۳۴-۴)$$

نمودار پاسخ سیستم در حالتی که نسبت فرکانس ۱/۰ باشد ($\beta=1$)، در دوحالت سیستم نامیرا و سیستم میرا در شکل ۴-۴ ترسیم شده است. ملاحظه می شود که در حالت نامیرا، پاسخ سیستم به طور نامحدودی افزایش می یابد. در حالت میرا پاسخ سیستم افزایش می یابد ولی میزان افزایش محدود است و حد آن $1/(2\xi)$ می باشد.



(الف) سیستم میرا $\xi=0.05$



(ب) سیستم نامیرا

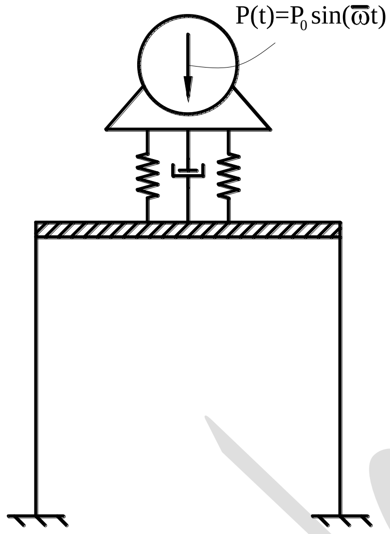
شکل ۴-۴ پاسخ سیستم در حالت تشدید

٤-٧ جدا سازی ارتعاش (Vibration Isolation)

بحث جداسازی ارتعاش بحث بسیار گسترده است و اگر بخواهد بطور مفصل مورد بررسی قرار گیرد خود میتواند موضوع یک کتاب باشد. در اینجا این بحث بطور خیلی ساده و خلاصه مطرح می شود. جدا سازی ارتعاش به دو صورت می تواند مطرح شود. یکی جلوگیری از انتقال ارتعاش ماشین آلات به سازه و دیگری جلوگیری از انتقال ارتعاش زمین به سازه. این دوحالت در ادامه مورد بحث قرار می گیرند.

الف- جداسازی ارتعاش ماشین آلات از سازه

فرض کنید یک ماشین مکانیکی به سازه متصل شده باشد که در مواقعی که کار می کند نیروی هارمونیکی به میزان $P(t)=P_0\sin\bar{\omega}t$ تولید می کند(شکل ۴-۵). می خواهیم نیرویی که به سازه منتقل می شود را حساب کنیم.



شکل ۴-۵ ماشین مکانیکی متصل به سازه

معادلهٔ حرکت این سیستم همان معادلهٔ (۴-۴) است، بنابراین تغییر مکان سیستم از رابطهٔ (۴-۱۶) بدست می آید که می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t+\theta) \qquad (۴\text{-}۳۵)$$

سرعت سیستم با مشتق گیری از این رابطه بدست می آید:

$$\dot{u}(t)=\frac{P_0}{k}D\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t+\theta) \qquad (۴\text{-}۳۶)$$

نیرویی که به سازه منتقل می شود، همانطوریکه از روی شکل مشخص است برابر است با جمع نیروی فنر و نیروی میرایی.

$$f(t)=f_S(t)+f_D(t) \qquad (۴\text{-}۳۷)$$

نیروی فنر و میرایی از روابط زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} f_S&=ku=P_0D\sin(\bar{\omega}t+\theta) \\ f_D&=c\dot{u}=c\frac{P_0}{k}D\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t+\theta) \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۳۸)$$

که نیروی میرایی با استفاده از تعاریف : $c=2m\omega\xi$ و $k=m\omega^2$ و $\beta=\bar{\omega}/\omega$ به صورت زیر در می آید:

$$f_D=c\dot{u}=P_0\left(2\xi\beta\right)D\cos(\bar{\omega}t+\theta) \qquad (۴\text{-}۳۹)$$

در نتیجه نیروی منتقل شده به سازه عبارت است از:

$$f(t)=P_0D\sin(\bar{\omega}t+\theta)+P_0\left(2\xi\beta\right)D\cos(\bar{\omega}t+\theta) \qquad (۴\text{-}۴۰)$$

این نیرو را به صورت زیر نیز می توان نمایش داد:

$$f(t)=P_0D\sqrt{1+\left(2\xi\beta\right)^2}\sin(\bar{\omega}t+\theta') \qquad (۴\text{-}۴۱)$$

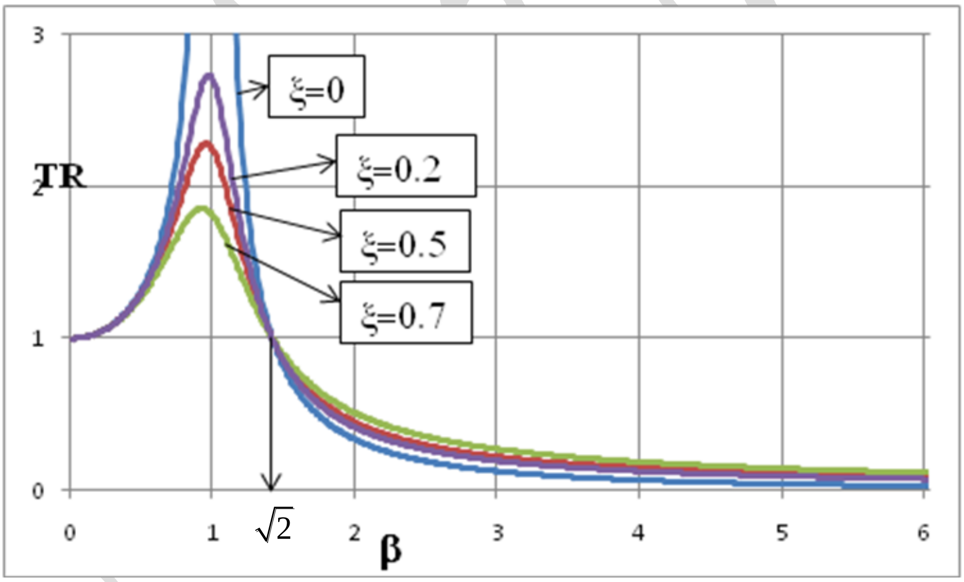
بنابراین حداکثر نیروی وارد بر سازه برابر است با:

$$f_{max}=P_0D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \qquad (۴-۴۲)$$

ملاحظه می شود که حداکثر نیرویی که ماشین مکانیکی تولید می کند P_0 است ولی حداکثر نیرویی که به سازه وارد می شود $f_{max}=P_0D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$ است. به نسبت این دو نیرو ضریب انتقال گفته شده و با TR نشان داده می شود.

$$TR=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \qquad (۴-۴۳)$$

در واقع ضریب انتقال نشان می دهد که چه مقدار از نیروی تولید شده به سازه منتقل می شود. ضریب انتقال تابعی از نسبت میرایی و نسبت فرکانس است. نمودار ضریب انتقال برای نسبت میرایی های مختلف بر حسب نسبت فرکانس در شکل ۴-۶ ترسیم شده است. چنانچه در این شکل دیده می شود همهٔ نمودارها از $\sqrt{2}$ می گذرند. به عبارت دیگر اگر



شکل ۴-۶ نمودار ضریب انتقال

نسبت فرکانس برابر $\sqrt{2}$ باشد، برای کلیهٔ میرایی ها، ضریب انتقال ۱/۰ می شود. بدیهی است اگر بخواهیم نیروی کمتری نسبت به آنچه که ماشین تولید می کند به سازه وارد شود، باید ضریب انتقال کوچکتر از ۱/۰ شود، بنابراین با توجه به شکل ۴-۶ باید نسبت فرکانس بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد. در این حالت ملاحظه می شود که با افزایش میرایی، ضریب انتقال افزایش می یابد. بنابراین می توان گفت که کمترین ضریب انتقال وقتی بدست می آید که نسبت فرکانس تا حد امکان بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد و نسبت میرایی نیز کوچک انتخاب شود.

ضریب مهم دیگری که می توان تعریف نمود، کارایی سیستم است که با E نشان داده می شود.

$$E=1-TR \tag{۴-۴۴}$$

اگر ضریب انتقال صفر باشد، یعنی هیچ نیرویی به سازه منتقل نشود، آنگاه کارایی سیستم ۱۰۰٪ است ولی اگر ضریب انتقال ۱/۰ باشد، یعنی تمام نیروی تولید شده به سازه منتقل شده و کارایی سیستم صفر است. بدیهی است که هیچ سیستمی را نمی توان طراحی نمود که کارایی آن ۱۰۰٪ باشد.

ب- جداسازی ارتعاش زمین از سازه

حالت مهم دیگری که وجود دارد، جداسازی ارتعاش زمین از سازه است(شکل ۴-۷). در این حالت فرض می کنیم تغییرمکان زمین یک تابع هارمونیک به صورت زیر است:

$$u_g(t)=u_{g0}\sin(\bar{\omega}t) \tag{۴-۴۵}$$

که در آن u_{g0} حداکثر تغییرمکان زمین و $\bar{\omega}$ فرکانس حرکت زمین است. معادلهٔ تعادل سازه عبارت است از:

$$f_I(t)+f_D(t)+f_s(t)=0 \tag{۴-۴۶}$$

نیروهای اینرسی، میرایی و فنری به صورت زیر هستند:

$$f_I(t)=m\ddot{u}^t \quad , \quad f_D(t)=c(\dot{u}^t-\dot{u}_g) \quad , \quad f_s(t)=k(u^t-u_g) \tag{۴-۴۷}$$

که در آن u^t تغییرمکان کل سازه است. بنابراین:

$$m\ddot{u}^t+c(\dot{u}^t-\dot{u}_g)+k(u^t-u_g)=0 \tag{۴-۴۸}$$

و یا:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=c\dot{u}_g+ku_g \tag{۴-۴۹}$$

با توجه به رابطهٔ (۴-۴۵) و رابطهٔ $\dot{u}_g(t)=u_{g0}\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t)$ ، رابطهٔ فوق به صورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=cu_{g0}\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t)+ku_{g0}\sin(\bar{\omega}t) \tag{۴-۵۰}$$

که به صورت زیر نیز می تواند نوشته شود:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\bar{\omega}^2}\,\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۵۱}$$

اگر فرض کنیم که

$$P_0=u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\bar{\omega}^2} \tag{۴-۵۲}$$

آنگاه معادلهٔ (۴-۵۱) شبیه به معادلهٔ (۴-۳) خواهد شد. بنابراین پاسخ دائمی آن به صورت زیر خواهد شد:

$$u^t(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۵۳}$$

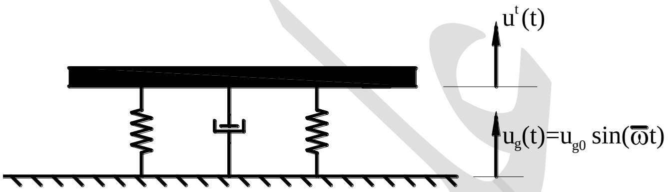
بنابراین حداکثر تغییرمکان سازه برابر است با:

$$u_{max}=\frac{u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\bar{\omega}^2}}{k}D \tag{۴-۵۴}$$

که با کمی ساده سازی به صورت زیر در می آید:

$$u^t_{max}=u_{g0}\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \qquad (۵۵-۴)$$

در این حالت نسبت حداکثر تغییر مکان سازه به حداکثر تغییرمکان زمین همان ضریب انتقال(رابطهٔ ۴-۴۳) خواهد شد و دقیقاً همان بحث هایی که در رابطه با جداسازی ارتعاش ماشین آلات از سازه مطرح شد در این مورد نیز صادق است.



شکل ۴-۷ جداسازی ارتعاش زمین از سازه

مثال – موتور دواری به جرم 10000 kg روی فونداسیونی قرار گرفته است. این موتور یک نیروی هارمونیک با دامنه 2000 N و فرکانس 3000 rpm ایجاد می کند. برای اینکه نیروی انتقال یافته از موتور به فونداسیون محدود شود یک بلوک از جنس لاستیک در حد فاصل موتور و فونداسیون قرار داده شده است. لازم است حداکثر نیرویی که به فونداسیون وارد می شود به 400 N محدود شود. با فرض اینکه نسبت میرایی بلوک لاستیکی ۲۰٪ باشد، سختی لازم برای آن را بدست آورید.

حل –

$$TR=\frac{F_{max}}{P_0}=\frac{400}{2000}=0.2$$

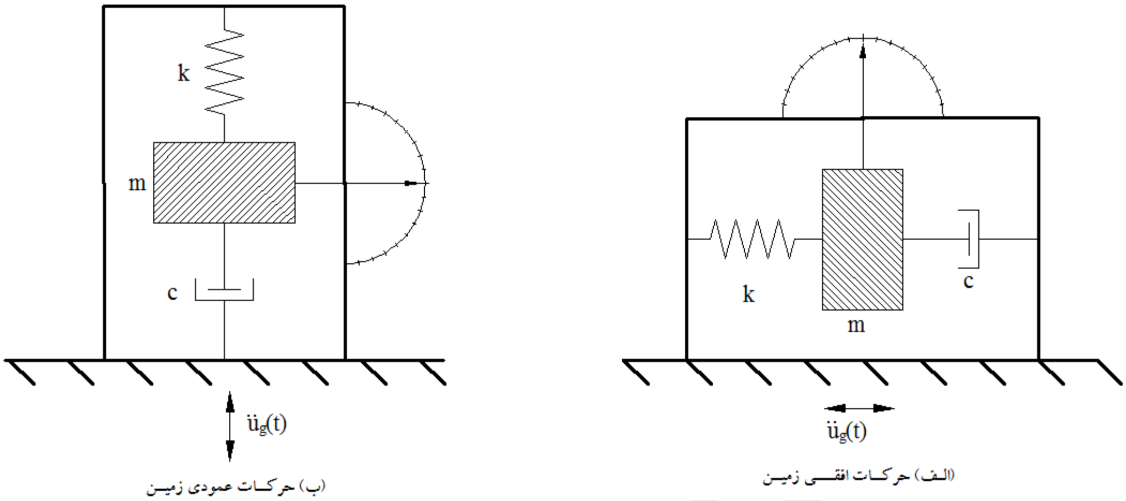
$$TR=\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \;\Rightarrow\; 0.2=\sqrt{\frac{1+0.16\beta^2}{(1-\beta^2)^2+0.16\beta^2}} \;\Rightarrow\; \beta=2.93$$

$$\bar{f}=3000\,\frac{\text{cycles}}{\text{min}}=50\,\text{Hz} \;\Rightarrow\; \bar{\omega}=2\pi\bar{f}=314.16\,\text{rad/sec} \;\Rightarrow\; \omega=\frac{\bar{\omega}}{\beta}=107.22\ \text{rad/sec}$$

$$k=m\omega^2=10000\times107.22^2=115\times10^6\ \text{N/m}=1150\,\text{KN/cm}$$

٤-٧ شتاب سنج (Accelerometer) و تغییرمکان سنج (Displacement meter)

در این قسمت اصول دستگاههای اندازه گیری زلزله توضیح داده می شود. شکل شماتیک یک دستگاه لرزه نگار در شکل (۴-۸) نشان داده شده است.



