دارای ساده‌ترین شکل هندسی ممکن باشد. از این نقطه نظر خود سطح توپوگرافی زمین بخاطر شکل پیچیده‌اش، نمیتواند یک سطح رفرانس خوب باشد.

در اندازه‌گیری موقعیت و روابط بین نقاط در سطح زمین (همچنین نقاط بالا و یا زیر زمین) ما با انواع تاثیرات فیزیکی محیط فیزیکی مواجه هستیم. دستگاه‌های اندازه‌گیری ما تابع بعضی قوانین و قواعد فیزیکی هستند. برای توجیه اندازه‌گیری‌ها لازم است که عملکرد آن قوانین روی دستگاه‌ها مورد مطالعه قرار گیرد. بعنوان جمله عمده از تاثیرات فیزیکی محیط میتوان از نیروی ثقل، نیروی چرخاننده [illegible]، انکسار، و تغییرات درجه حرارت محیط نام برد.

در اندازه‌گیری‌های ساکن نظیر مشاهدات ژئودزی تاثیرات دو پدیده فیزیکی انکسار و ثقل بسیار مهم میباشند: هر دو پدیده فوق‌الذکر شکل هندسی محیط را تحت الشعاع قرار میدهند. بنابراین باید نقش آنها در ایجاد فضای هندسی تا حد ممکن روشن گردد. مطالعه پدیده انکسار و تاثیر آن در فضای هندسی مورد بحث ما در این جزوه نیست بلکه بحث ما در صفحات زیر تنها اختصاص به پدیده ثقل و تاثیرات آن دارد.

مطالعه مفاهیم تئوری میدان ثقل و تعیین میدان ثقل و ارتباط آن با اندازه‌گیری‌های هندسی (موضوع اصلی نقشه‌برداری) مبحث فیزیکال ژئودزی را تشکیل میدهند. بنابراین اولین قسمت از درس فیزیکال ژئودزی اختصاص به دو موضوع عمده دارد: نخست سعی میکنیم مفاهیم چندی از مدل ریاضی یک میدان جاذبه را یاد بگیریم. این موضوع بنام تئوری پتانسیل معروف است. موضوع بعدی که مورد مطالعه قرار میدهیم بنام میدان ثقل زمین و تقریب آن در ژئودزی میباشد.

در اولین قسمت از درس فیزیکال ژئودزی ابزار ریاضی مورد استفاده فیزیکال ژئودزی را مطالعه میکنیم. آشنائی با این ابزار ما را قادر میسازد که در قسمت بعدی درس گسترش مفاهیم فیزیکال ژئودزی را نظیر تعیین ارتباط بین میدان ثقل زمین و سطوح رفرانس ژئودزی را تعقیب کنیم.

سه متغیر مذکور عبارتند از مختصات نقطه در فضا. این سه مختصات یا سه عدد حقیقی را میتوان مولفه‌های بردار وضعیت $\vec{r}$ نیز دانست.

۲-۲ : جاذبه نیوتنی

پیش از اول کشفیات نیوتن را میتوان نتایج تجربی (مشاهدات نجومی) دانست که توسط تیکو براهه (Tycho-de-Brahe) منجم دانمارکی در سده دوم قرن شانزدهم بدست آمده‌اند. بر اساس این مشاهدات منجم آلمانی کپلر (Johannes Kepler) توانست سه قانون مشهور حاکم بر حرکات سیارات بدور خورشید را در اوایل قرن هفدهم فرموله کند. با استفاده از این سه قانون تجربی، ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی اسحق نیوتن (Isaac Newton) قانون جاذبه خود را که کماکان سنگ زیر بنای مکانیک نیوتنی باقی مانده است ارائه داد.

فرمول کلاسیک این قانون بصورت زیر میباشد. نیروی جاذبه دو جانبه دو نقطه مادی با اجرام m_1 و m_2 متناسب با حاصلضرب اجرام و معکوس مربع فاصله بین آنها میباشد. این نیروها بصورت برداری چنین نوشته میشود

$$\vec{f}_1 = -k\,\frac{m_1 m_2}{\rho^3}\,\vec{\rho}_1 \quad , \quad \vec{f}_2 = -k\,\frac{m_1 m_2}{\rho^3}\,\vec{\rho}_2$$

که در آن $\vec{\rho}_1 = -\vec{\rho}_2$ بردارهائی هستند که دو نقطه m_1 و m_2 را بهم وصل میکنند. این بردارها در جهت عکس بردارهای نیروی مربوطشان میباشند. ضریب تناسب k را ثابت جاذبه نیوتنی مینامند. نتیجه اندازه‌گیریهای متعدد از مقدار ضریب k بصورت زیر میباشد

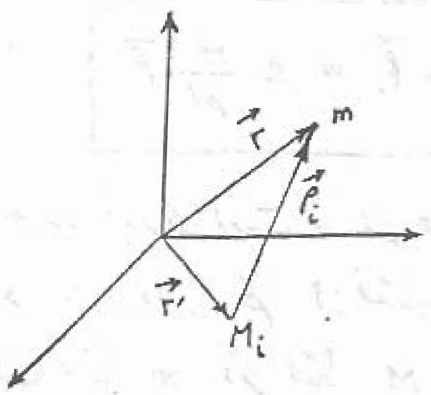
$$k = (6.67 \pm 0.007)\,10^{-8}\ [cm^3\, g^{-1}\, sec^{-2}]$$

میدان فوق بنام میدان جاذبه یک نقطه مادی بجرم M می باشد. ملاحظه میشود که در اینجا تاثیر جاذبه نقطه m روی M در نظر گرفته نشده است.

۲-۴ : میدان جاذبه یک جسم فیزیکی

با تجربه معلوم شده است که نیروهای جاذبه را میتوان بروش بردارهای معمولی در فضای اقلیدسی E_3 جمع آوری کرد. بنابراین اگر دو جرم M_1 و M_2 داشته باشیم که جرم واحد m را جذب کنند، نیروی جاذبه حاصل بصورت مجموع زیر نوشته میشود.

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = k\left(-\frac{M_1}{\rho_1^3}\vec{\rho}_1 - \frac{M_2}{\rho_2^3}\vec{\rho}_2\right)$$



بردارهای $\vec{\rho}_1$ و $\vec{\rho}_2$ بردارهایی هستند که بترتیب M_1 و M_2 را به m وصل میکنند. مشابه فوق میتوان مجموع نیروهای جاذبه حاصل از n نقطه مادی $M_1, M_2, \ldots, M_n$ را بصورت زیر نوشت

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = -k\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{\rho_i^3}\vec{\rho}_i \quad , \quad \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r'}$$

بردار $\vec{r'}$ عبارتست از بردار موقعیت نقطه M_i . در اینجا باز نیروهای جاذبه بین M_i و

نیروی گریز از مرکز f_c در فرم برداری چنین است

$$\vec{f}_c = m\omega^2 \vec{r}$$

حالتی را در نظر بگیرید که جسم بجرم واحد m روی و یا بالای سطح جسم جاذب در حال دوران B قرار گرفته و بهمراه آن دوران کند. در این حال جسم m تحت تاثیر دو نیرو یکی نیروی جاذبه جسم B که آنرا بطرف خود میکشد و دیگری نیروی گریز از مرکز که جسم m را بطرف خارج میراند. برآیند دو نیروی فوق را موسوم به نیروی ثقل بوده و بصورت زیر نوشته میشود

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_c = -k\int_B \frac{\sigma}{\rho^3}\vec{\rho}\, dB + \omega^2 \vec{r}$$

اختلاف بین دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{\rho}$ را در نظر بگیرید.

دو نیروی یاد شده نیروهائی هستند که بر هر جسم ساکن روی زمین وارد میشوند. ملاحظه کنید که اگر $f_g > f_c$ باشد جسم بجهت زمین جذب میشود و اگر $f_g < f_c$ باشد جسم بسمت خارج رانده میشود.

نشان میدهند که در آنها $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در امتداد سه محور مختصات میباشند.
معمولاً حصول پتانسیل از طریق انتگرال گیری میدان برداری کار ساده‌ای نیست زیرا این کار منجر به حل معادلات انتگرال میشود که در نوع خود مشکل است. بنابراین سعی میشود که به نحوی این مرحله پشت سر گذاشته شود. اگر پتانسیل وجود داشته باشد کاملاً نشان داده میشود که گرادیان آن همان میدان مورد نظر است.
بعبارت دیگر اگر یک میدان اسکالر چنان بیابیم که گرادیان آن معادل میدان برداری ما باشد آنگاه پتانسیل پیدا شده است. پتانسیل بهترین تابع مورد استفاده در فیزیکال ژئودزی میباشد.

۲-۷ پتانسیل یک نقطه مادی

میتوان نشان داد که پتانسیل یک نقطه مادی به جرم M برابر با

$$V(\vec{r}) = k\frac{M}{r}$$

میباشد. با فرض اینکه نقطه M را در مرکز سیستم مختصات فرض کنیم. برای اینکار گرادیان تابع فوق را محاسبه میکنیم

$$\nabla(V) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial r}\nabla(r) \quad , \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \, ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \, , \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \Rightarrow \nabla(r) = \frac{\vec{r}}{r} \quad , \frac{\partial V}{\partial r} = -k\frac{M}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla(V) = -k\frac{M}{r^3}\vec{r}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x-\xi}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y-\eta}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{\rho}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho^{-3}\left[(x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k}\right] = -\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla(V) = k\int_B \sigma \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) dB = -k\int_B \frac{\sigma}{\rho^3}\vec{\rho}\, dB = \vec{f}$$

معادله فوق بیانگر شرط لازم و کافیست که تابع V پتانسیل میدان $\vec{f}$ باشد.

۲-۹ : پتانسیل یک جسم در حال دوران

بطوریکه دیده شد نیروی ثقل $\vec{f}$ عبارتست از برآیند دو نیروی جاذبه $\vec{f}_g$ و نیروی گریز از مرکز $\vec{f}_c$. از آنجائیکه ∇ یک اپراتور خطی است یعنی بازاء کمیتهای اسکالر A و B تساوی $\nabla(A+B) = \nabla(A) + \nabla(B)$ برقرار میباشد، میتوان پتانسیل ثقل را بصورت مجموع دو پتانسیل جاذبه و پتانسیل گریز از مرکز حساب کرد. اگر V و W را بترتیب پتانسیلهای جاذبه و گریز از مرکز بنامیم میتوان نوشت

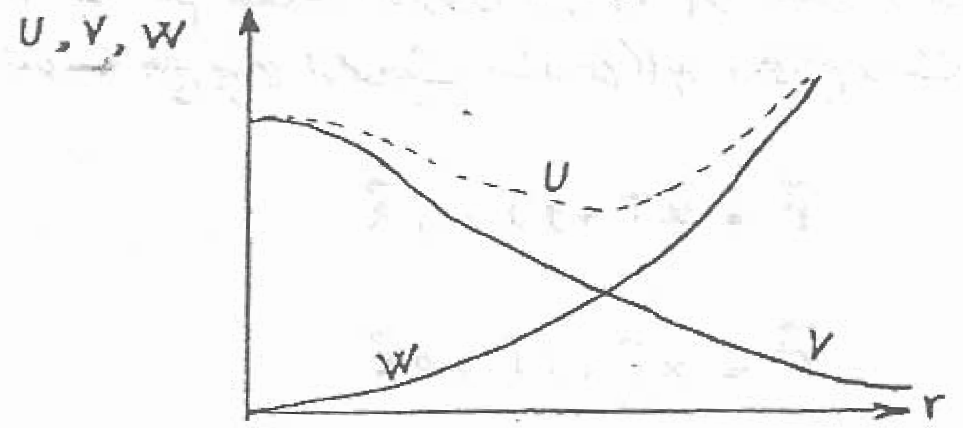
$$\nabla(V+W) = \nabla(V) + \nabla(W) = \vec{f}_g + \vec{f}_c = \vec{f}$$

دیده میشود که مجموع $V+W$ خود پتانسیل ثقل میباشد. پس برای بدست آوردن آن باید هر دو پتانسیل V و W را بیابیم. پتانسیل V از قبل (بخش ۲-۸) معلوم است حال

ملاحظه میشود که W تابعی است که گرادیان آن همان نیروی گریز از مرکز میباشد. حال میتوان پتانسیل کل U را بصورت زیر نوشت

$$\boxed{U = V + W = K\int_B \frac{\sigma}{\rho}\, dB + \frac{1}{2}\omega^2 r^2}$$

یک نگاه گذرا به فرمول فوق نشان میدهد که با دور شدن از سطح جسم B یا به تعبیر دیگر با افزایش هر دو کمیت ρ و r مقدار پتانسیل V کاهش یافته و بر عکس به مقدار پتانسیل W اضافه میشود. بنابراین مکانی در فضای اطراف جسم B وجود دارد که در آنجا $\vec{F}_c = -\vec{F}_g$ خواهد بود. شکل زیر تغییرات دو پتانسیل V و W و پتانسیل مجموع آنها یعنی U را بازای تغییرات فاصله r نشان میدهد.



از شکل فوق پیداست که در فاصله‌ای از جسم B پتانسیل U مینیمم است. در این محل داریم $\vec{F}_c = -\vec{F}_g$. در اینجا بردار ∇U فاقد مؤلفه شعاعی میباشد یعنی اینکه گرادیان تابع U تنها دارای مؤلفه مماسی میباشد. این محل در واقع جائی است که قمرهای مصنوعی ساکن (نسبت به زمین) قرار داده میشوند.

ملاحظه کنید که محاسبه انتگرال فوق در نقطه‌ای ($\vec{r}$) واقع در سطح و یا داخل جسم B مواجه با ابهام میگردد. چراکه در محاسبه انتگرال سوتی مربوط به بردار

المان سطحی ds میباشد. اگر مقدار دیورژانس ، $\nabla(\vec F)$ ، در نقطه $\vec r$ مثبت باشد ما جهت را از منبع تولید (Source) میگیریم و اگر منفی باشد جهت از منبع مصرف (Sink) میگیریم.

