فردای شما فردای دشواری است که اگر مجهز به علم و تقوی و شعور انقلابی اسلامی شدید پیروزیتان حتمی است.

امام خمینی

فیزیک عمومی

قسمت اول

«مکانیک ـ ترمودینامیک»

تألیف

هالیدی ـ رزنیک

ترجمه

این ترجمه در دانشگاه صنعتی شریف انجام شده

۱-۱- کمیات فیزیکی ، مقیاسها، وواحد ها

پایه علم فیزیک کمیات فیزیکی هستند که توسط آنها قوانین فیزیکی توضیح داده میشود . ازجمله اینها میتوان نیرو، زمان ، سرعت ، چگالی ، درجه حرارت ، بارالکتریکی ، مغناطیس پذیری ، وغیره رانام برد . خیلی از این کمیات مانند نیرو ودرجه حرارت درمحاورات هر روزه بکار میروند ودرنتیجه معنی آنها اغلب مبهم ویامعنی علمی آنها ممکن است متفاوت باشد . درفیزیک کمیات اصلی بایستی روشن ودقیق تعریف شوند . یک نظریه این است که کمیات فیزیکی وقتی تعریف میشوند که نحوه اندازه گیری آنها معلوم باشد . این طریقه ، طریقه عملی نامیده میشود زیرا تعریف درواقع عبارت است از یک سری عملیات آزمایشگاهی که منجر بیک عدد باواحد میشود واین عملیات ممکن است شامل محاسبات ریاضی نیز باشد .

کمیات فیزیکی معمولا" به کمیات اصلی وفرعی تقسیم میشوند . این تقسیم بندی اختیاری است زیرا یک کمیت میتواند دریک سری عملیات یک کمیت اصلی ودرعملیات دیگر یک کمیت فرعی درنظر گرفته شود کمیات فرعی آنهائی هستند که عملیاتی که منجر به تعریف آنها میشود بر پایه واساس کمیات فیزیکی دیگری قراردارند . ازجمله کمیات فرعی میتوان سرعت ، شتاب وحجم را نام برد . کمیات اصلی توسط کمیات فیزیکی دیگر تعریف نمیشوند . تعداد کمیاتی که بعنوان کمیات اصلی در نظر گرفته میشوند حداقل مقداری است که بتواند بطور منطقی وواضح تمامی کمیات فیزیکی را توضیح دهد . طول وزمان ازجمله کمیاتی هستند که معمولا" بعنوان کمیات اصلی در نظرگرفته میشوند . تعریف این کمیات بطورعملی شامل دومرحله است : اول انتخاب مقیاس ودوم برقراری روشهائی برای مقایسه مقیاس بامقادیری که بایستی اندازه گیری شوند بطوریکه یک عدد ویک واحد بعنوان نتیجه اندازه گیری آن کمیت تعیین شود .

یک مقیاس ایده آل دوخصوصیت اصلی دارد : قابل دسترس بودن وغیرقابل تغییربودن . این دوشرط لازم اغلب ناسازگارند وبنابراین بایستی سازشی بین آنها بوجودآید . درابتدا تاکید بیشتر روی دردسترس بودن میشد ولی رشد وپیشرفت احتیاجات علمی وصنعتی احتیاج به غیرقابل

تغییربودن بیشتری رابوجود آورد . مقیاسهای معروف یارد ، فوت ، واینچ مستقیماً ازبازو و پا وقسمت بالای شست گرفته شده است . امروزه این چنین اندازه گیریهای تقریبی ازطول رضایت بخش نیست ومقیاسی باتغییر خیلی کمتر ، ولو کمتر دردسترس باشد ، میبایستی بکاررود .

فرض کنید میله ای که اولتر بعنوان یك متر تعریف شده است بعنوان مقیاس طول انتخاب شده باشد . حال اگربامقایسه مستقیم این میله بامیله دیگر باین نتیجه برسیم که میله دوم سه برابر میله مقیاس است میگوئیم که میله دوم سه مترمیباشد . درعمل بسیاری ازکمیات بامقایسه مستقیم بایك مقیاس ابتدائی نمیتوانند اندازه گرفته شوند ومعمولاً یك طریقه غیرمستقیم باروشهای پیچیده تری مورد لزوم است . بعنوان مثال فواصل نجومی مثل فواصل ستارگان از زمین را نمیتوان بوسیله روش مستقیم اندازه گیری کرد . همینطور فواصل بسیارکوچك مانند اندازه های اتمی ومولکولی باید توسط روش غیرمستقیم اندازه گیری شوند .

