مصطفی احمدی

۷۹ نقشه برداری

Mostafa Ahmadi

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

" جزوه فیزیکال ژئودزی کارشناسی نقشه‌بــــــرداری "

دکتر نجفی

قیمت بالیست آموزش ۱۵۰ ریال

قیمت آزاد ۲۰۰ ریال

انتشارات دانشکده عمران

۱- موضوع فیزیکال ژئودزی

در نقشه‌برداری، ما با تعیین موقعیت‌های نسبی برای تعدادی نقاط در روی زمین مواجه هستیم. برای این کار، در یک منطقه کوچک می‌توان روابط مستقیم بین نقاط را اندازه‌گیری کرده و از آن‌ها موقعیت‌ها را تعیین نمود. بنابراین نقاط P_1 و P_2 بطور مستقیم بصورت زیر بهم مربوط می‌باشند

$$P_1 \rightleftarrows P_2$$

ولی در مناطق بزرگ نمی‌توان بصورت فوق عمل کرد. چراکه امکان اندازه‌گیری روابط مستقیم بین آن‌ها موجود نیست. بلکه تنها می‌توانیم روابط آن‌ها را نسبت به یک چهارچوب (مشترک) رفرانس، که نقاط را بهم مربوط می‌سازد، اندازه‌گیری کنیم. یعنی در واقع صحبت از روابط زیر می‌باشد.

$$P_1 \rightleftarrows \text{چهارچوب رفرانس} \rightleftarrows P_2$$

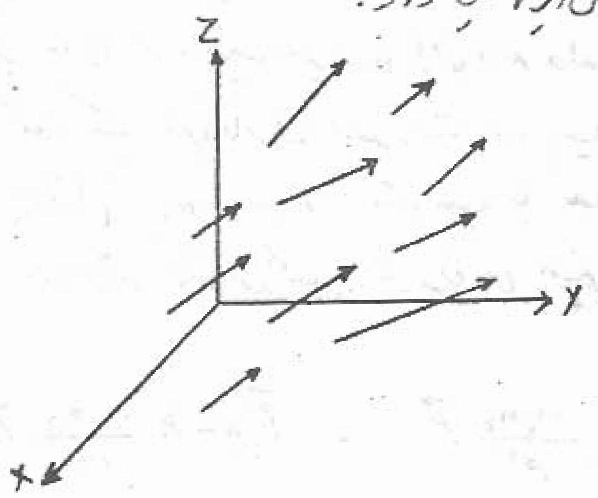
تعریف چنین چهارچوبی و تعیین روابط آن با نقاط از کارهای عمده ژئودزی می‌باشد.

در ژئودزی معمولاً سطحی نزدیک به سطح تراز گرانی زمین بعنوان سطح رفرانس انتخاب می‌کنند که نقش همان چهارچوب را دارد. البته سطح مزبور چنان تعریف می‌شود که تا حد امکان نزدیک به سطح تراز گرانی زمین باشد بطوریکه روابط آن دسته از نقاطی که موقعیت آن‌ها روی سطح تراز گرانی زمین قابل اندازه‌گیری است نسبت به آن سطح رفرانس ساده‌تر باشند.
از طرف دیگر برای ایجاد تسهیلات در محاسبات لازم است که سطح رفرانس انتخابی

۲ - اصول تئوری پتانسیل

۲-۱ : مبحث میدان نیرو

منطقه‌ای از محیط زمان-فضای ما را که میدان عمل بعضی نیروهای فیزیکی است میتوان تنها بعنوان یک میدان برداری تلقی کرد، بدون آنکه منابع ایجاد نیروها و هدف نیروها مورد نظر باشند. از یک میدان نیرو چنین مستفاد میشود که به هر نقطه از آن میدان سه عدد حقیقی بعنوان مؤلفه‌های میدان و یا چهار عدد حقیقی اگر زمان را، فضا-زمان، نیز در نظر بگیریم تعلق میگیرد. با استفاده از سیستم مختصات کارتزین میتوان میدان برداری را در هر نقطه از زمان بشکل زیر نمایش داد.



برای آسانی کار، معمولاً در فیزیکال ژئودزی تمام میدانهای برداری را ساکن (ساکن نسبت به زمان) در نظر میگیرند. بنابراین هر میدان ساکن را میتوان بطور کامل با یک تابع سه متغیری بصورت زیر نشان داد.

$$\vec{f}\ ,\ \vec{f}(\vec{r}) \in R_3\ ,\ \vec{r} \in R_3$$

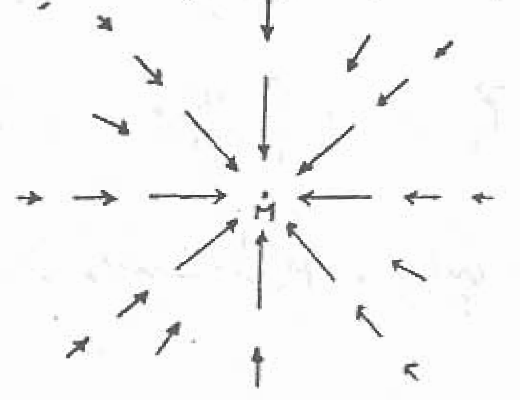
مقدار دقیق و میزان بهتری از ثابت k توسط تعدادی از سازمانهای علمی بین‌المللی تا این لحظه شناخته شده است. البته هنوز این مسئله مورد بحث محافل علمی است که آیا ثابت k نسبت به زمان متغیر است یا نه.

۲-۳ : میدان جاذبه یک نقطه مادی بوزن M

بطوریکه دیده میشود قانون جاذبه نیوتن بطور کامل قرینه میباشد. یعنی فرقی بین جرمها نیست. فقط مسئله انتخاب است که کدام جرم را جذب کننده و کدام یک را جذب شونده بنامیم. بنابراین مجاز هستیم که قانون جاذبه نیوتن را بصورت میدان نیروی (میدان برداری) زیر فرموله کنیم

$$\boxed{-\vec{f} = k\frac{M}{r^3}\vec{r}}$$

با در نظر گرفتن اینکه $\vec{f}$ معرف نیروئی است که از طرف جرم M به یک جرم واحد m در فاصله r اعمال میشود. بردار $\vec{r}$ از نقطه M به نقطه m ممتد میباشد چیزی غیر بجز بردار وضعیت نقطه m اگر نقطه M مرکز سیستم مختصات انتخاب شود
این میدان نمونه‌ای از یک میدان برداری شعاعی (یا مرکزی) است که در آن تمام بردارها از نقاط خارجی بطرف نقطه مرکزی (M) متوجه میباشند در یک سیستم مختصات دوبعدی میدان فوق بصورت زیر دیده میشود



و نیروی جاذبه m روی ΔM صفر در نظر نیست.

حال اگر جسم فیزیکی را بصورت منطقه B از فضای E_3 با دانسیته $\sigma(\vec{r})$ در هر نقطه از آن در نظر بگیریم وزن قسمت کوچکی (ΔB) از آن را میتوان بصورت حاصلضرب $\Delta M = \Delta B\,\sigma(\vec{r})$ نوشت. که در آن $\sigma(\vec{r})$ مقدار دانسیته جرم در نقطه معرف المان حجمی ΔB میباشد. با این شرط میتوان میدان جاذبه حاصل از جسم B را بشکل زیر نوشت

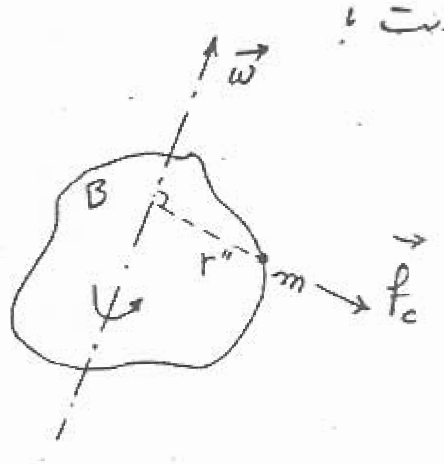
$$\vec{f} = -k\int_B \frac{\sigma}{\rho^3}\vec{\rho}\, dB \quad , \quad \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}^{\circ}$$

$\vec{r}$ بردار وضعیت المان dm از جسم B و متغیر انتگرال گیری میباشد. در اینجا σ تابعی از موقعیت المان حجمی dB و $\vec{\rho}$ تابعی از موقعیت‌های دو المان حجمی dB و نقطه مورد اندازه‌گیری میدان جاذبه میباشد.

۵-۲ : میدان جاذبه در رو و بالای یک جسم در حال دوران وقتیکه نقطه مورد نظر نیز بهمراه جسم دوران میکند.

باز در تجربه مشاهده شده است که حرکت دورانی یک جسم m با سرعت زاویه ای دوران که در فاصله r° از محور دوران قرار دارد تحت تاثیر یک نیروی گریز از مرکز قرار میگیرد. این نیرو جسم را در جهت دور شدن از محور دوران هدایت میکند. مقدار این نیرو برابر است با

$$f_c = r^{\circ}\omega^2 m$$



۶-۲ : پتانسیل

میدان نیرو ابزار ریاضی خوبی برای نمایش یک محیط فیزیکی می‌باشد ولی لزوم داشتن سه عدد حقیقی بعنوان مختصات نیرو برای معرفی میدان در هر نقطه از فضا، از اعتبار آن می‌کاهد. بنابراین بهتر است ابزار ساده‌تری بجای آن برای نشان دادن یک محیط فیزیکی بکار گرفته شود. یکی از این ابزار ساده پتانسیل می‌باشد.

رابطه بین پتانسیل (میدان اسکالر) با میدان نیرو (میدان برداری) نظیر رابطه بین تابع اولیه و تابع اصلی در آنالیز متغیرهای حقیقی است. در آنجا رابطه بین تابع اولیه F (اگر وجود داشته باشد) و تابع اصلی f بصورت زیر می‌باشد

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad , \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

در اینجا پتانسیل V (اگر وجود داشته باشد) با نیروی $\vec{f}$ در معادله‌ای نظیر فوق صدق میکند.

$$V(\vec{r}) = \int \vec{f}(\vec{r})\,d\vec{r} \quad , \quad \nabla (V(\vec{r})) = \text{grad}\, V(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})$$

علامت ∇ در معادله فوق نشان دهنده اپراتور گرادیان میباشد که معادل برداری اپراتور $\frac{d}{dx}$ در آنالیز میباشد. تابع V را پتانسیل نیروی $\vec{f}$ و نیروی $\vec{f}$ را گرادیان تابع V مینامند. منظور از بردار $\vec{r}$ در بالا یعنی بردار وضعیت نقطه‌ای که پتانسیل V و نیروی f به آن تعلق دارد. در فضای E_3، $\vec{r}$ را بصورت (x, y, z) و یا شکل

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ملاحظه میشود که گرادیان V برابر با همان میدان جاذبه حاصل از یک نقطه ماده بجرم M (بخش ۲-۳) میباشد. در نتیجه میتوان نوشت

$$\nabla(V) = \vec{F}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه V پتانسیل میدان $\vec{F}$ باشد اینستکه گرادیان V مساوی نیروی $\vec{F}$ (تساوی فوق) باشد. به علامت تابع V دقت کنید.

۲-۸ : پتانسیل یک جسم

بازمیتوان نشان داد که تابع زیر پتانسیل جاذبه حاصل از جسم B میباشد.

$$V(\vec{r}) = K\int_B \frac{\sigma}{\rho}\, dB$$

در فرمول فوق $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho}$ که در آن $\vec{r}'$ بردار وضعیت المان $dM = \sigma\, dB$ میباشد و $V(\vec{r})$ پتانسیل جسم B میباشد. برای اینکه گرادیان تابع فوق را محاسبه میکنیم

$$\nabla(V) = K\int_B \sigma\, \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) dB \quad , \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ و}$$

$$\vec{r}' = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k} \Rightarrow \vec{\rho} = (x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k}$$

$$\rho = |\vec{\rho}| = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{1/2}.$$

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla(\rho) = -\rho^{-2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\vec{k}\right)$$

بدنبال محاسبه پتانسیل گریز از مرکز w می‌پردازیم. میتوان نشان داد که

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2}\omega^2 r^{\circ 2}$$

پتانسیل مورد نظر است. که در آن $\vec{r}^{\circ} = \vec{r}^{\circ}(\vec{r})$ میباشد. مقدار (قدر مطلق) بردار $\vec{r}^{\circ}$ برابر است با:

$$r^{\circ} = r\cos\alpha$$

بردار $\vec{r}^{\circ}$ عبارتست از تصویر بردار $\vec{r}$ در صفحه عمود بر محور دوران. اگر بخاطر سهولت محور z از سیستم مختصات کارتزین (x, y, z) را منطبق بر محور دوران قرار دهیم، این انتخاب هیچ چیزی از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. خواهیم داشت

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}^{\circ} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}$$

و از آنجا

$$\nabla(w) = \frac{1}{2}\omega^2\,\nabla(r^{\circ 2})$$

$$\nabla(r^{\circ 2}) = 2r^{\circ}\,\nabla(r^{\circ}) = 2r^{\circ}\left(\frac{x}{r^{\circ}}\vec{i} + \frac{y}{r^{\circ}}\vec{j}\right) = 2\vec{r}^{\circ}$$

با قرار دادن $\nabla(r^{\circ 2})$ در $\nabla(w)$ خواهیم داشت

$$\nabla(w) = \omega^2\,\vec{r}^{\circ} = \vec{f}_c$$

$\vec{r}$ صفر شدن تابع زیر انتگرال نسبت به بی‌نهایت میل میکند. این مسئله تحدودی مأیوس کننده میباشد.

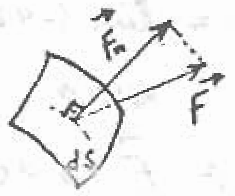
در زیر نشان داده خواهد شد که مسئله یافتن پتانسیل نسبت U را میتوان بصورت یک مسئله شرایط اولیه یا مرزی (Boundary value problem) در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح کرده از حل آن پتانسیل U را پیدا کرد. انتگرال فوق‌الذکر ($K\int_B \frac{\sigma}{\rho} dB$) موقعی قابل حل است که تابع دانسیته $\sigma(\vec{r})$ برای هر نقطه از جسم B معلوم باشد. در غیر اینصورت بایستی دنبال راه حل دیگری برای ارزیابی انتگرال بود.