حال با فرض اینکه S یک سطح کروی است (اثبات نشان داد که شکل سطح S در نتیجه تأثیری در محاسبه دیورژانس ندارد) دیورژانس میدان جاذبه را محاسبه میکنیم جرمی که توسط سطح کروی S محدود شده است از رابطه زیر بدست میآید

$$M = \sigma V_0$$

σ دانسیته داخل سطح S و V_0 حجم کره S میباشد. این جرم ایجاد نیروی جاذبه

$$\vec F = -k\frac{M}{r^3}\vec r$$

خواهد کرد. فرمول فوق برای حالتی است که مرکز کره S را منطبق بر مرکز مختصات قرار دهیم. این نیرو مستقیماً عمود بر سطح S خواهد بود بنابراین مولفه نرمال بر سطح آن خود نیرو بوده و مقدار آن بصورت

$$F_n = -k\frac{\sigma V_0}{r^2}$$

خواهد بود. پس داریم

$$\oint\!\!\oint F_n\,dS = -k\frac{\sigma V_0}{r^2}\oint\!\!\oint dS = -k\frac{\sigma V_0}{r^2}(4\pi r^2) = -4\pi k\sigma V_0$$

$$\nabla(\vec F) = \lim_{V_0\to 0}\frac{\oint\!\!\oint F_n\,dS}{V_0} = \lim_{V_0\to 0}(-4\pi k\sigma) = -4\pi k\sigma \qquad (\text{Sink})$$

مقدار فوق برای دیورژانس نیروی جاذبه $\vec F$ برای تمام نقاط صادق است. ملاحظه میشود که مقدار دیورژانس بستگی به دانسیته σ دارد. حال اگر جسم B به دانسیته σ را در یک نقطه با دانسیته صفر در نظر بگیریم مقدار دیورژانس

دو معادله دیفرانسیل مذکور را میتوان با فرمول کلی $\Delta(V) = h(\vec{r}) \neq 0$ نشان داد که در آن $h(\vec{r})$ یک تابع شناخته شده است. آخرین معادله دیفرانسیل را معادله لاپلاس مینامند

$$\Delta(V) = 0$$

معادلات دیفرانسیل پواسن و لاپلاس از معادلات دیفرانسیل بنیادی تئوری پتانسیل میباشند.

تاکنون یاد گرفتیم که پتانسیل جاذبه یک جسم B در نقاط داخل و یا روی آن در معادلات دیفرانسیل پواسن و در نقاط خارج از آن در معادله دیفرانسیل لاپلاس صدق میکند.

ملاحظه میشود که اپراتور Δ نیز یک اپراتور خطی است بطوریکه بازای توابع A و B و ثابت K میتوان نوشت

$$\Delta(A+B) = \Delta(A) + \Delta(B)$$

$$\Delta(KA) = K\Delta(A)$$

حال ببینیم که چه معادله دیفرانسیلی در مورد پتانسیل گریز از مرکز صادق است.

اگر محور z را منطبق بر محور دوران قرار دهیم میتوان نوشت

$$r''^2 = x^2 + y^2$$

از طرف دیگر داریم

$$\Delta(W) = \Delta\left(\frac{1}{2} r''^2 \omega^2\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \Delta(r''^2)$$

و

$$\Delta(r''^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2)$$

$$= 2 + 2 + 0 = 4$$

از آنجائیکه دیدیم که عملیات فوق مقدار $\nabla r''^2$ ثابت و برابر ۴ میباشد در نتیجه میگیریم

تابع هارمونیک در منطقه A دارای مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود روی سطح مرزی منطقه B بوده و در داخل B دارای مقادیری کمتر از ماکزیمم و بیشتر از مینیمم می‌باشد.

۲) تابع هارمونیک در منطقه A یک تابع تحلیلی در هر نقطه از A بوده و دارای تمام مشتقات از مراتب مختلف می‌باشد

۳) تابع هارمونیک قابل منعکس کردن کروی است (spherical inversion) یعنی اگر تابع $V(\vec{r})$ یک تابع هارمونیک در داخل و یا خارج کره به شعاع واحد باشد تابع $\frac{1}{r}V(\vec{R})$ که در آن $\vec{R}=\frac{\vec{r}}{r^2}$ می‌باشد یک تابع هارمونیک در خارج و یا داخل همان کره خواهد بود در حالیکه منعکس کره شعاع واحد خودش می‌باشد. (کره شعاع واحد که مرکزش منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد). این خاصیت تابع هارمونیک عمومیت داشته و برای هر منطقه $B \subset A$ نیز صادق است با این تفاوت که B نیز منعکس می‌گردد.

۴) مقدار تابع هارمونیک در مرکز یک کره برابر است با میانگین مقادیر تابع روی سطح کره. اگر کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R در نظر بگیریم مقدار تابع در مبدأ مختصات از انتگرال زیر قابل محاسبه است.

$$V(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oiint V(\vec{r})\,ds$$

۵) مهمترین خاصیت توابع هارمونیک توسط ریاضی‌دان فرانسوی دیریکله (Dirichlet) بیان شده است. وی ثابت کرد تابعی که دارای مقادیر معین روی یک سطح بسته در فضای تابع باشد منحصر بفرد می‌باشد. یعنی تابع دیگری وجود ندارد که دارای همان مقادیر روی آن سطح باشد. این خاصیت بعنوان اصل دیریکله

اساساً سه نوع مختلف مسئله BVP وجود دارد. اولین مسئله همان مسئله دیریکله میباشد که در اصل دیریکله تشریح شد. مسئله به این صورت است که مقدار تابع هارمونیک روی سطح مرزی مشخص مستقیماً داده شده است مطلوبست محاسبه تابع در داخل منطقه مزبور. بالطبع اگر مطلوبست حل معادله لاپلاس $(\Delta V = 0)$ بشرطیکه تابع V دارای مقادیر $V(\vec{r})$ ، $\vec{r} \in S$ روی سطح معلوم S (مرز منطقه مورد نظر) باشد. مسئله دارای جواب است اگر و تنها اگر فرضیات دیریکله برقرار باشد.

دومین مسئله BVP دارای نام Neuman بوده که با مسئله اول فرق میکند و آن اینکه بجای معلوم بودن خود تابع روی مرز مشخص S، مشتق آن در امتداد عمود (n) بر سطح S معلوم میباشد.

$$\frac{\partial V}{\partial n}(\vec{r}) \quad , \quad \vec{r} \in S$$

برای اینکه مسئله فوق دارای جواب باشد بایستی معادله زیر برقرار باشد

$$\oiint_S \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = 0$$

البته شرط فوق برای یک تابع هارمونیک برقرار میباشد. چراکه کل خطوط حاصل از گرادیان تابع هارمونیک که از تمام سطح بسته S عبور میکنند مساوی صفر میباشد. برقراری شرط فوق و وجود اصل دیریکله کافیست که مسئله Neuman دارای جواب واحد باشد.

هرگاه بجای مقادیر خود تابع هارمونیک و یا مقادیر مشتقات نرمال آن یک ترکیب خطی از آنها در روی سطح بسته ای معلوم باشد مسئله شکل دیگری بخود میگیرد که آنرا سومین مسئله B.V.P. مینامند.

$$f(\vec{r}) = C_1 V(\vec{r}) + C_2 \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} \qquad \vec{r} \in S$$

در اینصورت معادله لاپلاس شکل

$$\Delta V = \Delta (X \Phi) = \Phi \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

و یا

$$X^{-1} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\Phi^{-1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)$$

در می آید

۲) از آنجائیکه طرف اول معادله فوق تنها تابع x بوده و طرف ثانی تابع متغیرهای غیر از x یعنی y و z میباشد تساوی دو تابع از متغیرهای مختلف موقعی میسر است که هر دو برابر یک مقدار ثابت باشند بنابراین خواهیم داشت

$$X^{-1} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = C_1 \quad , \quad \Phi^{-1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = -C_1$$

بعبارت دیگر

$$X'' - C_1 X = 0 \quad , \quad \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} + C_1 \Phi = 0$$

میبینید اولین متغیر یعنی x از بقیه جدا گردید.

۳) حال تابع Φ را به ترکیبی از متغیرهای مستقل y و z تجزیه میکنیم

$$\Phi(y, z) = Y(y)\, Z(z)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل دوم بصورت زیر در می آید

$$Z Y'' + Y Z'' + C_1 Y Z = 0$$

دارای یک جواب برای $x \in [a,b]$ میباشد.

بازاء هر مقدار ویژه از λ یعنی λ_i معادله دیفرانسیل مزبور فقط یک جواب دارد که آنرا y_i می نامیم. این جوابها (توابع) را توابع ویژه معادله دیفرانسیل مینامیم. بنابراین تعداد بیشماری توابع ویژه کاملاً متفاوت از همدیگر برای معادله دیفرانسیل Sturm Louville وجود دارند. میتوان نشان داد که توابع ویژه یک معادله دیفرانسیل Sturm Louville ایجاد یک سیستم توابع متعامد در فاصله $[a,b]$ با وزن ρ میکنند. یعنی داریم

$$\int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, \rho(x)\, dx = N_i\, \delta_{ij}$$

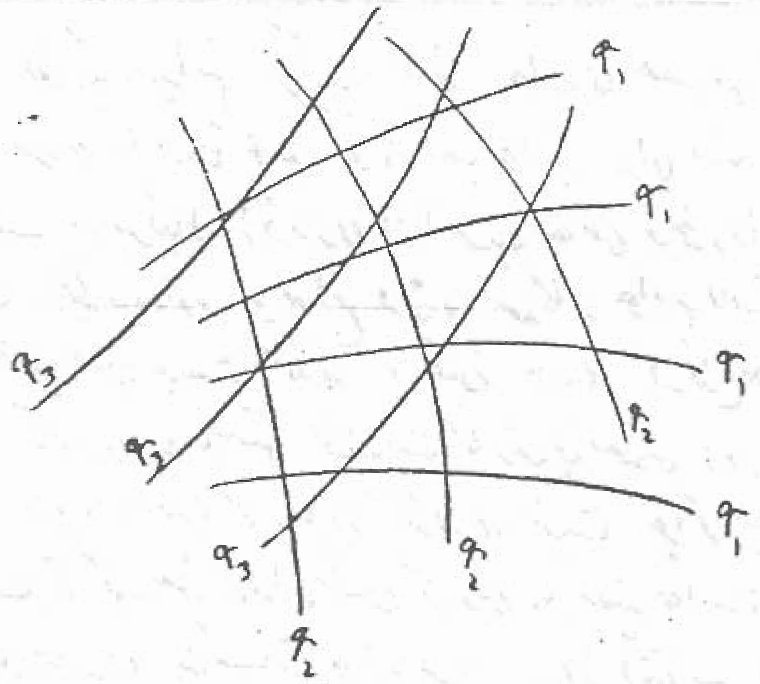
که در آن $N_i = \int_a^b y_i^2(x)\rho(x)\,dx$ نرم تابع y_i و δ_{ij} همان دلتای کرونکر kronecker's δ میباشد.

مثال: برای $K(x)=1$ و $q(x)=0$ و $\rho(x)=1$ در فاصله $[a,b]$ معادله دیفرانسیل Sturm-Louville معروف معادله دیفرانسیل یک حرکت هارمونیک میباشد مقادیر ویژه این معادله بصورت زیر میباشند.

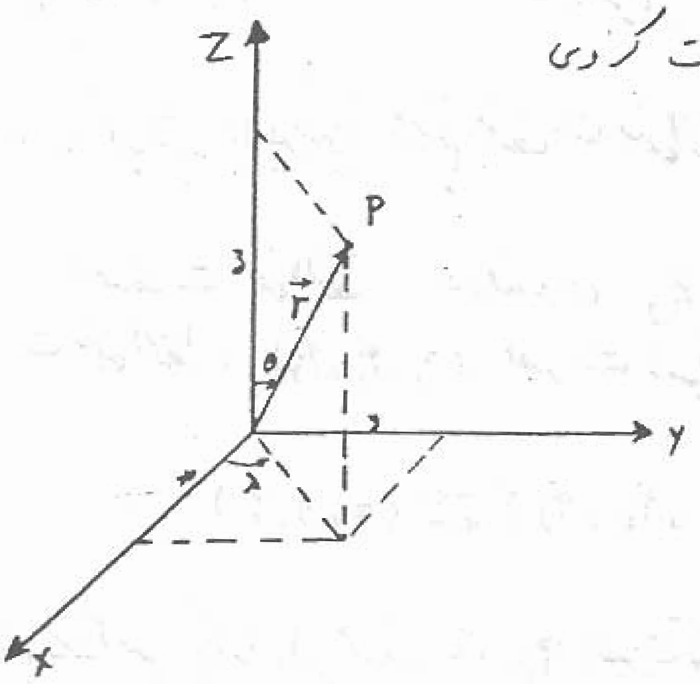
$$\lambda_i = \frac{4\pi^2}{(b-a)^2}\, i^2 \quad , \; i = 0,1,2,\dots$$

وبازای آنها توابع ویژه معادله بصورت زیر خواهند بود

$$\cos\sqrt{\lambda_i}(x-a),\; \sin\sqrt{\lambda_i}(x-a) \quad , \; i = 0,1,2,\dots$$



مثال : ۱ـ سیستم مختصات کروی



$$x = r \sin\theta \cos\lambda$$

$$y = r \sin\theta \sin\lambda$$

$$z = r \cos\theta$$

و

$$r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{(x^2+y^2)}/z\right)$$

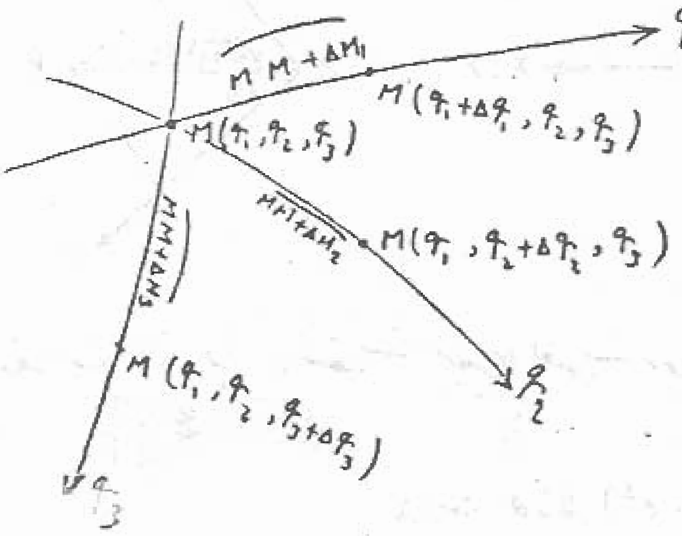
$$\lambda = \operatorname{arctg}\left(y/x\right)$$

ضرایب لامه (Lamé's Coefficients)

توابع H_i از مختصات q_1, q_2, q_3 را که بصورت

$$H_i = \lim_{\Delta q_i \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM+\Delta M_i}}{\Delta q_i} \qquad i = 1,2,3$$

تعریف میشوند ضرایب لامه مینامند.