۲-۱- دستگاههای مقایسه (Reference Frames)

وقتی یك کمیت فیزیکی توسط ناظرین مختلفی که نسبت بیکدیگر درحرکت هستند اندازه گیری شود ممکن است مقادیربدست آمده برای آنها متفاوت باشد . سرعت یك قطار نسبت به ناظری که درزمین قرار دارد باسرعت آن نسبت به ناظری که دریك اتومبیل تندرو قراردارد تفاوت دارد وبرای ناظری که درخود قطار نشسته است این سرعت برابر صفراست . هیچکدام ازاین مقادیر امتیازی برمقادیر دیگر ندارد وهرکدام نسبت به ناظری که آنرا اندازه گرفته است صحیح میباشد .

بطورکلی مقداراندازه گیری شده یك کمیت فیزیکی بستگی بدستگاه مقایسه ناظری دارد که اندازه گیری راانجام میدهد . اگراین کمیت فیزیکی سرعت باشد چنانچه دربالا ذکر شد موضوع کاملاً روشن است . اگرکمیت فیزیکی مثلاً تغییرمکان یك ذره ، فاصله زمانی بین دوحادثه یك میدان الکتریکی بایك میدان مغناطیسی باشد نیز این مطلب صادق است اگرچه برای فهم کامل این چهارمثال بایستی منتظر مطالعه تئوری نسبیت باشیم . درروزهای اولیه علم فیزیك بنظر میرسید که یك دستگاه مقایسه بخصوصی بنام دستگاه مطلق وجود دارد که برسایر دستگاهها مزایای اساسی داردوبرای ناظری که درحال سکون دراین چنین دستگاهی است کمیات فیزیکی

مقادیر " واقعی " و " مطلق " خودرا دارند این نظراکنون ترك شده است زیرادرعرض چندین دهه کوششهای تجربی برای یافتن این دستگاه کاملا" باشکست مواجه شده است .

سیستمهای مقایسه ای راکه باسرعت یکنواخت نسبت بیکدیگر ونسبت به ستارگان ثابت حرکت میکنند درنظر میگیریم . این سیستمهای مقایسه ، بدون شتاب وبدون دوران ،سیستمهای مقایسه ماندی (inertial reference frames) نامیده میشوند . تجربه نشان میدهد که تمامی سیستمهای مقایسه ماندی برای اندازه گیری پدیده های فیزیکی معادل یکدیگر میباشند ، ناظرانی که در سیستمهای مختلف قراردارند ممکن است مقادیرعددی مختلفی برای کمیات فیزیکی پیداکنند ولی روابطی که بین مقادیر اندازه گیری شده وجوددارد ، یعنی قوانین فیزیکی ،برای تمام ناظران یکسان خواهدبود .

بعنوان نمونه فرض کنیدکه ناظرانی درسیستمهای ماندی مختلف اندازه حرکت ذرات را دریك برخورداتمی اندازه بگیرند . این ناظران مقادیرعددی مختلفی برای اندازه حرکت هر ذره واندازه حرکت کلی سیستم ذرات بدست خواهندآورد . ولی برای هرناظر اندازه حرکت کلی سیستم ، هر مقداری که میخواهد باشد ، قبل وبعدازبرخوردیکی است . بعبارت دیگر هر ناظر خواهد دید که برخورداز قانون بقا ٔ اندازه حرکت تبعیت میکند . این قانون رابه تفصیل درفصل ۸ مطالعه خواهیم کرد .

اگرچه قوانین فیزیکی درتمام سیستمهای مقایسه مختلف یکسان است،ولی مقادیر فیزیکی اندازه گیری شده همانطورکه دیده ایم یکسان نیستند . بنابراین حائزاهمیت است که دانشجویان همیشه متوجه باشندکه سیستم مقایسه آنها درمساله بخصوصی چیست .