۲-۱۰ : پتانسیل بعنوان جواب معادلات دیفرانسیل پواسن ولاپلاس

بطوریکه از آنالیز برداری میدانیم اولین مشتق یک میدان برداری $\vec{F}$ بنام دیورژانس بردار $\vec{F}$ بعبارت زیر بیان میشود

$$\nabla(\vec{F}) = \operatorname{div}(\vec{F}) = \lim_{V_0 \to 0} \frac{\oiint F_n \, dS}{V_0}$$

که در آن V_0 حجمی است که توسط سطح بسته S محدود شده و F_n قدر مطلق بردار $\vec{F}_n$ مؤلفه بردار F در امتداد عمود بر سطح S در هر نقطه از آن میباشد.



عبارت $\oiint$ یعنی انتگرال روی سطح بسته S. مقدار $F_n \, dS$ را فلوی میدان $\vec{F}$ از

مقادیر مختلف زیر را در نقاط مختلف اتخاذ خواهد کرد

$$\nabla(\vec{F}(\vec{r})) = \begin{cases} -4\pi k\sigma & \vec{r} \in B \quad \text{با استثنای سطح جسم } B \\ -4\pi k\frac{\sigma}{2} = -2\pi k\sigma & \text{برای نقاط روی سطح جسم } B \\ 0 \quad \text{صفر} & \vec{r} \notin B \quad \text{برای نقاط خارج از جسم } B \end{cases}$$

حال نگاهی به ترکیب خود دیورژانس میکنیم

$$\nabla(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot F \quad (\text{حاصلضرب داخلی})$$

از طرف دیگر میدانیم که $\vec{F} = \nabla(V)$ که در آن V پتانسیل میدان $\vec{F}$ میباشد.
پس دیورژانس بصورت زیر در میآید.

$$\nabla(\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta(V)$$

در اینجا $\nabla \cdot \nabla(\,) = \nabla^2(\,) = \Delta(\,)$ یک اپراتور دیفرانسیل از درجه دوم میباشد
که آنرا اپراتور لاپلاس (Laplace's operator) مینامند.
با در نظر گرفتن مراتب فوق میتوان معادلات دیفرانسیل زیر را داشت

$$\Delta(V) = \begin{cases} -4\pi k\sigma & \text{داخل جسم } B \\ -2\pi k\sigma & \text{روی جسم } B \\ 0 \quad \text{صفر} & \text{بیرون جسم } B \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل اول و دوم بنام معادلات پواسن (Poisson's equations) میباشند

نیز دارای همان مقدار ثابت خواهد بود. بنابراین معادله دیفرانسیل زیر برای پتانسیل W در سیستم مختصات کارتزین بصورت زیر صادق است

$$\Delta(W) = 2\omega^2$$

خواهیم دید که تنها پتانسیل جاذبه است که در نقاط خارج از جسم در معادله لاپلاس صدق میکند ولی درمورد پتانسیل ثقل (U) اینطور نیست. پتانسیل ثقل در معادله دیفرانسیل زیر صدق میکند

$$\boxed{\Delta(V+W) = \Delta(U) = -4\pi k\sigma + 2\omega^2}$$

که در آن σ یک تابع از موقعیت نقطه میباشد. از آنجائیکه σ یک تابع پیوسته در تمام نقاط فضا نیست و دارای ناپیوستگی در نقاطی نظیر نقاط روی سطح جسم B میباشد، تابع U دارای مشتقات درجه دوم ناپیوسته در آن نقاط خواهد بود. از این نقاط علاوه بر سطح جسم B ممکن است در داخل جسم نیز اگر σ بالنسبة پیوسته نباشد وجود داشته باشند. ولی تابع U در فضای خارج از جسم B یک تابع پیوسته میباشد.

۱۱-۲: توابع هارمونیک و خواص آنها

اگر تابعی در یک منطقه A، در معادله دیفرانسیل لاپلاس صدق کند آنرا تابع هارمونیک در آن منطقه نامند. بعنوان مثال پتانسیل جاذبه یک جسم در فضای خارج از آن یک تابع هارمونیک میباشد. یک تابع هارمونیک دارای خواص زیر میباشد

۱) یک زیرمنطقه محدود بوسیله یک سطح بسته از منطقه A، $B \in A$، را درنظر میگیریم

معروف است. نشان داده شده است که اگر سطح مرزی باندازه کافی صاف و هموار باشد تابع هارمونیک همیشه وجود دارد. منظور از صاف بودن سطح آنکه صفحه مماس بر آن تغییرات پیوسته داشته باشد. علاوه بر شرط صاف بودن سطح مرزی لازم است تابع مزبور در فاصله بی‌نهایت به سمت صفر میل کند.

حال طالبه اثبات اصل دیریکله را بیان میکنیم. فرض میکنیم B یک منطقه محدود با مرز S باشد و فرض میکنیم که دو تابع V و W وجود دارند که دارای مقادیر یکسان روی سطح S باشند. در این صورت تابع $U = V - W$ نیز یک تابع هارمونیک بوده (بنا به خاصیت خطی بودن اپراتور Δ) و دارای مقادیر صفر روی سطح S خواهد بود. ولی این مسئله با خاصیت نخستین یک تابع هارمونیک است. مطابق این خاصیت ماکزیمم و مینیمم تابع روی مرز قرار دارند بنابراین تابع U بایستی دارای مقادیر صفر در داخل B باشد یعنی بایستی $V = W$ باشد بدین ترتیب اصل دیریکله اثبات میگردد.

در اینجا اشاره میکنیم که تابع

$$\gamma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$$

تابع هارمونیک بنیادی و یا جواب بنیادی معادله لاپلاس میباشد.

۲-۱۲ مسئله شرایط مرزی یا B.V.P.

بنا به اصل دیریکله معادله لاپلاس منجر به جواب واحد میگردد اگر مقدار تابع تابع مورد نظر در روی سطح مرزی یک منطقه معلوم باشد. مسئله یافتن یک تابع هارمونیک که دارای مقادیر معلومی روی یک سطح مرزی معلوم باشد مسئله شرایط مرزی مینامند.

برای اینکه مسئله سوم دارای جواب باشد باید علاوه بر اصل دیریکله معادله

$$\oiint_s f(\vec{r})\,ds = c_1 \oiint_s V(\vec{r})\,ds$$

نیز برقرار باشد. این شرط از معادله ($\oiint_s \frac{\partial V}{\partial n}\,ds=0$) نتیجه میشود.

۲-۱۴: راه حل های مختلف برای مسئله B.V.P.

راه حل های مختلفی برای حل مسئله B.V.P وجود دارند. از جمله روش تبدیل لاپلاس و فوریه و تبدیلات دیگر، روش آنالیز [illegible]، روش های عددی، تبدیل به معادلات انتگرال، تابع گرین و بسط فوریه را میتوان نام برد. روش های نامبرده به یکدیگر باهم ارتباط دارند. پرداختن به تمام روش های یاد شده احتیاج به وقت زیادی دارد. در اینجا تنها به تشریح بسط فوریه که متداولترین آنها در فیزیکال ژئودزی در مباحث ما میپردازیم.

در بسط فوریه جواب معادله لاپلاس را بصورت حاصلضرب سه تابع مستقل

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

حساب میکنند. این روش به حل سه معادله دیفرانسیل از درجه دوم براساس سه متغیر مستقل منجر میشود.

۱) نخست فرض میکنیم که تابع V بصورت زیر باشد

$$V(x,y,z) = X(x)\cdot\Phi(y,z)$$

نظر اینکه که گذشت معادله دیفرانسیل اخیر را می‌توان به دو معادله دیفرانسیل زیر تفکیک کرد

$$Y'' - C_2 Y = 0 \quad \text{و} \quad Z'' + (C_1 + C_2) Z = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل اصلی به سه معادله دیفرانسیل معمولی که از طریق ثابت‌ها بهم مربوط می‌باشند تفکیک می‌گردد. هر جوابی از سه معادله دیفرانسیل فوق که بتواند شرایط مرزی را ارضا نماید جواب مسئله خواهد بود.

۲-۱۴ مقادیر ویژه و توابع ویژه

هر معادله دیفرانسیل مشتق جزئی بازاء مقادیر اختیاری ثابت‌های C_1 و C_2 وقتی شرط مرزی ممکن است جواب داشته و یا نداشته باشند. در واقع این معادلات دیفرانسیل از نوع sturm-Luiville هستند که تنها بازاء مقادیر خاصی از ثابت‌های خود دارای جواب می‌باشند. این مقادیر را مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل می‌نامند.
فرم کلی یک معادله دیفرانسیل از نوع sturm-Luiville بصورت زیر می‌باشد

$$(KY')' - qY + \lambda P Y = 0$$

که در آن Y جواب معادله و تابعی از x می‌باشد. K و P دو تابع معلوم و مثبت از x و q یک تابع غیرمنفی معلوم از x و λ یک عدد حقیقی می‌باشد. علاوه بر مشخصات فوق P معروف به تابع وزن نیز می‌باشد. میتوان نشان داد که معادله دیفرانسیل فوق بازاء مقادیر بیشماری از λ (مقادیر ویژه) که همه غیرمنفی می‌باشند

بطوریکه میدانیم ترکیب خطی جوابهای خصوصی یک معادله دیفرانسیل که تمام شرایط مرزی را ارضا نماید خود یک جواب برای مسئله شرایط مرزی ما میباشد.
این مطلب در فیزیک ژئودزی از اهمیت خاصی برخوردار است. بطوریکه ما در فیزیک ژئودزی بطور مداوم با توابع ویژه سروکار خواهیم داشت. اگر دقت کنید ۲۲ سه معادله دیفرانسیل بدست آمده در بخش ۱۳-۲ از نوع Sturm-Louville میباشند.

تاکنون ما با سیستم مختصات کارتزین معمولی (x,y,z) کار میکردیم. این سیستم مختصات زیاد مناسب کار ما در ژئودزی نیست چراکه جسم مورد مطالعه ما در ژئودزی زمین است که کم و بیش دارای شکل کروی و یا بیضوی است. بدین جهت انتخاب سیستم مختصات کروی و یا بیضوی مناسبتر خواهد بود. با این انتخاب لازم است که انتقال از سیستم کارتزین به این سیستمها را مورد مطالعه قرار دهیم.

۱۵-۲ : اپراتور لاپلاسین در سیستم مختصات منحنی الخط، ضرایب لامه

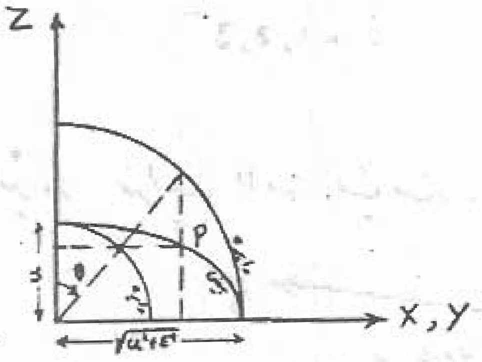
مختصات منحنی الخط : در فضای E_3 برای هر نقطه (x,y,z) یک مختصات منحنی الخط، (q_1,q_2,q_3) بصورت زیر تعریف میکنیم

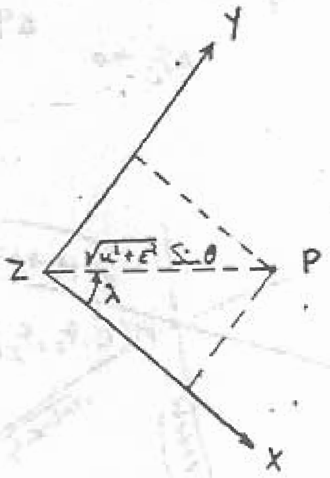
$$(q_1, q_2, q_3) \rightleftarrows (x, y, z)$$

بطوریکه میتوانیم هرکدام از مختصات q_i را بصورت تابعی از مختصات (x,y,z) و برعکس هرکدام از مختصات x، y و یا z را بصورت تابعی از مختصات (q_1,q_2,q_3) بیان کنیم. بنابراین لازم است که ارتباط بین دو سیستم (کارتزین و منحنی الخط) بصورت یک به یک باشد. شکل صفحه بعد نمونه‌ای از این قبیل سیستم مختصات منحنی الخط را نشان میدهد.

۲- سیستم مختصات بیضوی

در این سیستم لازم است که طول کانونی E ($E^2 = a^2 - b^2$) داده شود





روابط بین مختصات کارتزین و مختصات بیضوی بصورت زیر میباشد

$$x = \sqrt{(u^2+E^2)}\,\sin\theta\,\cos\lambda$$

$$y = \sqrt{(u^2+E^2)}\,\sin\theta\,\sin\lambda$$

$$z = u\cos\theta$$

و مختصات u و λ و θ از معادلات زیر محاسبه میشوند

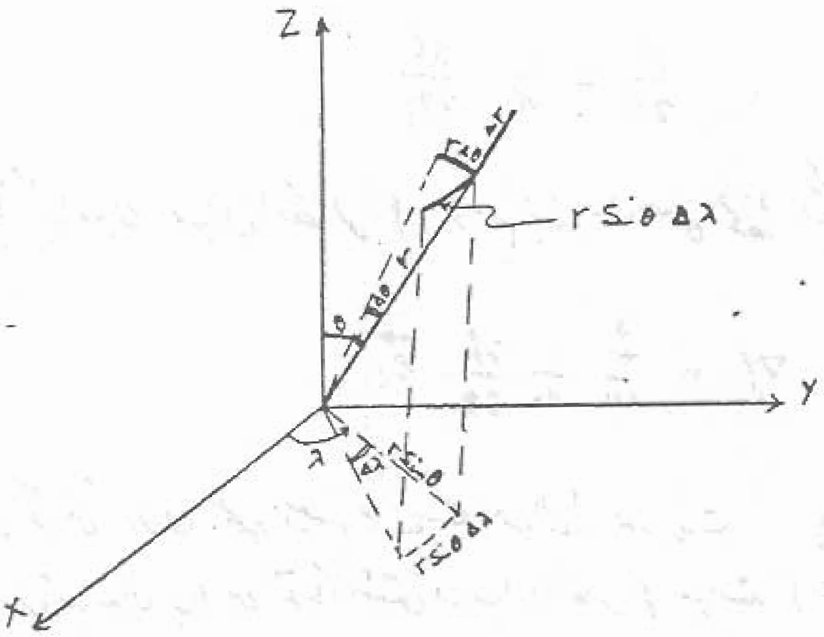
$$u^4 - u^2(x^2+y^2+z^2-E^2) - z^2E^2 = 0$$

$$\lambda = \operatorname{arctg}(y/x)$$

$$\theta = \arccos(z/u)$$

دو سیستم مختصات یاد شده. در فوق بین سیستمهای مختصات کروی و بیضوی از لحاظ عملی مشابه میباشند.