$\overset{\frown}{MM+\Delta M_i}$ عبارتست از طول منحنی مختصات q_i از نقطه $M(q_1,q_2,q_3)$ تا نقطه $M+\Delta M_i$ بازای $i=1,2,3$

$$M(q_1, q_2, q_3) \;,\; M+\Delta M_1 = M(q_1+\Delta q_1, q_2, q_3)$$
$$,\; M+\Delta M_2 = M(q_1, q_2+\Delta q_2, q_3)$$
$$,\; M+\Delta M_3 = M(q_1, q_2, q_3+\Delta q_3)$$

بنابراین مشتق میدان اسکالر (f) را در امتداد این خطوط بصورت زیر نوشت

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

و از آنجا گرادیان میدان اسکالر f در سیستم مختصات منحنی الخط بشکل زیر خواهد بود.

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \vec{e}_i$$

با در نظر گرفتن المان حجمی در سیستم مختصات منحنی الخط بصورت $dv = \prod_i H_i \, dq_i$ میدان دیورژانس یک میدان برداری $\vec{F}$ را که مشتق از میدان اسکالر f میباشد ($\vec{F} = \nabla f$) بصورت زیر نوشت

$$\nabla \vec{F} = \left(\prod_i H_i^{-1}\right) \sum_i \frac{\partial \left(F_i H_i^{-1} \prod_j H_j\right)}{\partial q_i}$$

با در نظر گرفتن $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ میتوان لاپلاسین میدان f را چنین نوشت

$$\Delta f = \left(\prod_i H_i^{-1}\right) \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\left(H_i^{-1}\left(\prod_j H_j\right) H_i^{-1} \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\right)$$

$$= \left(\prod_i H_i^{-1}\right) \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\left(\prod_j H_j\right) H_i^{-2} \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\right)$$

مثال: صورت مناسب اپراتور لاپلاسین در سیستم مختصات کروی

برای این کار کافیست که مقادیر H_i را در سیستم مختصات کروی ($H_r = 1$ و $H_\theta = r$ و $H_\lambda = r\sin\theta$) در معادله لاپلاسین فوق جایگزین نماییم.

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{r^2 \sin\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)\right]$$

$$\Delta f = 2r\frac{R'}{R} + r^2\frac{R''}{R} + \cot\theta\,\frac{\frac{\partial Y}{\partial\theta}}{Y} + \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}}{Y} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}}{Y} = 0$$

و یا

$$\frac{1}{R}\left(2rR' + r^2R''\right) = -\frac{1}{Y}\left(\cot\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \sin^{-2}\theta\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}\right) = \text{ثابت} = C_1$$

اولین معادله دیفرانسیل که تابع تنها متغیر r میباشد بصورت زیر خواهد بود

$$r^2R'' + 2rR' - C_1R = 0 \qquad (I)$$

معادله دیفرانسیل دوم تابع دو متغیر دیگر θ و λ بصورت زیر خواهد بود

$$\cot\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \sin^{-2}\theta\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} + C_1Y = 0 \qquad (II)$$

حال جواب معادله دیفرانسیل فوق شکل حاصلضرب دو تابع جداگانه از متغیرهای θ و λ جستجو میکنیم

$$Y(\theta,\lambda) = T(\theta)\cdot L(\lambda)$$

در اینصورت مشتقات جزئی زیر را خواهیم داشت

$$\frac{\partial Y}{\partial\theta} = \frac{dT}{d\theta}L = T'L\ ,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} = T''L\ ,\quad \frac{\partial Y}{\partial\lambda} = TL'\ ,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} = TL''$$

۲-۱۷ توابع ویژه معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی (هارمونیک کروی)

برای اینکه ببینیم که معادله دیفرانسیل فوق به ازاء چه مقادیری از ثابت‌های C_1 و C_2 دارای جواب میباشند، نخست معادله دوم را مورد بررسی قرار میدهیم. بدیهی است که معادله II'' معادله حرکت هارمونیک میباشد. بنابراین مطابق بخش ۲-۱۴ توابع ویژه معادله مزبور بصورت زیر خواهند بود

$$\cos \lambda\sqrt{\mu_m}\ ,\ \sin \lambda\sqrt{\mu_m}\ ,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

فاصله‌ای که λ در آن تعریف شده است عبارتست از $[0,2\pi]$ و یا $[-\pi,+\pi]$. بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از

$$C_2=\mu_m=m^2\,\frac{4\pi^2}{4\pi^2}=m^2\ ,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

و لذا توابع ویژه عبارتند از

$$\cos m\lambda\ ,\ \sin m\lambda\ ,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

هر ترکیب خطی از توابع فوق خود جواب دیگری برای معادله دیفرانسیل II'' میباشد.

بررسی معادله دیفرانسیل II' کمی مشکل‌تر از معادله II'' میباشد. برای حل معادله مزبور میتوان از متغیر جدید t استفاده کرد

$$t=\cos\theta$$

ثابت C_2 را در معادله فوق چنان انتخاب میکنیم که به ازای آن معادله "II" نیز دارای جواب باشد یعنی $C_2 = m^2$. بنابراین معادله لژاندر درجه m ام شکل زیر را حاصل میکنیم

$$(1-\tau^2)\, T''_{\tau\tau} - 2\tau T'_\tau + \left(c_1 - \frac{m^2}{1-\tau^2}\right) T = 0$$

باز دیده میشود که معادله لژاندر نیز از نوع معادله دیفرانسیل Sturm-Liouville میباشد که فرم دیفرانسیلی آن بشکل زیر نوشته شود

$$\left[(1-\tau^2)\, T'_\tau\right]' - \frac{m^2}{1-\tau^2} T + c_1 T = 0$$

در مقایسه با فرم کلی معادله S.-L. میتوان نوشت

$$K = (1-\tau^2) \quad , \quad q = \frac{m^2}{1-\tau^2} \quad , \quad \rho = 1$$

توابع فوق به ازای $\tau \in [-1,1]$ دارای شرایط معادله S.L. میباشند . میتوان نشان داد که مقادیر ویژه معادله فوق عبارتند از

$$c_1 = \bar{\mu}_n = n(n+1) \quad , \quad n \geqslant m$$

و توابع ویژه آن عبارتند از

$$P_{nm}(\tau) = (1-\tau^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\tau^m} P_n(\tau)$$

که در آن توابع $P_n(\tau)$ بصورت زیر میباشند

$$P_n(\tau) = \frac{1}{n!\, 2^n} \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau^2 - 1)^n$$

۲ - ۱۸ متعامد بودن هارمونیکهای کروی وابسته با هارمونیکهای کروی

در بخش ۲-۱۴ دیدیم که توابع ویژه معادله دیفرانسیل sturm-Laiville در یک فاصله مناسب دو بدو با وزن ρ متعامد میباشند. بنابراین توابع مثلثاتی $\cos m\lambda$ و $\sin m\lambda$ در فاصله $[-\pi,+\pi]$ و با وزن واحد متعامد میباشند. داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_i(\lambda)\,\Phi_j(\lambda)\,d\lambda = N_i\,\delta_{ij}$$

تابع Φ سینوسی و یا کسینوسی میباشد. مقدار N_i بصورت زیر میباشد

$$N_i = \begin{cases} 2\pi & i=0 \\ \pi & i\neq 0 \end{cases}$$

مقدار انتگرال فوق همیشه صفر است اگر توابع Φ_i و Φ_j هردو سینوسی و یا هردو کسینوسی نباشند.

توابع وابسته لژاندر P_{nm} نیز در فاصله $[0,\pi]$ بازای θ و یا در فاصله $[-1,+1]$ بازای t و با وزن واحد متعامد میباشند. میتوان نشان داد که

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(t)\,P_{km}(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} P_{nm}(\cos\theta)\,P_{km}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = M_{nm}\,\delta_{nk}$$

که در آن $M_{nm} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$ میباشد. بنابراین حتی توابع

$$\Phi_{nm}(\theta,\lambda) = \Phi_m(\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta)$$

که در آن تابع $\Phi_m(\lambda)$ بصورت $\sin m\lambda$ و یا $\cos m\lambda$ میباشد در نقطه

هر تابع قابل انتگرال گیری $h(\theta,\lambda)$ را که در سطح A تعریف شده باشد میتوان به سری دوبعدی فوریه بصورت زیر بسط داد

$$h(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C_{nm}\, \Phi_{nm}(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$$

که در آن ضرایب C_{nm} بصورت زیر محاسبه میشوند

$$C_{nm} = O_{nm}^{-1} \int_A h(\theta,\lambda)\, \Phi_{nm}(\theta,\lambda)\, dA$$

در انتگرال گیری فوق عمداً علامت $\oiint_A$ در جای علامت $\int_A$ بکار رفته چون لازم نیست که حتماً سطح A یک سطح بسته باشد.
سطح کره یکی از مناطق نظیر A میباشد. هر تابعی نظیر h که روی کره تعریف شده باشد میتواند به سری هارمونیکهای کروی گسترش یابد بدون آنکه ارتباطی به معادله لاپلاس داشته باشد. اما اگر تابع h اتفاقاً نماینده مقادیر مرزی یک مسئله BVP باشد آنگاه تابع

$$R(r)\, h(\theta,\lambda)$$

جواب مسئله BVP در داخل و یا خارج کره ای خواهد بود که تابع h در روی آن معلوم است.

$$\alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0$$

میباشد. واز آنجا داریم

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + n(n+1)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(n^2+n+\frac{1}{4})} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(n+\frac{1}{2})^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm (n+\frac{1}{2}) = \begin{cases} n \\ -n-1 \end{cases}$$

بنابراین دو سری از توابع بدست می‌آیند که در معادله اولر صدق میکنند که عبارتند از

$$R_n^{(1)} = e^{nt} = r^n \quad , \quad R_n^{(2)} = e^{-(n+1)t} = r^{-(n+1)}$$

بطوریکه از قبل میدانیم، برای اینکه مسئله BVP دارای جواب درخارج از یک کره باشد لازم است که مقدار آن جواب در فاصله بی‌نهایت بسمت صفر میل کند. بنابراین تابع $R_n^{(1)}$ نمیتواند بعنوان جواب مسئله BVP درخارج کره باشد. از طرف دیگر معادله $R_n^{(2)}$ نمیتواند بعنوان جواب مسئله در داخل کره باشد چراکه مقدار تابع $R_n^{(2)}$ با کاهش r یعنی $r \to 0$، بسمت بی‌نهایت میل میکند واین خاصیت مغایر با اولین و چهارمین خواص توابع هارمونیک میباشد. بنابراین تابع $R^{(1)}$ جواب معادله لاپلاس در داخل کره و $R^{(2)}$ جواب آن در خارج کره میباشد.

ممکن است کره‌ای داشته باشیم که تابعی هم در داخل و هم درخارج آن هارمونیک باشد (بصرفنظر از منطقه‌ای یا نقطه‌ای. چراکه هیچ تابعی نمیتواند درتمام فضا هارمونیک باشد). دراینصورت لازم است که هردو جواب داخلی و خارجی دارای مقدار یکسان روی کره باشند. واضح است که چنین شرطی تنها روی کره بشعاع واحد $(r=1)$ برقرار است. در واقع دو جواب معادله لاپلاس یعنی

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n \quad , \quad f_e = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} Y_n$$

عدد ثابت i نماینده واحد مجازی در اعداد مختلط ($i^2=-1$) و Q_{nm} تابع لژاندر از نوع دوم و b نصف قطر اقصر بیضی (بیضی‌ای که با پارامترهای b و $E=\sqrt{a^2-b^2}$ تعریف شده است) و $\tilde{f}_i$ جواب معادله لاپلاس در داخل و $\tilde{f}_e$ جواب در خارج سطح مرزی (بیضی E و b) می‌باشند. نقش بیضی E و b نظیر کره شعاع a در شکل ۱۹-۲ می‌باشد.

ملاحظه می‌کنید که چهارچوب فرمولهای $\tilde{f}_i$ و $\tilde{f}_e$ در سیستم مختصات بیضوی نظیر آنها در سیستم مختصات کروی می‌باشد. اگر اندیس m در توابع p و q از تغییر بالا درج نداشت جوابهای معادله لاپلاس در دو سیستم مختصات یکسان نوشته میشد. در سیستم مختصات بیضوی بلحاظ غیرتقارن بودن مختصات بیضوی نسبت به θ، توابع شعاعی p و q علاوه بر رتبه (n) بستگی به درجه (m) هارمونیکهای کروی نیز دارند.

توابع $\tilde{f}_i$ و $\tilde{f}_e$ را میتوانیم بصورت خلاصه زیر بنویسیم

$$\tilde{f}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm} Y_{nm}$$

$$\tilde{f}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} q_{nm} Y_{nm}$$

که در آن

$$Y_{nm} = P_{nm}(\cos\theta)\left(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda\right)$$

میباشد.

مشتق تابع مورد سؤال در امتداد عمود بر سطح مرزی معلوم $(r=a)$ روی آن

$$h(\theta,\lambda) = \frac{\partial}{\partial n} f(r,\theta,\lambda)\Big|_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} f(r,\theta,\lambda)\Big|_{r=a}$$

با معلوم بودن شرایط مرزی فوق میتوانیم جواب مسئله BVP را بشکل

$$f_e = \sum_{n=0}^{\infty} R_n' Y_n'$$

حدس بزنیم (در اینجا برای سهولت تنها تابع مورد نظر را در خارج کره $r=a$ حساب میکنیم).
در اینجا توابع Y_n' همان هارمونیکهای کروی میباشند که در بخشهای قبل نیز بکار رفتند
اما تابع $h(\theta,\lambda)$ برابر مشتق تابع مورد نظر در روی کره و در امتداد نرمال خارجی سطح
کره میباشد. تابع R_n' بصورت $R_n' = \alpha_n R_n$ میباشد که α_n یک عدد
ثابت و تابع اندیس n میباشد. میتوان نشان داد که مسئله فوق دارای جواب
بصورت $f_e = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n Y_n'$ بوده که در آن $\alpha_n = -a/(n+1)$ میباشد.
برای نشان دادن آن مشتق تابع مفروض را محاسبه میکنیم

$$f_e = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n' \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a^{n+2}}{n+1} Y_n' \frac{\partial}{\partial r} r^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} Y_n'$$

مقدار مشتق فوق روی کره $r=a$ برابر

$$\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n'$$

میباشد که همان مقدار مرزی است.