۳-۱- استاندارد طول

برای یك بحث جامع راجع به مقیاس طول مراجعه کنیدبه مقاله (The Meter بوسیله H. Barrel درمجله Contemporary Physics Vol.3 P. 415 (1962)

اولین مقیاس بین المللی حقیقی طول عبارت بوداز یك میله ازآلیاژ پلاتین وایریدیوم بنام " متر استاندارد " که درادارهٔ بین المللی اوزان ومقادیر نزدیك پاریس(درفرانسه) نگهداری

میشود . فاصله بین دو خط ظریف که روی دو قسمت طلائی در دو انتهای میله حک شده (وقتی که میله در صفر درجه سانتیگراد بطور مکانیکی مطابق اصولی که قبلا تعیین شده است قرار داشته باشد) بعنوان " یک متر" تعریف شد . ازنظر تاریخی متربعنوان کسرمناسبی (یک ده میلیونیم) ازفاصله قطب تااستوا ، درامتداد مداری که ازپاریس میگذرد ، درنظرگرفته شده بود . ولی اندازه گیریهای دقیقی که بعد از ساختمان میله استاندارد بعمل آمد نشان داد که این مقدار جزئی (حدود ۰/۰۲۳ ٪) با مقدار درنظر گرفته شده اختلاف دارد .

بعلت اینکه متراستاندارد خیلی قابل دسترس نبود ، کپیه های دقیقی از آن ساخته شد وبرای لابراتوارهای استاندارد کننده در دنیای پیشرفته فرستاده شد . این استاندارد های ثانوی برای مدرج کردن میله های اندازه گیری دیگر که بیشتر در دسترس است بکاررفت . بنابراین تا این اواخر هرخط کش ، میکرومتر ، وپاورنیه قدرت قانونی خود را پس از یک سری مقایسه پیچیده توسط میکروسکپ وماشین های تقسیم ازمتر استاندارد بدست میآورد .

این مطلب همچنین درمورد یارد که درکشورهای انگلیسی زبان بکارمیرود صادق است .

ازسال ۱۹۵۹ یارد بنابریک توافق بین المللی این طور تعریف شده است .

$$1 \text{ Yard} = 0.9144 \text{ meter} \quad \text{دقیقا}$$

که معادل است با

$$1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm} \quad \text{دقیقا}$$

چندین اعتراض نسبت به انتخاب میله متربعنوان استاندارد اصلی طول شده است : دراثر آتش سوزی یا جنگ ممکنست ازبین برود ، تکثیر دقیق آن آسان نیست ، خیلی در دسترس نمیباشد . ازهمه مهمتر دقتی که درمقایسه های لازم برای تعیین ، ولی بروش مقایسه خراشهای ظریف ، با استفاده از میکروسکپ ، وجود دارد جوابگوی احتیاجات امروزعلم وصنعت نیست . حداکثر دقتی که با استفاده از متراستاندارد میتوان بدست آورد یک در 10^7 است ، این اندازه اشتباه در بالشتک یک ژیروسکوپ هدایت کننده میتواند باعث شود که یک سفینه که بطرف ماه پرتاب شده است هزارمایل خطا رود .

پیشنهاد این که طول موج نور بعنوان متراستاندارد بکاررود اولین بار درسال ١٨٦٤ توسط فیزو (Hippolyte, Louis, Fizeau 1819-96) داده شد. پیشرفتهای بعدی تداخل سنج (interferometer) باعث شدکه یك دستگاه اپتیکی دقیق که درآن طول موج نورمیتواند بعنوان مبنای مقایسه بکار رود دردسترس دانشمندان باشد. طول امواج نورانی درحدود ٥×١٠^{-٥} سانتیمتر است واندازه گیری طول میله های چندسانتیمتری تاکسر خیلی کوچکی ازطول موج میتواند انجام شود. دقت یك در $١٠^{٩}$ درمقایسه های طول به وسیله امواج نورانی کاملاً امکان پذیراست. به موازات

جدول ١-١

بعضی طولهای اندازه گیری شده

	متر
فاصله تادورترین کوازار (quasi-Stellar radio source - quasar) که تابحال کشف شده (١٩٦٤)	٦×١٠^{٢٥}
فاصله تانزدیك ترین سحابی (Andromeda یا great-Nebula)	٢×١٠^{٢٢}
شعاع کهکشان ما	٦×١٠^{١٩}
فاصله تانزدیکترین ستاره (Alpha-Centauri)	$٤/٣\times ١٠^{١٦}$
شعاع مدارمتوسط برای دورترین سیاره (pluto)	$٥/٩\times ١٠^{١٢}$
شعاع خورشید	$٦/٩\times ١٠^{٨}$
شعاع زمین	$٦/٤\times ١٠^{٦}$
بلندترین ارتفاع صعود بالن آزاد (١٩٥٩)	$٤/٦\times ١٠^{٤}$
ارتفاع قامت انسان (=١/٨)	$١/٨\times ١٠^{٠}$
ضخامت یك صفحه کتاب	١×١٠^{-٤}
اندازه ویروس Poliomyelitis	$١/٢\times ١٠^{-٨}$
شعاع اتم هیدرژن	$٥/٠\times ١٠^{-١١}$