شکل ۴-۸ شکل شماتیک دستگاه اندازه گیری زلزله

معادلهٔ حرکت این سیستم با فرض اینکه شتاب زلزله به صورت سینوسی فرض می شود، برابر است با:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g0}\sin(\overline{\omega}_g t) \qquad (۴-۵۶)$$

در این رابطه، $\ddot{u}_{g0}$ حداکثر شتاب زمین و $\overline{\omega}_g$ فرکانس زمین است. در نتیجه دامنهٔ حرکت زمین برابر است با:

$$\rho = D\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k} \qquad (۴-۵۷)$$

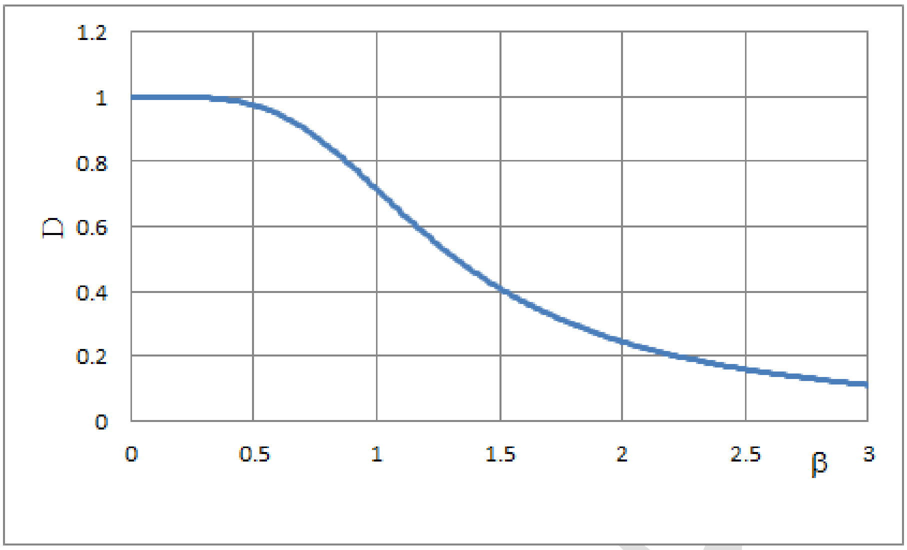
D ضریب بزرگنمایی دینامیکی است که در رابطهٔ (۴-۲۵) داده شده است. نمودار D بر حسب β برای ξ=0.7 در شکل (۴-۹) نشان داده شده است. ملاحظه می شود که برای $\beta<0.5$ مقدار D ثابت و برابر با ۱/۰ است. بنابراین با توجه به رابطهٔ (۴-۵۷) می توان گفت که اگر $\beta<0.5$ باشد، دامنهٔ حرکت دستگاه با دامنهٔ شتاب زمین رابطهٔ مستقیم دارد. پس کافیست میرایی دستگاه ۰/۷ باشد. این دستگاهها، شتاب سنج نامیده می شوند.

حال همان دستگاه را در نظر می گیریم ولی فرض کنید حرکت زمین به صورت زیر باشد:

$$u_g(t) = u_{g0}\sin(\overline{\omega}_g t) \qquad (۴-۵۸)$$

که در آن u_{g0} حداکثر تغییرمکان زمین است. بنابراین شتاب زمین عبارتست از:

$$\ddot{u}_g(t) = -u_{g0}\overline{\omega}_g^2\sin(\overline{\omega}t) \qquad (۴-۵۹)$$

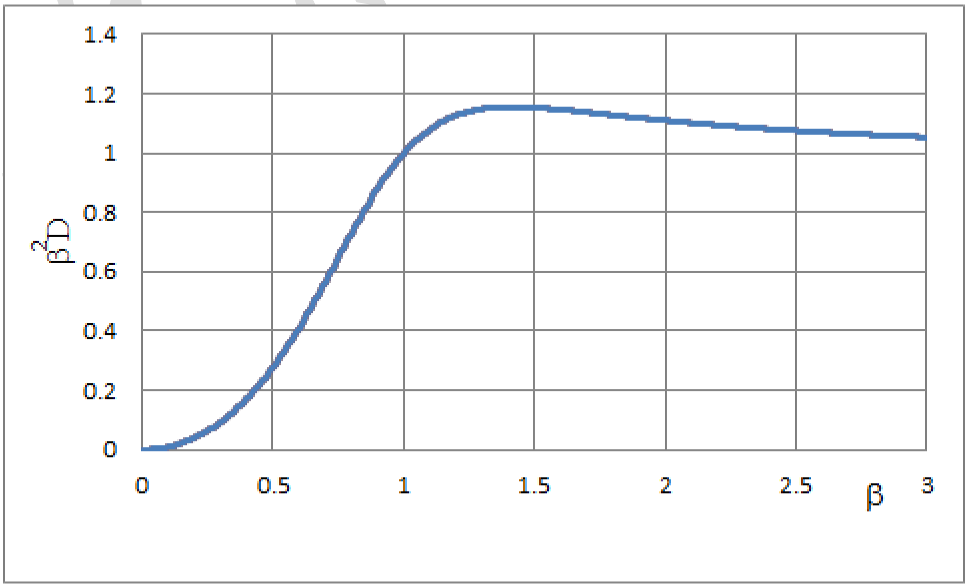


شکل ۴-۹ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای ξ=0.7

بنابراین دامنهٔ حرکات دستگاه به صورت زیر است:

$$\rho = D\frac{m u_{g0}\overline{\omega}^2}{k} = D\beta^2 u_{g0} \qquad (۴-۶۰)$$

در شکل ۴-۱۰ نمودار $\beta^2 D$ بر حسب β برای ξ=0.5 ترسیم شده است. در این حالت برای β>1.0 مقدار D تقریباً ثابت و برابر با ۱/۰ است. بنابراین با توجه به رابطهٔ (۴-۵۷) می توان گفت که اگر β>1.0 باشد، دامنهٔ حرکت دستگاه با دامنهٔ تغییرمکان زمین رابطهٔ مستقیم دارد. پس کافیست میرایی دستگاه ۰/۵ باشد. این دستگاهها، تغییرمکان سنج نامیده می شوند.



شکل ۴-۱۰ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای ξ=0.5

مسائل

۱- پاسخ سیستم یکدرجه آزاد میرا با شرایط اولیه سکون تحت اثر نیروی کسینوسی مطابق رابطهٔ زیر بدست آورید.

$$P(t)=P_0\cos(\overline{\omega}t)$$

جواب :
$$u_h=e^{-\xi\omega t}\left[A\sin(\omega_D t)+B\cos(\omega_D t)\right]+\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(2\xi\beta)\sin(\overline{\omega}t)+(1-\beta^2)\cos(\overline{\omega}t)\right]$$

که در آن :

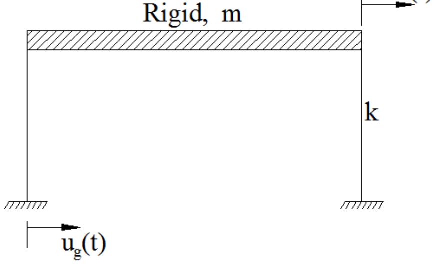
$$A=\frac{-P_0}{k}\times\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]}\times\left[1+2\beta^2-\beta^2\right]$$

$$B=\frac{-P_0}{k}\times\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

۲- پاسخ سیستم یکدرجه آزاد میرا با شرایط اولیه سکون را تحت اثر نیروی زیر بدست آورید.

$$P(t)=P_0\sin(\overline{\omega}t+\theta)$$

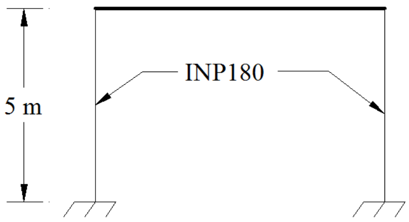
۳- سازه نشان داده شده تحت اثر تغییر مکان زمین قرار گرفته است. اگر تغییر مکان زمین را بتوان با رابطه $u_g(t)=u_{g0}\sin(\omega_g t)$ بیان کرد که در آن u_{g0} تغییرمکان حداکثر زمین و ω_g فرکانس زمین است و مقادیر ثابتی می باشند، حداکثر تغییرمکان و شتاب سقف و نیروی برش پایه را بدست آورید. سازه را نامیرا درنظر گرفته و فقط تغییرمکان دائمی را منظور کنید.



جواب :
$$u_{max}=u_{g0}\frac{\omega_g^2}{\omega^2-\omega_g^2}$$

۴- سیستم یکدرجه آزاد نشان داده شده تحت اثر تغییرمکان زمین به میزان $u_g(t)=u_{g0}\sin(\omega_g t)$ قرار گرفته است.

اطلاعات مسئله به صورت زیر است.



وزن سیستم $W=6\times10^4\ \mathrm{N}$

ضریب الاستیسیته $E=2.1\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$

ممان اینرسی ستون ها $I=1450\ \mathrm{cm^4}$

حداکثرتغییر مکان زمین $u_{g0}=6\,\mathrm{cm}$

فرکانس تغییرمکان زمین $\omega_g=4\,\mathrm{rad/sec}$

حداکثر تنش بوجود آمده در ستون ها را حساب کنید.

جواب : 54 Mpa

۵- یک سیستم یکدرجه آزاد نامیرا تحت اثر بار هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta=1$ قرار گرفته است. نسبت پاسخ های پایدار و گذرا و کل این سیستم را بطور جداگانه و زیر هم رسم کنید.

۶- یک سیستم یکدرجه آزاد با جرم 350 ton و سختی 4000 KN/m در حال سکون قرار دارد. سپس به آن نیروی هارمونیک با فرکانس تشدید ($\omega=\overline{\omega}$) وارد می شود. نسبت پاسخ ($R(t)$) را در سه حالت زیر رسم کنید.

الف) سیستم نامیرا c = 0

ب) سیستم میرا با c = 90 KN-Sec/m

پ) سیستم میرا با c = 350 KN-Sec/m

۷- یک سیستم یکدرجه آزاد با جرم m=875 ton و سختی K=875 KN/m، در لحظهٔ صفر دارای تغییرمکان صفر می باشد و پس از ۱/۴۷۷ ثانیه نیز مجدداً دارای تغییرمکان صفر است. نسبت میرایی سیستم را بدست آورید.

جواب: ξ=10%

۸- یک سیستم یکدرجه آزاد تحت اثر بار هارمونیک قرار گرفته است. دامنهٔ ارتعاش در حالت تشدید ۲۵ میلیمتر و در فرکانسی برابر با ۷۵ درصد فرکانس تشدید برابر ۱۰ میلیمتر است. نسبت میرایی آن چقدر است؟

جواب: 9.17%

۹- دامنهٔ ارتعاش یک سیستم یکدرجه آزاد پس از ۶ سیکل ارتعاش ۵۰ ٪ کاهش می یابد. نسبت میرایی آن چقدر است؟

جواب: 1.8%

۱۰- یک سیستم یکدرجه آزاد دارای جرم ۵ تن، سختی ۲۵۰۰ کیلونیوتن بر متر و نسبت میرایی ۵٪ می باشد. این سیستم تحت اثر نیروی $P(t)=30\sin(\overline{\omega}t)$ تغییر مکان حداکثر ۲/۴ سانتی متر دارد. فرکانس بارگذاری را بدست آورید.

جواب: 27.26 rad/sec , 15.90 rad/sec

۱۱- یک سیستم یک درجه آزاد در دو مرحله تحت اثر بار هارمونیک قرار گرفته است. در مرحلهٔ اول فرکانس بارگذاری و فرکانس سیستم با هم برابر هستند. در این مرحله حداکثر تغییرمکان سیستم ۵/۰ سانتیمتر می باشد. در مرحلهٔ دوم فرکانس بارگذاری ۵ برابر فرکانس سیستم است. در این مرحله حداکثر تغییرمکان سیستم ۰/۰۲ سانتیمتر می باشد. نسبت میرایی سیستم چقدر است؟

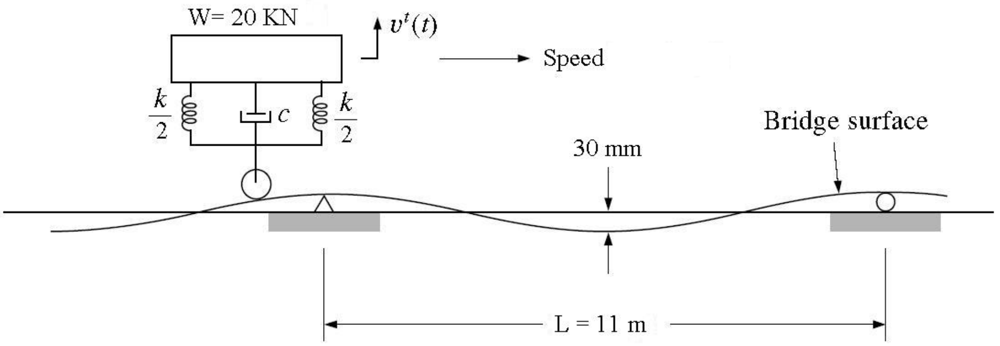
جواب : ۴/۸ درصد

۱۲- اتومبیلی را می توان با یک سیستم یکدرجه آزاد با وزن 20 KN ، سختی 225 KN/m و نسبت میرایی 40% مطابق شکل مدلسازی نمود. همچنین تغییرفرم پل را می توان به صورت موج سینوسی مطابق شکل در نظر گرفت. مطلوب است :

(الف) دامنه کل حرکت اتومبیل (u^t_{max}) در سرعت 72 km/hr

(ب) سرعتی که باعث بوجود آمدن تشدید در سیستم شود.