برای اثبات آن دوباره میتوان نظیر مسئله دوم اقدام کرد. شکل جواب مسئله سوم در خارج مرز کروی $(r=a)$ بصورت

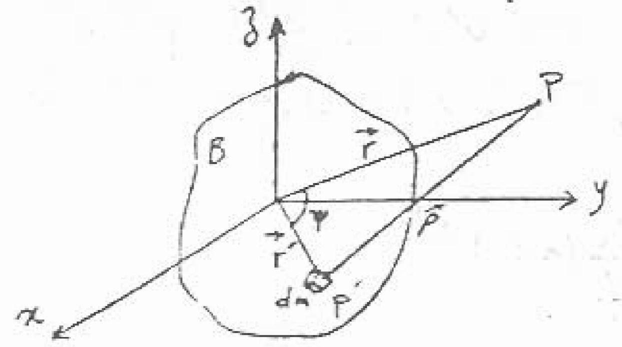
$$f_e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{Y_n^*}{c_1 - \frac{c_2}{a}(n+1)}$$

خواهد بود.

ملاحظه کنید که سری از هارمونیکهای کروی محدود شده تا هر درجه دلخواهی خود یک جواب دقیق معادله لاپلاس میباشد چرا که یک سری محدود شده از هارمونیکهای کروی خود یک تابع هارمونیک میباشد. از این نقطه نظر اهمیت که یک سری محدود شده از هارمونیکهای کروی تا چه حد مقدار مرزی را تقریب میکند. بنابراین هر سری محدود شده از هارمونیکهای کروی خود معرف پتانسیلی است و آن نیز معرف مرزی است. دقت تقریب پتانسیل واقعی بستگی به دقت تقریب مقدار مرزی دارد. این مزیت عمده استفاده از هارمونیکهای کروی میباشد.

۲-۲۲ ارتباط بین ضرایب هارمونیکهای کروی و جسم جذب کننده

فرض کنید که میخواهیم مسئله دیریکله را در خارج کره ای $(r=R)$ که کاملا جسم جذب کننده B را دربر گرفته است حل کنیم. در اینجا میخواهیم بدانیم که ارتباط بین ضرایب هارمونیکهای کروی و جسم جذب کننده چیست. بالعبارت دیگر آیا با داشتن پتانسیل جاذبه یک جسم میتوان اطلاعاتی درباره خود جسم کسب کرد؟.
برای پاسخ به سوال فوق، پتانسیل جاذبه ناشی از جسم B، بشکل ۲-۸، را درنظر میگیریم



$$V(\vec{r}) = k \int_B \frac{\sigma}{\rho}\, dB$$

همچنین مقدار آن بعد از محاسبات طولانی را بطور زیر بدست آورد

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') +$$

$$2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta)\,P_{nm}(\cos\theta')\left(\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'\right)$$

فرمول فوق بنام فرمول تفکیک معروف است. فرمول تفکیک تقارن کامل نسبت به θ, θ' و λ و λ' دارد.

با جایگزینی نتایج حاصله در فرمول پتانسیل خواهیم داشت

$$V(\vec{r}) = K\int_B \frac{\sigma}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \Big[P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') +$$

$$2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta)\,P_{nm}(\cos\theta')\left(\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'\right)\Big]\, d$$

انتگرال فوق روی dB بایستی روی متغیرهای θ', λ', r' انجام گیرد بنابراین خواهیم داشت

$$V(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \int_B K\sigma\, r'^n P_n(\cos\theta')\, dB \;+$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta) \Big[\cos m\lambda \int_B K\sigma\, r'^n P_{nm}(\cos\theta') \cos m\lambda'\, dB +$$

$$\sin m\lambda \int_B K\sigma\, r'^n P_{nm}(\cos\theta') \sin m\lambda'\, dB \Big]$$

با ضرب و تقسیم طرف دوم پتانسیل در جمله a^{n+1} خواهیم داشت

۲-۲۳ تعبیر فیزیکی ضرایب هارمونیکهای درجه پائین

فرمولهائی که در بخش قبل بسط داده شد گویای معنی و اهمیت فیزیکی در مورد ضرایب هارمونیکهای درجه پائین میباشند. برای نشان دادن این مطلب از بسط هارمونیکهای درجه پائین شروع میکنیم. داریم

$$C'_{nm} = P_{nm}(\cos\theta')\cos m\lambda' \quad , \quad S'_{nm} = P_{nm}(\cos\theta')\sin m\lambda'$$

توابع وابسته لژاندر از درجات پائین عبارتند از

$$P_{00} = 1$$
$$P_{10} = \cos\theta'$$
$$P_{11} = \sin\theta'$$
$$P_{20} = \frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}$$
$$P_{21} = 3\sin\theta'\cos\theta'$$
$$P_{22} = 3\sin^2\theta'$$

بنابراین هارمونیکهای درجه پائین C'_{nm} و S'_{nm} بصورت زیر خواهند بود

$$C'_{00} = 1 \qquad S'_{00} = 0$$
$$C'_{10} = \cos\theta' \qquad S'_{10} = 0$$
$$C'_{11} = \sin\theta'\cos\lambda' \qquad S'_{11} = \sin\theta'\sin\lambda'$$
$$C'_{20} = \frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2} \qquad S'_{20} = 0$$
$$C'_{21} = 3\sin\theta'\cos\theta'\cos\lambda' \qquad S'_{21} = 3\sin\theta'\cos\theta'\sin\lambda'$$
$$C'_{22} = 3\sin^2\theta'\cos 2\lambda' \qquad S'_{22} = 3\sin^2\theta'\sin 2\lambda'$$

از طرف دیگر مختصات مرکز ثقل جسم B در سیستم مختصات (x,y,z) بصورت زیر داده میشود

$$\xi = \frac{1}{M}\int_B \sigma\, x\, dB$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int_B \sigma\, y\, dB$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\int_B \sigma\, z\, dB$$

که در آن M جرم جسم در نظر گرفته شده است.

با بسط ماتریس تانسور اینرسی جسم B در سیستم مختصات (x,y,z) بصورت.

$$J = \begin{Vmatrix} \int_B (y^2+z^2)\,\sigma\, dB & -\int_B xy\,\sigma\, dB & -\int_B xz\,\sigma\, dB \\ -\int_B xy\,\sigma\, dB & \int_B (x^2+z^2)\,\sigma\, dB & -\int_B yz\,\sigma\, dB \\ -\int_B xz\,\sigma\, dB & -\int_B yz\,\sigma\, dB & \int_B (x^2+y^2)\,\sigma\, dB \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{Vmatrix}$$

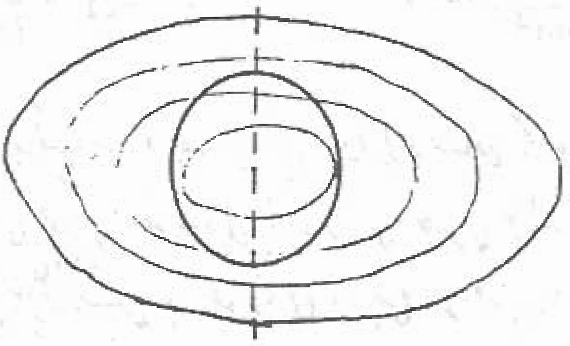
که در آن A ، B ، C ممان اینرسی های اصلی در سیستم مختصات و D ، E ، F اینرسی های حاصلضرب میباشند. ضرایب هارمونیک های درجه یک بصورت زیر در می آیند

$$A_{00} = \frac{K}{a} M \quad , \quad B_{00} = 0$$

$$A_{10} = \frac{K}{a^2} M \zeta \quad , \quad B_{10} = 0$$

میدان پتانسیل جاذبه (میدان جاذبه) سطوح هموار می‌باشند. انحناء آنها دارای تغییرات ملایم بوده مگر جائیکه تغییرات دانسیته ناگهانی باشد. سطوح هم‌پتانسیل هیچوقت همدیگر را قطع نمی‌کنند و از این نظر میتوان آنها را به پوسته‌های یک پیاز که یکی دیگری را در بر میپوشاند تشبیه کرد.

مثال: در شکل زیر مقاطعی از سطوح هم‌پتانسیل میدان پتانسیل جاذبه حاصل از تجمع کروی صلب و دورانی که توزیع جرم درداخل آن یکنواخت نمی‌باشد نشان میدهد



خطوط نیرو منحنی‌هائی هستند که در هر نقطه از آنها بردار گرادیان پتانسیل (بردار نیرو) مماس بر آنها میباشند. این منحنی‌ها همیشه و در همه جا عمود بر سطوح هم‌پتانسیل میباشند. برای اثبات آن از دیفرانسیل کامل تابع پتانسیل V استفاده میکنیم

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \vec{\nabla} V \cdot \vec{da}$$

فرمول فوق تغییرات پتانسیل (dV) را در امتدادهای ($\vec{da}$) مختلف نشان میدهد اگر امتداد $\vec{da} = (dx, dy, dz)$ روی صفحه مماس بر سطح هم‌پتانسیل $V(\vec{r}) = c$ قرار گیرد مقدار dV برابر صفر خواهد شد (تغییرات پتانسیل روی سطح هم‌پتانسیل صفر است) و در نتیجه $\vec{\nabla}V \cdot \vec{da} = 0$ بوده یعنی بردار $\vec{\nabla}V$ (بردار نیرو) عمود بر بردار $\vec{da}$ و بعبارت دیگر عمود بر سطح هم‌پتانسیل خواهد شد.

۳ - میدان جاذبه زمین و تقریب های آن

۳-۱ ژئوئید

زمین بمیزان واحد بصورت یک جسم الاستیک غیرهموژن عمل میکند. زمین به یک حالت تعادل رسیده است بنابراین شکل آن نمیتواند زیاد دور از شکل یکی از سطوح هم‌پتانسیل خود باشد. اگر جائی سطح زمین از سطح هم‌پتانسیل جدا شده است بعلل زیر میباشد

الف - وجود توده جامد وصلب (با شکل ناهموار خاص) در محل که البته نمیتواند منطبق بر یک سطح هم‌پتانسیل باشد

ب - توزیع غیریکنواخت جرم در محل

اگر آب اقیانوس‌ها هموژن بود (از نظر درجه شوری و درجه حرارت و ترکیبات معدنی و غیره) و اثر تأثیرات دینامیکی (نظیر جریانهای آب گرم، تخلیه رودخانه‌ها و غیره) وجود نداشت سطح اقیانوس‌ها نشانگر یکی از سطوح هم‌پتانسیل میبود. متأسفانه آب اقیانوس‌ها دارای شرایط فوق نیست به همین جهت سطح آن جدا از یک سطح هم‌پتانسیل بوده و گاهی این جدائی به ±2 متر نیز میرسد. آب های اقیانوس‌ها حتی در یک سطح متوسط هم میتوان گفت که از قطبین بطرف استوا دارای شیب میباشد (البته بعلت ذوب شدن ملایم یخ های قطبی).

سطح هم پتانسیلی که بطور متوسط از آب اقیانوس‌ها میگذرد ژئوئید نام دارد. بطور ریاضی میتوان ژئوئید را با سری بی‌نهایت زیر نشان داد

$$U(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = U_0 = \text{ثابت}$$

بنابراین سطوح هم‌پتانسیل هندسه فضائی را که در آن کار می‌کنیم تعیین می‌کنند. آنها در واقع چارچوب نقشه‌برداری را تعیین می‌کنند.

۲-۳ نکاتی درباره اسفروئید (Spheroid)

منظور از اسفروئید در ادبیات غیرانگلیسی یعنی ژئوئید ساده شده. اما در ادبیات انگلیسی منظور از اسفروئید یعنی همان بیضوی دورانی. اسفروئید برونز (Bruns) عبارتست از معادله پتانسیل جاذبه زمین که برحسب هارمونیک‌های کروی تا درجه دوم بسط داده شده به علاوه پتانسیل گریز از مرکز. در عین حال مرکز سیستم مختصات، اسفروئید برونز منطبق بر مرکز زمین می‌باشد. علاوه بر آنها فرض شده است که محور دوران اسفروئید منطبق بر محور ماکزیمم اینرسی زمین نیز می‌باشد یعنی اینکه اینرسی‌های حاصلضرب نسبت به سیستم انتخابی مساوی صفر می‌باشند ($D=E=F=0$). اگر محور z های سیستم مختصات را منطبق بر دو محور فوق باشد می‌توانیم پتانسیل زمین را تا درجه $n=2$ بصورت زیر بنویسیم

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n + \frac{\omega^2}{2} r_\circ^2$$

با در نظر گرفتن مشخصات فوق و ضرایب هارمونیک‌های کروی در بخش ۲-۲۳ پتانسیل فوق بصورت زیر در می‌آید

$$U(\vec{r}) = \frac{KM}{r} + \frac{K}{r^3}\left(\frac{A+B}{2} - C\right) C_{20} + \frac{K}{4r^3}(B-A)\, C_{22} + \frac{\omega^2}{2} r_\circ^2$$

اگر از فرمول فوق بجای ضرایب C_{20} و C_{22} معادله آنها را برحسب مختصات x, y, z قرار دهیم
(2-23)

۴-۳ پتانسیل نرمال و انامولی پتانسیل

یک راه برای عبور از مشکلاتی که در انتهای بخش ۱-۴ متذکر شدیم. تعریف یک پتانسیل نرمال و میدان نرمال مربوط میباشد. منظور از تعریف یک پتانسیل نرمال یعنی تجزیه پتانسیل واقعی زمین (U) به دو قسمت پتانسیل نرمال (U_N) و پتانسیل T (اختلاف بین پتانسیل واقعی و پتانسیل مفروض U_N) بنام انامولی پتانسیل

$$U = U_N + T$$

میدان پتانسیل U_N نیز دارای سطوح هم پتانسیل است که سطح رفرانس یکی از آنهاست پتانسیل مفروض U_N را پتانسیل نرمال (Normal potential) و پتانسیل T را انامولی پتانسیل و یا (disturbing potential) مینامند. سطح رفرانس را سطح رفرانس نرمال نیز مینامند.