شعاع موثر پروتون $1/2\times10^{-15}$

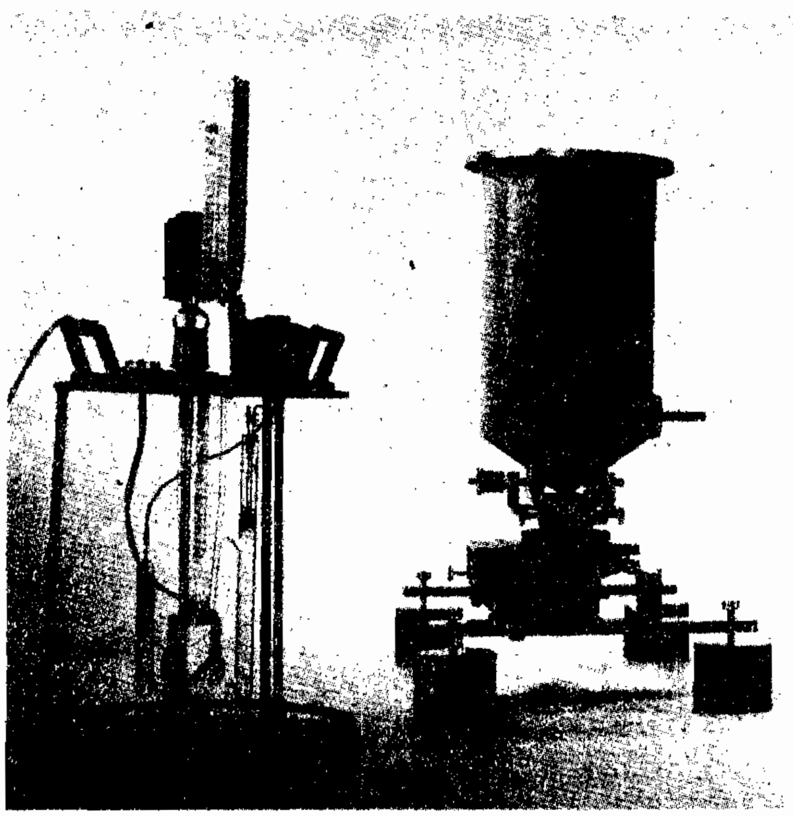
احتیاج در دقت بیشتر در مقایسه طول کوششهائی برای یافتن بهترین چشمه نورانی بکار رفت. در ۱۹۶۱ یک استاندارد اتمی برای طول توسط قرارداد بین المللی اختیار شد. طول موج درخلاء یک خط نارنجی (که باعلامت اسپکتروسکپی $2p_{10}-5d_5$ مشخص میشود) تابش شده بوسیله اتمهای یکی از ایزوتوپهای بخصوص کریپتون (Kr^{86}) در یک تخلیه الکتریکی برای این منظور انتخاب شد. اکنون یک متر دقیقا" ۱۶۵۰۷۶۳/۷۳ برابر طول موج این نور تعریف شده است. این تعداد طول موج بوسیله اندازه گیری دقیق طول متر استاندارد بر حسب این طول موج بدست آمده است. این مقایسه طوری انجام شده که استاندارد جدید که برمبنای طول موج نور است تاحد ممکن موافق بااستاندارد قدیمی که برمبنای میله متربود باشد. شکل ۱-۱ منبع نورکریپتون ۸۶ راکه بعنوان استاندارد اصلی طول بکارمیرود نشان میدهد.

انتخاب استاندارد اتمی علاوه بردقت بیشتر دراندازه گیریهای طول مزایای دیگری نیز دارد. اتمهائی که نورایجاد میکنند همه جا یافت میشوند وتمام اتمهای هم جنس کاملا" یکسان بوده ونوری با یک طول موج تابش میکنند. درنتیجه این چنین استاندارد اتمی هم قابل دسترس بوده وهم تغییر ناپذیراست. طول موج بخصوص انتخاب شده جزو خصوصیات منحصر بفرد کریپتون ۸۶ بوده وخیلی دقیق معین شده است. این ایزوتوپ باخلوص خیلی زیاد نسبتا" به آسانی وبارزانی قابل تهیه است.