مثال: ضرایب لامه را در سیستم مختصات کروی محاسبه کنید



مطابق شکل میتوان نوشت

$$H_r = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\overset{\frown}{M(r,\theta,\lambda)\, M(r+\Delta r,\theta,\lambda)}}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1$$

$$H_\theta = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{\overset{\frown}{M(r,\theta,\lambda)\, M(r,\theta+\Delta\theta,\lambda)}}{\Delta \theta} = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta\theta} = r$$

$$H_\lambda = \lim_{\Delta \lambda \to 0} \frac{\overset{\frown}{M(r,\theta,\lambda)\, M(r,\theta,\lambda+\Delta\lambda)}}{\Delta \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \to 0} \frac{r\sin\theta\,\Delta\lambda}{\Delta\lambda} = r\sin\theta$$

ملاحظه کنید که تمام ضرایب H_i در سیستم مختصات (x, y, z) برابر واحد میباشند.

واضح است که با داشتن ضرایب لامه میتوان المان طولی را در امتداد خطوط مختصات dq_i محاسبه کرد

$$dS_i = \overset{\frown}{MM+dM_i} = H_i\, dq_i$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[2r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + r^2\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\right]$$

$$\Delta f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}$$

۲-۱۶ : حل معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی بروش فوریه

معادله لاپلاس را در سیستم مختصات کروی ($\Delta f = 0$) در نظر گرفته جواب آنرا بصورت تابع

$$f(r,\theta,\lambda) = R(r)\cdot Y(\theta,\lambda)$$

جستجو میکنیم. مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع فوق را بشکل زیر مینویسیم

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{dR}{dr}Y = R'Y \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = R''Y \;,\; \frac{\partial f}{\partial \theta} = R\frac{\partial Y}{\partial \theta} \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = R\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = R\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = R\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}$$

با جایگزینی مشتقات فوق در معادله لاپلاس خواهیم داشت

$$\Delta f = \frac{2}{r}R'Y + R''Y + \frac{\cot\theta}{r^2}R\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}R\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}R\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} = 0$$

طرفین معادله فوق را در جمله $\frac{r^2}{RY}$ ضرب میکنیم

با جایگزینی مشتقات در معادله دیفرانسیل II خواهیم داشت

$$\cot\theta\, T'L + T''L + \sin^{-2}\theta\, TL'' + c_1 TL = 0$$

طرفین معادله فوق را در جمله $\frac{\sin^2\theta}{TL}$ ضرب میکنیم

$$\sin\theta\cos\theta\,\frac{T'}{T} + \sin^2\theta\,\frac{T''}{T} + \frac{L''}{L} + c_1\sin^2\theta = 0$$

معادله فوق را میتوان بشکل زیر نوشت.

$$\frac{1}{T}\left(\sin^2\theta\, T'' + \sin\theta\cos\theta\, T'\right) + c_1\sin^2\theta = -\frac{L''}{L} = \text{ثابت} = c_2$$

واز آنجا دو معادله دیفرانسیل زیر حاصل میشوند

$$\sin^2\theta\, T'' + \sin\theta\cos\theta\, T' + (c_1\sin^2\theta - c_2)\,T = 0 \qquad (II')$$

$$L'' + c_2 L = 0 \qquad (II'')$$

پس تابعی از متغیرهای r و θ و λ که در معادلات دیفرانسیل I , II' , II'' صدق کند و در عین حال شرائط مرزی را نیز حائز باشد جواب مسئله B.V.P. اسیم گسستهات کروی خواهد بود.

و از آنجا که $\theta = \arc\cos\tau$ و $\tau \in [-1,+1]$ برده بتوان مشتقات تابع T را بصورت زیر نوشت

$$T(\theta) = T(\arccos\tau)$$

$$T'(\theta) = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{d\tau}\frac{d\tau}{d\theta}$$

$$T''(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{d\tau}\frac{d\tau}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{d\theta} + \frac{dT}{d\tau}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)$$

$$= \frac{d^2T}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2 + \frac{dT}{d\tau}\frac{d^2\tau}{d\theta^2}$$

با قرار دادن $\frac{dT}{d\tau} = T'_\tau$ و $\frac{d^2T}{d\tau^2} = T''_{\tau\tau}$ و با جایگزینی $\frac{d\tau}{d\theta} = -\sin\theta$ و

$\frac{d^2\tau}{d\theta^2} = -\cos\theta$ معادله دیفرانسیل II شکل زیر درمی‌آید

$$\sin^2\theta\,(T''_{\tau\tau}\sin^2\theta - T'_\tau\cos\theta) + \sin\theta\cos\theta\,T'_\tau(-\sin\theta) + (C_1\sin^2\theta - C_2)T = 0$$

و یا

$$\sin^4\theta\,T''_{\tau\tau} - 2\sin^2\theta\cos\theta\,T'_\tau + (C_1\sin^2\theta - C_2)T = 0$$

با جایگزینی $\cos\theta = \tau$ در معادله فوق خواهیم داشت

$$(1-\tau^2)^2 T''_{\tau\tau} - 2\tau(1-\tau^2)T'_\tau + [C_1(1-\tau^2) - C_2]T = 0$$

و یا معمولاً

$$(1-\tau^2)T''_{\tau\tau} - 2\tau T'_\tau + \left(C_1 - \frac{C_2}{1-\tau^2}\right)T = 0$$

این معادله را معادله لژاندر از مرتبه $\sqrt{C_2}$ ام مینامند.

توابع P_{nm} را توابع یا چند جمله‌ایهای وابسته لژاندر از درجه n ام و مرتبه m ام می‌نامند در حالیکه P_n ها را توابع لژاندر می‌نامند. توابع اخیر حالتهای خاص از توابع نوع اول می‌باشند یعنی مرتبه آنها صفر می‌باشد.

هر ترکیب خطی از توابع P_{nm} خود یک جواب برای معادله II می‌باشد. بنابراین ترکیب خطی از توابع مثلثاتی و توابع لژاندر جوابی برای معادله II خواهد بود (شکل 2-16)

$$Y(\theta,\lambda) = \sum_{\substack{m=0\\ n\geq m}}^{\infty} \left[(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \right]$$

ضرایب A_{nm} و B_{nm} ثابتهای اختیاری می‌باشند. تابع Y را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (A_{nm}C_{nm} + B_{nm}S_{nm})$$

توابع Y_n و Y_{nm} و C_{nm} و S_{nm} را هارمونیکهای کروی می‌نامند.

روی کره بشعاع $r=a$ (داریم $R(a) =$ ثابت $= K$) تابع هارمونیک f بصورت زیر درمی‌آید

$$f(a,\theta,\lambda) = K\sum_{n=0}^{\infty} Y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n$$

که در آن $\tilde{Y}_n = KY_n$ می‌باشد. بنابراین ملاحظه میشود که جواب معادله لاپلاس روی کره بشکل ترکیب خطی از هارمونیکهای کروی میباشد. میتوان گفت که هارمونیکهای کروی توابع ویژه معادله لاپلاس روی کره میباشند.

$$A \equiv (0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ , \ -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi)$$

و با وزن واحد متعامد میباشند . بطوریکه داریم

$$\int_A \Phi_{nm}(\theta,\lambda)\, \Phi_{k\ell}(\theta,\lambda)\, dA = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\lambda) P_{nm}(\cos\theta)\, \phi_\ell(\lambda) P_{k\ell}(\cos\theta) \sin\theta \, d\lambda \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} P_{nm}(\cos\theta) P_{k\ell}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\lambda)\phi_\ell(\lambda)\, d\lambda$$

$$= M_{nm}\delta_{nk}\, N_m \delta_{m\ell} = M_{nm} N_n \delta_{nk}\delta_{m\ell}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk}\delta_{m\ell} & m = 0 \\ \dfrac{2\pi}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk}\delta_{m\ell} & m \neq 0 \end{cases}$$

اگر توابع Φ_{nm} را تقسیم بر $\sqrt{O_{nm}} = \sqrt{M_{nm} N_{nm}}$ کنیم تبدیل به توابع اورتونرمال میشوند

$$\Phi_{nm}(\theta,\lambda) = \Phi_{nm}(\theta,\lambda) / \sqrt{O_{nm}}$$

برای توابع اورتونرمال فوق داریم

$$\int_A \Phi_{nm}\, \Phi_{k\ell}\, dA = \delta_{nk}\delta_{m\ell}$$

۲-۱۹ : حل کامل معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی

تا اینجا میدانیم که هر ترکیب خطی از هارمونیکهای کروی خود جوابی برای معادله شماره II در بخش ۲-۱۶ میباشد. برای تکمیل بحث خود در باره روش فوریه برای حل معادله لاپلاس در سیستم مختصات کروی می‌پردازیم به حل معادله I در بخش ۲-۱۶.

دیدیم که معادله II تنها بازای مقادیر ثابت

$$c_1 = n(n+1) \quad , \quad n = m, m+1, \dots$$

دارای جواب میباشد. دراینجا فوق را باید از حل معادله I در نظر داشته باشیم بنابراین معادله I بصورت زیر نوشته میشود

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

معادله فوق معروف به معادله اولر بوده و با تغییر متغیر زیر حل میشود

$$r = e^t \Rightarrow t = \ln r \; , \; R'_r = R'_t \frac{dt}{dr} = R'_t \frac{1}{r} = R'_t e^{-t}$$

$$R''_{rr} = \frac{d}{dr}\left(R'_t \frac{dt}{dr}\right) = R''_{tt}\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + R'_t \frac{d^2t}{dr^2} = R''_{tt} e^{-2t} + R'_t\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= R''_{tt} e^{-2t} - R'_t e^{-2t}$$

بنابراین معادله اولر بصورت زیر نوشته میشود

$$e^{2t}\left(R''_{tt} e^{-2t} - R'_t e^{-2t}\right) + 2e^t R'_t e^{-t} - n(n+1)R = 0$$

و یا

$$R''_{tt} + R'_t - n(n+1)R = 0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه دوم میباشد که معادله مشخصه آن بصورت

سریهای دارای خاصیت منعکس کردن (خاصیت توابع هارمونیک) خواهند بود که فقط و فقط یکی از آنها جواب معادله در داخل کره شعاع واحد و دیگری جواب در خارج آن کره باشد.

درعمل بندرت اتفاق میافتد که ما مسئله BVP را برای کره شعاع واحد حل کنیم. اگر بخواهیم مسئله را برای کره ای بشعاع a حل کنیم کافیست که هر کدام از دو تابع جواب را در ضریب مناسبی ضرب کنیم بطوریکه هر دو تابع دارای مقادیر یکسانی روی کره a باشند. این کار به آسانی بصورت زیر انجام میشود

$$\tilde{f}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n \quad , \quad \tilde{f}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n$$

دوتابع فوق جوابهای کامل معادله لاپلاس در داخل و خارج کره بشعاع a میباشند.

۲-۲۰ جواب کامل معادله لاپلاس در سیستم مختصات بیضوی

حل معادله لاپلاس در سیستم مختصات بیضوی منجر به جوابهای شبیه آن در سیستم مختصات کروی میشود. در اینجا فقط به ذکر جواب کامل اکتفا میکنیم

$$\tilde{f}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[P_{nm}(u,E,b) P_{nm}(\cos\theta) \left(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda \right) \right]$$

$$\tilde{f}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[q_{nm}(u,E,b) P_{nm}(\cos\theta) \left(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda \right) \right]$$

که در آن

$$P_{nm}(u,E,b) = P_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right) / P_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)$$

$$q_{nm}(u,E,b) = Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right) / Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)$$

۲-۲۱ حل مسئله BVP برای یک مرز کروی با استفاده از هارمونیکهای کروی

در بخش ۲-۱۸ نشان داده شد که تابع R.h جواب مسئله BVP دیریکله میباشد اگر $h(\theta,\lambda)$ ، مقدار مرزی، روی سطح کره بشعاع a معلوم باشد. بنابراین جواب مسئله BVP برای یک مرز کروی بصورت زیر نوشته میشود

$$\tilde{f}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n \quad , \quad \tilde{f}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n$$

که در آن هارمونیکهای سطحی Y_n بصورت زیر میباشند

$$Y_n = \sum_{m=0}^{n} \left(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda\right) P_{nm}(\cos\theta)$$

ضرایب A_{nm} و B_{nm} از انتگرال های زیر حساب میشوند (بخش ۲-۱۸).

$$\begin{pmatrix} A_{nm} \\ \\ B_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_S h(\theta,\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} ds$$

در محاسبه انتگرال های فوق برای $m=0$ جای 2π به 4π تبدیل میشود.

تابع $h(\theta,\lambda)$ طبق تعریف برابر $h(\theta,\lambda) = f(a,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$ میباشد. انتگرالهای فوق روی تمامی سطح کره انجام میگیرد.