سطح رفرانس که به پتانسیل نرمال به آن مربوط میشود معمولا یک کره و یا یک بیضوی دورانی میباشد

ملاحظه کنید اگر ما بتوانیم پتانسیل واقعی

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2$$

را طوری تجزیه کنیم که پتانسیل نرمال بصورت

$$U_N = V_N + \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2$$

باشد، در اینصورت انامولی پتانسیل T بشکل زیر درخواهد آمد

$$T = V - V_N$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(P_{00}(\cos\theta) - P_{20}(\cos\theta)\right)$$

و از آنجا پتانسیل گریز از مرکز برحسب توابع لژاندر بشکل زیر خواهد بود

$$\frac{1}{3}\omega^2 a^2\left(P_{00}(\cos\theta) - P_{20}(\cos\theta)\right).$$

و پتانسیل $U_{NO}^{(S)}$ بصورت خواهد بود

$$U_{NO}^{(S)} = A_{00}P_{00} + A_{10}P_{10} + A_{20}P_{20} + \frac{1}{3}\omega^2a^2(P_{00}-P_{20}) + \sum_{n=3}^{\infty} A_{n0}P_{n0}$$

$$= \left(A_{00}+\frac{1}{3}a^2\omega^2\right)P_{00} + A_{10}P_{10} + \left(A_{20}-\frac{1}{3}a^2\omega^2\right)P_{20} + \sum_{n=3}^{\infty} A_{n0}P_{n0}$$

و یا

$$\left(A_{00}+\frac{1}{3}a^2\omega^2 - U_{NO}^{(S)}\right)P_{00} + A_{10}P_{10} + \left(A_{20}-\frac{1}{3}a^2\omega^2\right)P_{20} + \sum_{n=3}^{\infty} A_{n0}P_{n0} = 0$$

برای اینکه معادله فوق بازاء تمام θ ها برقرار باشد بایستی ضرایب توابع لژاندر همه صفر باشند در نتیجه خواهیم داشت

$$\left(A_{00}+\frac{1}{3}a^2\omega^2 - U_{NO}^{(S)}\right) = 0$$

$$A_{10} = 0$$

$$\left(A_{20}-\frac{1}{3}a^2\omega^2\right) = 0$$

$$A_{30} = A_{40} = \cdots = 0$$

و یا

$$U_N^{(S)} = \frac{KM}{r} + \frac{a^2\omega^2}{3} + \frac{a^2\omega^2}{3}\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right)P_{20}$$

ملاحظه میشود که پتانسیل $U_N^{(S)}$ تابع سه کمیت مجهول KM ، a و ω می باشد. سطوح هم پتانسیل میدان نرمال فوق کلاً کروی نیستند مگر برای $r=a$ که سطح هم پتانسیل کروی می باشد (کره رفرانس).

۳-۵ بیضوی دوار بعنوان سطح رفرانس نرمال

بیضوی دوار سطحی است که اکثراً در ژئودزی بعنوان سطح رفرانس نرمال مورد استفاده قرار میگیرد چراکه بیضوی دوار شکلی است نزدیک به شکل ژئوئید. پتانسیل نرمال مربوط به آن را نیز میتوان نظیر کره رفرانس فرموله کرد. برای اینکار دوباره میتوان نوشت

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = U_N^{(E)} + T^{(E)} = V_N^{(E)} + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 + T^{(E)}$$

از جمله شرایطی که میخواهیم درمورد پتانسیل نرمال $U_N^{(E)}$ برقرار باشد اینکه مقدار آن روی بیضوی رفرانس (b,E) مقدار ثابتی باشد. بنابراین با بسط پتانسیل U برای نقاط روی بیضوی خواهیم داشت

$$U_N^{(E)}\Big|_{u=b} = U_{N0}^{(E)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{n0}(u,E,b)\Big|_{u=b} A_{n0}\, P_{n0}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\sin^2\theta\Big|_{u=b} =$$

بعلت عدم بستگی ترمهای مربوط به λ در فرمول فوق متقارن بودن بیضوی (b,E)

$$V_N^{(E)} = q_{00}(u,E,b)\left(U_{N0}^{(E)} - \frac{1}{3}a^2\omega^2\right) + q_{20}(u,E,b)\,\frac{a^2\omega^2}{3}\,P_{20}(\cos\theta)$$

تابع $q_{00}(u,E,b)$ را که بصورت

$$q_{00}(u,E,b) = \operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) / \operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right)$$

مشابه میتوان با بسط تابع $\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right)$ و بسط u برحسب r چنین نوشت.

$$q_{00}(u,E,b) = \frac{E}{r\,\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right)} + o(r^{-3})$$

برای تعیین مقدار پتانسیل ثابت $U_{N0}^{(E)}$ باید اولین جمله پتانسیل $V_N^{(E)}$ را با پتانسیل V ژئوئید مقایسه می‌کنیم. مقدار فوق را چنان تعیین می‌کنیم که مترادف با پتانسیل جاذبه زمین واقعی باشد. پتانسیل $V_N^{(E)}$ را میتوان بصورت زیر نوشت

$$V_N^{(E)} = \frac{E}{r\,\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right)}\left(U_{N0}^{(E)} - \frac{1}{3}a^2\omega^2\right) + o(r^{-3})$$

پتانسیل فوق را با پتانسیل جاذبه زمین بصورت زیر مقایسه میکنیم

$$V = \frac{KM}{r} + o(r^{-3})$$

از مقایسه دو پتانسیل فوق نتیجه زیر حاصل میشود

$$\frac{E}{r\,\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right)}\left(U_{N0}^{(E)} - \frac{1}{3}a^2\omega^2\right) \doteq \frac{KM}{r}$$

۳-۶ میدان جاذبه نرمال منسوب به بیضوی رفرانس

با در نظر گرفتن فرمول پتانسیل نرمال میتوانیم نیروی جاذبه مربوط به آن را (بیضوی رفرانس) بدست بیاوریم. میدانیم که میدان نیروی حاصل از پتانسیل عبارتست از گرادیان پتانسیل، بنابراین داریم

$$\vec{\gamma} = \text{grad}\left(U_N^{(E)}\right) = \nabla U_N^{(E)}$$

اپراتور ∇ (گرادیان) در سیستم مختصات بیضوی دارای فرم زیر میباشد

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_i}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

که در آن ضرایب لامه بصورت زیر میباشند

$$H_u = \sqrt{\frac{u^2 + E^2\cos^2\theta}{u^2+E^2}} \quad , \quad H_\theta = \sqrt{u^2 + E^2\cos^2\theta} \quad , \quad H_\lambda = \sqrt{u^2+E^2}\,\sin\theta$$

از آنجائیکه $U_N^{(E)}$ تابع متغیر λ نیست (متقارن حول محور z) داریم

$$\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial \lambda} = 0$$

مشتقات دیگر تابع $U_N^{(E)}$ یعنی مشتقات آن نسبت به دو مختصات u و θ عبارتند از

$$f(x) = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{E}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7}\right)\left(\frac{E}{x}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{E}{x}\right)^3 - \frac{8}{35}\left(\frac{E}{x}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{E}{x}\right)^3\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{x}\right)^2\right)\right)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$q_{20} \simeq \frac{\frac{4}{15}\left(\frac{E}{u}\right)^3\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{u}\right)^2\right)\right)}{\frac{4}{15}\left(\frac{E}{b}\right)^3\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{b}\right)^2\right)\right)}$$

$$\simeq \frac{b^3}{u^3}\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{u}\right)^2\right)\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{E}{b}\right)^2\right)\right)$$

$$\simeq \frac{b^3}{u^3}\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{u}\right)^4\right)\right)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\partial q_{20}}{\partial u} \simeq -3\frac{b^3}{u^4}\left(1 - O\left(\left(\frac{E}{u}\right)^4\right)\right) \simeq -3\frac{b^3}{u^4}$$

و از آنجا مشتق $\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial u}$ بصورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial u} \simeq -\frac{KM}{u^2+E^2} - \frac{\omega^2 a^2 b^3}{u^4}P_{20} + \frac{2}{3}\omega^2 u\left(1 - P_{20}\right)$$

مقدار شتاب γ_0 بصورت زیر درمی‌آید

$$\gamma_0 = \frac{KM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{a^2 b\omega^2}{KM} + \left(\frac{\omega^2 a^4}{bKM} + \frac{2}{3}\frac{a^2 b \omega^2}{KM}\right)P_{20}\right)$$

عبارت $\frac{a^2 b\omega^2}{KM}$ را اغلب با m نشان داده و مقدار آن برای زمین تقریباً برابر 0.33×10^{-2} می‌باشد. با بکار بردن m برای عبارت فوق در رابطه γ_0 خواهیم داشت

$$\boxed{\gamma_0 \simeq \frac{KM}{a\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}}\left[1 - \frac{2}{3}m + \left(\frac{a^2}{b^2}m + \frac{2}{3}m\right)P_{20}(\cos\theta)\right]}$$

۳-۷ تئوری کلرو Clairaut's theorem برای جاذبه و فشردگی هندسی زمین.

با استفاده از شتاب جاذبه نرمال فوق یکی از بهترین تئوری‌های فیزیکال ژئودزی که جاذبه و شکل هندسی بیضوی را بهم مربوط می‌سازد بدست آمد. برای بدست آوردن این رابطه نخست شتاب نرمال را در استوا ($\theta = 90°$) می‌نویسیم. شتاب جاذبه نرمال در استوا (γ_a) با در نظر گرفتن $\theta = 90°$ و $P_{20}(\cos\theta)\big|_{\theta=90} = \frac{3}{2}\cos^2\theta\big|_{\theta=90} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ شکل زیر خواهد بود

$$\gamma_a \simeq \frac{KM}{ab}\left[1 - \frac{2}{3}m - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}m + \frac{2}{3}m\right)\right] = \frac{KM}{ab}\left(1 - m - \frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}\right)$$

در فرمول بدست آمده در صفحه قبل عبارت $f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$ را که در مقدمه با * نشان داده شد فشردگی جاذبه و عبارت $f = \frac{a-b}{a}$ را که در مقدمه با f نشان داده شد فشردگی هندسی بیضوی دوار مینامند. بنابراین فرمول مذکور را با علامات جدید بصورت زیر مینویسیم

$$\boxed{f^* + f \simeq \frac{b\omega^2}{\gamma_a}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2} + \cdots\right)}$$

فرمول فوق بنام تئوری کلرو مشهور است. این فرمول نخستین بار توسط ریاضیدان فرانسوی کلرو Clairaut (1738) بفرم

$$f^* + f \simeq \frac{5}{2}\frac{b\omega^2}{\gamma_a}$$

ارائه شد. واضح است که فرمول اخیر تقریب فرمول اصلی (داخل کادر) با تقریب $a \simeq b$ میباشد.

۸-۳ فرمول جاذبه سومیگلیانا Somigliana

از فرمول های ساده برای شتاب جاذبه نرمال را باید منسوب به ژئودزین ایتالیائی بنام سومیگلیانا سال 1929 دانست. وی فرمول را برای γ_0 (شکل ۶-۴) به ترتیب زیر بدست آورد. نخست تابع $P_{20}(\cos\theta)$ را با رابطه $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ بصورت زیر نوشت

$$P_{20}(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} = \cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

در ژئودزی معمولاً بجای زاویه θ از زاویه φ (عرض ژئودزی) استفاده میکنیم
بطوریکه از ژئودزی هندسی میدانیم رابطه بین عرض ژئودزی و عرض ژئوسنتریک β
بصورت زیر میباشد

$$\beta = 90^\circ - \theta \quad , \quad tg\beta = \frac{b}{a}\, tg\varphi$$

در نتیجه داریم

$$ctg\theta = \frac{b}{a}\, tg\varphi$$

میتوان نوشت

$$\cos\theta = cb\sin\varphi \quad , \quad \sin\theta = ca\cos\varphi$$

که در آنها c یک ثابت اختیاری است. با جایگزینی روابط فوق در فرمول γ_0 نتیجه زیر حاصل میگردد.

$$\gamma_0 = \frac{c^2b^2a\gamma_b \sin^2\varphi + c^2a^2b\gamma_a\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2b^2c^2\sin^2\varphi + a^2b^2c^2\cos^2\varphi}} = c\left(b\gamma_b\sin^2\varphi + a\gamma_a\cos^2\varphi\right)$$

از طرف دیگر مقدار ثابت c از رابطه زیر تعیین میشود

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = c^2\left(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi\right) = 1$$

با جایگزینی آن در فرمول γ_0 نتیجه زیر حاصل میشود

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{a\gamma_a\cos^2\varphi + b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}}$$

ملاحظه کنید که دو فرمول معادله سومیگلیانا شبیه همدیگرند.

با جایگزینی $\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$ بجای $\sin^4\varphi$ خواهیم داشت

$$\gamma_0 \simeq \gamma_a\Big[1 + \big(f^* - ff^* - \tfrac{1}{2}f^2 - \tfrac{1}{2}(f^2-2f)(f^*-f-ff^*)\big)\sin^2\varphi +$$

$$\tfrac{1}{8}(f^2-2f)(f^*-f-ff^*)\sin^2 2\varphi + \cdots\Big]$$

و یا

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma_0 = \gamma_a(1 + \tilde{\alpha}\sin^2\varphi + \tilde{\beta}\sin^2 2\varphi) \\ \text{با ضرایب} \\ \tilde{\alpha} = f^* + O(f^*)^2 \quad \text{و} \quad \tilde{\beta} = \frac{f}{4}(f-f^*) + O(f^3)\end{array}}$$

فرمول کلی کاسینی که در سال 1930 محاسبه شده است عبارتست از

$$\gamma_0 \simeq 978.0490(1 + 0.0052884\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)\ \text{gals}$$

در سال 1967 مقادیر جدیدی برای ضرایب فوق توسط IUGG تائید و تثبیت گردید

$$\gamma_0 \simeq 978.031(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)\ \text{gals}$$

بردار

$$\Delta \vec{g}_{op} = \vec{g}_{op} - \vec{\gamma}_{oQ}$$

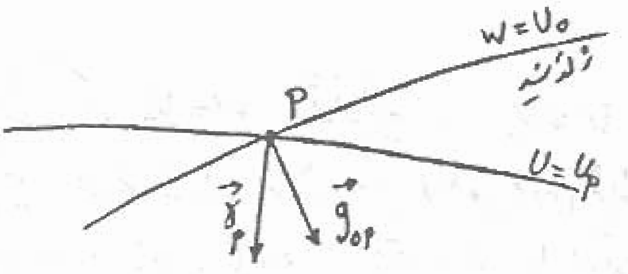
را بردار انامولی نامیده و مقدار آنرا انامولی جاذبه روی سطح زوانس میباشند

ارتفاع ژئوئید (N) در تمام نقاط دنیا شاید از ± 100 متر تجاوز نمیکند. زاویه θ زاویه بین دو بردار $\vec{g}_{op}$ و $\vec{\gamma}_{oQ}$ بنام زاویه انحراف نسبی قائم خیلی به ندرت به یک دقیقه میرسد ولی اکثراً کمتر از پنج ثانیه ($5''$) میباشد. حتی زاویه $\theta = 30''$ هنوز مقدار بزرگی برای انحراف نسبی قائم میباشد. بعلت کوچک بودن زاویه θ، انامولی جاذبه را معمولاً بعوض $\Delta g_{op} = |\vec{g}_{op} - \vec{\gamma}_{oQ}| = g_{op} - \gamma_{oQ} \cos\theta$ از فرمول

$$\Delta g_{op} = g_{op} - \gamma_{oQ}$$

محاسبه میکنند.