(پ) دامنه کل حرکت اتومبیل (u^t_{max}) در تشدید



جواب : (الف) 45 mm (ب) 59.67 Km/hr (پ) 49.65 mm

۱۳- یک ماشین به وزن 900 N روی چهار فنر با سختی کل 700 N/mm قرار گرفته است. خروج از محوری جرم ماشین سبب تولید نیرویی با دامنهٔ 36000 N و سرعت زاویه ای 3000 RPM می شود. تخمین زده می شود که نسبت میرایی ۲۰ درصد باشد.مطلوبست:

(الف) دامنهٔ حرکت

(ب) ضریب انتقال

(پ) نیروی انتقال یافته

جواب: (الف) ۴/۲۸ میلیمتر (ب) ۱۴/۵۷درصد (پ) ۲۹۹۵ نیوتن

۱۴- یک دستگاه به وزن 500 N روی یک سیستم جداساز ارتعاش با سختی 16 N/mm و میرایی 10% قرار گرفته است. این دستگاه و سیستم جداساز روی یک میز قرار گرفته اند که با شتاب 0.1g و فرکانس 10 Hz ارتعاش می کند.

الف- چه شتابی به دستگاه منتقل می شود.

ب – برای کاهش شتاب منتقل شده به دستگاه، وزن سیستم جداساز افزایش داده می شود. میزان افزایش وزن چقدر باشد تا حداکثر شتاب دستگاه 0.005g شود.

جواب : (الف) 0.01076g (ب) 94.14 kg

- یک دستگاه آزمایش حساس روی کف آزمایشگاهی قرار است نصب شود. کف آزمایشگاه ارتعاشی به صورت قائم با دامنه ۰/۷۶ میلیمتر و فرکانس ۲۰ هرتز دارد. اگر جرم دستگاه ۳۶۰ کیلوگرم باشد، سختی سیستم تکیه گاهی دستگاه را طوری تعیین کنید که دامنه ارتعاش دستگاه آزمایش به ۰/۱۲۷ میلیمتر محدود شود.

- یک دستگاه الک به وزن ۳۰ کیلونیوتن به تکیه گاه خود نیروی هارمونیک با دامنه ۳۲۰ کیلونیوتن و فرکانس ۱۲ هرتز وارد می کند. پس از اینکه این دستگاه روی سیستم جداساز قرار می گیرد دامنه نیروی هارمونیک به ۲۲۵ کیلونیوتن کاهش می یابد. سختی سیستم جداساز را حساب کنید.

علیرضا فیوض

فصل ۵

بارهای متناوب

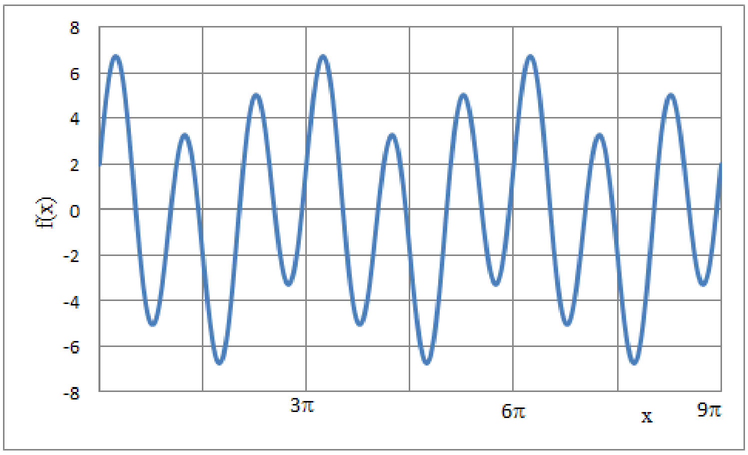
۵-۱ مقدمه

در این فصل پاسخ سیستم های یکدرجه آزاد در برابر بارهای متناوب توضیح داده می شود. قبل از وارد شدن به بحث، مقدمه ای راجع به توابع متناوب بیان می شود.

توابع متناوب توابعی هستند که شکل آنها در دوره های زمانی خاصی که دوره تناوب نامیده می شود، ثابت می ماند. بنابراین در رابطهٔ زیر صدق می کنند:

$$f(x+nT)=f(x) \quad , \quad n=1,2,\cdots,\infty \tag{۵-۱}$$

در این رابطه T دورهٔ تناوب نامیده می شود. نمونه ای از این توابع در شکل (۵-۱) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود شکل تابع از صفر تا 3π مثل شکل تابع از 3π تا 6π و از 6π تا 9π است. بنابراین دورهٔ تناوب این تابع 3π است.



شکل ۵-۱ مثالی از توابع متناوب

۵-۲ سری فوریه (Fourier series)

در پیوست ۱ این فصل نشان داده شده است که اگر تابع $f(x)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب T_p باشد، می توان آن را به صورت مجموعه ای از توابع هارمونیک به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\overline{\omega}_n x)+b_n\sin(\overline{\omega}_n x)\right] \tag{۵-۲}$$

که در آن

$$\overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_p} \tag{۵-۳}$$

و ضرایب a_0 , a_n , b_n به صورت زیر تعریف می شوند.

$$a_0 = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)\cos(\overline{\omega}_n x)dx \qquad (۵-۴)$$
$$b_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)\sin(\overline{\omega}_n x)dx$$

رابطهٔ (۵-۲) را سری فوریه می نامند. توجه شود که رابطهٔ (۵-۲) وقتی دقیقاً برقرار می شود که تعداد جملات سری بی نهایت شود، لیکن چون عملاً تعداد جملاتی که استفاده می شود محدود است، رابطهٔ (۵-۲) تقریبی خواهد شد. بدیهی است هر چه تعداد جملات بیشتر شود، جواب سری فوریه به جواب دقیق نزدیکتر خواهد شد.

واضح است که رابطهٔ (۵-۲) را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n \sin(\overline{\omega}_n x + \theta_n) \qquad (۵-۵)$$

ملاحظه می شود که توابع متناوب برابرند با مجموع یک مقدار ثابت (که در واقع میانگین تابع در یک دوره تناوب است) و تعدادی توابع هارمونیک با دامنهٔ ρ_n ، فرکانس $\overline{\omega}_n$ و زاویهٔ فاز θ_n. دامنه و زاویهٔ فاز از روابط زیر بدست می آیند:

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \qquad (۵-۶)$$

لازم به ذکر است که نمودار دامنهٔ ρ_n بر حسب $\overline{\omega}_n$ طیف دامنهٔ فوریه و نمودار زاویهٔ فاز θ_n بر حسب $\overline{\omega}_n$ طیف زاویهٔ فاز فوریه نامیده می شود.

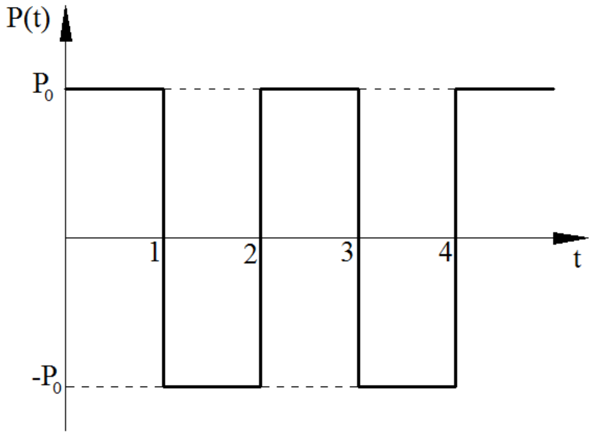
استفاده از موارد زیر می تواند محاسبهٔ ضرایب فوریه را تسریع کند.

اگر تابع متناوب زوج باشد، یعنی $f(-x)=f(x)$ آنگاه $b_n = 0$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$

اگر تابع متناوب فرد باشد، یعنی $f(-x)=-f(x)$ آنگاه $b_n \neq 0$, $a_n = 0$, $a_0 = 0$

در مثال زیر مورد استفاده سری فوریه نشان داده شده است.

مثال : تابع زیر را به صورت سری فوریه نشان داده و نمودار طیف دامنهٔ فوریهٔ آن را رسم کنید.



حل:

چنانچه ملاحظه می شود دورهٔ تناوب این تابع ۲ است. این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(t)=\begin{cases} P_0 & 0<t<1 \\ -P_0 & 1<t<2 \end{cases}$$

همچنین $\overline{\omega}_n$ برابر است با:

$$\overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_p}=n\pi$$

بنابراین ضرایب سری فوریه برابرند با:

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 P_0 dt+\int_1^2(-P_0)dt\right]=0$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\cos(\overline{\omega}_n t)dt=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 P_0\cos(n\pi\, t)dt-\int_1^2 P_0\cos(n\pi\, t)dt\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\sin(\overline{\omega}_n t)dt=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 P_0\sin(n\pi\, t)dt-\int_1^2 P_0\sin(n\pi\, t)dt\right]=\frac{2P_0}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]=\begin{cases}\dfrac{4P_0}{n\pi} & n=1,3,5,... \\ 0 & n=2,4,6,...\end{cases}$$

البته چون $P(t)$ تابع فرد است، می شد پیش بینی کرد که $a_0=0\ ,\ a_n=0$

در نتیجه $P(t)$ به صورت زیر در می آید:

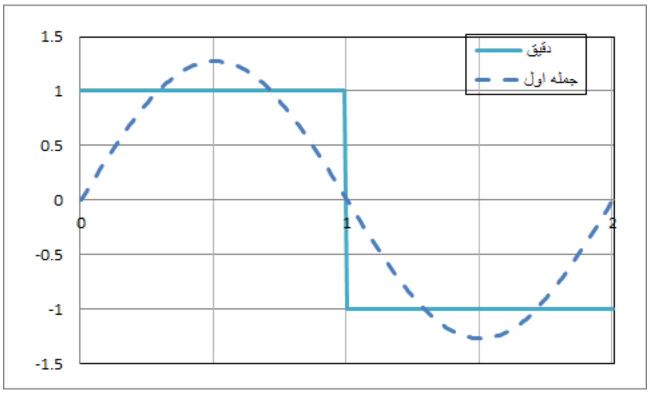
$$P(t)=\sum_{n=1,3,5,..}^{\infty}\left[\frac{4P_0}{n\pi}\sin(n\,\pi\, t)\right]$$

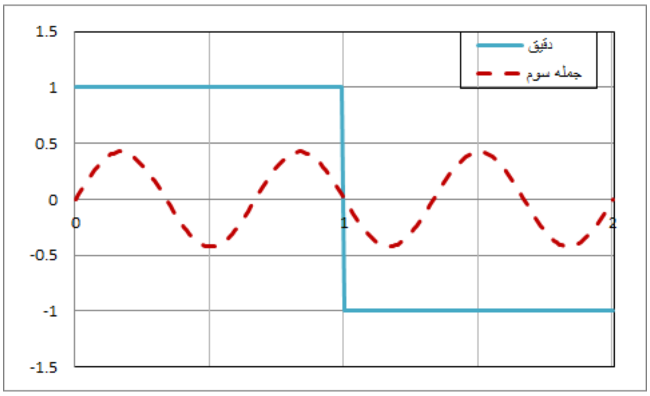
این رابطه به صورت گسترده عبارت است از:

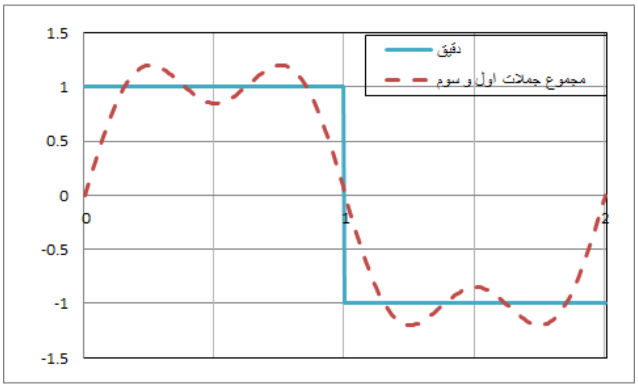
$$P(t)=P_0\left[\frac{4}{\pi}\sin(\pi t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\pi\, t)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\pi\, t)+...\right]$$

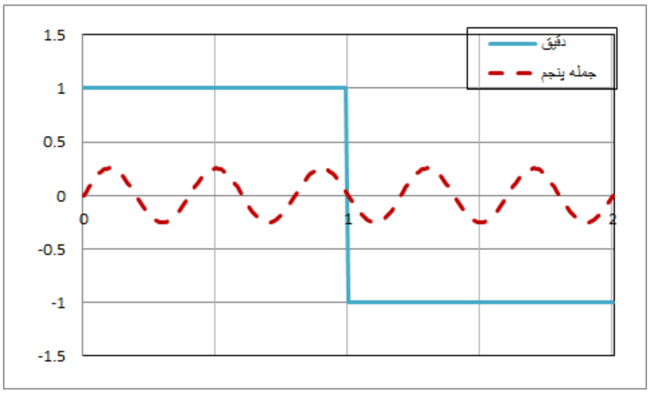
نمودار $P(t)$ در شکل زیر نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه میشود با افزایش تعداد جملات، سری به سمت جواب دقیق میل می کند. همچنین در این شکل دامنهٔ طیف فوریه نیز نشان داده شده است. دو نکته نیز در رابطه با دامنهٔ طیف

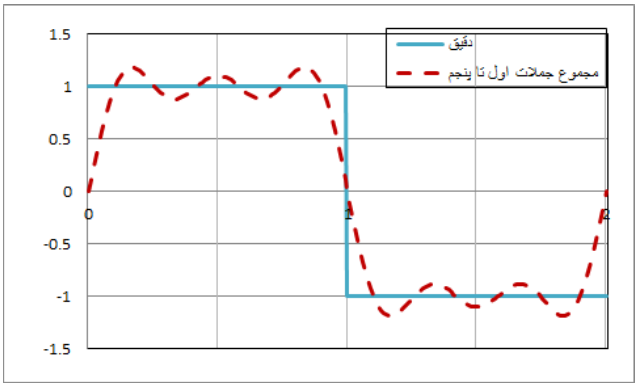
فوریه وجود دارد. اول اینکه با افزایش شمارهٔ موج دامنهٔ طیف فوریه کاهش می یابد. دوم اینکه طیف سری فوریه به صورت گسسته است. این نکته بدلیل این است که در سری فوریه، زمان تناوب تابع متناوب محدود است.