در مسئله BVP کروی نیومن (Neuman) مقدار مرزی معلوم عبارتست از

بنابراین اگر انتگرال

$$\oiint h \, ds = 0$$

برقرار باشد مسئله نیومن دارای یک جواب منحصر بفرد (*) خواهد بود. جواب مزبور معمولاً بصورت زیر نوشته میشود

$$f_e = -a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{Y'_n}{n+1}$$

مهمترین مسئله BVP که در فیزیکال ژئودزی اتفاق میافتد مسئله سوم BVP میباشد. در این مسئله شرایط مرزی معلوم عبارتست از

$$h(\theta,\lambda) = c_1 f(r,\theta,\lambda)\Big|_{r=a} + c_2 \frac{\partial f}{\partial n}(r,\theta,\lambda)\Big|_{r=a}$$

$$= c_1 f(r,\theta,\lambda)\Big|_{r=a} + c_2 \frac{\partial f(r,\theta,\lambda)}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

در اینجا نیز بدنبال جواب مسئله در خارج کره $r=a$ بوده و آنرا بشکل

$$f_e = \sum_{n=0}^{\infty} R''_n Y''_n$$

جستجو میکنیم. در اینجا باز فرض میکنیم $h = \sum_{n=0}^{\infty} Y''_n$ و $R''_n = \beta_n R_n$ میتوان نشان داد که جواب فوق وجود دارد اگر β_n را بصورت زیر انتخاب بکنیم

$$\beta_n = \left(c_1 - \frac{c_2}{a}(n+1) \right)^{-1}$$

که در آن

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$$

می‌توان نوشت

$$\rho^2 = r^2 - 2\vec{r}\,\vec{r}' + r'^2$$

حاصل‌ضرب داخلی $\vec{r}\,\vec{r}'$ را می‌توان به صورت $rr'\cos\psi$ نوشت در نتیجه داریم

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\psi + r'^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\psi + \frac{r'^2}{r^2}}$$

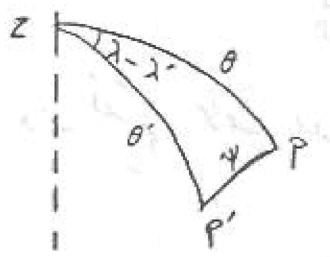
در تئوری توابع لژاندر، تابع $y = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$ برای $|x| \leqslant 1$ و $|t| < 1$ را تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌نامند بطوریکه y را می‌توان بر حسب توابع لژاندر به صورت زیر نوشت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

که در آن P_n تابع لژاندر از رتبه nام و درجه صفر می‌باشد
بسهولت دیده میشود که برای $r > r'$ یعنی $|r'/r| < 1$ و $\cos\psi \leqslant 1$ می‌توان نوشت

$$1/\rho = 1/r \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

در اینجا $\cos\psi$ را می‌توان بر حسب مختصات کروی نقاط P و P' طبق شکل زیر از مثلث کروی ZPP' چنین نوشت



$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda')$$

$$V(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \int_B \frac{k}{a}\, \sigma \left(\frac{r'}{a}\right)^{n} P_n(\cos\theta')\, dB \; +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \left\{ \left[\frac{2k}{a} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_B \sigma \left(\frac{r'}{a}\right)^{n} P_{nm}(\cos\theta') \cos m\lambda'\, dB \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \; + \right.$$

$$\left. \left[\frac{2k}{a} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_B \sigma \left(\frac{r'}{a}\right)^{n} P_{nm}(\cos\theta') \sin m\lambda'\, dB \right] P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \right\}$$

با قرار دادن ضرایب

$$A_{n0} = \frac{k}{a} \int_B \sigma \left(\frac{r'}{a}\right)^{n} P_n(\cos\theta')\, dB$$

$$\begin{pmatrix} A_{nm} \\ \\ B_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2k}{a} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_B \sigma \left(\frac{r'}{a}\right)^{n} P_{nm}(\cos\theta') \begin{pmatrix} \cos m\lambda' \\ \\ \sin m\lambda' \end{pmatrix} dB$$

تابع پتانسیل بصورت زیر درمی‌آید

$$V(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n$$

که همان فرمول معروف ما بعنوان جواب مسئله دیریکله در خارج کره $(r=a)$ میباشد

معادلات فوق روابط بین ضرایب A_{n0} و A_{nm} ، B_{nm} و جسم B را نشان میدهد
ملاحظه کنید که تابع زیر انتگرال بصورت حاصلضرب یک هارمونیک (در داخل کره $r=a$) و تابعی از ضرایب واحد و دانسیته.
دیده میشود که معادلات ضرایب اطلاعات زیادی را درمورد جسم B میدهند
اما ضرایب درجه پائین شامل اطلاعاتی درمورد جسم میباشند.

حال هارمونیک‌های فوق را در سیستم مختصات کارتزین (z, y, x)، با

$$x = r'\sin\theta'\cos\lambda' \ , \ y = r'\sin\theta'\sin\lambda' \ , \ z = r'\cos\theta'$$

می‌نویسیم

$$C'_{00} = 1 \qquad S'_{00} = 0$$
$$r' C'_{10} = z \qquad r' S'_{10} = 0$$
$$r' C'_{11} = x \qquad r' S'_{11} = y$$
$$r'^2 C'_{20} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2 \qquad r'^2 S'_{20} = 0$$
$$r'^2 C'_{21} = 3xz \qquad r'^2 S'_{21} = 3yz$$
$$r'^2 C'_{22} = 3x^2 - 3y^2 \qquad r'^2 S'_{22} = 6xy$$

با جایگزینی نتایج فوق در معادلات ضرایب خواهیم داشت

$$A_{00} = \frac{K}{a}\int_B \sigma \, dB \ , \quad B_{00} = 0$$

$$A_{10} = \frac{K}{a^2}\int_B \sigma z \, dB \ , \quad B_{10} = 0$$

$$A_{11} = \frac{K}{a^2}\int_B \sigma x \, dB \ , \quad B_{11} = \frac{K}{a^2}\int_B \sigma y \, dB$$

$$A_{20} = \frac{K}{a^3}\int_B \sigma (2z^2 - x^2 - y^2) \, dB \ , \quad B_{20} = 0$$

$$A_{21} = \frac{K}{a^3}\int_B \sigma x z \, dB \ , \quad B_{21} = \frac{K}{a^3}\int_B \sigma y z \, dB$$

$$A_{22} = \frac{K}{4a^3}\int_B (x^2 - y^2) \, dB \ , \quad B_{22} = \frac{K}{2a^3}\int_B \sigma x y \, dB$$

$$A_{11} = \frac{K}{a^2} M \xi \quad , \quad B_{11} = \frac{K}{a^2} M \eta$$

$$A_{20} = \frac{K}{a^3}\left(\frac{A+B}{2} - C\right) \quad , \quad B_{20} = 0$$

$$A_{21} = \frac{K}{a^3} E \quad , \quad B_{21} = \frac{K}{a^3} F$$

$$A_{22} = \frac{K}{4a^3}(B-A) \quad , \quad B_{22} = \frac{K}{2a^3} D$$

بنابراین ضرایب هارمونیک‌های درجه پایینی دارای معانی کامل فیزیکی می‌باشند. این معانی ما را در تفهیم فرمول‌های بعدی فیزیکال ژئودزی یاری خواهند کرد. دیده می‌شود که ضرایب درجه پایینی پتانسیل جاذبه بستگی به ممان‌های اینرسی و اینرسی‌های حاصلضرب داشته و بستگی به شکل و توزیع جرم در داخل جسم B ندارند.

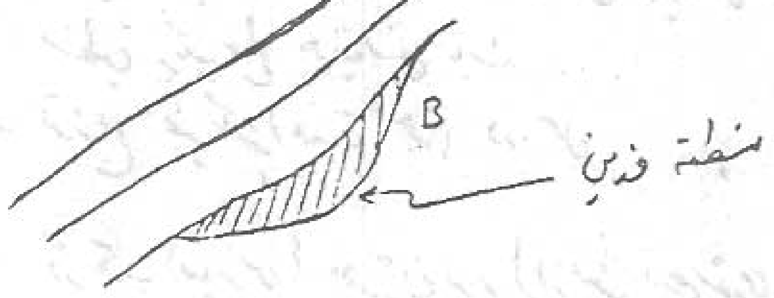
۲-۲۴ سطوح هم‌پتانسیل، خطوط نیرو

مکان هندسی نقاط با پتانسیل مساوی و برابر مقدار c را

$$V(\vec{r}) = c$$

یک سطح هم‌پتانسیل از میدان پتانسیل V می‌نامند. بازاء مقادیر مختلف c سطوح هم‌پتانسیل مختلف وجود دارند. ثابت کنید تابع پتانسیل V یک تابع پیوسته بوده و در خارج جرم هارمونیک می‌باشد دارای فرمول تحلیلی است و تنها دارای مشتقات درجه دوم ناپیوسته در مرز بین محدوده معادله لاپلاس و معادله پواسون می‌باشد، سطوح هم‌پتانسیل

یک سطح هم‌پتانسیل سطحی است که نیروی میدان در روی آن عمل نمی‌کند. بدین جهت است که یک جسم الاستیک همچون اگر در یک میدان نیرو قرار گیرد سعی می‌کند شکل یکی از سطوح هم‌پتانسیل میدان را بخود بگیرد. چراکه در اینصورت نیروهای خاصی ([illegible] strains) دیگر وجود نداشته و جسم در حالت تعادل خواهد بود. اما برای یک جسم صلب نیروهای خاصی همیشه وجود خواهند داشت. اگر جسم الاستیک همچون نابسته نتواند شکل یک سطح هم‌پتانسیل را بخود بگیرد. قسمتهای وزین بیشتر از قسمتهای سبک به داخل جسم کشیده شده و نیروهای اضافی ناشی از این حالت، بر نیروی میدان به تعادل رسیده و سپس آنکه شکل جسم منطبق بر یک سطح هم‌پتانسیل بگردد. لذا سطوح هم‌پتانسیل تا حدودی غرق‌شدگی قسمتهای وزین در داخل جسم را نشان میدهند.



که در آن R شعاع کره‌ای است که تمام توده زمین را در بر گرفته است به عبارت دیگر کره‌ای که در خارج آن پتانسیل زمین هارمونیک میباشد. چنین کره‌ای را کره روانی مینامیم.
در عمل نیازی نیست که حتماً کره روانی تمام زمین را در برگرفته باشد چرا که میتوان تاثیر توده‌ای با فاصله در خارج کره را با انطباق حساب حذف کرد. اگر مقدار پتانسیل جاذبه یا مشتق نرمال پتانسیل و یا ترکیب خطی پتانسیل و مشتق نرمال آنرا روی کره روانی بدانیم میتوانیم ژئوئید را تعیین کنیم. تعیین ژئوئید مشروط به تعیین پتانسیل $U(\vec{r})$ در نقطه‌ای و از آنجا تعیین سطح $U(\vec{r})=U_0$ خواهد بود.

روش دیگر برای بیان ژئوئید استفاده از هارمونیکهای بیضوی است

$$U(u,\varphi,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(u,E,b)\,Y_{nm}+\frac{1}{2}\omega^2 r'^2=U_0=\text{ثابت}$$

در اینجا بیضی (b,E) بعنوان بیضی روانی میباشد. ژئوئیدی که با فرمولهای مختلف بیان میشود در واقع یک ژئوئید بیشتر نیست. هارمونیکهای کروی Y_n مورد استفاده در راه حل کروی دقیقاً همان هارمونیکهای Y_{nm} در راه حل بیضوی میباشند. بیضوی روانی بایستی تمام زمین را در بر بگیرد. در عمل حالت ایده‌آل کمتر تحقق می‌پذیرد بنابراین بایستی توده‌های بیرون زده از بیضوی روانی بطور مجازی از بین برد.

متاسفانه مقدار پتانسیل جاذبه در روی سطوح روانی معلوم نیست بنابراین نمیتوانیم روش های فوق را برای تعیین ژئوئید بکار ببریم. در فصل‌های آینده روش‌های مناسب برای حل این مشکل را ارائه خواهیم داد.

ممکن است این سؤال در ذهن خواننده ایجاد شود که چرا ما بدنبال تعیین تنها سطوح هم پتانسیل از میدان جاذبه هستیم. علت اینکه سطوح هم پتانسیل کاربرد زیادی در ژئودزی دارند. آنها صفحات افقی را در عمل تعریف میکنند. صفحات افقی، صفحات مماس بر سطوح هم پتانسیل بوده و دستگاههای ژئودزی معمولاً بر آنها مستقر میشوند.

و پتانسیل $U(\vec{r})$ را مساوی مقدار ثابت $U_B(\vec{r}) = \text{Const}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$U_B(\vec{r}) = \frac{KM}{r} + \frac{K}{r^5}\left[\left(\frac{A+B}{2} - C\right)\left(z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{3}{4}(B-A)(x^2-y^2)\right] +$$

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{KM}{r} + \frac{K}{2r^5}\left[(B+C-2A)x^2 + (A+C-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2\right] +$$

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{Const} \text{ مقدار ثابت}$$

فرمول فوق معادله سطح هم‌پتانسیل با پتانسیل ثابت $U_B(\vec{r})$ می‌باشد که یک سطح از درجه دوم می‌باشد.

اسفروئید هلمرت (Helmert's spheroid) هم‌چنین روی معادلات فوق بوده با این تفاوت که وی تابع پتانسیل را تا هارمونیک‌های درجه چهار بسط می‌دهد. نتیجه سطحی از درجه بیست و دوم می‌باشد. اگر فرض کنیم زمین نسبت به محور دوران خود متقارن می‌باشد یعنی فرض کنیم $A = B$. در اینصورت شکل اسفروئید فوق خیلی ساده‌تر شده بطوریکه اختلاف آن از بیضوی دورانی ناچیز میشود. علت این اختلاف ناچیز است که از یک بیضوی دورانی بجای اسفروئید برای تقریب ژئوئید استفاده میشود.

ضمناً ملاحظه کنید که در بیان اسفروئید کمیتهای مجهول M، A، B و C و ω شرکت کرده‌اند.

از طرفی پتانسیل شکل فوق در خارج جسم جذب‌کننده (زمین) در معادله لاپلاس صدق خواهد کرد. در زیر نشان خواهیم داد که این کار برای هر دو سطح ترازی کره و بیضوی امکان‌پذیر می‌باشد.