اگر سطح هم‌پتانسیل نرمال گذرنده بر نقطه P، $U = U_p$، را درنظر بگیریم، تفاضل دو بردار $\vec{g}_{op}$ و بردار $\vec{\gamma}_p$ عمود بر سطح $U = U_p$ را بردار نوسان جاذبه gravity disturbance vector نامیده و با $\vec{\delta g}_{op}$ نشان میدهند



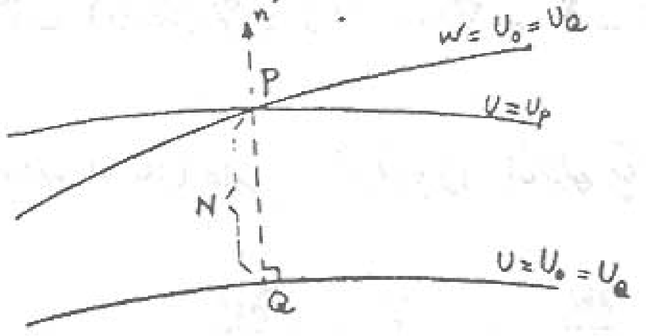
$$\vec{\delta g}_{op} = \vec{g}_{op} - \vec{\gamma}_p$$

$$\delta g_{op} = g_{op} - \gamma_p$$

و تفاضل مقادیر دو بردار را نوسان جاذبه gravity disturbance نامیده و با δg_{op} نشان میدهند.

۳-۱۱ ارتباط بین انامولی پتانسیل (T) و ارتفاع ژئوئید (N) بنام دومین فرمول برونز (Bruns).

شکل زیر را در نظر میگیریم که تقاطع ژئوئید، بیضوی ترازی و سطح هم‌پتانسیل نرمال گذرنده بر نقطه P را نشان میدهد.



اگر پتانسیل‌های $W(\vec{r}_P)$، $U(\vec{r}_P)$، $U(\vec{r}_Q)$ را به ترتیب با W_P و U_P و U_Q نشان دهیم می‌توان نوشت

$$U_P - U_Q = \frac{\partial U}{\partial n'}\Big|_Q N_Q = -\gamma_Q N_Q$$

$$= -\gamma_Q N_P \quad \text{و} \quad N_P = N_Q = N$$

بنابر تعریف می‌توان نوشت $W_P = U_P + T_P$ و از آنجا

$$W_P = U_Q - \gamma_Q N_P + T_P$$

از آنجائیکه W_P مساوی U_0 و یا U_Q یعنی $W_P = U_Q$ بنابراین خواهیم داشت:

$$T_P = \gamma_Q N_P$$

در یک بیضوی دوار مفروض $(T+\delta U)$ را به ارتفاع ژئوئید از آن بیضوی (N'_p) مربوط می‌سازد. ملاحظه کنید که δU تابعی از $\delta M, \delta a, \delta E$ و ω, θ می‌باشد که در آن مقادیر $\delta E, \delta a, \delta M$ اختلاف مقادیر واقعی M ، a ، E از مقادیر مفروض (M', a', E') می‌باشند. در عمل δU را ثابت در نظر گرفته و بعنوان خطای ناشی از عدم شناخت کامل پتانسیل واقعی W_p (پتانسیل ژئوئید) تلقی می‌کنند.

۳-۱۲ معادله دیفرانسیل بنیادی جاذبه

با فرض مجدد اینکه اندازه و شکل بیضوی دوار، مولد میدان پتانسیل نرمال، یعنی مقادیر a و E و همچنین ثوابت دیگر یعنی KM و ω بطور دقیق معلوم می‌باشند مشتق تابع پتانسیل نرمال $U = U_N^{(E)}$ در امتداد n' (امتداد عمود بر سطح هم‌پتانسیل نرمال) در نقاط P و Q در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial U}{\partial n'}\Big|_P - \frac{\partial U}{\partial n'}\Big|_Q = -\frac{\partial \gamma}{\partial n'}\Big|_Q N_P$$

در فرمول فوق با جایگزینی معادلات $\frac{\partial U}{\partial n'}\Big|_P = -\gamma_P$ و $\frac{\partial U}{\partial n'}\Big|_Q = -\gamma_Q$ خواهیم داشت

$$\gamma_P - \gamma_Q = \frac{\partial \gamma}{\partial n'}\Big|_Q N_P$$

در بخش ۳-۱۰ نشان داده شد که

$$g_P - \gamma_P = -\frac{\partial T}{\partial n'}\Big|_P$$

می‌باشد

۳-۱۳ بحث درباره معادله دیفرانسیل بنیادی جاذبه، مسئله مرزی فیزیکال ژئودزی

بار دیگر دیده میشود که معادله بنیادی جاذبه، شرایط مرزی. فرم سوم یا نوع مخلوط را برای حل معادله دیفرانسیل لاپلاس

$$\Delta T = 0$$

در خارج بیضوی زوائد زاحم میکند، مضافاً براینکه باید ابعاد بیضوی زوائد (a, E) و مقادیر KM, ω بطور صحیح انتخاب شده باشند. در حل مسئله مرزی فوق (مسئله سوم) سه اشکال عمده وجود دارند که عبارتند از

الف- ما هرگز مقادیر حقیقی a, E, KM, ω را نمی دانیم و نخواهیم دانست. بنابراین همیشه ترم δU در معادلات ما نقص دارد و در نتیجه نخواهیم توانست از روش ارائه شده در بخش ۲-۲۱ برای حل مسئله استفاده کنیم.

ب- سطح ژئوئید قابل دسترسی در قاره ها نیست بنابراین g_{op}، مورد نیاز برای تعیین Δg قابل مشاهده نخواهد بود. حتی مقدار Δg را نمیتوان بدون در نظر گرفتن مفروضاتی بدست آورد. از طرف دیگر مشاهده g_{op} در سطح دقیق ژئوئید هنوز با اشکالاتی مواجه میباشد.

ج- حتی شرط اساسی برای برقراری معادله دیفرانسیل لاپلاس $(\Delta T = 0)$ یعنی شرط $\sigma = 0$ در همه جا خارج از بیضوی برقرار نیست. چرا که بیضوی زوائد مفروض معمولاً ژئوئید را تقریب کرده تنها برای همیشه (همه جا) زیر توپوگرافی قاره ها بوده و حتی در بعضی مناطق اقیانوسی زیر سطح آب تراز باشد.

و مشتق کامل دوم آن عبارتست از:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}$$

با نشان دادن مشتق‌های جزئی $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ با علامات w'_x ، w''_{xx} و w''_{xz} وغیره و با درنظر گرفتن سطح ثابت $w(x,y,z) = w_p =$ ثابت که برحسب مفروضات مشتقات کامل صفر میشود ($\frac{dw}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = 0$) و با درنظر گرفتن $\frac{dz}{dx} = 0$ (البته محور x که روی سطح) میتوان نتیجه گرفت

$$w''_{xx} + w'_z \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

و همینطور برای امتداد y میتوان نوشت

$$w''_{yy} + w'_z \frac{d^2 z}{dy^2} = 0$$

در این معادله w'_z یعنی تغییرات ارتفاعی پتانسیل یعنی $w'_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial h} = -g$ و g عبارتست از مقدار شتاب ثقل در نقطه مرکز مختصات (x,y,z)

در هندسه دیفرانسیل ثابت میکنند که انحنای منحنی $y=y(x)$ عبارتست از:

$$k = y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

و برای مورد منحنی با $z=z(x)$ که در آن $\frac{dz}{dx} = 0$ میباشد عبارت را داریم.

$$k = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

فرمول اول برونز تکرار فرمولهای دقیق فیزیکال ژئودزی می‌باشد.
فرمول برونز را می‌توان درمورد تغییرات ارتفاعی شتاب ثقل نرمال (γ) نیز نوشت

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J - 2\omega^2$$

مقدار J که یک کمیت مجهول می‌باشد ولی می‌توان آن را برای سطح مرجع یعنی سطح هم‌پتانسیل بیضوی تعیین کرد. در اینجا مقدار انحنا J را برحسب انحنای نصف‌النهار بیضوی $\left(\frac{1}{M}\right)$ و انحنای قائم اول بیضوی $\left(\frac{1}{N}\right)$ تعیین کرد.

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$$

علامت انحنا J را توجه کنید. در ریاضیات انحنای یک سطح محدب مثبت اختیار شده ولی در ژئودزی علامت انحنای یک سطح مقعر (وقتی آن را از بیرون نگاه کنیم) مثبت اختیار می‌شود. شعاعهای انحنا M و N را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\frac{1}{M} = \frac{b}{a^2}\left(1+e'^2\cos^2\varphi\right)^{3/2} \quad , \quad \frac{1}{N} = \frac{b}{a^2}\left(1+e'^2\cos^2\varphi\right)^{1/2}$$

که در آن

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \quad \text{و یا} \quad e' = \frac{E}{b} = \sqrt{a^2-b^2}/b$$

با استفاده از فرمول تختی f $\quad f = 1 - \frac{b}{a} \quad$ خواهیم داشت

$$e'^2 = \frac{1}{(1-f)^2} - 1 = (1-f)^{-2} - 1 = 2f + 3f^2 + 4f^3 + 5f^4 + \cdots$$

$$e'^2 \cong 2f$$

با قرار دادن $\frac{b}{a} = 1 - f$ در فرمول فوق و $2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi$ میتوانیم به فرمول زیر برسیم

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \cong -\frac{2\gamma}{a}\left(1 + m + f\cos 2\varphi\right)$$

۳-۲۵ حل مسئله مرزی فیزیکال ژئودزی (مسئله نوع سوم).

با منظور نمودن $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ بصورت فوق در معادله بنیادی فیزیکال ژئودزی خواهیم داشت

$$\Delta g = -\frac{\partial}{\partial h}(T + \delta U) - \frac{2}{a}\left(1 + m + f\cos 2\varphi\right)(T + \delta U)$$

معادله فوق روی یک بیضوی رفرانس اختیاری ولی با اندازه کافی نزدیک به ژئوئید صادق است. تمام پارامترهای بکار رفته در فرمول منسوب به آن بیضوی میباشند. این فرمول شرایط مرزی را برای حل معادله دیفرانسیل

$$\Delta(T + \delta U) = 0$$

تأمین میکند. میتوان نشان داد که با تقریب 3×10^{-3} ضریب جمله $(T+\delta U)$ در فرمول Δg روی بیضوی ثابت و تقریباً برابر $-\frac{2}{R}$ میباشد که در آن $R = \sqrt[3]{a^2 b}$ میباشد لهذا میتوان نوشت

$$\Delta g \cong -\frac{\partial}{\partial h}(T + \delta U) - \frac{2}{R}(T + \delta U)$$

این فرمول شکل تابع $\tilde{T}$ را روی بیضوی دوران مشخص می‌کند
از آنجائیکه $\tilde{T}_0 = T_0 + \delta U$ بوده و $T_0 = W_0 - U_0 = k\frac{\delta M}{R}$ میباشد
می‌توان نوشت

$$T = k\frac{\delta M}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1}\Delta g_n$$

انامولی جاذبه‌ای (Δg) که در فرمول فوق بکار میرود بایستی تصحیحات زیر را دیده باشد
۱- تصحیح مربوط به تاثیر توده زمین روی بیضوی
۲- تصحیح مربوط به تبدیل جاذبه مشاهده شده در سطح زمین از سطح زمین به ژئوئید.

۳-۱۶ انتگرال استکس (Stokes' integral)

انامولی جاذبه (Δg) را می‌توان بشکل سری تابع هارمونیک کروی یا هارمونیک‌های کروی
در روی بیضوی دوران بسط داد

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n$$

که در آن Δg_n (هارمونیک سطحی انامولی جاذبه) بشکل زیر بسط داده میشوند

$$\Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta)$$

که در آن ضرایب A_{nm} ، B_{nm} از انتگرالهای زیر محاسبه میشوند

$$\begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\pi}\iint_{E1} \Delta g(\theta', \lambda') \begin{pmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{pmatrix} P_{nm}(\cos\theta')\, dE1$$

$$\tilde{T} = -\frac{R}{4\pi}\iint \Delta g \, d\varepsilon l + \frac{R}{4\pi}\iint \Delta g \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\, d\varepsilon l$$

$$= -R\,\Delta g_0 + \frac{R}{4\pi}\iint_{\varepsilon l} \Delta g \; S(\psi)\, d\varepsilon l$$

سری داخل انتگرال بنام تابع استوکس ($S(\psi)$) معروف می‌باشد. و خود انتگرال بنام انتگرال استوکس معروف است. انتگرال استوکس جواب بسته (از نظر سری) مسئله فیزیکال ژئودزی روی بیضوی رفرانس که در آن $\Delta g_0 = 0$ است می‌باشد. این انتگرال مترادف انتگرال پواسن بعنوان جواب مسئله مرزی اول روی کره می‌باشد.

ملاحظه می‌کنید که در بسط فوق هارمونیک درجه اول یعنی $\tilde{T}_1 = \frac{R}{1-1}\Delta g_1$ منظور نشده است. قبلاً دیدیم از وجود این هارمونیک میتوان صرفنظر کرد و مرکز بیضوی رفرانس منطبق بر مرکز ثقل زمین فرض شده باشد.