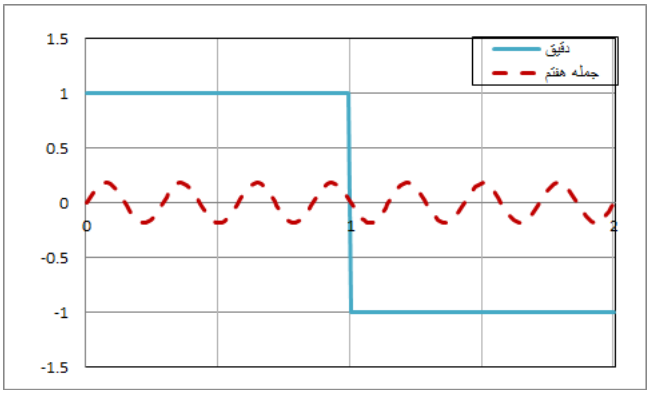

دقیق
جمله اول

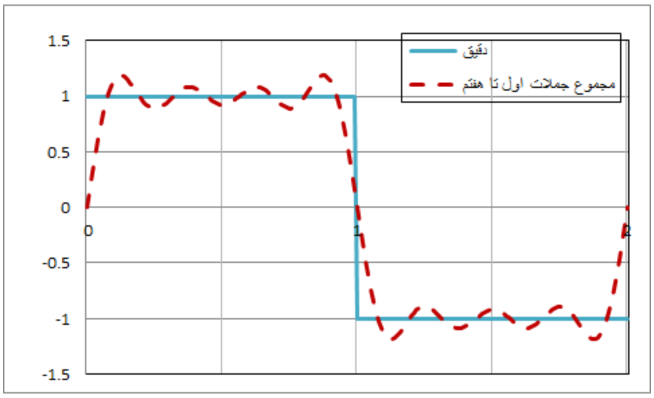

دقیق
جمله سوم

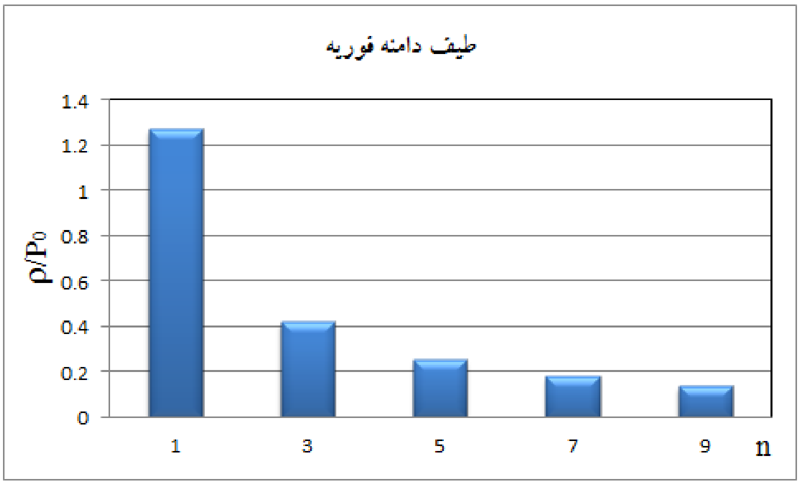

دقیق
مجموع جملات اول و سوم


دقیق
جمله پنجم


دقیق
مجموع جملات اول تا پنجم


دقیق
جمله هفتم


دقیق
مجموع جملات اول تا هفتم



۵-۳ پاسخ به بارگذاری سری فوریه

بر اساس رابطهٔ (۵-۲) هر نیرویی که بصورت متناوب باشد را می توان بر حسب مجموعه از نیروهای هارمونیک بیان نمود. به عبارت دیگر اگر نیروی وارد بر سیستم تناوبی باشد آنگاه معادلهٔ حرکت بصورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\overline{\omega}_n t) + b_n \sin(\overline{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۷)$$

چون رفتار سیستم را بصورت خطی فرض کرده ایم بنابراین اصل جمع آثار قوا برقرار است یعنی می توان معادلهٔ فوق را برای هر یک از جملات سمت راست بطور جداگانه حل نمود و سپس پاسخ ها را با یکدیگر جمع کرد.

ابتدا پاسخ سیستم در برابر جملهٔ a_0 بدست می آوریم. در این حالت چون مقدار نیرو ثابت است و به زمان بستگی ندارد پس پاسخ هم ثابت است و جملات $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ صفر خواهند شد و پاسخ سیستم در این حالت عبارت است از:

$$u(t)=\frac{a_0}{k} \qquad (۵-۸)$$

پاسخ سیستم در برابر جملهٔ $a_n \cos(\overline{\omega}_n t)$ برابر است با:

$$u(t)=\frac{a_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\cos(\overline{\omega}t)+(2\xi\beta)\sin(\overline{\omega}t)\right] \qquad (۵-۹)$$

پاسخ سیستم در برابر جملهٔ $b_n\sin(\overline{\omega}_n t)$ نیز بصورت زیر است :

$$u(t)=\frac{b_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin(\overline{\omega}t)-(2\xi\beta)\cos(\overline{\omega}t)\right] \qquad (۵-۱۰)$$

که در این روابط β_n برابر است با:

$$\beta_n=\frac{\overline{\omega}_n}{\omega} \qquad (۵-۱۱)$$

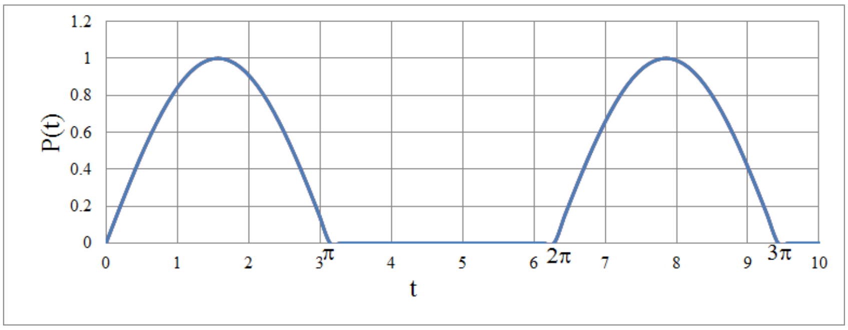
بنابراین جواب معادلهٔ (۵-۷) از جمع روابط (۵-۸)، (۵-۹) و (۵-۱۰) بدست می آیدکه عبارت است از:

$$u(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\right]\times\left(\frac{a_n}{k}\times\left[(1-\beta_n^2)\cos(\overline{\omega}_n t)+(2\xi\beta_n)\sin(\overline{\omega}_n t)\right]+\right.\right. \qquad (۵-۱۲)$$

$$\left.\left.\frac{b_n}{k}\times\left[(1-\beta_n^2)\sin(\overline{\omega}_n t)-(2\xi\beta_n)\cos(\overline{\omega}_n t)\right]\right)\right\}$$

مثال – معادله و نمودار یک نیروی دینامیکی به صورت زیر است:

$$P(t)=\begin{cases}\sin(t) & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t<2\pi\end{cases}$$



پاسخ یک سیستم دینامیکی نامیرا را در برابر این نیرو با تبدیل آن به سری فوریه بدست آورید.

حل-

در این مثال

$$T_p=2\pi \quad\Rightarrow\quad \overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_p}=n$$

ضرایب بسط سری فوریه از روابط زیر بدست می آیند:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt=\frac{-1}{2\pi}[\cos(t)]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

<u>if n = 1 :</u>

$$a_1=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)dt=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{2}\times\left[\sin^2(t)\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_1=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)dt=\frac{2}{2\pi}\times\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\underline{\text{if } n \neq 1:} \quad a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin((1+n)t)+\sin((1-n)t)\right]dt$$

$$a_n = \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos((1+n)t)}{1+n}+\frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos((1+n)\pi)}{1+n}+\frac{\cos((1-n)\pi)}{1-n}-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)}{1+n}+\frac{\cos(n\pi)}{1-n}+\frac{2}{1-n^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\cos(n\pi)}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}\right] = \frac{\cos(n\pi)+1}{\pi(1-n^2)}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos((n-1)t)-\cos((n+1)t)\right]dt$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n-1}\sin((n-1)t)-\frac{1}{n+1}\sin((n+1)t)\right]_0^{\pi} = 0$$

بنابراین نیروی وارد بر سیستم را به صورت زیر می توان نوشت:

$$P(t) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin(t)}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(2t)}{3}+\frac{\cos(4t)}{15}+\frac{\cos(6t)}{35}+\frac{\cos(8t)}{63}+\cdots\right]$$

تغییر فرم سیستم از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$ku(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\overline{\omega}_n t)+b_n\sin(\overline{\omega}_n t)\right]$$

$$ku(t) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{(1-\beta_1^2)}\times\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{1}{(1-\beta_2^2)}\frac{2}{(3\pi)}\cos(2t)-\frac{1}{(1-\beta_4^2)}\frac{2}{(15\pi)}\cos(4t)+\cdots$$

۵-۴ فرم نمایی سری فوریه

در بخش ۵-۲ نشان داده شد که هر تابع متناوب را می توان به مجموعه ای از توابع هارمونیک تبدیل نمود. همچنین در ریاضیات مهندسی نشان داده می شود که توابع متناوب را به صورت زیر نیز میتوان نمایش داد:

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i(\overline{\omega}_n t)} \qquad (۵-۱۳)$$

که c_n از رابطهٔ زیر محاسبه می شود:

$$c_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)e^{-i(\overline{\omega}_n t)}dt \qquad (۵-۱۴)$$

به عبارت دیگر برای یک تابع متناوب P(t) ابتدا باید از رابطهٔ (۵-۱۴) ضرایب c_n را بدست آورد و سپس با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۳) تابع را به صورت نمایی نشان داد. رابطهٔ (۵-۱۳) فرم نمایی سری فوریه نامیده می شود. در اصل روابط (۵-۱۳) و (۵-۱۴) همان روابط سری فوریه هستند که به شکل دیگری نوشته شده اند. برای نشان دادن اینکه روابط (۵-۲) و (۵-۴) با روابط (۵-۱۳) و (۵-۱۴) یکی هستند به صورت زیر عمل می کنیم.

رابطهٔ (۵-۱۳) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}e^{-i\bar{\omega}_n t}+c_n e^{i\bar{\omega}_n t}\right] \qquad (۵-۱۵)$$

که با استفاده از اتحاد اولر ($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$) رابطهٔ زیر حاصل می شود:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}\left(\cos(\bar{\omega}_n t)-i\sin(\bar{\omega}_n t)\right)+c_n\left(\cos(\bar{\omega}_n t)+i\sin(\bar{\omega}_n t)\right)\right] \qquad (۵-۱۶)$$

وبا دسته بندی آن، به رابطهٔ زیر می رسیم:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n+c_{-n})\cos(\bar{\omega}_n t)+(c_n-c_{-n})\sin(\bar{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۱۷)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۵-۱۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)e^{-i\bar{\omega}_n t}dt=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos\bar{\omega}_n t\,dt-\frac{i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin\bar{\omega}_n t\,dt\\
c_{-n}&=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)e^{+i\bar{\omega}_n t}dt=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos\bar{\omega}_n t\,dt+\frac{i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin\bar{\omega}_n t\,dt
\end{aligned} \qquad (۵-۱۸)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
c_n+c_{-n}&=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos(\bar{\omega}_n t)dt\\
c_n-c_{-n}&=\frac{-2i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin(\bar{\omega}_n t)dt
\end{aligned} \qquad (۵-۱۹)$$

حال تغییر متغیر های زیر را درنظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
a_0&=c_0\\
a_n&=c_n+c_{-n}\\
b_n&=-i(c_n-c_{-n})
\end{aligned} \qquad (۵-۲۰)$$

بنابراین معادلهٔ (۵-۱۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\bar{\omega}_n t)+b_n\sin(\bar{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۲۱)$$

که همان رابطهٔ (۵-۲) است. ضرایب a_n و b_n نیز با توجه به روابط (۵-۱۹) و (۵-۲۰) عبارتند از:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos(\overline{\omega}_n t)dt$$

$$b_n = -i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin(\overline{\omega}_n t)dt \tag{۲۲-۵}$$

که همان روابط (۵-۴) است.

به این ترتیب نشان داده شد که توابع متناوب را می توان به فرم نمایی (روابط ۵-۱۳ و ۵-۱۴) نیز نشان داد.