۴-۳ کره بعنوان سطح ترازی نرمال

برای کره می‌توانیم بنویسیم

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = U_N^{(s)} + T^{(s)} = V_N^{(s)} + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 + T^{(s)}$$

که در آن $U_N^{(s)}$ روی کره $r = a$ ثابت می‌باشد

$$U_N^{(s)}\Big|_{r=a} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n^{(s)}\Big|_{r=a}}_{V_N^{(s)}} + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=a} = U_{N0}^{(s)} = \text{مقدار ثابت}$$

که در آن $Y_n^{(s)} = A_{n0}P_{n0}(\cos\theta)$ می‌باشد چراکه پتانسیل $U_N^{(s)}$ کره بستگی به مختصات λ ندارد (تقارن دورانی کره). بستگی پتانسیل $V_N^{(s)}$ به θ بعلت جمع کردن بستگی پتانسیل گریز از مرکز در روی می‌باشد. مقدار r'' روی کره بصورت زیر است:

$$r''\big|_{r=a} = a\sin\theta$$

و از آنجا $\frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = \frac{1}{2}\omega^2 a^2\sin^2\theta$ می‌باشد جمله $\sin^2\theta$ برحسب ترم لژاندر بصورت

اگر نتایج فوق را در معادله پتانسیل $V_N^{(S)}$ منظور کنیم خواهیم داشت

$$V_N^{(S)} = \frac{a}{r}\left(U_{N0}^{(S)} - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right) P_{00} + \frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{a^2\omega^2}{3} P_{20} \quad ,$$

مقدار $U_{N0}^{(S)}$ (مقدار ثابت) باید چنان انتخاب شود که مترادف با پتانسیل جاذبه زمین واقعی باشد. پتانسیل ژئوئید (بخش ۱-۳) بصورت زیر میباشد

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = V(\vec{r}) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

که در آن $V(\vec{r})$ پتانسیل جاذبه زمین بوده و بصورت (بخش ۲-۳) زیر نوشته میشود

$$V(\vec{r}) = \frac{KM}{r} + O(r^{-3})$$

منظور از $O(r^{-3})$، یعنی ترمهای پائینتر از درجه r^{-2}. بنابراین با مقایسه دو پتانسیل $V(\vec{r})$ و $V_N^{(S)}$ در یک نقطه دور (یعنی r بزرگ) خواهیم داشت:

$$\frac{a}{r}\left(U_{N0}^{(S)} - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right) \doteq \frac{KM}{r}$$

و از آنجا

$$U_{N0}^{(S)} \doteq \frac{KM}{a} + \frac{\omega^2 a^2}{3}$$

با جایگزین کردن نتایج فوق در معادله پتانسیل $U_N^{(S)}$، معادله پتانسیل ثقل نرمال حاصل از تک کره دوران بدست می‌آید.

$$U_N^{(S)} = \frac{KM}{r} + \frac{a^5\omega^2}{3r^3} P_{20} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (1 - P_{20})$$

در صفحه λ می‌باشد. کمیتهای دیگر در فرمول فوق بصورت زیر می‌باشند

$$q_{n0}(u,E,b)\Big|_{u=b} = Q_{n0}\left(i\frac{b}{E}\right) / Q_{n0}\left(i\frac{b}{E}\right) = 1$$

$$(u^2+E^2)\Big|_{u=b} = a^2$$

بنابراین پتانسیل $U_{N0}^{(E)}$ بصورت زیر نوشته میشود

$$U_{N0}^{(E)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_{n0}(\cos\theta) + \frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_{n0}(\cos\theta) + \frac{\omega^2 a^2}{3}\left(P_{00}(\cos\theta) - P_{20}(\cos\theta)\right)$$

$$= \left(A_{00} + \frac{a^2\omega^2}{3}\right) + A_{10} P_{10}(\cos\theta) + \left(A_{20} - \frac{\omega^2 a^2}{3}\right) P_{20}(\cos\theta) +$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} A_{n0} P_{n0}(\cos\theta) = \text{مقدار ثابت}$$

برای اینکه معادله فوق بازاء تمام θها برقرار باشد ناچار باید ضرایب P_{n0}ها مساوی صفر باشند یعنی داشته باشیم

$$A_{00} + \frac{1}{3}a^2\omega^2 - U_{N0}^{(E)} = 0 \quad \text{و} \quad A_{20} - \frac{1}{3}\omega^2 a^2 = 0 \quad \text{و}$$

$$A_{10}, A_{30}, A_{40}, \dots = 0$$

حال اگر نتایج فوق را در معادله $V_N^{(E)}$ قرار دهیم خواهیم داشت

و از آنجا خواهیم داشت

$$U_{N0}^{(E)} \doteq \frac{KM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) + \frac{1}{3}a^2\omega^2$$

حال اگر نتیجه فوق در فرمول $U_N^{(E)}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$U_N^{(E)} = V_N^{(E)} + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\sin^2\theta$$

$$= \frac{KM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) + q_{20}(u,E,b)\,\frac{a^2\omega^2}{3}P_{20}(\cos\theta) + \frac{\omega^2}{2}(u^2+E^2)\sin^2\theta$$

$$= \frac{KM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) + q_{20}(u,E,b)\,\frac{a^2\omega^2}{3}P_{20}(\cos\theta) + \frac{\omega^2}{3}(u^2+E^2)\left(1-P_{20}(\cos\right.$$

$$= \frac{KM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{\omega^2(u^2+E^2)}{3} + \left[q_{20}(u,E,b)\,\frac{a^2\omega^2}{3} - \frac{\omega^2(u^2+E^2)}{3}\right]P_{20}($$

ملاحظه کنید که پتانسیل نرمال فوق قابل محاسبه است اگر ما کمیتهای KM ، b ، E و ω را بدانیم.

ملاحظه کنید که سطوح هم پتانسیل بیرون نرمال فوق کلاً بیضوی هستند بجز بیضوی نرمال $(u=b)$ که یک سطح هم پتانسیل از میدان نرمال می‌باشد.

الف -

$$\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial u} \simeq \frac{KM}{E}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{2}{3}\omega^2 u + \left(\frac{\partial}{\partial u}q_{20}\,\frac{\omega^2 a^2}{3} - \frac{2}{3}\omega^2 u\right)P_{20}$$

در اینجا $\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right)$ مساوی

$$\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctg}\frac{E}{u} = \frac{1}{1+\frac{E^2}{u^2}}\left(-\frac{E}{u^2}\right) = -\frac{E}{u^2+E^2}$$

و $\frac{\partial q_{20}}{\partial u}$ مساوی

$$\frac{\partial q_{20}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(Q_{20}\left(i\frac{u}{E}\right)/Q_{20}\left(i\frac{b}{E}\right)\right)$$

می‌شود که مشتق آن را بعد از بسط توابع لژاندر نوع دوم آن برحسب سری‌های توانی، بطور تقریبی محاسبه کرد. برای اینکار تابع q_{20} را بصورت زیر می‌نویسیم

$$q_{20} = \frac{f(u)}{f(b)}$$

که در آن

$$f(x) = \left(3\left(\frac{x}{E}\right)^2+1\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{x}\right) - 3\frac{x}{E}$$

می‌باشد. بسط تابع arctg بصورت زیر می‌باشد

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{x}\right) = \frac{E}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E}{x}\right)^5 - \cdots$$

و از آنجا تابع $f(x)$ بصورت زیر در می‌آید

$$f(x) = \left(3\frac{x^2}{E^2}+1\right)\left(\frac{E}{x} - \frac{1}{3}\frac{E^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{E^5}{x^5} - \cdots\right) - 3\frac{x}{E}$$

$$= 3\left(\frac{E}{x}\right)^{-1} - \left(\frac{E}{x}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{E}{x}\right)^3 - \frac{3}{7}\left(\frac{E}{x}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{E}{x}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{x}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{E}{x}\right)^5 - \cdots - 3\left(\frac{E}{x}\right)^{-1}$$

ب –

$$\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial \theta} \simeq \left(q_{20}(u,E,b)\, \frac{\omega^2 a^2}{3} - \frac{\omega^2 (u^2+E^2)}{3} \right) \frac{d}{d\theta} P_{20}(\cos\theta)$$

که در آن

$$\frac{d}{d\theta} P_{20}(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) = -3\cos\theta \sin\theta = -P_{21}(\cos\theta)$$

با توجه به مشتقات جزئی پتانسیل $U_N^{(E)}$ نسبت به u و θ و با در نظر گرفتن بیضوی دوّار که خود یک سطح هم‌پتانسیل از میدان نرمال می‌باشد بایستی بردار میدان γ عمود بر سطح بیضوی دوّار باشد. اگر بردار میدان را روی بیضوی با $\vec{\gamma}_0$ نشان دهیم خواهیم داشت

$$\vec{\gamma}_0 = \frac{1}{H_u} \frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial u}\, \vec{e}_u$$

بعد از جایگزینی H_u و $\frac{\partial U_N^{(E)}}{\partial u}$ فرمول فوق شکل زیر در می‌آید

$$\boxed{\vec{\gamma}_0 \simeq -\sqrt{\frac{u^2+E^2}{u^2+E^2\cos^2\theta}} \left(\frac{KM}{u^2+E^2} + \frac{a^2\omega^2 b^3}{u^4} P_{20} - \frac{2}{3}\omega^2 u (1-P_{20}) \right)\Big|_{u=b} \vec{e}_u}$$

دیگر مقدار γ_0 برابر است با

$$\gamma_0 \simeq \sqrt{\frac{a^2}{b^2+E^2\cos^2\theta}} \left(\frac{KM}{a^2} - \frac{2}{3}\omega^2 b + \left(\frac{a^2\omega^2}{b} + \frac{2}{3}\omega^2 b \right) P_{20} \right).$$

با در نظر گرفتن $E^2 = a^2 - b^2$ و

$$b^2 + E^2\cos^2\theta = b^2 + a^2\cos^2\theta - b^2\cos^2\theta = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

همچنین شتاب جاذبه نرمال در قطبین ($\theta=0$ و $\theta=180$) یعنی γ_b بصورت زیر خواهد بود.

$$P_{20}(\cos\theta)\Big|_{\theta=0,180} = 1$$

$$\gamma_b \simeq \frac{KM}{a^2}\left(1-\frac{2}{3}m+\frac{a^2}{b^2}m+\frac{2}{3}m\right) = \frac{KM}{a^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}m\right)$$

نسبت دو شتاب نرمال در استوا و قطب برابر فرمول زیر خواهد بود

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_a} = \frac{b}{a}\left(1+\frac{a^2}{b^2}m\right)\left(1+m+\frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(1+m+\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}m+\cdots\right)$$

با در نظر گرفتن روابط $\frac{\gamma_b}{\gamma_a}-1 = \frac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a}$ و $\frac{b}{a}-1 = \frac{b-a}{a}$ میتوان نوشت

$$\frac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a} - \frac{b-a}{a} \simeq \frac{b}{a}\left(m+\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}m+\cdots\right) = \frac{bm}{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}+\cdots\right)$$

و با در نظر گرفتن رابطه

$$\frac{bm}{a} = \frac{a\omega^2 b^2}{KM} \simeq \frac{b\omega^2}{\gamma_a}\left(1-m-\frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}\right)$$

میتوان نوشت

$$\frac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a} + \frac{a-b}{a} \simeq \frac{b\omega^2}{\gamma_a}\left(1-m-\frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}+\cdots\right)$$

$$\simeq \frac{b\omega^2}{\gamma_a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}+\cdots\right)$$

با جایگزینی $P_{20}(\cos\theta)$ در فرمول γ_0 رابطه زیر حاصل میشود

$$\gamma_0 = \frac{KM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left[1 - \frac{2}{3}m + \left(\frac{a^2}{b^2}m + \frac{2}{3}m\right)\cos^2\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}m + \frac{2}{3}m\right)\sin^2\theta\right]$$

با استفاده از تساوی دیگر $\quad 1 - \frac{2}{3}m = \left(1 - \frac{2}{3}m\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$

میتوان نوشت

$$\gamma_0 = \frac{KM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}m\right)\cos^2\theta + \left(1 - m - \frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}\right)\sin^2\theta\right]$$

با در نظر گرفتن فرمولهای شتاب جاذبه نرمال در راستا قطب یعنی γ_a و γ_b میتوان نوشت

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}m\right) \simeq \frac{a^2\gamma_b}{KM} \quad , \quad \left(1 - m - \frac{a^2}{b^2}\frac{m}{2}\right) \simeq \frac{ab\gamma_a}{KM}$$

با منظور داشتن روابط فوق در فرمول γ_0 خواهیم داشت

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{a\gamma_b\cos^2\theta + b\gamma_a\sin^2\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}}$$

۴-۹ فرمول کاسینی Cassinis برای جاذبه نرمال ، فرمولهای بین المللی .

در ژئودزی معمولاً از فرمول دیگری که بر مبنای فرمول سومیگلیانا است استفاده میشود. این فرمول بنام فرمول کاسینی معروف است. برای اینکه کاسینی اولین کسی است که مقادیر عددی ضرایب فرمول فوق‌الذکر را در سال 1930 به اتحادیه بین المللی ژئودزی و ژئوفیزیک (IUGG) معرفی کرد. ایجاد تغییرات فرمول مزبور به ترتیب زیر میباشد. با جایگزینی $1-s^2\theta$ بجای $\cos^2\theta$ در فرمول اخیر γ_0 خواهیم داشت

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a + (b\gamma_b - a\gamma_a)s^2\varphi}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)s^2\varphi}} = \gamma_a \frac{1+\left(\frac{\gamma_b}{\gamma_a}\frac{b}{a}-1\right)s^2\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)s^2\varphi}}$$

با درنظر گرفتن فشردگی جاذبه و هندسی

$$\frac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\gamma_b}{\gamma_a}-1 = f^* , \quad \frac{a-b}{a} = 1-\frac{b}{a} = f$$

میتوان نوشت

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_a} = 1+f^* , \quad \frac{b}{a} = 1-f$$

با جایگزینی آنها در γ_0 خواهیم داشت

$$\gamma_0 \simeq \gamma_a \frac{1+[(1+f^*)(1-f)-1]s^2\varphi}{\sqrt{1+[(1-f)^2-1]s^2\varphi}} = \gamma_a \frac{1+(f^*-f-ff^*)s^2\varphi}{\sqrt{1+(f^2-2f)s^2\varphi}}$$

از آنجائیکه فشردگیها مقادیری بمراتب کوچکتر از واحد هستند میتوان مخرج کسر فوق را به سری توانی بسط داد

$$\left[1+(f^2-2f)s^2\varphi\right]^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}(f^2-2f)s^2\varphi - \dots$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\gamma_a \simeq \gamma_a\left[1+(f^*-f-ff^*)s^2\varphi\right]\left[1-\frac{1}{2}(f^2-2f)s^2\varphi-\dots\right]$$

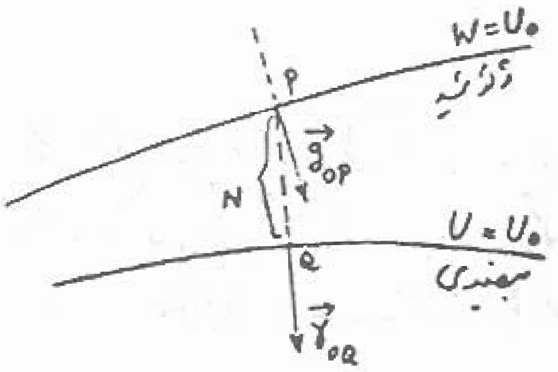
$$= \gamma_a\left[1+\left(f^*-f-ff^*-\frac{1}{2}f^2+f\right)s^2\varphi-\frac{1}{2}(f^2-2f)(f^*-f-ff^*)s^4\varphi+\dots\right.$$

۳-۱۰ تعریف انامولی جاذبه (gravity anomaly)، نوسانات جاذبه (gravity distrubance)، ارتفاع ژئوئید (geoidal hight) و انحراف قائم (deflection of vertical).