۱-۴- استاندارد زمان

اندازه گیری زمان دوجنبه مختلف دارد. برای استفاده های روزمره وبعضی منظور های علمی، میخواهیم وقت روزرابدانیم بطوریکه بتوانیم حوادث رابتوالی مرتب کنیم. دربعضی کارهای علمی میخواهیم بدانیم که یک حادثه چقدرطول میکشد. ازطرفی اگربایک سیستم نوسان کننده مانند یک نوسان کننده میکروویو یاشّدد صوتی سروکارداشته باشیم میخواهیم بدانیم که فرکانس نوسان کننده چقدراست. درنتیجه هراستاندارد زمان بایدبتواند به سوال "چه وقت است؟" وبه سوال وابسته "چقدر طول میکشد؟" جواب دهد. [برای

بحث جامعی راجع به استاندارد زمان مراجعه کنید به مقاله Accurate Measurment of time
بقلم Lauis Essen درمجله Physics Today [(July 1960)



شکل ۱-۱ یك منبع نوری Kr^{86} رانشان میدهدکه ازداخل ظرفی که درآن واقع بوده بیرون آورده شده است . درعمل لامپ بوسیله نیتروژن مایع خنك میشود .

جدول ۲-۱ برد وسیعی ازفواصل زمانی راکه میتوانند اندازه گیری شوند نشان میدهد .

جدول ۲-۱

بعضی فواصل زمانی اندازه‌گیری شده

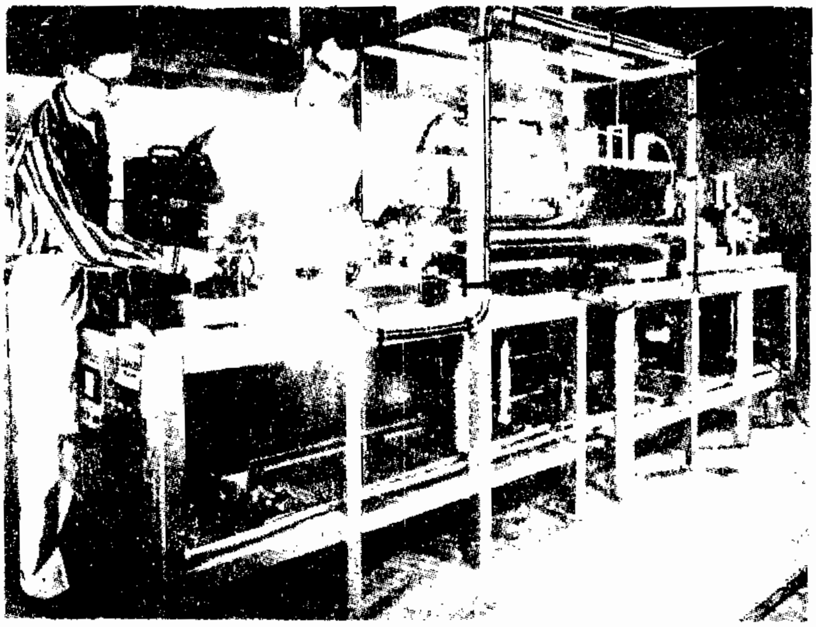
	ثانیه
عمر زمین	$1/3 \times 10^{17}$
عمر هرم Cheops	$1/5 \times 10^{11}$
عمرمتوسط انسان (درامریکا)	2×10^{9}
زمان حرکت زمین بدور خورشید (یکسال)	$3/1 \times 10^{7}$
زمان چرخش زمین بدور محور خودش (یک روز)	$8/6 \times 10^{4}$
دوره ماهواره Echo II	$5/1 \times 10^{3}$
نیمه عمر نوترون آزاد	$7/0 \times 10^{2}$
زمان بین دو طپش معمولی قلب	$8/0 \times 10^{-1}$
پریود دیاپازون (بانوت la_3 یا concert A)	$2/3 \times 10^{-3}$
نیمه عمر مون (muon)	$2/2 \times 10^{-6}$
پریود نوسان میکروویوسه سانتیمتری	$1/0 \times 10^{-10}$
پریود نمونه دوران یک مولکول	1×10^{-12}
نیمه عمر پیون خنثی (neutral pion)	$2/2 \times 10^{-16}$
پریود نوسان اشعه گاما بانرژی 1MeV (محاسبه شده)	4×10^{-21}
زمان لازم برای گذشتن یک ذره بنیادی ازداخل یک هسته باندازه متوسط	2×10^{-23}