مثال – فرم نمایی سری فوریه را برای تابع زیر بدست آورید:

$$f(t) = e^{-t} \quad -1 < t < 1$$

حل –

برای این تابع داریم: $T_p = 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_n = n\pi$

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t}e^{-in\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)t}dt = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{1+in\pi}\times\left[e^{-(1+in\pi)t}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{-1}{1+in\pi}\times\left[e^{-(1+in\pi)} - e^{(1+in\pi)}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+in\pi}\times\left[e^{1}e^{in\pi} - e^{-1}e^{-in\pi}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\times\left[e^{1}\cos(n\pi) - e^{-1}\cos(n\pi)\right]$$

$$= \frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\times\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\times(-1)^n = \frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\times\sinh(1)\times(-1)^n$$

$$f(t) = \sinh(1)\times\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\times(-1)^n\times e^{in\pi t}\right]$$

۵-۵ پاسخ به فرم نمایی سری فوریه

در این قسمت پاسخ سازه در برابر بارهای متناوب، وقتی که این بار به فرم نمایی نوشته شود، بدست می آید. ابتدا پاسخ سازه در برابر یک تابع نمایی محاسبه می شود. یعنی معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t)=e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{۲۳-۵}$$

جواب این معادله دو قسمت همگن و مخصوص دارد. همانطور که در فصل ۴ دیده شد، جواب مخصوص که در دینامیک سازه ها، پاسخ ماندگار نامیده می شود، اهمیت بیشتری دارد و می توان از جواب همگن صرفنظر نمود. پاسخ ماندگار معادلهٔ فوق بصورت زیر است:

$$u(t)=He^{i\overline{\omega}_n t} \tag{۲۴-۵}$$

ضریب H از قرار دادن رابطهٔ (۵-۲۴) در رابطهٔ (۵-۲۳) بدست می آید. مشتقات رابطهٔ (۵-۲۴) برابرند با:

$$\dot{u}(t)=H(i\overline{\omega}_n)e^{i\overline{\omega}_n t} \quad , \quad \ddot{u}(t)=H(-\overline{\omega}_n^2)e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{۲۵-۵}$$

بنابراین معادلهٔ (۵-۲۳) به صورت زیر در می آید:

$$mH(-\bar{\omega}_n^2)e^{i\bar{\omega}_n t}+CH(i\bar{\omega}_n)e^{i\bar{\omega}_n t}+KHe^{i\bar{\omega}_n t}=e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (۵-۲۶)$$

چون $e^{i\bar{\omega}_n t} \neq 0$ ، پس این ضریب از طرفین رابطهٔ فوق حذف شده و H به صورت زیر بدست می آید:

$$H=\frac{1}{-m\bar{\omega}_n^2+Ci\bar{\omega}_n+K} \quad (۵-۲۷)$$

چنانچه دیده می شود، ضریب H تابعی از $\bar{\omega}_n$ است، به همین دلیل معمولاً به صورت $H(\bar{\omega}_n)$ نوشته شده و به آن تابع پاسخ فرکانسی (Frequency Response Function) گفته می شود. این تابع را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(\bar{\omega}_n)=\frac{1}{k[(2\xi\beta_n i)+(1-\beta_n^2)]} \quad (۵-۲۸)$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۵-۲۳) به صورت زیر می شود:

$$u(t)=\frac{1}{k[(2\xi\beta_n i)+(1-\beta_n^2)]}\times e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (۵-۲۹)$$

پس اگر نیروی وارد بر سیستم به صورت رابطهٔ (۵-۱۳) نوشته شده باشد، آنگاه پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد شد:

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(\bar{\omega}_n)e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (۵-۳۰)$$

پیوست ۱ : محاسبهٔ ضرایب سری فوریه

اگر m و n اعداد صحیح باشند می توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\int_0^{T_P} \cos\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx = 0 \qquad (۱-۱پ)$$

$$\int_0^{T_P} \sin\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx = 0 \qquad (۲-۱پ)$$

$$\int_0^{T_P} \sin\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)\sin\left(\frac{2m\pi}{T_P}x\right)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_P/2 & m = n \end{cases} \qquad (۳-۱پ)$$

$$\int_0^{T_P} \cos\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{T_P}x\right)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_P/2 & m = n \end{cases} \qquad (۴-۱پ)$$

$$\int_0^{T_P} \sin\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{T_P}x\right)dx = 0 \qquad (۵-۱پ)$$

لازم به ذکر است که رابطهٔ (پ۱-۵) عمود بودن توابع سینوس و کسینوس را نشان می دهد.

رابطهٔ سری فوریه یک بار دیگر در اینجا نوشته می شود:

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{2m\pi}{T_P}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi}{T_P}x\right)\right] \qquad (۶-۱پ)$$

از طرفین این رابطه انتگرال گرفته و از روابط (پ۱-۱) و (پ۱-۲) استفاده می کنیم. بنابراین:

$$\int_0^{T_P} f(x)dx = a_0 T_P \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)dx \qquad (۷-۱پ)$$

طرفین رابطهٔ (پ۱-۶) را در $\cos\left(\frac{2n\pi}{T_p}x\right)$ ضرب کرده و از رابطهٔ حاصل انتگرال می گیریم. با توجه به روابط (پ۱-۴) و (پ۱-۵) ، رابطهٔ زیر یدست می آید:

$$\int_0^{T_P} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx = a_n \times \frac{T_P}{2} \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx \qquad (۸-۱پ)$$

حال طرفین رابطهٔ (پ۱-۶) را در $\sin\left(\frac{2n\pi}{T_p}x\right)$ ضرب کرده و از رابطهٔ حاصل انتگرال می گیریم. با توجه به روابط (پ۱-۳) و (پ۱-۵) ، رابطهٔ زیر یدست می آید:

$$\int_0^{T_P} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx = b_n \times \frac{T_P}{2} \;\Rightarrow\; b_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T_P}x\right)dx \qquad (۹-۱پ)$$

پیوست ۲ – تبدیل فوریه

در بعضی از مسائل واقعی، توابع موجود متناوب نیستند. فرم نمایی سری فوریه را در نظر بگیرید:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\overline{\omega}_n t} \qquad \text{(پ۲-۱)}$$

که در آن

$$C_n=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} f(\tau)e^{-i\overline{\omega}_n \tau}d\tau \qquad \text{(پ۲-۲)}$$

T_p دورهٔ تناوب تابع متناوب می باشد که رابطهٔ آن با $\overline{\omega}_n$ به صورت زیر است:

$$\overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_p} \qquad \text{(پ۲-۳)}$$

در واقع بوسیلهٔ سری فوریه یک تابع متناوب به تعدادی موج هارمونیک گسسته با فرکانس های مجزا تبدیل می شود و $\overline{\omega}_n$ فرکانس موج هارمونیک n ام سری فوریه می باشد. تفاضل بین فرکانس دو موج متوالی به صورت زیر بیان می شود:

$$\Delta\overline{\omega}=\overline{\omega}_{n+1}-\overline{\omega}_n=\frac{2\pi}{T_p} \qquad \text{(پ۲-۴)}$$

با این تعریف دورهٔ تناوب تابع متناوب را به صورت زیر می توان نوشت:

$$T_p=\frac{2\pi}{\Delta\overline{\omega}} \qquad \text{(پ۲-۵)}$$

با جایگذاری رابطهٔ (پ۲-۲) در رابطهٔ (پ۲-۱) و استفاده از رابطهٔ (پ۲-۵) خواهیم داشت:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{i\overline{\omega}_n t}\frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi}\int_0^{T_p} f(\tau)e^{-i\overline{\omega}_n \tau}d\tau\right] \qquad \text{(پ۲-۶)}$$

تابع $F(\omega)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(\omega)=e^{i\omega_n t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{T_p} f(\tau)e^{-i\omega_n \tau}d\tau \qquad \text{(پ۲-۷)}$$

بنابراین تابع $f(t)$ به صورت زیر در می آید:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[F(\overline{\omega})\Delta\overline{\omega}\right] \qquad \text{(پ۲-۸)}$$

حال $\Delta\overline{\omega}$ را به سمت صفر میل می دهیم. در واقع با این کار موج های هارمونیکی که به صورت گسسته بودند را به صورت پیوسته در می آوریم. همچنین با توجه به رابطهٔ (پ۲-۵) می توان گفت که دورهٔ تناوب تابع متناوب بینهایت شده است($T_p \to \infty$) . یعنی تابع غیرمتناوب را به صورت تابع متناوب با دورهٔ تناوب بینهایت در نظر گرفته ایم.

اگر $\Delta\overline{\omega}$ به سمت صفر میل کند، رابطهٔ (پ۲-۹) به صورت انتگرالی تبدیل می شود:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\overline{\omega})d\overline{\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega \qquad \text{(پ۲-۹)}$$

حال به جای $F(\omega)$ از رابطهٔ (پ۲-۷) قرار می دهیم.

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_n t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]d\omega \qquad \text{(پ۲-۱۰)}$$

تابع $G(\omega)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad \text{(پ۲-۱۱)}$$

بنابراین تابع $f(t)$ عبارت است از:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{(پ۲-۱۲)}$$

رابطهٔ (پ۲-۱۱) تبدیل فوریه (Fourier Transform) و رابطهٔ (پ۲-۱۲) تبدیل معکوس فوریه (Inverse Fourier Transform) نامیده می شوند.

مسائل

۱- دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(t)=3\sin(3t)+5\sin(4t)$

جواب : 2π

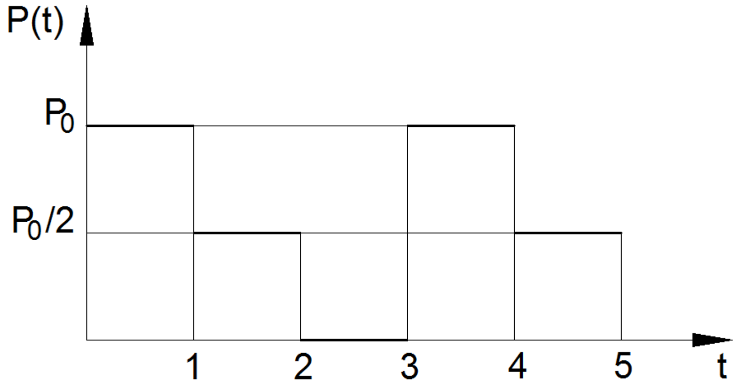
ب) $f(t)=7\cos^2(3t)$

جواب : $\pi/3$

ج) $f(t)=\sin\left(\frac{4}{3}t\right)+\sin(5t)$

جواب: 6π

۲- تابع نشان داده شده را بوسیله سری فوریه بسط داده و ضرایب بسط را بدست آورید.



جواب: $a_0=\frac{P_0}{2}\ ,a_n=0\ \ ,\ \ b_n=\frac{-P_0}{n\pi}\left[-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{3}n\pi\right)\right]$

۳- برای هر یک از توابع زیر مطلوب است:

الف) ضرایب a_0، a_n و b_n از بسط فوریه

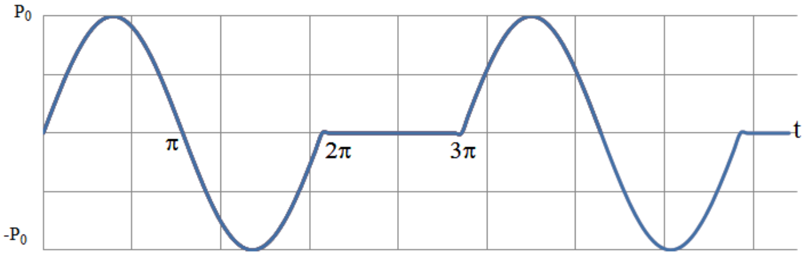
ب) ترسیم نمودار دقیق $P(t)$ و بسط فوریهٔ آن

پ) دامنهٔ موج هارمونیک بسط فوریه و رسم نمودار آن

(a)

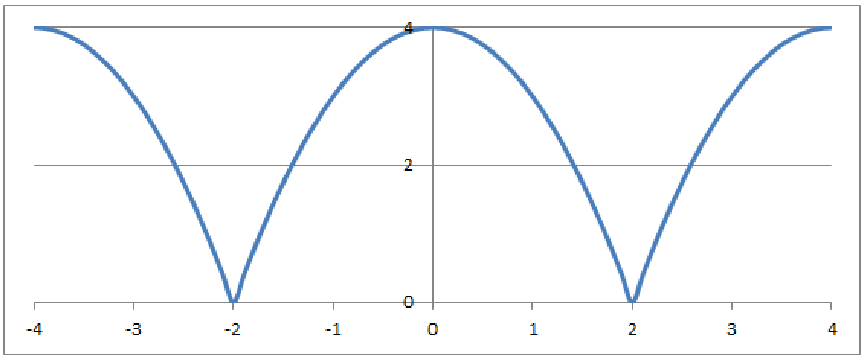
$$P(t)=\begin{cases} P_0\sin\left(\dfrac{3\pi}{T_p}t\right) & 0<t<2\pi \\ 0 & 2\pi<t<3\pi \end{cases}$$

$T_p = 3\pi$



جواب: $a_0 = 0,\ a_n = \dfrac{12P_0}{\pi(9-4n^2)}\sin^2\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right),\ b_n = \dfrac{6P_0}{\pi(4n^2-9)}\sin\left(\dfrac{4n\pi}{3}\right)$

(b) $P(t)=P_0(4-t^2)\quad -2<t<2$



جواب: $a_0 = \dfrac{8P_0}{3},\ a_n = \dfrac{16P_0}{(n\pi)^3}[\sin(n\pi)-n\pi\cos(n\pi)],\ b_n = 0$

(c) $$P(t)=\begin{cases} 0 & -2<t<-1 \\ P_0\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) & -1<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \end{cases}$$

جواب: $$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ \dfrac{2P_0}{\pi}\times\dfrac{n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2} & n>1 \end{cases}$$

۴- نشان دهید که دامنهٔ n امین موج هارمونیک سری فوریه برابر است با: $2\sqrt{C_nC_{-n}}$

۵- توابع زیر را به فرم نمایی سری فوریه تبدیل کنید.