اگر پتانسیل نرمال مربوط به بیضوی دوار ترازی را با اختصار با U و پتانسیل واقعی زمین را با W نشان دهیم. تابع T بصورت

$$T = W - U$$

را انامولی پتانسیل و یا disturbing Potential می‌نامند. اگر پتانسیل بیضوی ترازی را که خود یکی از سطوح هم‌پتانسیل میدان نرمال می‌باشد U_0 فرض کنیم می‌توانیم موقعیت بیضوی را نسبت به ژئوئید در مقطعی بصورت زیر نشان دهیم



دیده می‌شود که $W=U_0$ ژئوئید و $U=U_0$ بیضوی ترازی می‌باشد. بردار $\vec{g}_{op}$ عبارتست از بردار ثقل واقعی روی ژئوئید و $\vec{\gamma}_{0Q}$ بردار ثقل نرمال روی بیضوی می‌باشد. فاصله $N = PQ$ را ارتفاع ژئوئید (geoidal undulation) در نقطه Q می‌نامند.

زاویه بین دو بردار $\vec{g}_{op}$ و $\vec{\gamma}_p$ را میتوان برای مقاصد عملی مساوی زاویه انحراف قائم (θ) درنظر گرفت. اختلاف دو زاویه مذکور در فوق تنها بجهت انحنای خطوط میدان ثقل میباشد.

با درنظر گرفتن $\vec{g} = \nabla W$ و $\vec{\gamma} = \nabla U$ میتوان نوشت

$$\vec{\delta g} = \vec{g} - \vec{\gamma} = \nabla W - \nabla U = \nabla (W-U) = \nabla T$$

یعنی اینکه بردار نوسان جاذبه، گرادیان انامولی پتانسیل (T) میباشد. همچنین میتوان نوشت

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} \quad , \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial n'}$$

که در آن n و n' بترتیب امتدادهای عمود بر ژئوئید و عمود بر بیضوی در جهت بیرون میباشند. از آنجائیکه زاویه بین دو امتداد مذکور کوچک میباشد میتوان نوشت

$$\delta g = |\vec{g} - \vec{\gamma}| \simeq g - \gamma \simeq -\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

بنابر فوق نوسان جاذبه (δg) مساوی مشتق منفی انامولی پتانسیل در جهت خط قائم میباشد.

انامولی جاذبه (Δg) اکثراً در ژئودزی زمینی کلاسیک مورد استفاده قرار میگیرد و نوسان جاذبه (δg) اکثراً در تئوریهای مدرن و ژئودزی ماهواره‌ای مورد استفاده قرار دارد.

همانطوریکه دیده میشود نوسان جاذبه تنها مربوط به ژئوئید بوده بستگی به بیضوی مرجع ندارد و همینطور انامولی پتانسیل و ارتفاع ژئوئید را با استفاده از این روابط به ژئوئید تفسیر میکنیم.

و یا

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}$$

فرمول فوق یکی از فرمولهای مهم در فیزیک ژئودزی است که منسوب به ژئودزی آلمانی Bruns (۱۸۷۸) می‌باشد. فرمول مذکور بنام دومین فرمول برنز بوده که انحراف پتانسیل را با ارتفاع ژئوئید مربوط می‌کند.

وقتیکه یک بیضوی دورانی با مشخصات فرضی بعنوان مرجع میدان ثقل نرمال بدون شناخت دقیق مقادیر ثابت (KM, a, E, ω) در نظر گرفته میشود مثل اینستکه پتانسیل نرمال را بغلط میدانیم. اگر پتانسیل فرضی نرمال را با U'_Q و اختلاف آنرا با پتانسیل نرمال واقعی δU بنامیم ($\delta U = U'_Q - U_0$) خواهیم داشت

$$\delta U = U'_Q - U_0 = U'_Q - W_P = U'_Q - (U_P + T_P)$$

پتانسیل U_P را میتوان از U'_Q بصورت زیر بدست آورد

$$U_P = U'_Q - \gamma'_Q N'_P$$

با تلفیق در فرمول فوق خواهیم داشت

$$\delta U = U_P + \gamma'_Q N'_P - U_P - T_P = \gamma'_Q N'_P - T_P$$

و از آنجا

$$\boxed{N'_P = \frac{T_P + \delta U}{\gamma'_Q} \doteq N_P + \frac{\delta U}{\gamma'_Q}}$$

فرمول فوق بنام فرمول تعمیم یافته برنز میباشد که انحراف پتانسیل محاسبه شده

از جمع طرفین دو رابطه فوق انامولی جاذبه $\Delta g_p = g_p - \gamma_Q$ بدست می‌آید

$$\Delta g_p \simeq \frac{\partial \gamma}{\partial n'}\Big|_Q N_p - \frac{\partial T}{\partial n'}\Big|_p$$

ملاحظه میکنید که رابطه فوق انامولی جاذبه Δg را به نوسان جاذبه $\delta g_p = -\frac{\partial T}{\partial n'}\Big|_p$ مرتبط می‌سازد

$$\Delta g_p = \delta g_p + \frac{\partial \gamma}{\partial n'}\Big|_Q N_p$$

در معادله انامولی جاذبه اگر N_p را مطابق فرمول دوم برونز جایگزین کنیم معادله زیر را برای انامولی جاذبه خواهیم داشت

$$\Delta g_p \simeq \frac{\partial \gamma}{\partial n'}\Big|_Q \frac{T_p}{\gamma_Q} - \frac{\partial T}{\partial n'}\Big|_p$$

با حذف اندیس‌های جهت معادله فوق شکل معمول زیر نوشته میشود.

$$\boxed{\Delta g \simeq -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma_Q}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T}$$

معادله فوق همان معادله دیفرانسیل بنیادی جاذبه میباشد که در آن امتداد n' با امتداد h (امتداد افزایش ارتفاع نسبت به بیضوی) تعویض شده است. ۲۲
ترمهای معادله فوق منسوب به نقطه Q یعنی بیضوی میباشند

اگر بیضوی مرجع با پارامترهای مشخصات فرضی بجای واقعی باشد معادله فوق شکل تعمیم یافته زیر در می‌آید

$$\Delta g' \simeq -\frac{\partial (T+\delta U)}{\partial h} + \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial \gamma'}{\partial h}(T+\delta U)$$

۲۲ تغییرات در فرمول فوق مربوط به بیضوی اختیاری میباشند

دو شکل اخیر با تغییر دادن مناسب آنامولی جاذبه در جهت خنثی کردن تأثیر آنها از میان برداشته میشوند. بدین ترتیب که نخست مشاهدات جاذبه انجام شده از سطح زمین بطریقه محاسباتی به سطح ژئوئید منتقل شده سپس اثر توده‌های واقع در روی بیضوی بطور محاسباتی تصحیح میگردد. تبدیل جاذبه از سطح زمین به سطح ژئوئید و تصحیح آنامولی جاذبه در این کتاب مورد بحث قرار نمیگیرد. در اینجا فقط از آنامولیهای جاذبه تصحیح شده، برای حل مسئله مرزی استفاده میکنیم.

قبل از اقدام به حل مسئله مرزی خود ترم $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ را که در معادله بنیادی جاذبه وجود دارد مورد آزمایش قرار میدهیم. این کار را میتوان فقط مستقیم از پتانسیل نرمال (بخش ۵-۳) از مشتق دو مرتبه آن در امتداد نرمال بیضوی نتیجه گرفت ولی روش مذکور طاقت‌فرسا است. در بخش زیر راه نزدیکتری بمقدار محاسبه مشتق نرمال γ ارائه شده است

۳-۱۴ تغییرات ارتفاعی (مشتق محوری) شتاب ثقل

تابع W پتانسیل واقعی زمین را در نظر میگیریم. معادله یک سطح هم‌پتانسیل با پتانسیل W_p بصورت $W(X,Y,Z) = W_p$ خواهد بود که در آن $W(X,Y,Z)$ یک تابع تنها از متغیرهای X,Y,Z میباشد. یک سیستم مختصات کارتزین محلی (x,y,z) طوری انتخاب میکنیم که مرکز آن روی سطح هم‌پتانسیل فوق بوده محور z آن عمود بر سطح و در جهت خارج آن و محورهای x و y آن روی صفحه مماس بر سطح، x بطرف شمال و y بطرف شرق باشد. مشتق کامل W نسبت به x عبارتست از

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

منحنی (x) $z = z(x)$ مقطع شمالی-جنوبی سطح هم‌پتانسیل $W = W_p$ و منحنی (y) $z = z(y)$ مقطع شرقی-غربی آن سطح خواهد بود که نقطه منحنی قبلی دارای انحنا و $\frac{d^2 z}{dy^2}$ خواهد بود. اگر انحنای کلی سطح هم پتانسیل را بصورت انحنای متوسط هر دو انحنا در جهت عمود بر هم x و y در نظر گرفته و آنرا J بنامیم خواهیم داشت

$$J = -\frac{1}{2}\left(K_x + K_y\right) = -\frac{1}{2g}\left(W''_{xx} + W''_{yy}\right)$$

از آنجائیکه W تابع پتانسیل ثقل بوده و در معادله پوآسن صدق میکند

$$\Delta W = -4\pi K \sigma + 2\omega^2$$

اپراتور لاپلاس Δ در سیستم مختصات محلی (x, y, z) با توجه به W بصورت زیر خواهد بود

$$\Delta W = W''_{xx} + W''_{yy} + W''_{zz}$$

از ترکیب فرمولهای فوق و با در نظر گرفتن: $W''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} W'_z = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial h}$
نتیجه زیر حاصل میشود

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial h} = -2gJ + 4\pi K \sigma - 2\omega^2}$$

فرمول فوق بنام فرمول اول برونز (Bruns) بوده و آن تغییرات ارتفاعی شتاب ثقل را به پارامترهای دیگر میدان ثقل مربوط میسازد. دقت کنید که کمیتهای g و J و σ مربوط به نقطه‌ای است که در آنجا $\frac{\partial g}{\partial h}$ مورد محاسبه است

و از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{1}{M} \cong \frac{b}{a^2}\left(1+2f\cos^2\varphi\right)^{3/2} = \frac{b}{a^2}\left(1+3f\cos^2\varphi+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{N} \cong \frac{b}{a^2}\left(1+2f\cos^2\varphi\right)^{1/2} = \frac{b}{a^2}\left(1+f\cos^2\varphi+\cdots\right)$$

و انحنای J بصورت

$$J \cong \frac{b}{2a^2}\left(2+4f\cos^2\varphi\right) = \frac{b}{a^2}\left(1+2f\cos^2\varphi\right)$$

می باشد.

حال با منظور کردن این روابط در فرمول $\frac{\partial\gamma}{\partial h}$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} \cong -\frac{2\gamma b}{a^2}\left(1+2f\cos^2\varphi\right)-2\omega^2$$

در فرمول فوق مقدار $2\omega^2$ کمتر از مقدار عبارت اول می باشد بنابراین میتوان از آن بعنوان عبارت اصلاحی نام برد و بصورت تقریبی نوشت

$$2\omega^2 \cong \frac{2\gamma m}{a}$$

معادله فوق را میتوان از فرمول $\frac{a^2 b\omega^2}{KM}=m$ نتیجه گرفت اگر γ را شکل تقریبی $\gamma \approx \gamma_a \approx \frac{KM}{ab}$ درنظر بگیریم. با درنظر گرفتن مقدار تقریبی $2\omega^2$ در فرمول قبل تغییرات شتاب خواهیم داشت

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} = -\frac{2\gamma}{a}\left(\frac{b}{a}+2\frac{b}{a}f\cos^2\varphi+m\right)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی اخیر جواب مسئله فیزیکی ژئودزی تقریباً بصورت

$$\tilde{T} = T + \delta U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{q_{nm}(u, E, b)}{-\frac{2}{R} + \frac{(n+1)}{R}} \Delta g_{nm}$$

$$= \sum_{n} \sum_{m} \frac{R}{n-1} q_{nm} \Delta g_{nm}$$

که در آن Δg_{nm} هارمونیکهای Δg می‌باشد تابع $\tilde{T}$ روی بیضوی تراز مشخص

$$\tilde{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_{n}$$

خواهد بود. ملاحظه کنید که در رابطه فوق جمله با اندیس $n=1$ وجود ندارد و به عبارت دیگر رابطه فوق فاقد هارمونیک درجه $n=1$ می‌باشد. این شرط بایستی در مورد مسئله مرزی مزبور برقرار باشد. این شرط نظیر شرط برقراری $\iint_{E'} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = 0$ در مسئله نیومن می‌باشد. شرط ما در اینجا معادل $\iint_{E'} \Delta g \cos\psi \, d\sigma = 0$ می‌باشد. با بیان آنامولی پتانسیل $\tilde{T}$ بصورت

$$\tilde{T} = W - (U - \delta U) = W - \tilde{U}$$

با بسط سه پتانسیل مزبور به سری هارمونیکهای کروی ملاحظه میکنیم که ضرایب هارمونیکهای درجه اول بستگی به جابجائی مرکز بیضوی تراز نسبت به مرکز ثقل زمین دارند. در صورت منطبق بودن دو مرکز مزبور، پتانسیل $\tilde{T}$ فاقد هارمونیک درجه اول خواهد شد بنابراین میتوان نوشت

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_{n}$$

که در آن $\tilde{T}_0$ هارمونیک درجه صفر می‌باشد.