هرپدیده ای که تکرارشود میتواند برای اندازه گیری زمان بکار رود واندازه گیری عبارت است از شمارش دفعات تکرار . بعنوان مثال یك آونگ درحال نوسان ، فنر حلقه ای ، یایك کریستال کوارتز میتواند برای این منظور بکاررود . یکی ازپدیده های متناوب که درطبیعت صورت میگیرد چرخش زمین بدورمحور خودش میباشد که طول روز رامشخص میکند . این پدیده از زمانهای اولیه برای استاندارد زمان بکار رفته استوهنوز هم درکارهای عادی وقانونی استاندارد زمان میباشد . یك ثانیه (متوسط خورشیدی) برابر $\frac{1}{86400}$ روز (متوسط خورشیدی) تعریف شده است . زمانی که برحسب چرخش زمین تعریف شده است زمانی جهانی Universal time یا UT) نامیده میشود .

زمان جهانی باید توسط مشاهدات بخوبی معین شود . ازآنجاکه این مشاهدات بایستی چندین هفته طول بکشد یك ساعت ثانوی خوب زمینی که بایستی قبلاً بوسیله مشاهدات نجومی میزان شده باشد لازم است . ساعت کریستال کوارتز که ارتعاشات آزادآن توسط مکانیزم الکتریکی تامین شده است میتواند بخوبی بعنوان یك استاندارد ثانوی زمان بکاربرده شود . بهترین نوع این ساعت دارای حداکثر خطای ۰/۰۲ ثانیه دریك سال میباشد .

یکی ازعمومی ترین موارد استعمال استاندارد دزمان تعیین فرکانسها میباشد درمورد امواج رادیوئی مقایسه فرکانسها باساعت کوارتزی بطورالکترونیکی وبادقت حداقل یك در 10^{10} میتواند صورت گیرد ودرواقع دربسیاری از موارد این چنین دقتی لازم است . ولی البته این دقت درحدود یکصد برابر دقتی است که خود یك ساعت کوارتزی میتواند بامشاهدات نجومی میزان شود . درمورد حالاتیکه احتیاج به استاندارد زمانی بهتری باشد برخی کشورها ازساعتهای اتمی استفاده میکنند . دراین ساعتها نوسانات متناوب اتمی بعنوان استاندارد زمان بکارمیروند .

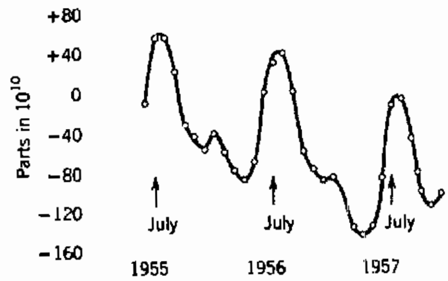
یك نوع بخصوص ازساعت اتمی که مبتنی بربسامد ویژه نوسانات اتم سزیوم میباشد ازسال ۱۹۵۵ بطورمداوم درانگلستان مشغول کاراست ، شکل ۲-۱ ساعت مشابهی رادراداره - استاندارد های امریکانشان میدهد .



شکل ۲-۱- این ساعت اتمی سزیم درلابراتوار موسسه ملی استاندارد های شهر Boulder درایالت کلورادو (امریکا) بسامد وفاصله زمانی راباد قتی بهتراز خطای یك ثانیه در ۳۰۰۰ سال محاسبه میکند .

در ۱۹۶۷ " ثانیه " براساس ساعت سزیوم توسط سیزد همین کنفرانس عمومی اوزان ومقادیر درپاریس بعنوان استاندارد بین المللی تائید شد . این عمل دقت اندازه گیریهای زمان را بیك در 10^{11} میرساند که ۲۰۰ برابر دقت متد های نجومی میباشد .

اگر دو ساعت سزیوم بااین دقت کارکنند واگرمنبع خطای دیگری وجود نداشته باشـــد ، دو ساعت پس ازگذشت ۳۰۰۰ سال فقط یك ثانیه خواهد بود .



شکل ۳-۱ : تغییر در آهنگ دوران زمین چنانکه ازمقایسه با یک ساعت سزیوم بدست میآید .