(a) $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$

جواب: $C_n=\frac{i}{2n\pi}\left(e^{-in\pi}-1\right)$

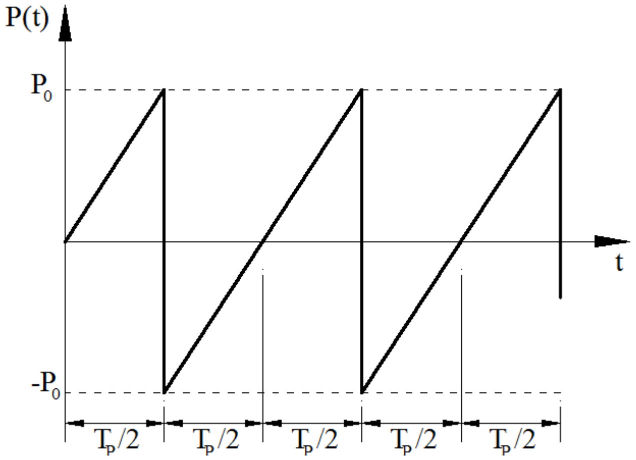
(b) $f(t)=t \quad 0<t<1$

جواب: $C_n=\frac{-1+e^{-2in\pi}\left(1+2in\pi\right)}{\left(2n\pi\right)^2}$

(c) $f(t)=\sin(t) \quad 0<t<\pi$

جواب: $C_n=\frac{1+e^{-2in\pi}}{1-4n^2}$

۶- بارگذاری نشان داده شده را می توان توسط سری سینوسی زیر بسط داد.



$$P(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\overline{\omega}_n t)$$

$$b_n=-\frac{2P_0}{n\pi}(-1)^n$$

پاسخ یکنواخت یک سیستم یکدرجه آزاد نامیرا را در برابر این بارگذاری بدست آورده و آن را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید. ۴ جملهٔ اول سری را درنظر بگیرید.

فصل ۶

بارهای ضربه ای

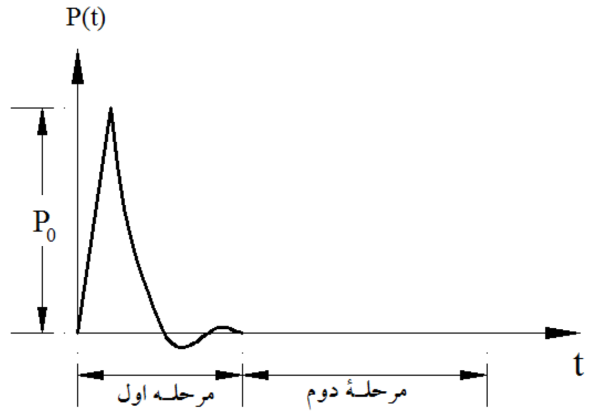
Impulsive loading

۶-۱ مقدمه

بارگذاری ضربه ای به نوعی بار دینامیکی گفته می شود که مدت زمان تأثیر نیرو بر سازه کوتاه باشد. البته موضوع اینکه زمان تأثیر نیروچقدر کوتاه باشد تا بتوان آن را ضربه ای محسوب نمود، موضوعی است که نیاز به بررسی دارد و در این فصل ضابطه ای برای آن بدست می آید.

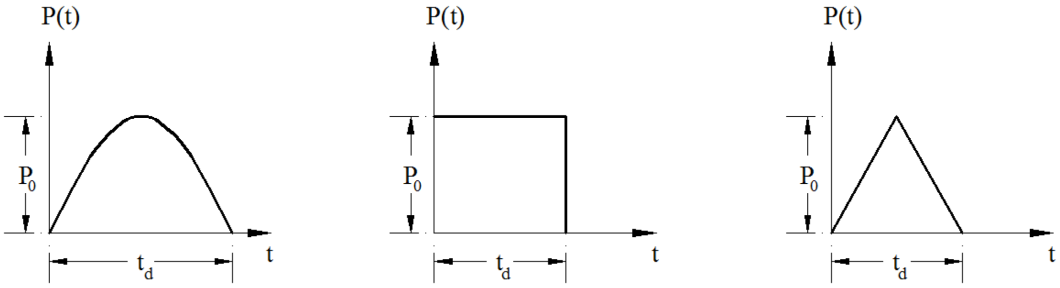
یکی از انواع بارگذاری ضربه ای، بار انفجار (Blast) است. انفجار میتواند ناشی از انفجارهای فیزیکی یا شیمیایی باشد. از مثال های دیگر بارهای ضربه ای می توان از برخورد کامیون به پایه پل یا برخورد کشتی به پایه سکوهای دریایی یا اسکله ها و یا ضربه ناشی از شروع یا توقف ناگهانی جرثقیل یا آسانسور نام برد. یک نمونه از بارهای ضربه ای در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود بار در مدت زمان کوتاهی به سرعت افزایش می یابد تا به مقدار حداکثر خود میرسد. سپس کاهش یافته تا به صفر می رسد. این زمان مرحله مثبت نامیده می شود. در این مرحله نیروی وارد بر سازه به صورت فشار است. پس از آن نیروی وارد بر سازه به صورت منفی یا مکش میشود و بعد از آن با یکی دو نوسان به صفر می رسد.

مدت زمان تأثیر بار را می توان به دو مرحله مختلف تقسیم بندی نمود. در مرحله اول نیرو وارد می شود که می توان آن را مرحله نیرویی نامید و در مرحله بعد که نیرو وارد نمی شود و می توان آن را مرحله ارتعاش آزاد نامید (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱ نمونه ای از بارهای ضربه ای

شکل ۶-۱ نمونه ای واقعی از بارهای انفجاری است. برای تحلیل معمولاً از شکل های ساده تری که بوسیلهٔ روابط ریاضی قابل بیان باشند و بار انفجاری را نیز به خوبی مدلسازی کنند استفاده می شود. سه نمونه از این نوع بارها در شکل ۶-۲ نشان داده شده است.



شکل ۶-۲ نمونه هایی از بارهای ساده شده ضربه ای

در ادامه پاسخ سازه در برابر این بارها بدست می آید.

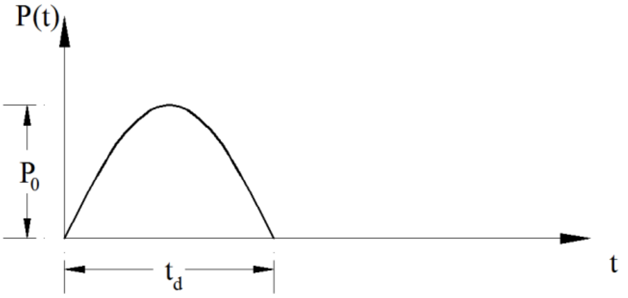
۲-٦ بار نیم موج سینوسی

این نوع بار در واقع بار هارمونیک سینوسی است که مدت زمان تأثیر آن فقط تا نصف زمان تناوب آن است(شکل ۶-۳). این بار به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(t)=\begin{cases} P_0\sin(\overline{\omega}t) & t\le t_d \\ 0 & t>t_d \end{cases} \qquad (۶-۱)$$

رابطهٔ مدت زمان بارگذاری و زمان تناوب و فرکانس آن به صورت زیر است:

$$t_d=\frac{\overline{T}}{2}=\frac{2\pi}{2\overline{\omega}}=\frac{\pi}{\overline{\omega}} \qquad (۶-۲)$$



شکل ۶-۳ بار نیم موج سینوسی

در بار های ضربه ای به دلیل سرعت زیاد بارگذاری، سرعت سیستم تغییر قابل ملاحظه ای ندارد و به همین دلیل در مدت زمان تأثیر نیرو، سیستم را میتوان نامیرا در نظر گرفت. در این فصل در مرحله اول بارگذاری سیستم به صورت نامیرا در نظر گرفته می شود. در نتیجه معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+ku=P(t) \qquad (۶-۳)$$

این معادله در دو مرحله حل می شود. در مرحله اول که $t \le t_d$ است نیروی وارد بر سیستم برابر $P_0\sin(\overline{\omega}t)$ می باشد و در مرحله دوم نیروی وارد بر سیستم صفر است.

مرحله اول: مرحله نیرویی($t \le t_d$)

در این مرحله معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}+ku=P_0\sin(\overline{\omega}t) \qquad (۶-۴)$$

همانطور که در فصل ۴ دیده شد، اگر شرایط اولیه سکون حاکم باشد، جواب این معادله عبارت است از:

$$u_I(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin(\overline{\omega}t)-\beta\sin(\omega t)\right] \qquad (۶-۵)$$

در این رابطه اندیس I به پاسخ در مرحله اول اشاره دارد.

با توجه به اینکه $\overline{\omega}t_d=\pi$ و $\omega t_d=\pi/\beta$ می باشد، در پایان این مرحله یعنی $t=t_d$ ، تغییرمکان و سرعت سیستم برابر است با:

$$u_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[-\beta\sin(\pi/\beta)\right] \quad , \quad \dot{u}_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\times\frac{-\overline{\omega}}{1-\beta^2}\left[1+\cos(\pi/\beta)\right] \qquad (۶-۶)$$

مرحله دوم: مرحله ارتعاش آزاد ($t > t_d$)

در این مرحله به سیستم نیرو وارد نمی شود و سیستم تحت اثر تغییرمکان و سرعت اولیه ارتعاش می کند. بنابراین معادله حرکت در این مرحله عبارت است از :

$$m\ddot{u}+ku=0 \qquad (۶-۷)$$

که حل آن عبارت است از :

$$u_{II}(t)=\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin(\omega t)+u_0\cos(\omega t) \tag{۶-۸}$$

در این رابطه u_0 و $\dot{u}_0$ تغییر مکان و سرعت در ابتدای مرحله دوم هستند که همان روابط (۶-۶) می باشند، یعنی:

$$u_0=u_I(t_d) \quad , \quad \dot{u}_0=\dot{u}_I(t_d) \tag{۶-۹}$$

بنابراین به طور خلاصه تغییرمکان سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{1}{1-\beta^2}\left[\sin(\overline{\omega}t)-\beta\sin(\omega t)\right] & t\le t_d\\[2ex] \dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{-\beta}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right)\cos(\omega t)+\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{\beta}\right)\right)\sin(\omega t)\right] & t>t_d\end{cases} \tag{۶-۱۰}$$

با استفاده از این رابطه می توان تاریخچه زمانی تغییر مکان سیستم را بدست آورد.

مسئله دیگر بدست آوردن حداکثر تغییر مکان سیستم است. در ادامه حداکثر تغییرمکان سیستم بدست می آید.

اگر فرض شود که تغییر مکان حداکثر در مرحله اول اتفاق می افتد، بـرای بدسـت آوردن زمـان مربـوط بـه تغییرمکـان حداکثر از تابع $u_I(t)$ نسبت به زمان مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده می شود.

$$\overline{\omega}\cos(\overline{\omega}t_m)-\beta\omega\cos(\omega t_m)=0 \tag{۶-۱۱}$$

در این رابطه t_m زمان مربوط به حداکثر پاسخ است. این رابطه به صورت زیر نوشته می شود :

$$\cos(\overline{\omega}t_m)=\cos(\omega t_m) \tag{۶-۱۲}$$

از حل این معادله t_m بدست می آید:

$$\overline{\omega}t_m=2n\pi\pm\omega t_m \;\Rightarrow\; t_m=\frac{2n\pi}{\overline{\omega}\pm\omega} \quad , \quad n=1,2,3,... \tag{۶-۱۳}$$

کمترین زمانی که حداکثر پاسخ در آن اتفاق می افتد برابر است با:

$$t_m=\frac{2\pi}{\overline{\omega}+\omega}=\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{1+\beta} \tag{۶-۱۴}$$

برای بدست آوردن مقدار تغییر مکان حداکثر، t_m در رابطه $u_I(t)$ قرار داده می شود.

$$u_m=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] \tag{۶-۱۵}$$

البته این رابطه وقتی صحیح است که $t_m\le t_d$ باشد. به عبارت دیگر شرط اینکه حداکثر پاسخ در مرحله اول اتفاق بیافتد اینستکه:

$$t_m=\frac{\overline{T}}{1+1/\beta}\le t_d \tag{۶-۱۶}$$

و چون $t_d=\frac{\bar{T}}{2}$ است، پس شرط وقوع ماکزیمم در مرحله اول به صورت زیر بیان می شود:

$$\beta\le 1 \quad \Rightarrow \quad t_d\ge\frac{T}{2} \tag{۶-۱۷}$$

از این رابطه می توان نتیجه گرفت که اگر مدت زمان تأثیر نیرو بیشتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، ماکزیمم پاسخ در مرحله اول اتفاق می افتد. ولی اگر مدت زمان تأثیر نیرو کمتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، ماکزیمم پاسخ در مرحله دوم اتفاق می افتد. در این حالت می توان گفت که بار به صورت ضربه ای وارد شده است. بنابراین بار ضربه ای را به صورت زیر می توان تعریف کرد:

بار ضربه ای: اگر مدت زمان تأثیر نیرو به حدی کم باشد که ماکزیمم پاسخ در مرحله ارتعاش آزاد اتفاق بیافتد بار، ضربه ای محسوب می شود.

بنابراین در مورد بار نیم سینوسی اگر مدت زمان تأثیر بار کمتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، بار ضربه ای محسوب می شود.