برای محاسبه ضرایب A_{n0} $(m=0)$ کسر $\frac{2n+1}{2\pi}$ تبدیل به $\frac{2n+1}{4\pi}$ میشود.
ضمناً از مختصات λ' و θ' متغیرهای در انتگرال میباشند. حال اگر انتگرالهای A_{nm} و B_{nm} را در رابطه Δg_n قرار دهیم خواهیم داشت

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} P_{n0}(\cos\theta) \iint_{E} \Delta g \, P_{n0}(\cos\theta')\, dE +$$

$$\sum_{m=1}^{m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2\pi} P_{nm}(\cos\theta) \Big[\cos m\lambda \iint_{E} \Delta g \cos m\lambda' \, P_{nm}(\cos\theta')\, dE +$$

$$\sin m\lambda \iint_{E} \Delta g \sin m\lambda' \, P_{nm}(\cos\theta')\, dE \Big]$$

با تعویض مجموع انتگرالها به انتگرال مجموع در رابطه فوق خواهیم داشت

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{E} \Delta g(\theta',\lambda') \Big[P_{n0}(\cos\theta') P_{n0}(\cos\theta) +$$

$$2\sum_{m=1}^{m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta) P_{nm}(\cos\theta') (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'$$

ملاحظه میکنید که رابطه داخل کروشه در فرمول فوق برابر $P_n(\cos\psi)$ میباشد:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{E} \Delta g(\theta',\lambda') \, P_n(\cos\psi)\, dE$$

اگر فرمول فوق را در فرمول $T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n$ منظور کنیم خواهیم داشت

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R}{n-1} \cdot \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{E} \Delta g \, P_n(\cos\psi)\, dE$$

با تعویض جای $\iint$ و Σ میتوان نوشت

در فرمول استوکس میزان γ را با شتاب ثقل متوسط G بدون اینکه تاثیر زیادی در دقت محدود فرمول داشته باشد تعویض کرد. حال باید دید که آیا میتوان Δg_0 را برحسب پارامترهای بیضوی بیان کرد؟ Δg_0 با هارمونیک درجه صفر $\tilde{T}$ رابطه زیر را دارد

$$\tilde{T}_0 = -R\,\Delta g_0$$

از طرف دیگر هارمونیک $\tilde{T}_0$ شکل

$$\tilde{T}_0 = K\frac{\delta M}{R} + \delta U$$

نوشته میشود با مقایسه دو رابطه فوق رابطه

$$-R\,\Delta g_0 = K\frac{\delta M}{R} + \delta U$$

حاصل میشود. با قرار دادن فرمول فوق در معادله N خواهیم داشت

$$N \cong \frac{R}{4\pi G}\iint_{E1} \Delta g\, S(\psi)\, dE1 + K\frac{\delta M}{RG} + \frac{\delta U}{G}$$

فرمول فوق فرمول استوکس نام دارد که ارتفاع ژئوئید را از بیضوی مرجع حساب میکند اگر δN را خطای ارتفاع ژئوئید N بدست آمده از انتگرال استوکس بنامیم میتوان نوشت

$$N + \delta N \cong \frac{R}{4\pi G}\iint_{E1} \Delta g\, S(\psi)\, dE1$$

که در آن

$$\delta N = -K\frac{\delta M}{RG} - \frac{\delta U}{G}$$

میباشد. مقدار δN موقعی قابل محاسبه است که کمیتهای δM و δU به اندازه‌ای موجود در وزن و پتانسیل بیضوی زمین مفروض معلوم باشند.

در بررسی نمایش تغییرات $S(\psi)$ نسبت به ψ به وضوح دیده میشود که چطور آنامولیهای جاذبه سراسر زمین در تعیین N برای یک نقطه نقش دارند. سهم آنامولیهای جاذبه نزدیکتر به نقطه مورد محاسبه خیلی بیشتر از آنامولیهای دور می باشد. بنابراین در محاسبه ارتفاع N برای یک نقطه بایستی اطلاعات ما از آنامولیهای جاذبه اطراف نقطه (همسایگی نقطه) دقیق‌تر نسبت به نقاط دور باشد.

فرمول استکس را میتوان به فرمهای مختلف نوشت. در اینجا از دو فرم آن صحبت میکنیم. نخست اگر نقطه مورد محاسبه را بعنوان مرکز مختصات کروی قطبی در نظر بگیریم میتوان انتگرال استکس را در سیستم مختصات کروی چنین نوشت

$$N + \delta N = \frac{R}{4\pi G} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\alpha,\psi)\, S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha$$

$$= \frac{R}{2G} \int_{\psi=0}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \Delta g(\alpha,\psi)\, d\alpha \right] S(\psi) \sin\psi \, d\psi$$

$$= \frac{R}{G} \int_{\psi=0}^{\pi} \overline{\Delta g}(\psi)\, F(\psi)\, d\psi$$

که در آن تابع جدید F شکل

$$F(\psi) = \frac{1}{2} S(\psi) \sin\psi$$

میباشد. $\overline{\Delta g}(\psi)$ عبارتست از آنامولی جاذبه متوسط در فاصله زاویه‌ای ثابت ψ از نقطه مورد محاسبه.

بنابراین در جهت های نصف النهار و قائم اولیه می توان نوشت

$$\xi = -\frac{dN}{dS_\varphi} \quad \text{و} \quad \eta = -\frac{dN}{dS_\lambda}$$

علامت منفی در فرمولهای فوق طبق قرارداد انتخاب شده است. یعنی برای ژئوئیدی که ارتفاع آن نسبت به بیضوی در جهت شمال و شرق در حال کاهش باشد ξ و η مثبت انتخاب شده اند. اگر $d\varphi$ و $d\lambda$ به ترتیب افزایش های جزئی عرض و طول در امتداد نصف النهار و قائم اولیه فرض شوند با استفاده از ضرایب لامه می توان نوشت

$$dS_\varphi = R\, d\varphi \quad \text{و} \quad dS_\lambda = R\cos\varphi\, d\lambda$$

ولذا داریم

$$\xi = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \varphi} \quad \text{و} \quad \eta = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

حال اگر N را از فرمول استوکس با قرار دادن تابع δN در نظر بگیریم می توان نوشت

$$\xi = -\frac{1}{4\pi G}\iint_{E1} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi}\, dE1$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi G}\iint_{E1} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda}\, dE1$$

در اینجا مشتقات جزئی تابع استوکس را نسبت به φ و λ محاسبه می کنیم

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad , \quad \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

برای محاسبه مشتقات جزئی که از فرمول زیر استفاده میکنیم

$$\cos\psi = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)$$

فرمولهای اخیر معادل فرمولهای وننیگ ماینز می‌شوند. در اینجا نیز α و ψ می‌توانند مختصات قطبی روی بیضوی انتخاب شده و یا می‌توانند به هر زوج مختصات دیگر تبدیل بشوند

۳-۲۰ نکاتی درباره محاسبات عددی فرمول استوکس و وننیگ ماینز

مقدار انامولی جاذبه Δg مورد استفاده در فرمولهای استوکس و وننیگ ماینز در همه جای بیضوی مرجع معلوم نمی‌باشد. فقط می‌توان آنرا برای تعداد نقاط محدود از بیضوی نقاطی که در آنها شتاب ثقل g در سطح زمین اندازه‌گیری شده باشد تعیین کرد. بنابراین ما نمی‌توانیم انتگرال آنها را یا بصورت دقیق‌تر انتگرال وزن‌دار آنها را با وزن $S(\psi)$ و یا $\frac{dS(\psi)}{d\psi}$ در تمام سطح بیضوی محاسبه کنیم بدین جهت متدهای عددی برای ارزیابی انتگرالها را بکار گرفته می‌شود. هر متد عددی که انتخاب شود انتگرال دوگانه را بشکل مجموع دوگانه تبدیل می‌کنند.

شبکه انامولی جاذبه مورد استفاده برای مجموع دوگانه می‌تواند یکی از دو نوع شبکه قطبی و یا شبکه قائم‌الزاویه باشد. شبکه قطبی قابل استفاده با متغیرهای α و ψ و با بطور برابر که نقطه‌ای محاسبه می‌شود چنان تشکیل داده می‌شود که مرکز آن منطبق بر نقطه باشد. با انتخاب متغیرهای ψ و α برابر مقدارهای اندازه‌گیری جدیدی پیدا می‌کنند برای فرمولهای وننیگ ماینز. شبکه قطبی می‌تواند دارای خواصی شود که دارای مناطق بزرگ برای فواصل کم وزن باشد. واضح است که مناطقی که در آنها Δg با وزن کم در انتگرال‌گیری شرکت می‌کنند می‌توانند بزرگ انتخاب شوند و آن نتیجه انتگرال را زیادتر تحت تاثیر قرار می‌دهد در عکس باید مناطقی که Δg با وزن زیاد وارد می‌شود کوچکتر انتخاب شود

۴) اصول جاذبه‌سنجی

۴-۱ مشاهدات جاذبه

منظور از مشاهده جاذبه یعنی اندازه‌گیری شتاب ثقل در یک نقطه مورد نظر. شتاب ثقل را معمولا با حرف g نشان می‌دهند. واحد شتاب ثقل سانتیمتر بر مجذور ثانیه و یا گال gal می‌باشد ($1\ gal = 1\ cm/s^2$). اجزاء گال عبارتند از میلی‌گال ($mgal = 10^{-3}\ gal$) و میکروگال ($1\ \mu gal = 10^{-6}\ gal$). مقدار متوسط شتاب ثقل در سطح زمین ۹۸۰ سانتیمتر بر مجذور ثانیه و یا گال میباشد. از نقطه نظر محل اندازه‌گیری شتاب ثقل مشاهدات جاذبه را به ۴ دسته تقسیم می‌کنیم

۱- مشاهدات زمینی جاذبه (در سطح زمین)

۲- مشاهدات زیردریایی جاذبه (مشاهدات توسط زیردریایی و یا مشاهدات در کف دریا)

۳- مشاهدات سطح دریایی جاذبه (توسط کشتی)

۴- مشاهدات هوائی جاذبه (توسط هواپیما)

از نقطه نظر تکنیک اندازه‌گیری جاذبه میتوان مشاهدات جاذبه را دو دسته نمود

الف - مشاهدات جاذبه مطلق

ب - مشاهدات جاذبه نسبی (گراویتری)

در روش اول هدف اندازه‌گیری مقدار خود شتاب ثقل g در یک نقطه میباشد ولی در روش دوم هدف اندازه‌گیری اختلاف شتاب ثقل در دو نقطه می‌باشد. دانستن مقدار شتاب ثقل تا دقت 0.1 میلی‌گال و یا 10^{-6} گال برای مقاصد ژئودزی کافیست خطای 0.1 میلی‌گال معادل 10^{-7} برابر شتاب ثقل g میباشد. دقت نسبی 10^{-7} دقت بالائی است و براحتی توسط دستگاههای اندازه‌گیری شتاب ثقل نسبی قابل دسترسی است.

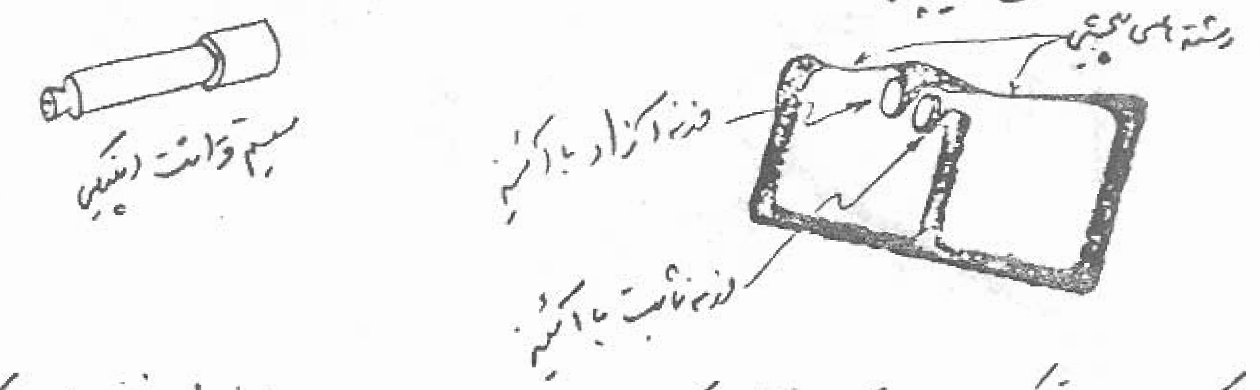
بین زمان نوسان (T) آونگ و شتاب ثقل g موجود است

$$T = c\, g^{-\frac{1}{2}}$$

که در آن c ثابتی است که بستگی به وزن و طول آونگ دارد. رابطه فوق را میتوان از معادله حرکت آونگ بدست آورد. رابطه فوق نشان میدهد که با اندازه‌گیری زمان نوسان آونگ میتوان شتاب ثقل را محاسبه کرد. دقت حاصل از این دستگاهها حدود ±3 تا ±0.1 میلی‌گال میباشد. دستگاه آونگی زیر دریایی ونینگ ماینز (سه آونگ تعدیل شده بهم، ثبت اپتیکی) در بهترین شرایط دقتی در حدود ±4 میلی‌گال دارد. عمده‌ترین عوامل پائین آورنده دقت این دستگاه، اصطکاک هوا، لبه‌ها، درجه حرارت و تکان زمین میباشند. همچنین خطا در اندازه‌گیری زمان نوسان بمقدار قابل ملاحظه‌ای دقت را پائین می‌آورد.

گراویمترها متداولترین دستگاههای مورد استفاده در جاذبه‌سنجی (گراویمتری) هستند. انواع مختلف این دستگاهها مبتنی بر اندازه‌گیری موقعیت نسبی یک وزنه آزاد نسبت به یک وزنه ثابت میباشند. در ساختمان گراویمترهای مدرن یکی از سه طرح زیر بکار گرفته شده است.

الف - طرح پیچشی :



کل سیستم تشکیل شده از یک قطعه کوارتز یکپارچه شده. این طرح نخستین بار در یک گراویمتر دانمارکی توسط شخصی بنام Norgaard بکار گرفته شد که دارای دقتی در حدود ±0.2 میلی‌گال بود. همین طرح با انضمام چند اصلاح تعدیل سیستم قرائت

این گرادیومترها معمولاً در کشتی و یا هواپیما نیز مورد استفاده قرار میگیرند.
گرادیومترها روی شاسی‌هائی که اتصال ژیروسکوپی به کف کشتی یا هواپیما دارند قرار میگیرند.
دقت گرادیومترها در این وضعیت پائین و در حدود ± 0.5 تا ± 10 میلی‌گال میباشد
علت پائین بودن دقت عدم توانائی در تفکیک کامل شتاب حرکت وسیله نقلیه از شتاب ثقل
g میباشد. همچنین دقت حاصل از گرادیومترهای مستقر در کف دریا بعلت معلوم
نبودن موقعیت دقیق محل و میزان شتاب ثقل آن محل پائین میباشد.