شکل ۳-۱ بوسیله مقایسه با ساعت سزیوم ، تغییرات سرعت چرخش زمین راطی نزد یک به سه سال نشان میدهد . دقت کنید که سرعت چرخش زمین در تابستان زیاد و در زمستان کم است (نیم کره شمالی) وسال بسال کاهش یک نواختی رانشان میدهد . حال این سوال پیش میآید که چگونه ما مطمئن هستیم که سزیوم بجای حرکت چرخشی زمین مسئول این اختلاف نیست . در این مورد دو دلیل داریم (۱) سادگی نسبی اتم در مقایسه با زمین باعث میشود که هر اختلافی بین این دو زمان سنج را به پدیده های فیزیکی در روی زمین نسبت دهیم. مثلاً اصطکاکهای جذرومدی بین آب وزمین باعث آهسته ترشدن چرخش زمین میشود . همچنین حرکات بادهای موسمی باعث بوجود آمدن تغییرات موسمی منظمی درچرخش زمین میشود . سایر تغییرات ممکن است مرتبط با ذوب شدن یخهای قطبی ویا تغییرمکان اجرام زمین باشد ۲- منظومه شمسی زمان سنج های دیگری از قبیل سیارات درحال چرخش و یا اقمار آنها دارد . چرخش زمین تغییراتی مشابه شکل ۳-۱ رانسبت باینها هم نشان میدهد ، اگر چه این تغییرات با دقت کمتری قابل مشاهده است .

استاندارد زمان رامیتوان برای نقاط دور دست بوسیله ارسال امواج رادیوئی فراهم نمود . خیلی ازکشورها ایستگاههای رادیوئی برای این منظورایجاد کرده اند . ایستگاه WWV که در Beltsville درایالت مریلند (امریکا) واقع شده وتوسط اداره ملی استاندارد ها اداره میشود ازاین جمله است . این فرستنده روی کاریرهائی بافرکانسهای ۲/۵ ، ۵ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۲۵ $\times 10^6$ هرتز hz (هر هرتز برابر یک سیکل درثانیه است) بادقت یک

در ۱۱. ۱ نسبت به ساعت سزیوم ثابت نگهداشته شده است ، کارمیکند درفواصل پنج دقیقه‌ای متناوبا" یك نوای دقیق ۴۴۰ سیکل درثانیه (نوت la_3) ویك نوای ۶۰۰ - WWV سیکل درثانیه پخش میکند . درهرساعت ده بار علائم زمانی بوسیله سیستم علامت گذاری درقمی پخش میگردد . این علائم مبتنی برچرخش زمین میباشند وبنابراین مربوط بزمان جهانی هستند . تصحیحات مربوط به تغییر محورزمین وتغییرات سالیانه سرعت چرخش زمین نیز دراین زمان‌سنجی درنظرگرفته میشوند .

۵-۱- سیستم واحد هـــا

همانطورکه قبلا متذکرشدیم ، تاحدودی درانتخاب کمیات اصلی مختار میباشیم - [مراجعه کنید به مقاله Dimensions, Units and Standards اثر A.G. McNish در physics today (April 1957)] بعنوان مثال طول ، زمان ، وجرم رامیتوان بعنوان کمیات اصلی انتخاب نمود وسایرکمیات مکانیکی ازقبیل نیرو ،گشتاور ،چگالی وغیره رامیتوان بـــر حسب این کمیات اصلی بیان نمود . بهمین ترتیب ممکن است نیرو را بجای جرم بعنوان یـــك کمیت اصلی انتخاب کنیم دراینصورت باانتخاب کمیات اصلی وتعیین واحدهای آنها واحدهـــای کمیات فرعی برحسب آنها بطورخود بخود تعیین میشوند . غالبا" سه نوع متفاوت سیستم آحـــاد درعلوم ومهندسی بکارمیروند . اینهاعبارتند از :متر ـ کیلوگرم ثانیه یاسیستم MKS سیستم گوسی که درآن واحدهای اصلی مکانیکی عبارتند از :سانتیمتر گرم ـ ثانیه وسیستم مهندســـی انگلستان (فوت ـ پوند ـ ثانیه) . گرم وکیلوگرم واحدهای جرم و پوند واحد نیرواست . اینها درفصل ه تعریف وشرح داده خواهد شد .

مابطورکلی سیستم MKS رادراین کتاب بکارخواهیم برد ، فقط درقسمت مکانیك کـــه سیستم FPS رابکارمیبریم . سیستم متریك معمولا" درکارهای علمی بکارمیرود ولی اغلـــب کشورهای دنیا ازآن بعنوان یك دستگاه رایج آحاد درتجارت نیز استفاده میکنند . چند پیشوند که درتشخیص اضعاف واجزاء کمیات متریك بکارمیرود درجدول ۳-۱ نشان داده شده است .