در مورد این بار اگر مدت زمان تأثیر بار کمتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، حداکثر تغییرمکان در مرحلۀ دوم یعنی مرحلۀ ارتعاش آزاد اتفاق می افتد. حداکثر تغییرمکان در این مرحله از رابطۀ زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} u_m &= \sqrt{[u_I(t_d)]^2+\left[\frac{\dot{u}_I(t_d)}{\omega}\right]^2} = \\ &= \frac{P_0}{k}\times\frac{\beta}{1-\beta^2}\sqrt{\left[\sin\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right]^2+\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right]^2} = \frac{P_0}{k}\times\frac{\beta}{1-\beta^2}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) \end{aligned} \tag{۶-۱۸}$$

بنابراین حداکثر تغییرمکان بطور خلاصه عبارت است از:

$$u_m=\begin{cases} \frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] & \beta<1 \\ \frac{P_0}{k}\times\frac{2\beta}{1-\beta^2}\times\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) & \beta>1 \end{cases} \tag{۶-۱۹}$$

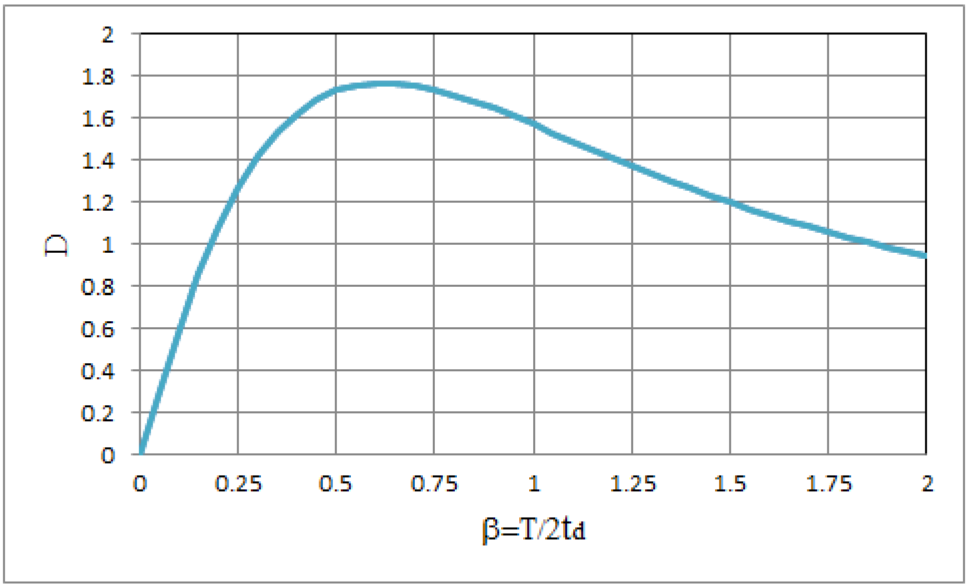
با توجه به تعریف ضریب بزرگنمایی ($D=\frac{u_m}{P_0/k}$) داریم:

$$D=\begin{cases} \frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] & \beta<1 \\ \frac{2\beta}{1-\beta^2}\times\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) & \beta>1 \end{cases} \tag{۶-۲۰}$$

ملاحظه می شود که ضریب بزرگنمایی تابعی از β است. البته در β=1 این رابطه مبهم است. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می شود.

$$\beta=1 \Rightarrow D=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)-2\beta\times\frac{\pi}{2\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{-2\beta}=\frac{\pi}{2} \qquad (۶-۲۱)$$

در شکل (۶-۴) نمودار D بر حسب β ترسیم شده است. به این نمودار طیف پاسخ تابع نصف موج سینوسی گفته می شود. اهمیت ضریب بزرگنمایی دینامیکی و نمودار آن در این است که با داشتن آن و بدون انجام تحلیل های دینامیکی تاریخچهٔ زمانی می توان حداکثر پاسخ سیستم را بدست آورد.



شکل ۶-۴ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای بار نیم سینوسی بر حسب نسبت فرکانس

نکتهٔ دیگر اینکه β با t_d/T رابطه ای به صورت زیر دارد:

$$\beta=\frac{\overline{\omega}}{\omega}=\frac{T}{\overline{T}}=\frac{T}{2t_d} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_d}{T}=\frac{1}{2\beta} \qquad (۶-۲۲)$$

بنابراین رابطهٔ ضریب بزرگنمایی را می توان بر حسب t_d/T نیز نوشت و همچنین نمودار آن را بر حسب t_d/T رسم نمود. در شکل (۶-۴) ملاحظه می شود که اگر مدت زمان وارد شدن نیرو به سمت صفر میل کند، ضریب بزرگنمایی و در نتیجه تغییرمکان حداکثر و نیروی الاستیک نیز به سمت صفر میل می کنند.

۶-۳ بار مستطیلی

بار مستطیلی در شکل (۶-۵) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود در مدت زمان t_d مقدار بار ثابت و برابر P_0 است و پس از آن صفر خواهد شد. به این نوع بار، بار پله ای نیز گفته می شود. بنابراین بار را به صورت زیر می توان تعریف نمود:

$$P(t)=\begin{cases} P_0 & 0 \le t < t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases} \qquad (۶-۲۳)$$

پس معادلهٔ حرکت در این مورد نیز در دو مرحله نوشته و حل می شود. سیستم دینامیکی نیز به صورت نامیرا و با شرایط اولیه سکون درنظر گرفته می شود.

مرحلهٔ اول : مرحلهٔ نیرویی $\underline{0 < t < t_d}$

در این مرحله معادلهٔ حرکت برابر است با:

$$m\ddot{u}+ku=P_0 \qquad (۶-۲۴)$$

حل این معادله به صورت زیر است:

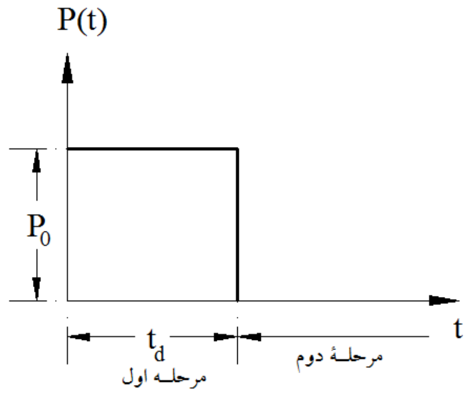
$$u_I(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)+\frac{P_0}{K} \qquad (۶-۲۵)$$

A و B ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. اگر شرایط اولیهٔ سکون برقرار باشد، آنگاه $A=0$ و $B=-P_0/K$ می شود. بنابراین پاسخ سیستم در این مرحله برابر است با:

$$u_I(t)=\frac{P_0}{k}\left[1-\cos(\omega t)\right] \qquad (۶-۲۷)$$

تغییرمکان و سرعت سیستم در پایان این مرحله برابرند با:

$$u_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\left[1-\cos(\omega t_d)\right] \quad , \quad \dot{u}_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\omega\sin(\omega t_d) \qquad (۶-۲۸)$$



شکل ۶-۵ بار مستطیلی

مرحله دوم: ارتعاش آزاد $t > t_d$

در این مرحله ارتعاش سیستم به صورت آزاد و تحت اثر تغییر مکان و سرعت در پایان مرحله اول صورت می گیرد.

پاسخ سیستم در این حالت برابر است با:

$$u_{II}(t) = \frac{\dot{u}_I(t_d)}{\omega}\sin(\omega t) + u_I(t_d)\cos(\omega t) \qquad (۶-۲۹)$$

با توجه به رابطهٔ (۶-۲۸) پاسخ در این مرحله به صورت زیر در می آید:

$$u_{II}(t) = \frac{P_0}{k}\{\sin(\omega t_d)\sin(\omega t) + [1-\cos(\omega t_d)]\cos(\omega t)\} \qquad (۶-۳۰)$$

پس از ساده کردن داریم:

$$u_{II}(t) = \frac{P_0}{k}[\cos(\omega t) - \cos(\omega(t-t_d))] \qquad (۶-۳۱)$$

بنابراین پاسخ سیستم نامیرا در برابر بار مستطیلی را به طور خلاصه می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{P_0}{k}[1-\cos(\omega t)] & t < t_d \\ \frac{P_0}{k}[\cos(\omega t) - \cos(\omega(t-t_d))] & t > t_d \end{cases} \qquad (۶-۳۲)$$

برای محاسبهٔ پاسخ حداکثر، ابتدا فرض می کنیم که این پاسخ در مرحله اول اتفاق می افتد. بنابراین از $u_I(t)$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\sin(\omega t_m) = 0 = \sin(\pi) \quad \Rightarrow \quad \omega t_m = \pi \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{\pi}{\omega} \qquad (۶-۳۳)$$

بدیهی است اگر $t_m<t_d$ باشد، پاسخ حداکثر در مرحله اول اتفاق می افتد. بنابراین در این حالت نیز شرط اینکه پاسخ حداکثر در مرحله اول باشد عبارت است از :

$$\frac{\pi}{\omega} < t_d \quad \Rightarrow \quad t_d > \frac{T}{2} \qquad (۶-۳۴)$$

در صورتیکه این شرط برقرار باشد، مقدار پاسخ حداکثر برابر است با:

$$u_m = \frac{P_0}{k}\left[1-\cos\left(\omega\frac{\pi}{\beta}\right)\right] = 2\frac{P_0}{k} \quad (۶-۳۵)$$

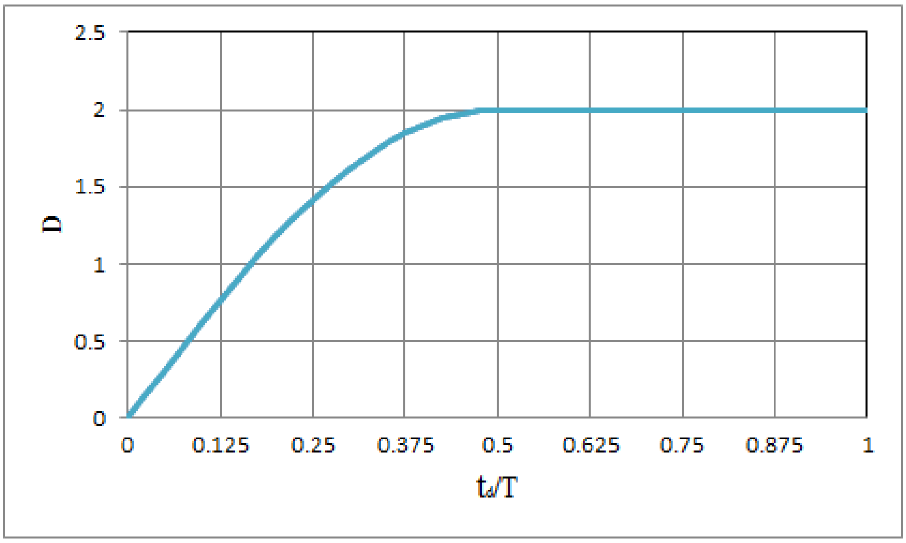
با توجه به تعریف بار ضربه ای، می توان گفت ، در صورتی بار مستطیلی ضربه ای محسوب می شود که $t_d \le T/2$. در این صورت پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش آزاد اتفاق می افتد. پاسخ حداکثر در این مرحله عبارت است از:

$$u_m = \sqrt{\left[u_I(t_d)\right]^2 + \left[\frac{\dot{u}_I(t_d)}{\omega}\right]^2} = \frac{P_0}{k}\sqrt{\left[1-\cos(\omega t_d)\right]^2 + \left[\sin(\omega t_d)\right]^2} = \frac{P_0}{k}\sqrt{2\left[1-\cos(\omega t_d)\right]} = \frac{P_0}{k}\times 2\sin\left(\frac{\omega t_d}{2}\right) = \frac{P_0}{k}\times 2\sin\left(\pi\frac{t_d}{T}\right) \quad (۶-۳۶)$$

بنابراین ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای بار مستطیلی به صورت زیر خواهد شد:

$$D = \begin{cases} 2\sin\left(\pi\frac{t_d}{T}\right) & t_d < \frac{T}{2} \\ 2 & t_d > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (۶-۳۷)$$

نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی بار مستطیلی در شکل (۶-۷) ترسیم شده است. به این نمودار طیف پاسخ نیروی مستطیلی گفته می شود. مجدداً یادآوری می شود که اهمیت این نمودار در این است که با داشتن آن می توان پاسخ حداکثر سیستم را تحت اثر نیروی مستطیلی بدون انجام تحلیل دینامیکی تاریخچۀ زمانی بدست آورد.



شکل ۶-۷ نمودار ضریب بزرگنمایی بار مستطیلی

مثال : یک سیستم یک درجه آزاد به جرم ۲۷۰ تن و سختی $k=2\times10^6$ KN/m تحت اثر نیروی مستطیلی با مقدار ۴۵۰۰ کیلونیوتن قرار گرفته است. حداکثر تغییر مکان و نیروی الاستیک را در حالت های زیر بدست آورید:

(الف) مدت زمان تأثیر نیرو $t_d=0.2$ sec باشد.

(ب) مدت زمان تأثیر نیرو $t_d=0.02$ sec باشد.

حل:

محاسبهٔ فرکانس و زمان تناوب سیستم :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times10^6}{270}}=86.066 \text{ rad/sec} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.073 \text{ sec}$$

(الف)

$$t_d = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_d}{T} = 2.74 > 0.5$$

در این حالت بار به صورت ضربه ای نیست. بنابراین $D = 2$ می شود. حداکثر تغییرمکان و نیروی الاستیک عبارتند از:

$$u_{max}=D\times\frac{P_0}{k}=2\times\frac{4500}{2\times10^6}=0.0045 \text{ m} =4.5 \text{ mm}$$

$$f_{s,max}=ku_{max}=D\times P_0=2\times4500=9000 \text{ KN}$$

(ب)

$$t_d = 0.02 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_d}{T} = 0.274 < 0.5$$

در این حالت بار به صورت ضربه ای است. بنابراین:

$$D = 2\sin(\pi\times0.274) = 1.517$$

$$u_{max} = 1.517\times\frac{4500}{2\times10^6} = 3.412\times10^{-3} \text{ m} = 3.412 \text{ mm}$$

$$f_{s,max} = 3.412\times4500 = 15355 \text{ KN}$$

ملاحظه می شود که با کاهش مدت زمان تأثیر نیرو، تغییرمکان و نیروی الاستیک نیز کم می شوند. بنابراین هر چه مدت زمان تأثیر نیرو کمتر باشد، نیروی الاستیک کمتر و در نتیجه نیروی اینرسی بیشتر خواهد شد. پس در بارهای ضربه ای بهتر است که جرم سیستم بیشتر باشد.

٦-٤ محاسبهٔ نیروی حداکثر بر اثر شتاب زمین

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر یک سیستم نامیرا دو راه وجود دارد. ضرب کردن سختی سیستم در تغییر مکان آن و یا ضرب کردن جرم سیستم در شتاب آن. چون محاسبهٔ جرم ساده تر از محاسبهٔ سختی است، معمولاً از روش دوم برای

محاسبهٔ نیرو استفاده می شود. در این بخش روابط لازم برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سیستم با استفاده از جرم آن و ضریب بزرگنمایی دینامیکی بدست می آید.