۳-۱۷ فرمول استوکس، تعیین ژئوئید بروش گراویمتری

برای تعیین ژئوئید داشتن تابع $\tilde{T}$ روی بیضوی ضروری است. ژئوئید بعنوان یک سطح هم پتانسیل با فرمول $W(r,\theta,\lambda) = W_0 = U_0$ می‌باشد. با این ایده میشود که با استفاده از فرمول تعمیم یافته برونز میتوان ارتفاع ژئوئید (N) را از آنامولی پتانسیل $\tilde{T}$ محاسبه کرد.

$$\tilde{T} = T + \delta U = \gamma N$$

و از آنجا

$$N \cong \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\varepsilon l} \Delta g \; S(\psi)\, d\varepsilon l - R\,\frac{\Delta g_0}{\gamma}$$

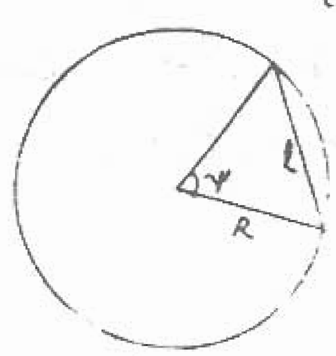
فرمول محاسبه N بدون ترم δN منسوب به Sir George Gabriel Stokes - ریاضیدان (۱۹۰۳ - ۱۸۱۹) معروف ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی می‌باشد. فرمول مزبور نخستین بار در سال ۱۸۴۹ منتشر شد. این فرمول شاید بهترین فرمول فیزیکال ژئودزی می‌باشد. این فرمول ارتفاع ژئوئید را نسبت به یک بیضوی دوار ژئوسنتریک مفروض برحسب اطلاعات مشاهداتی محاسبه میکند.

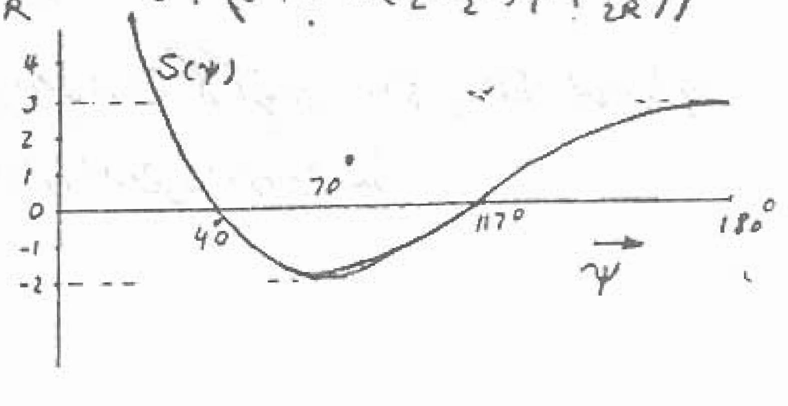
ژئوئید محاسبه شده توسط فرمول استکس طبق مفروضات قبلی با هم‌مرکز با بیضوی می‌باشد. مقدار δN معمولاً ثابت در نظر گرفته شده و بعنوان خطای کمی از محورهای بیضوی دوار تلقی میشود. علت این تقدیر آنست که معمولاً پارامترهای E و ω بیضوی دوار دقیق‌تر از KM و a تعیین میشوند یعنی اینکه خطای δM و δU بیشتر ناشی از خطای δa و δM می‌باشد. اما تفکیک اثرات δa و δM در δU مشکل می‌باشد. بنابراین ساده‌تر است تأثیر ناشی از آن خطاها را تنها با تلفیقی اندازه بیضوی دوار جبران کرد. در اینصورت بیضوی دوار بیشتر نزدیک به ژئوئید خواهد بود که این از مشخصات مورد نظر می‌باشد.

۳-۱۸ نکاتی چند درباره فرمول استکس

تابع استکس $S(\psi)$ را میتوان با یک فرمول بسته بدون استفاده از سریهای تابع نشان داد.

$$S(\psi) = 2\frac{R}{l} + 1 - 3\frac{l}{R} - \cos\psi\left(5 + 3\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\psi + \frac{l}{2R}\right)\right)$$





فرم دیگر انتگرال استوکس $\iint_{\sigma}$ برحسب مختصات جغرافیایی φ و λ می‌باشد

$$N(\varphi,\lambda) + \delta N = \frac{R}{4\pi G}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\varphi',\lambda')\, S(\psi) \cos\varphi'\, d\varphi'\, d\lambda'$$

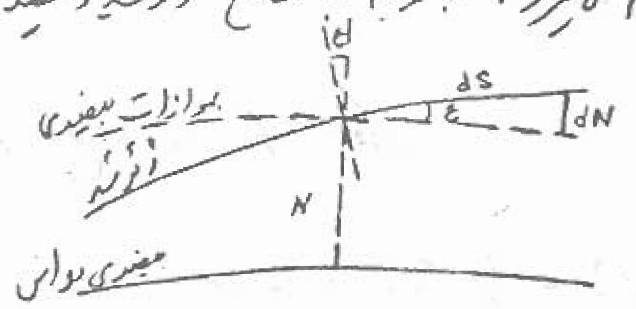
که در آن

$$\psi = \arccos\left(\sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda'-\lambda)\right)$$

در عمل روش‌های عددی برای محاسبه انتگرال استوکس بکار می‌روند

۳-۱۹ فرمولهای ونینگ-مینز (Vening-Meinesz)

از موارد استعمال دیگر انتگرال استوکس محاسبه مؤلفه‌های شمالی جنوبی و شرقی غربی زاویه انحراف شاقولی از آنومالیهای جاذبه در سراسر زمین. این محاسبات توسط فرمولهای ونینگ مینز انجام می‌گیرد. با توجه به تقاطع ژئوئید و بیضوی دوار در شکل زیر



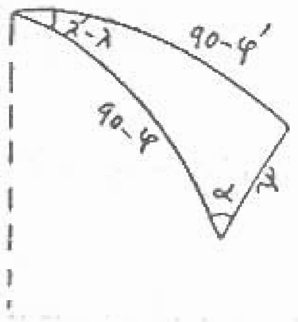
دیده می‌شود که $dN = \varepsilon\, ds$. اگر تقاطع فوق روی صفحه‌ای به شامل امتداد شاقولی و امتداد نرمال بر بیضوی باشد در آنصورت $\theta = \varepsilon$ (زاویه انحراف شاقولی) خواهد بود. اگر تقاطع روی صفحه نصف‌النهار و یا قائم اولیه باشد در آنصورت ε به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه شمالی-جنوبی (ξ) و شرقی غربی (η) خواهد بود.

از طرفین رابطه $\cos\psi$ نسبت به φ و λ مشتق بگیریم

$$-\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$-\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \cos\varphi\cos\varphi'\sin(\lambda'-\lambda)$$

از روابط مثلثاتی کروی زیر میتوان نوشت



$$\sin\psi\cos\alpha = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$\sin\psi\sin\alpha = \cos\varphi'\sin(\lambda'-\lambda)$$

از مقایسه فرمولهای فوق نتایج زیر حاصل میشود

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\cos\alpha \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\cos\varphi\sin\alpha$$

با قرار دادن نتایج فوق در فرمولهای ξ و η خواهیم داشت

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4\pi G}\iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos\alpha \, d\sigma \\ \eta &= \frac{1}{4\pi G}\iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\sin\alpha \, d\sigma \end{aligned}}$$

شبکه تمام‌ازاویه از آنامولی‌های جاذبه بر مبنای مختصات جغرافیایی ۶ در ۸ سانتیم.
میشود. از طرح شبکه تمام‌ازاویه زمانیکه مطالعه ژئوئید در سطح جهانی انجام میگیرد
استفاده میشود. چرا که در این طرح هر منطقه (۵۸×۵۴) دارای آنامولی جاذبه
در حدود ۵۹ بوده و در محاسبه تمام نقاط فرض میکنیم تا سبب شود اثر شبکه تمام‌ازاویه
در محاسبه ژئوئید برای نقاط مختلف ثابت باشد.

نقص عمده‌ای که در محاسبات عددی ژئوئید بروش‌های فوق وجود دارد
اینستکه هرچه به نقطه مورد محاسبه نزدیک میشویم تاثیر آنامولی جاذبه افزایش می‌یابد.
تکنیک گذرا به تابع $S(\psi)$ معلوم میکنند که تاثیر آنامولی جاذبه نقاط همسایه نقطه مورد محاسبه
حل شده میباشد به انتگرال در نقطه مورد محاسبه غیرعادی میباشد. برای حل این مشکل
در دو مرحله زیر اقدام میکنند. اول اینکه شبکه تمام‌ازاویه ۵۹ را در همسایگی نقطه مورد محاسبه
ریزتر میسازند. استفاده از فرمولهای غیرانتگرالی برای محاسبه تاثیر آنامولی‌های جاذبه
مجاور و نزدیک و دور نسبت به نقطه مورد محاسبه.

بطوریکه قبلاً هم یادآور شدیم هنوز بدرستی معلوم نشده است که آیا مقدار g در هر نقطه روی زمین در معرض تغییرات غیر دائمی (غیر پریودیک) هست یا نه؟ . ما در اینجا مقدار g را برای هر نقطه ثابت در نظر میگیریم . از طرف دیگر میدانیم که مقدار g در هر نقطه با حرکت خورشید و ماه بدور زمین تغییر میکند. این پدیده که بنام جزر و مد معروف است تغییراتی در محدوده ($+0.08$ تا -0.16) میلی گال روی g ایجاد میکند. از آنجائیکه این تغییرات در زمانهای مختلف برای نقاط مختلف مشخص میباشد میتوان آنرا در هر نقطه حساب کرده و g را نسبت به آن تصحیح کرد.

اندازه گیری شتاب ثقل نسبی باین ترتیب انجام میشود که نخست دستگاه جاذبه سنج را روی یک نقطه معلوم (g معلوم) قرار داده قرائتی انجام میدهیم سپس دستگاه را روی نقطه مجهول قرار داده بعد از قرائت آنرا دوباره روی نقطه معلوم برگردانده قرائت سوم را انجام میدهیم. با این عمل دو اختلاف قرائت بین دو نقطه خواهیم داشت که با ضرب آنها در مقدار ثابتی (حساسیت دستگاه) دو اختلاف در شتاب ثقل خواهیم داشت. تفاوت دو اختلاف بدست آمده ناشی از تغییر حالت (Drift) دستگاه بوده که بطور خطی نسبت به زمان قرائتها را تحت تأثیر قرار داده است.

۴-۲ دستگاههای مورد استفاده در جاذبه سنجی

اساساً سه نوع دستگاه کاملاً متفاوت در جاذبه سنجی مورد استفاده قرار میگیرند

الف - آونگهای قائم

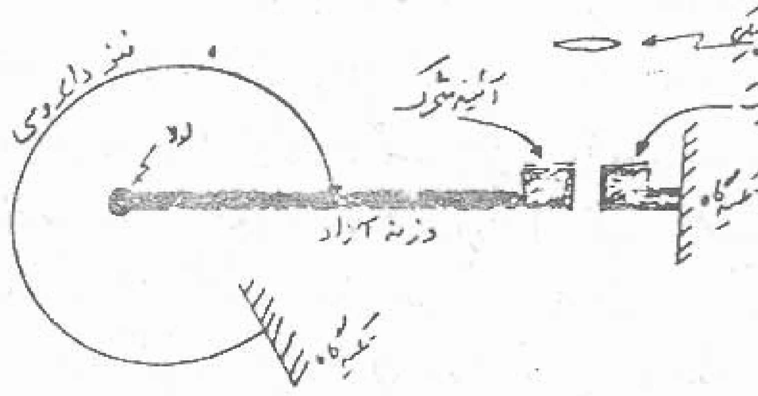
ب - جاذبه سنج ها

ج - دستگاههای سقوط آزاد

دستگاههای نوع الف و ج برای اندازه گیری شتاب ثقل مطلق بکار میروند. آونگها میتوانند معمولی ، دو طرفه ، صلیبی و یا مضاعف باشند. استفاده از آنها برمبنای رابطه ای است که

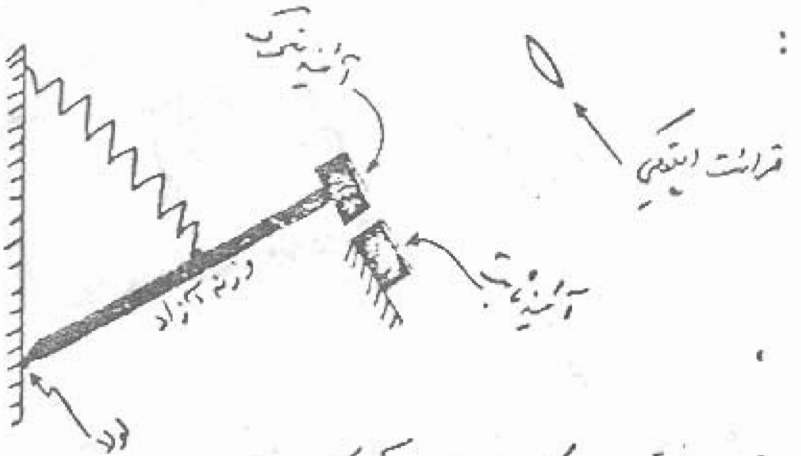
در گراویمتر امریکایی Worden با دقت حدود ± 0.03 میلی‌گال بکار رفته است.

ب - طرح فنر دایروی:



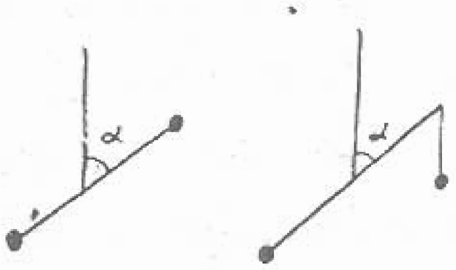
طرح فنر دایروی توسط Molodenskij در گراویمتری بنام GKA بکار گرفته شده است. دقت این گراویمتر حدود ± 0.3 میلی‌گال می‌باشد. طرح تمام گراویمترهای اخیر شوروی نیز از نوع فوق می‌باشد. تنها اختلاف آنها در بکارگیری دستگاه‌های مختلف تعدیل و سیستم‌های مختلف قرائت می‌باشد.

ج - طرح فنر مارپیچی:



طرح فوق با انطباق رسم تبدیل می‌کند. در گراویمترهای آمریکای شمالی و Lacoste-Romberg با دقت حدود ± 0.1 mgal میلی‌گال بکار رفته است. این گراویمتر [illegible] که از بهترین نوع می‌باشد.