بطور کلی گرادیومترها بلحاظ ماهیت انعطاف آنها موفقیت بیشتری نسبت به انواع
دارند. کاربرد آنها ساده و تئوریشان معلوم میباشد. تنها اطلاعاتی که گرادیومترها
کسب کنند قرائت یک عدد روی درجات آن میباشد. این قرائت بایستی با یک g معلوم
مقایسه گردد. این مقایسه بعنوان کالیبره کردن معروف است. بطور کلی گرادیومترها
سه نقطه ضعف عمده دارند که عبارتند از:

۱- عدم توانائی آنها در اندازه‌گیری خود شتاب g (ثابت - ثقل مطلق)
۲- نیاز آنها به کالیبره کردن مکرر
۳- وجود دائمی و غیرقابل انکار یک دریفت (drift) (تغییرات دستگاه) که ناشی از کهنه شدن و یا سایر عوامل بوده در دستگاه گرادیومترها

رواج استفاده از سقوط آزاد در اندازه‌گیری g در دستگاه‌های جدید بکار گرفته شده است.
این دستگاه‌ها مبتنی بر اندازه‌گیری زمان سقوط یک جسم در خلاء میباشند. از آنجائیکه
شتاب سقوط جسم مساوی g میباشد بنابراین مقدار g را میتوان از معادله حرکت
سقوط آزاد بدست آورد. این دستگاه‌ها هنوز تحت بررسی بوده و تا حال حاضر دقتی
حدود ± 1 میلی‌گال قابل دسترسی است.
دستگاه دیگری که g را مستقیماً اندازه‌گیری نمیکنند ولی قابل ذکر است دستگاه
و آن تعادل پیچشی (Eötvös) یا واریومتر میباشد که تغییرات افقی شتاب ثقل

۲ - شبکه جاذبه درجه ۲ شامل نقاطی بفواصل ده تا بیست مایل از همدیگر و در امتداد شاهراهها قرار میگیرند تا دسترسی به آنها توسط ماشین امکان پذیر باشد.

۳ - شبکه جاذبه درجه ۳ از نقاط نزدیکتری تشکیل شده اند

درکنار شبکه‌های جاذبه خطوط پایه بین المللی برای کالیبره کردن گراویمترها وجود دارند. این خطوط در مناطق وسیع بمنظور دسترسی به نقاط جاذبه با دامنه تغییرات وسیع (عرضهای شمالی - جنوبی) ایجاد میشود. در امتداد این خطوط مقدار جاذبه برای نقاط بوسیله روشهای دقیق تعیین میشود. این نقاط برای کالیبره کردن گراویمترها مورد استفاده قرار میگیرند بدین ترتیب که گراویمترها در امتداد خط روی نقاط معلوم (با g معلوم دقیق) برده قرائت میکنند و از مقایسه قرائتها با مقادیر معلوم ضریب مقیاس دستگاه بدست می‌آید. پایه جاذبه (خط کالیبره کردن) آمریکای شمالی از آلاسکا تا جنوب مکزیک ادامه دارد.

۴ - ۴ پرداختن جاذبه مشاهده شده (g)

از آنجائیکه استفاده کنندگان از اطلاعات جاذبه متنوع میباشند، جاذبه مشاهده شده (g) نیز به شیوه‌های مختلف پرداخته میشود. در مبحث زیر نشان داده میشود که چگونه شتاب ثقل مشاهده شده (g) پرداخته میشود تا انامولی جاذبه روی سطح ژئوئید مناسب گردد. انامولیهای بدست آمده در محاسبه انتگرال استکس بکار برده میشوند.

بنا به بخش ۲-۱۵ برای محاسبه انامولی جاذبه روی سطح ژئوئید بایستی

اولاً - مقدار شتاب ثقل واقعی روی ژئوئید (g_0) معلوم باشد

ثانیاً - اثر توده‌های زمینی موجود بالای سطح ژئوئید از روی g_0 برداشته شود

با فرض اینکه توزیع جرم در داخل ژئوئید متقارن بوده و میتوان همه جرم را متراکم در مرکز ثقل آن دانست و با در نظر گرفتن r بعنوان فاصله سطح ژئوئید از مرکز ثقل آن میتوان مقدار شتاب g را در سطح ژئوئید بعبارت زیر نوشت

$$g_0 \cong k\frac{M}{r^2}$$

تغییرات ارتفاعی آن بعبارت

$$\frac{\partial g_0}{\partial r} \cong -2k\frac{M}{r^3}$$

خواهد بود که تقریبی است از $\frac{\partial g}{\partial h}$. در اینجا r را میتوان با طول بردار وضعیت بیضوی دورانی بعبارت

$$\frac{\partial g_0}{\partial h} \cong -\frac{2kM}{a^3}\left(1+\frac{3}{2}f\cos 2\varphi+\dots\right)$$

و یا با شعاع متوسط $R=\sqrt[3]{a^2b}$ بیضوی دورانی تقریب کرد.

$$\frac{\partial g}{\partial h} \cong \frac{-2kM}{R^3}$$

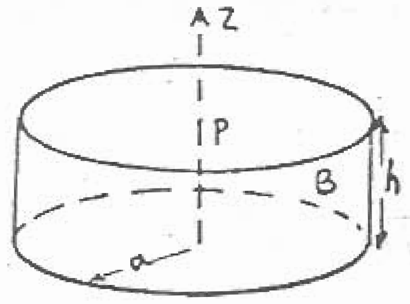
در اغلب اوقات از فرمول ساده زیر برای محاسبه تصحیح هوای آزاد δg_F استفاده میکنیم

$$\boxed{\delta g_F \cong \frac{2kM}{R^3}h \cong 0.3086\ h}$$

که δg با واحد میلی‌گال و h با واحد متر در فرمول فوق قرار داده میشوند. انامولی جاذبه مربوط به تصحیح هوای آزاد بنام انامولی هوای آزاد بعبارت زیر خواهد بود

$$\boxed{\Delta g_F = g + \delta g_F - \gamma}$$

از تئوری پتانسیل می‌دانیم که نیروی جاذبه حاصل از جسم B با دانسیته σ روی واحد جرم بصورت زیر می‌باشد.

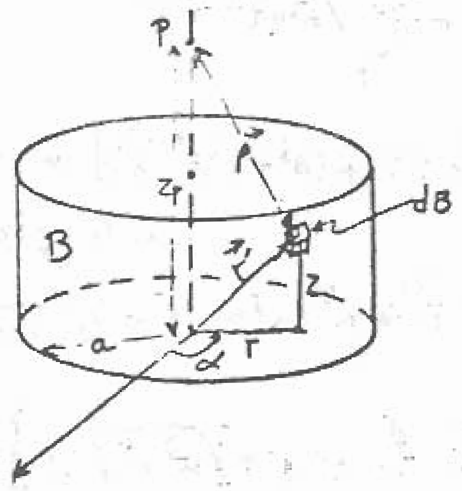


$$\vec{f} = -k\int_B \frac{\sigma}{\rho^3}\vec{\rho}\, dB$$

پتانسیل جاذبه ناشی از نیروی فوق بصورت

$$V = k\int_B \frac{\sigma}{\rho}\, dB$$

می‌باشد. ساده‌ترین راه برای محاسبه نیروی جاذبه جسم استوانه‌ای ما، محاسبه پتانسیل آن در سیستم مختصات استوانه‌ای می‌باشد. پتانسیل $V(P)$ را در نقطه P واقع روی محور z که مختصات $z = z_p$ محاسبه می‌کنیم



$$V(P) = k\sigma \int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h}\int_{r=0}^{a} \frac{1}{\rho}\, dB$$

که در آن

$$dB = r\,dr\,dz\,d\alpha$$

و

$$\rho = \left[(z_p - z)^2 + r^2\right]^{1/2}$$

می‌باشد.

انتگرال سه‌گانه فوق را نخست نسبت به α انجام می‌دهیم

$$V(P) = 2\pi k\sigma \int_{z=0}^{h}\int_{r=0}^{a}\frac{r\,dr\,dz}{\sqrt{(z_p-z)^2+r^2}}$$

انتگرال دوگانه فوق با تغییر متغیر $t^2 = (z_p - z)^2 + r^2$ حل می‌گردد.

از آنجائیکه تغییرات ارتفاعی پتانسیل $V(P)$ مورد نظر می‌باشد، مشتق آن را نسبت به z_p
که امتداد g (امتداد قائم) است آن را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial V}{\partial z_p} = f_p = 2\pi K\sigma \Big[-h - \frac{1}{2}\big(d + (z_p - h)\frac{\partial d}{\partial z_p} - b - z_p \frac{\partial b}{\partial z_p} + a^2 \frac{z_p+b}{z_p-h+d} \times \frac{(1+\frac{\partial d}{\partial z_p})(z_p+b) - (1+\frac{\partial b}{\partial z_p})(z_p-h+d)}{(z_p+b)^2} \Big] \Bigg|_p$$

که در آن

$$\frac{\partial d}{\partial z_p} = \frac{1}{2} d^{-1}\, 2(z_p - h)\Big|_p = \frac{z_p-h}{d}\Big|_p \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial z_p} = \frac{1}{2} b^{-1}\, 2 z_p \Big|_p = \frac{z_p}{b}\Big|_p$$

با جایگزین کردن مقادیر فوق در فرمول f_p خواهیم داشت

$$f_p = -2\pi K\sigma \Big[h + \frac{d}{2} + \frac{(z_p-h)^2}{2d} - \frac{b}{2} - \frac{z_p^2}{2b} + \frac{a^2}{2}\frac{z_p+b}{z_p-h+d} \times \frac{(1+\frac{z_p-h}{d})(z_p+b) - (1+\frac{z_p}{b})(z_p-h+d)}{(z_p+b)^2} \Big] \Bigg|_p$$

مقدار f_p در نقطه P با قرار دادن $z_p = h$ حاصل می‌شود

$$d = a \quad , \quad b = \sqrt{a^2+h^2}$$

$$f_p = -\pi K\sigma \Big[2h + a - \sqrt{(a^2+b^2)} - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + a^2 \frac{(h+\sqrt{a^2+b^2})(h+\sqrt{a^2+h^2}) - (1+\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}})a}{a\,(h+\sqrt{a^2+h^2})^2}$$

$$= -\pi K\sigma \Big[2h + a - \sqrt{a^2+h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} + a - \frac{a^2(1+\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2}})}{h+\sqrt{a^2+b^2}} \Big]$$

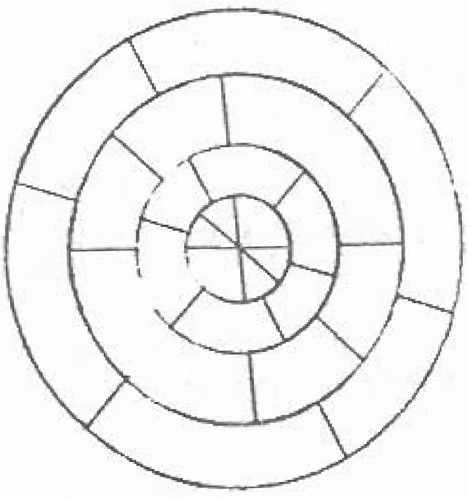
مجموع $\delta g_F + \delta g_p = 0.1967\, h$ بنام تصحیح غیرکامل یا ساده بوگه معروف است

$$\boxed{\Delta g_p = g + \delta g_F + \delta g_p - \gamma}$$

و Δg_p بنام انامولی ساده بوگه معروف میباشد

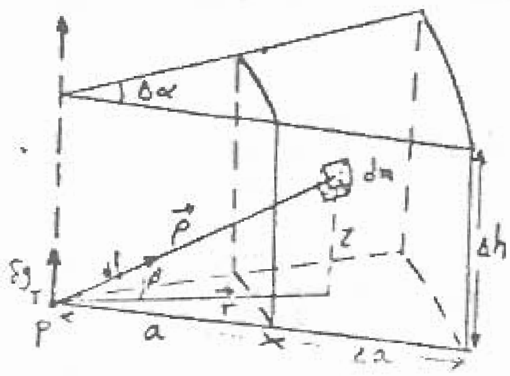
۴-۷ تصحیح توپوگرافی و انامولی کامل بوگه

در مرحله دوم در محاسبه تاثیر اجرام واقع بین ژئوئید و سطح زمین عبارتست از تخمین تاثیر اجرام واقع بین پلیت بوگه و سطح زمین. برای این کار از متد تمپلت استفاده میکنند. تحت منطقه اطراف نقطه مورد محاسبه را مطابق تمپلت به مناطق کوچک تقسیم می کنیم. نمونه ای از این تمپلت ها در شکل ارائه میشود. جاذبه هرکدام از مناطق کوچک تمپلت محاسبه شده و سرانجام نتیجه کلی محاسبه میگردد. برای تعیین جاذبه هرکدام از قسمت ها باز از سیستم مختصات استوانه ای (r, α, z) استفاده. المان جرمی dm ایجاد نیروی جاذبه



$$df_p = K \frac{dm}{\rho^2}$$

در نقطه P میکند که در آن $\rho^2 = r^2 + z^2$ مولفه قائم نیروی df المان dm از جهت تمام تمپلت شکل زیر نوشته میشود



$$d\delta g_{T_i} = df_p \sin\beta = df_p \frac{z}{\rho}$$

$$\delta g_{T_i} = K\sigma\,\Delta\alpha\left[\Delta a + a\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta h}{a}\right)^2\right) - (a+\Delta a)\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta h}{a+\Delta a}\right)^2\right)\right]$$

$$\simeq \frac{K\sigma\,\Delta\alpha\,\Delta h^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+\Delta a}\right)$$

و با جمع تمام δg_{T_i} ها برای تمپلت بصورت زیر خواهد بود

$$\boxed{\delta g_T = K\sigma \sum_j \Delta\alpha_j \sum_i \left[a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2+\Delta h_{ij}^2} - \sqrt{(a_{i+1}^2+\Delta h_{ij}^2)}\right]}$$

روش های مختلف بکار رفته تا محاسبه و مدل فرض ساده تر شود. با بوجود آمدن کامپیوترها روش تمپلت اهمیت خود را از دست داده است. حتی با وجود کامپیوتر نیز بایستی روش را با محاسبه و مدل فرض در نظر گرفت.

در تمام روش‌ها نخست بایستی ارتفاع متوسط (Δh_{ij}) هر قسمت از تمپلت تعیین گردد. سهم قسمت‌های نزدیکتر به مرکز تمپلت در مقدار تصحیح توپوگرافی بیشتر است بنابراین ارتفاع آن قسمت‌ها بایستی دقیق‌تر تعیین گردد. بدین جهت بایستی قسمت‌های نزدیکتر حوالی مرکز تمپلت از نظر سطح کوچکتر انتخاب شوند. بعضی اوقات در مناطق کوهستانی حتی قسمت‌های کوچک و متراکم در اطراف نقطه مورد محاسبه دقت کافی نخواهد داشت. در اینصورت با استفاده از گرادیان جاذبه و یا خود جاذبه (g) مستقیماً جاذبه قسمت‌های مجاور اندازه‌گیری میشود.

تصحیح توپوگرافی معمولاً در حدود چند دهم میلی‌گال در زمین‌های تخت (دشت) و مناطق با پستی بلندی ملایم و چند میلی‌گال در مناطق تپه ماهوری و چند ده میلی‌گال در مناطق کوهستانی میباشد. تصحیحی حدود 40 میلی‌گال در کلرادو و 70 میلی‌گال