در یک سیستم نامیرا تحت اثر شتاب زمین، معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$f_I(t)+f_s(t)=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{u}^t(t)+ku(t)=0 \tag{۶-۳۸}$$

که در آن $\ddot{u}^t(t)$ شتاب مطلق سیستم است. بنابراین:

$$m\ddot{u}^t_{max}+ku_{max}=0 \tag{۶-۳۹}$$

که در آن $\ddot{u}^t_{max}$ حداکثر شتاب مطلق سیستم و u_{max} حداکثر تغییرمکان نسبی سیستم است. بنابراین:

$$\ddot{u}^t_{max}=\omega^2 u_{max} \tag{۶-۴۰}$$

اگر به جای u_{max}، مقدار آن را بر حسب ضریب بزرگنمایی قرار دهیم، آنگاه:

$$\ddot{u}^t_{max}=\omega^2\frac{P_0}{k}D \tag{۶-۴۱}$$

قابل ذکر است که اگر سیستم تحت اثر شتاب پایه باشد، آنگاه $P_0=m\ddot{u}_{g,max}$ و در نتیجه:

$$\ddot{u}^t_{max}=D\ddot{u}_{g,max} \tag{۶-۴۲}$$

بنابراین حداکثر نیروی وارد بر سیستم برابر است با:

$$f_{s,max}=m\ddot{u}^t_{max}=D\times m\ddot{u}_{g,max} \tag{۶-۴۳}$$

البته بهتر است این رابطه بجای جرم بر حسب وزن سیستم نوشته شود، در این صورت:

$$f_{s,max}=D\times\frac{\ddot{u}_{g,max}}{g}\times W \tag{۶-۴۴}$$

که در آن W وزن سیستم و g شتاب جاذبه است. از این رابطه می توان حداکثر نیروی وارد بر سیستم را بر اثر شتاب پایه بدست آورد. این رابطه در آیین نامه های زلزله به صورت زیر نوشته میشود:

$$f_{s,max}=CW \tag{۶-۴۵}$$

که در آن C ضریب زلزله نامیده می شود و برابر است با:

$$C=D\times\frac{\ddot{u}_{g,max}}{g} \tag{۶-۴۶}$$

لازم به ذکر است که این رابطه برای سیستم های خطی بدست آمده است. واضح است که در نظر گرفتن این واقعیت که رفتار سازه ها در هنگام زلزله از محدودهٔ خطی خارج و وارد محدودهٔ غیرخطی می شوند، نیروی وارد بر سازه را به میزان قابل توجهی تعدیل مینماید.

مثال: شتاب حداکثر زمین در منطقه ای $0.35g$ برآورد شده است. اگر ضریب بزرگنمایی دینامیکی ۲/۷۵ و وزن سیستم ۲۵۰۰ کیلونیوتن باشد، نیروی وارد بر آن چقدر است؟

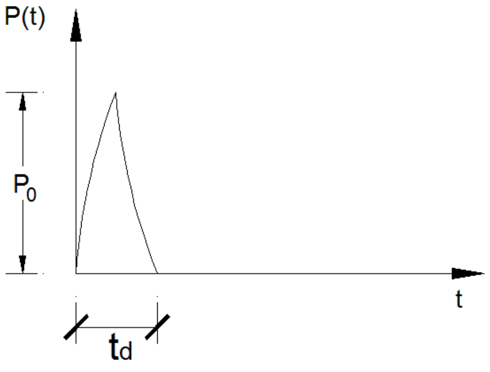
حل:

$C=2.75\times0.35=0.9625$

$f_{s,max}=CW=0.9625\times2500=2406\ \ KN$

٦-٥ تابع پاسخ ضربهٔ واحد

یک سیستم یکدرجه آزاد در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی ضربه ای مطابق شکل ۶-۸ قرار گرفته است. در مدت زمان تأثیر نیرو، سیستم به صورت نامیرا درنظر گرفته می شود.



شکل ۶-۸ نیروی وارد بر سیستم

معادلهٔ حرکت سیستم نامیرا به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}(t)+ku(t)=P(t) \qquad (۶-۴۷)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\int_0^{t_d} m\ddot{u}(t)\,dt=\int_0^{t_d} P(t)\,dt-\int_0^{t_d} ku(t)\,dt \qquad (۶-۴۸)$$

در بخش های ۶-۲ و ۶-۳ و نیز در مثال بخش ۶-۳ دیده شد که اگر مدت زمان تأثیر نیرو t_d کوچک باشد، نیروی الاستیک کوچک می شود. بنابراین در این رابطه اگر مدت زمان t_d کوچک باشد، مقدار انتگرال دوم سمت راست رابطهٔ فوق نیز کوچک بوده و می توان از آن صرفنظر نمود. بنابراین :

$$m[\dot{u}(t_d)-\dot{u}_0]\approx\int_0^{t_d} P(t)dt \qquad (۶-۴۹)$$

اگر حرکت از سکون شروع شده باشد($\dot{u}_0=0$) ، آنگاه

$$\dot{u}(t_d) \approx \frac{1}{m}\int_0^{t_d} P(t)dt \qquad (۶-۵۰)$$

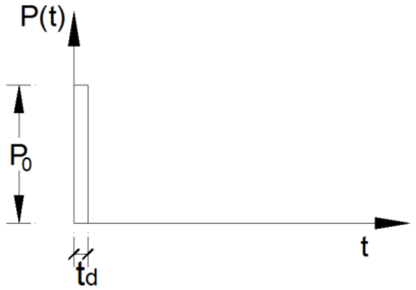
این رابطه را می توان رابطهٔ تقریبی تحلیل سیستم های دینامیکی نامید. با استفاده از این رابطه می توان سرعت سیستم را در انتهای مرحلهٔ نیرویی بدست آورد. با داشتن سرعت سیستم می توان تابع تغییرمکان آن را در مرحلهٔ ارتعاش آزاد بدست آورد.

همچنین این رابطه نشان می دهد که ضربهٔ وارد بر سیستم باعث تغییر در سرعت آن خواهد شد. همچنین می توان گفت که برای ایجاد سرعت در سیستم کافیست به آن ضربه وارد شود.

سمت راست رابطهٔ فوق که سطح زیر نمودار نیرو-زمان است، ضربهٔ وارد بر سیستم و سمت چپ آن تغییر اندازهٔ حرکت آن است. اگر مدت زمان t_d به سمت صفر میل کند، رابطهٔ فوق دقیق خواهد بود که به نام قانون ضربه-اندازهٔ حرکت (Impulse-Momentum) معروف است.

اگر فرض شود که در زمان کوتاه t_d نیرو به صورت مستطیلی است (شکل ۶-۹) ، رابطهٔ (۶-۵۰) به صورت زیر در می آید:

$$\dot{u}(t_d) = \frac{1}{m} P_0 t_d \qquad (۶-۵۱)$$



شکل ۶-۹ نیروی ضربه ای مستطیلی

بعد از زمان t_d حرکت سیستم به صورت ارتعاش آزاد است. در این مرحله حرکت سیستم تحت اثر سرعت اولیه خواهد بود. در این مرحله می توان سیستم را به صورت میرا نیز در نظر گرفت. پاسخ سیستم در مرحلهٔ ارتعاش آزاد به صورت زیر است.

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_D}\sin(\omega_D t) \qquad (۶-۵۲)$$

از قرار دادن رابطهٔ (۶-۵۱) در این رابطه پاسخ سیستم بدست می آید.

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\frac{P_0 t_d}{m\omega_D}\sin(\omega_D t) \qquad (۶-۵۳)$$

تابع پاسخ ضربهٔ واحد (Unit Impulse Response Function) ، پاسخ سیستم یکدرجه آزاد در برابر ضربهٔ واحد است. متذکر می شود که اگر اندازهٔ یک ضربه، واحد باشد به آن ضربهٔ واحد (Unit Impulse) گفته می شود، یعنی $P_0 t_d = 1$. این تابع، با h(t) نشان داده می شود.

$$h(t) = e^{-\xi\omega t}\frac{1}{m\omega_D}\sin(\omega_D t) \qquad (۵۴-۶)$$

مسائل

۱- یک سیستم یکدرجه آزاد با وزن W = 2700 N و سختی k = 200 KN/m در نظر بگیرید. فرض کنید این سیستم تحت اثر یک نیروی نصف سینوسی با دامنه P_0=2250 N و مدت زمان t_d=0.15 sec قرار گرفته باشد. مطلوب است:

(الف) زمانی که حداکثر تغییرمکان اتفاق می افتد.

(ب) حداکثر تغییرمکان.

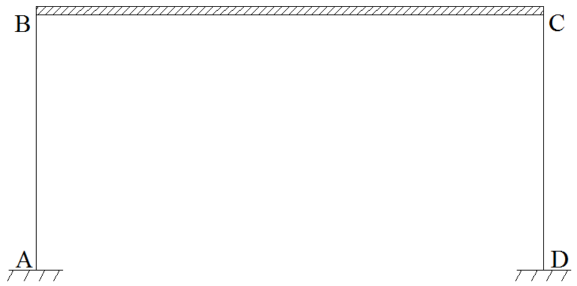
(ج) حداکثر نیروی الاستیک.

جواب : (الف) 0.13 sec (ب) 19.4 mm (ج) 3384 N

۲- مسئلهٔ ۱ را برای مدت زمان t_d=0.10 sec حل کنید.

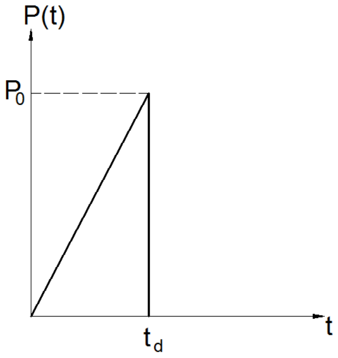
جواب : (الف) 0.10 sec (ب) 16.29 mm (ج) 3257 N

۳- یک قاب یک طبقه و یک دهانه به ارتفاع ۳ متر دارای زمان تناوب ۰/۵ ثانیه است. ستون ها از پروفیل IPB200 با ممان اینرسی $I = 5700\,cm^4$ ، اساس مقطع $S = 570\,cm^3$ و ضریب الاستیسیته $E = 204GPa$ می باشند. این قاب تحت اثر یک ضربه مستطیلی با مقدار $P_0 = 20KN$ و مدت زمان $t_d = 0.2\sec$ قرار می گیرد. حداکثر تغییرمکان، حداکثر برش پایه و حداکثر تنش خمشی را در ستون ها بدست آورید.



جواب : $\sigma = 50\,MPa$

۴- یک سیستم یکدرجه آزاد نامیرا با جرم m و سختی K تحت اثر نیروی مثلثی مطابق شکل قرار گرفته است. بار از صفر شروع شده و به صورت خطی افزایش می یابد تا در زمان t_d به P_0 می رسد.



(الف) با فرض شرایط اولیه سکون، معادلات تغییرمکان سیستم را بدست آورید.

(ب) شرط ضربه ای بودن بار را بدست آورید.

(ج) معادلات حداکثر تغییرمکان سیستم را بدست آورده و آن را رسم نمایید.

(د) اگر $t_d = \frac{3\pi}{\omega}$ باشد، ضریب بزرگنمایی دینامیکی $D = \frac{u_{max}}{P_0/K}$ را بدست آورید.

جواب: (ب) $\frac{t_d}{T} < 1$ (د) $\frac{2}{3}$

۵- یک سیستم یکدرجه آزاد نامیرا با جرم m و سختی K تحت اثر نیروی ربع کسینوسی که به صورت زیر بیان می شود قرار دارد.

$$P(t) = P_0 \cos(\overline{\omega} t) \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\overline{\omega}}$$

(الف) با فرض شرایط اولیه سکون معادله حرکت سیستم را بدست آورید.

(ب) نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی را بر حسب β رسم کنید.

۶- یک سیستم یک درجه آزاد نامیرا با جرم $m = 700$ Ton و سختی $k = 4000$ KN/m تحت اثر نیروی نصف سینوسی با دامنه $P_0=68$ KN قرار گرفته است.

(الف) با استفاده از طیف ارائه شده در رابطهٔ (۶-۲۰) حداکثر تغییرفرم و نیروی ارتجاعی را بدست آورید.

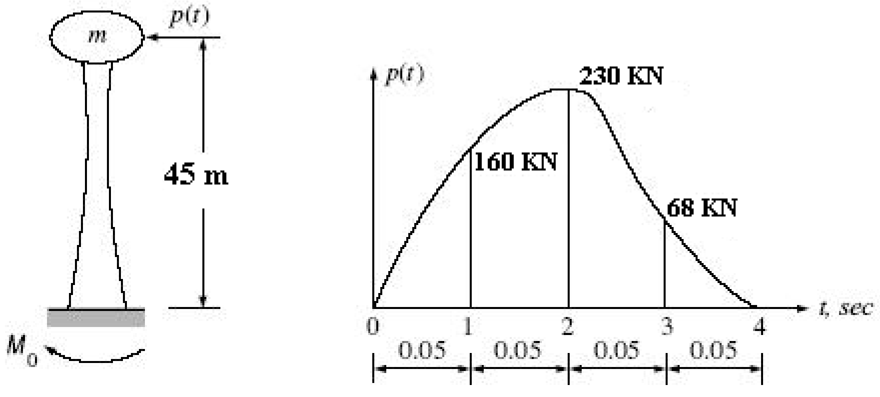
(ب) با استفاده از روش تقریبی نیز حداکثر تغییرفرم و نیروی ارتجاعی را بدست آورده و با نتایج قسمت الف مقایسه کنید.

مدت زمان تأثیر نیرو را مقادیر زیر بگیرید: $t_d=0.05T$ ، $t_d=0.10T$ ، $t_d=0.15T$ ، $t_d=0.20T$ ، $t_d=0.25T$ ، $t_d=0.30T$

جواب: اگر $t_d=0.15T$ آنگاه روش دقیق: $u_{max} = 0.587\frac{P_0}{K}$ ، روش تقریبی: $u_{max} = 0.6\frac{P_0}{K}$

۷- مخزن آب نشان داده شده را می توان به صورت یک سیستم یک درجه آزاد با جرم m = 700 Ton و سختی k = 8000 KN/m مدلسازی نمود. این مخزن تحت اثر نیروی انفجار مطابق شکل قرار می گیرد.با استفاده از روش تقریبی لنگر واژگونی در تکیه گاه را حساب کنید. انتگرال ضربه را با روش سیمسون به صورت زیر محاسبه کنید.

$$\int P(t)dt = \frac{\Delta t}{3}\left(P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + P_4\right)$$



(a) (b)

جواب: 3479 KN-m

www.engclubs.net