را اندازه‌گیری می‌کنند. دو نوع مختلف با شکل زیر از این دستگاه‌ها موجود اند



در این دستگاه‌ها میل محور تعادل برحسب ازیموت آن تغییر می‌کند. بدین ترتیب تغییرات g در جهت مختلف کشف می‌شود.

۴-۳ شبکه‌های جاذبه

بطور کلی شتاب ثقل g دو کاربرد متفاوت کلی در ژئوفزیک و دیگری در ژئودزی دارد. برای تامین مقاصد فوق دو شبکه مختلف از نقاط جاذبه ایجاد می‌شود.

الف - شبکه ژئودزی

ب - شبکه ژئوفزیکی

شبکه ژئوفزیکی بمنظور اکتشاف منابع زیرزمینی در یک محل ایجاد می‌شود و بنابراین دارای خصوصیت محلی است. استفاده کننده این شبکه نیازی به دانستن قدر مطلق شتاب جاذبه ندارد تنها اختلاف شتاب جاذبه (ثقل) کافیست.

شبکه ژئودزی جاذبه که بمنظور اندازه‌گیری مقدار شتاب جاذبه در هر نقطه ایجاد می‌شود باید در سطح جهانی طرح‌ریزی شود. بنابراین شبکه‌های ملی جاذبه بایستی به نقطه رفرانس بین‌المللی (پوتسدام) متصل شوند. آخرین تعدیل شبکه جهانی جاذبه در سال ۱۹۷۱ انجام شد. شبکه‌های جاذبه ملی به سه درجه تفکیک می‌شوند

۱- شبکه جاذبه درجه یک شامل نقاط رفرانس ملی است که قدر مطلق شتاب g در آنها معلوم است. نقاط رفرانس معمولاً در فرودگاه‌ها ایجاد می‌شوند تا دسترسی به آنها در اسرع وقت امکان‌پذیر باشد.

از آنجائیکه تمام فرمولهای تیپی ژئوئید تقریبی میباشند در اینجا به ترتیب تقریب دیگر در حدود آنچه یکبار مطرح کردیم و آن اینکه بجای محاسبه اثر توده‌های زمینی خارج از سطحی که تعیین آن مشخص میباشد، اثر توده‌های خارج از ژئوئید را جابجائی میکنیم. این جابجائی مثل اینست که بخواهیم مسئله مرزی فیزیکال ژئودزی را بجای سطحی روی ژئوئید حل کنیم.

برای محاسبه تاثیر توده‌های خارج از ژئوئید بایستی توزیع جرم داخل زمین را دانست. علاوه بر اینکه توزیع جرم یا بعبارت دیگر توزیع دانسیته ρ در داخل زمین معلوم نیست بلکه توزیع جرم در لایه‌های سطحی زمین نیز بدرستی معلوم نیست. بنابراین تخمین تاثیر توده‌های جرم بیرون زده از ژئوئید روی انامولی جاذبه Δg یکی از کارهای نامطمئن و بازدارنده در ژئودزی کلاسیک میباشد. یکی از اشکالات این کار اینکه عقاید و روشهای مختلف برای اعمال تاثیر فوق وجود دارند. ما در زیر بروشهائی که مرسوم هستند و بیشتر مورد استفاده قرار میگیرند اشاره میکنیم

۵-۴ تصحیح هوای آزاد و انامولی هوای آزاد

تصحیح هوای آزاد ناشی از این تصور است که اندازه‌گیری g در یک نقطه روی زمین در غیاب تمام توده‌های جرم روی ژئوئید انجام میگیرد یعنی اینکه ایستگاه شبیه نقطه آزاد در فضا معلق میباشد. با این تصور تنها تصحیحی که لازم است تا g از سطح زمین به سطح ژئوئید تبدیل شود تصحیح ارتفاعی خواهد بود

$$\delta g_F = -\frac{\partial g}{\partial h} h$$

در فرمول h ارتفاع ایستگاه از ژئوئید میباشد. [illegible]

هرچند که انومالی جاذبه هوای آزاد حتی در تقریبات کاملاً ناصحیح میباشد ولی بعلت حقیقتی که بعداً تشریح خواهد شد مورد استفاده زیادی دارد.

۶-۴ تصحیح بوگه (Bouguer) و انومالی بوگه

بنظر میرسد که انومالی هوای آزاد نتواند واقعیت را باندازه کافی بیان نماید. بدیهی است که شتاب g در هر نقطه روی زمین علاوه براینکه منتج از تمامی جرم زمین محصور در داخل ژئوئید میباشد تحت تاثیر اجرام بیرون زده از ژئوئید نیز قرار دارد. بنابراین تاثیر جاذبه اجرام باقیمانده بین ژئوئید و سطح فیزیکی زمین را روی شتاب اندازه گیری شده محاسبه و از روی آن برداشته میشود. این کار در دو مرحله زیر انجام میگیرد

۱- حذف تاثیر لایه ای (plate) از بدنه زمین بضخامت متوسط h (ارتفاع نقطه مورد محاسبه)

۲- حذف تاثیر ناهمواریهای توپوگرافی اطراف نقطه یعنی تاثیر اجرام واقع بین توپوگرافیها و لایه سطح

در اینجا تحت تاثیر اول بنام تصحیح plate ویا تصحیح ساده بوگه محاسبه میشود. بوگه یک ژئودزین فرانسوی بود که برای اولین بار این تصحیح را در مشاهدات جاذبه خود در پرو در سال ۱۷۴۹ بکاربرد. سپس در بخش بعدی تاثیر دوم بعنوان اصلاحیه تصحیح اول با نام تصحیح توپوگرافی محاسبه میشود

لایه یکنواخت با ضخامت h روی ژئوئید در سراسر زمین گسترانده شده برای دارای شکل پیچیده است. خوشبختانه میتوان لایه مزبور را در تقریب اول لایه مسطح یا صفحه ای بضخامت h درنظر گرفت لذا تاثیر ناشی از انحنا زمین را از آن منظور داشت

برای محاسبه تصحیح plate یک حجم استوانه ای با ارتفاع h و شعاع قاعده a و دانسیته σ درنظر گرفته شتاب جاذبه حاصل از آنرا در نقطه P محاسبه میکنیم (شکل صفحه بعد).

$$\int_{r=0}^{a} \frac{r\,dr\,dz}{\sqrt{(z_p-z)^2+r^2}} = dz \int_{z_p-z}^{\sqrt{(z_p-z)^2+a^2}} \frac{t\,dt}{t} = dz\left[\sqrt{(z_p-z)^2+a^2} - (z_p-z)\right]$$

$$V(P) = 2\pi K\sigma \int_0^h \left[\sqrt{(z_p-z)^2+a^2} - z_p + z\right] dz$$

$$= 2\pi K\sigma \left[-z_p h + \frac{1}{2}h^2 + \int_0^h \sqrt{(z_p-z)^2+a^2}\, dz\right]$$

انتگرال سوم در طرف راست باز با تغییر متغیر $t = z_p - z$ حل میشود

$$I = \int_0^h \left(a^2+(z_p-z)^2\right)^{1/2} dz = -\int_{z_p}^{z_p-h} \sqrt{a^2+t^2}\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t(a^2+t^2)^{1/2} + a^2 \ln\left(t+(a^2+t^2)^{1/2}\right)\right] +$$ مقدار ثابت

بنابراین خواهیم داشت

$$I = -\frac{1}{2}\left[(z_p-h)\left(a^2+(z_p-h)^2\right)^{1/2} + a^2\ln\left(z_p-h+\sqrt{a^2+(z_p-h)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[z_p\sqrt{a^2+z_p^2} + a^2 \ln\left(z_p+\sqrt{a^2+z_p^2}\right)\right]$$

با قرار دادن $b = \sqrt{a^2+z_p^2}$ و $d = \sqrt{a^2+(z_p-h)^2}$

میتوان نوشت

$$\boxed{V(P) = 2\pi K\sigma\left[-z_p h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}\left((z_p-h)d + a^2 \ln\frac{z_p-h+d}{z_p+b}\right)\right]}$$

$$f_p = -\pi K \sigma \left[2h + 2a - \sqrt{a^2+h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+h^2}} \right]$$

$$= -\pi K \sigma \left[2h + 2a - \sqrt{a^2+h^2} - \frac{a^2+h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} \right]$$

$$\boxed{f_p = -2\pi K \sigma \left(a+h - \sqrt{a^2+h^2} \right)}$$

پس از بسط $\sqrt{a^2+h^2}$ به سری های توان مقدار f_p بشکل سری بصورت زیر خواهد بود:

$$f_p = -2\pi K \sigma \left(h + a - a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2} + \dots\right)\right)$$

$$= -2\pi K \sigma h \left(1 - \frac{h}{2a} - \dots \right)$$

اگر قطر جسم استوانه ای را بی نهایت فرض کنیم $(a=\infty)$ یعنی تبدیل صفحه شود و a به صفحه بوگه خواهیم داشت

$$\boxed{\delta g_p = \lim_{a \to \infty} f_p = -2\pi K \sigma h}$$

δg_p تصحیح ناشی از plate بوگه می باشد. در عمل σ را نسبت تحت بالای سطح زمین بطور متوسط برابر با $\sigma = 2.67$ گرم بر سانتیمتر مکعب انتخاب میشود از آنجا خواهیم داشت

$$\boxed{\delta g_p = -0.1119\, h}$$

δg_p دارای واحد میلی گال و h دارای واحد متر میباشد.

با در نظر گرفتن دانسیته یکنواخت σ برای قسمت با ابعاد Δa و $\Delta h, \Delta\alpha$ می‌توان نوشت

$$\delta g_{T_i} = K\sigma \int_{\alpha=0}^{\Delta\alpha} \int_{z=0}^{\Delta h} \int_{r=a}^{a+\Delta a} \frac{z}{\rho^3}\, r\, dr\, dz\, d\alpha$$

$$= K\sigma \int_{\alpha=0}^{\Delta\alpha} \int_{z=0}^{\Delta h} \int_{r=a}^{a+\Delta a} \frac{zr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr\, dz\, d\alpha$$

$$= K\sigma\,\Delta\alpha \int_{z=0}^{\Delta h} \int_{r=a}^{a+\Delta a} \frac{zr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr\, dz$$

برای حل انتگرال نسبت به z تغییر متغیر $t^2=r^2+z^2$ داده می‌شود

$$\delta g_{T_i} = K\sigma\,\Delta\alpha \int_{r=a}^{a+\Delta a} r \left(\int_{r}^{\sqrt{r^2+\Delta h^2}} \frac{dt}{t^2} \right) dr$$

$$= K\sigma\,\Delta\alpha \int_{r=a}^{a+\Delta a} r \left[-\frac{1}{t} \right]_{r}^{\sqrt{r^2+\Delta h^2}} dr$$

$$= K\sigma\,\Delta\alpha \int_{a}^{a+\Delta a} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+\Delta h^2}} \right) dr = K\sigma\,\Delta\alpha \left(\Delta a - \int_{a}^{a+\Delta a} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+\Delta h^2}} \right.$$

با تغییر متغیر دیگر $t^2=r^2+\Delta h^2$ خواهیم داشت

$$\delta g_{T_i} = K\sigma\,\Delta\alpha \left(\Delta a - \int_{\sqrt{a^2+\Delta h^2}}^{\sqrt{(a+\Delta a)^2+\Delta h^2}} dt \right) = K\sigma\,\Delta\alpha \left(\Delta a - \sqrt{(a+\Delta a)^2+\Delta h^2} - \sqrt{a^2+\Delta h^2} \right)$$

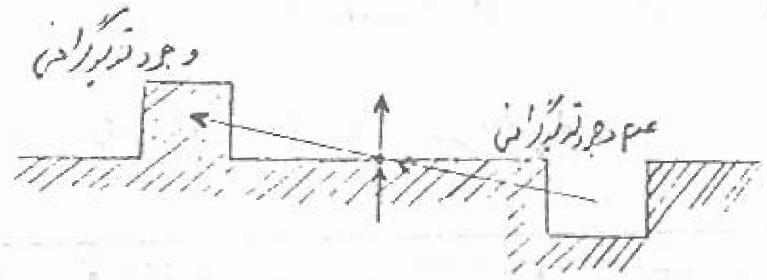
برای $\Delta h \ll a$ می‌توان نوشت

$$\delta g_{T_i} = K\sigma\,\Delta\alpha \left[\Delta a + a\sqrt{1+\left(\frac{\Delta h}{a}\right)^2} - (a+\Delta a)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta h}{a+\Delta h}\right)^2} \right]$$

و یا به تقریب

در کارتیمینی (ra:pathams) شمرده گردیده است.

ملاحظه کنید که تصحیح توپوگرافی همیشه مثبت است چه توپوگرافی اطراف نقطه مرتفع‌تر از نقطه و یا پست‌تر از نقطه باشد. این حقیقت را می‌توان از شکل زیر دریافت



بنابراین با صرفنظر کردن از اعمال تصحیح توپوگرافی معادل تصحیح بوگه حالت صفحه بی‌نهایت می‌باشد. مجموع تصحیح $\delta g_F + \delta g_P + \delta g_T$ را تصحیح کامل (اصلاح شده) بوگه نامیده و اندازه حاصله مربوطه Δg_B را انامولی کامل بوگه می‌نامند

$$\boxed{\Delta g_B = g + \delta g_F + \delta g_P + \delta g_T - \gamma}$$

ملاحظه می‌کنید که چه در اینجا و چه موقع محاسبه تصحیح ساده بوگه زمین مسطح فرض شده است این را نمی‌توان فرض کرد چراکه تاثیر اجرام دور از نقطه و مجزا از افق نقطه بسرعت کاهش پیدا می‌کنند. در حال در کارهای دقیق‌تر بایستی کرویت زمین نیز بطور ریاضی منظور گردد. برای اینکار کرویت زمین را در نظر می‌گیریم که از فاصله کروی حدود 1.5 درجه یعنی تقریباً 167 کیلومتر شروع می‌شود. این فاصله شعاع قسمت داخلی تصحیحات هایفورد را که در شکل ۵-۸-م از آن صحبت خواهیم کرد نقش دارد. از این فاصله به بعد می‌توان صفحات توپوگرافی زمین صفحات بلیت بوگه را در تقسیم با فاصله ارتفاع مربوط به صفر در نظر گرفته یا بابت اثر وابسته به قیاس مربوط و تقسیم با فاصله مربوط به بعد به لایه کروی با صفحات صفر و کش الاستیک سطح متغیر فرض کرد تا اثر جاذبه آن را انحراف سنجی لایه با وابسته سطحی محاسبه کرد.