مثلا متر 10^{-3} = ۱ میلی متر و 10^{-9} ثانیه = 1 nanosecond

و 1 megavolt = 10^{6} volt وغیره .

جـــدول ۱-۳

پیشوند هائی که برای اضعاف واجزاء کمیات متریک بکار میرود

deca	10^{1}	deci	10^{-1}
hecto	10^{2}	Conti	10^{-2}
Kilo	10^{3}	milli	10^{-3}
Mega	10^{6}	micro	10^{-6}
giga	10^{9}	nano	10^{-9}
tera	10^{12}	pico	10^{-12}

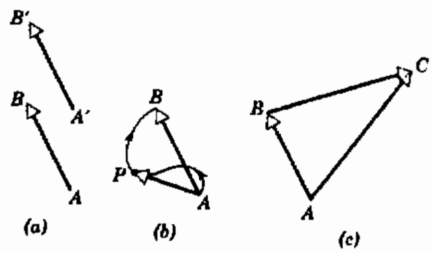
۱-۲- بردارها واسکالرهـــــا

تغییر درموقعیت یک ذره تغییرمکان نامیده میشود . اگر یک ذره ازموقعیت A به موقعیت B حرکت کند (شکل ۲-۱a) میتوانیم تغییرمکان آنرابوسیله کشیدن خطی از A به B نمایش دهیم ، جهت این تغییرمکان رامیتوان بوسیله قراردادن یک پیکان درنقطه B نشان داد که معین میکند تغییرمکان از A به B صورت گرفته است. لزومی ندارد که مسیر ذره خط مستقیم از A به B باشد ، پیکان فقط نتیجه حرکت رانشان میدهد نه حرکت واقعی را .

مثلاً درشکل ۲-۱ b راهی راکه یک ذره از A به B طی میکند کشیده ایم . این راه با تغییرمکان AB یکی نیست . اگریک عکس فوری ازذره وقتی که در A قرارداشت وسپس عکس دیگری وقتی که ذره درنقطه P ازمسیرقراردارد میگرفتیم ، یک بردار تغییرمکان AP بدست میاوردیم که حتی اگرمسیر واقعی بین این نقاط راهم نمیدانستیم نتیجه حرکت دراین فاصله زمانی رانشان میداد . بعلاوه یک تغییر مکان مثل $A'B'$ (شکل a ۲-۱) که به موازات وهم جهت وباندازه AB باشد مانند AB همان تغییر درموقعیت رانشان میدهد . مافرقی بین این دو تغییر مکان نخواهیم گذاشت . بنابراین تغییر مکان توسط یک طول ویک جهت مشخص میشود .

یک تغییرمکان بعدی از B به C رامیتوانیم بهمان ترتیب نشان دهیم (شکل a ۲-۱) . نتیجه این دو تغییر مکان معادل است باتغییرمکان از A به C . میگوئیم که AC مجموع یا منتجه دوتغییرمکان AB و BC میباشد . توجه داشته باشید که این جمع یک جمع جبری نیست وتنها یک عدد نمیتواند بتنهائی آنرا مشخص کند . کمیاتی که رفتارشان مانند تغییرمکانها باشد بردار Vector نامیده میشوند کلمه Vector ازلاتین میآید وبمعنی حامل است که همان مفهوم تغییرمکان رامیرساند . یک منبع مراجعه جالب وکلی درمورد بردارهاعبارت است از

[Vector and Tensor Analysis; G.E. Hay, Dover
Publication (1953)



شکل ۱-۲ بردارهای تغییرمکان (a دوبردار $\vec{AB}$ و $\vec{A'B'}$ یکسانند زیرامقادیر مساوی دارند وجهت وامتداد شان نیز یکی است (b مسیر حقیقی ذره درحرکت از A تا B ممکن است منحنی نمایش داده شده باشد ولی بردارتغییرمکان همان $\vec{AB}$ است . درنقطه ای مانند P ازمسیر ، تغییرمکان از A بردار $\vec{AP}$ میباشد (c بعدازتغییر مکان $\vec{AB}$ ذره باندازه بردار $\vec{BC}$ تغییر مکان مییابد اثرنهائی دوتغییرمکان بوسیله بردار تغییرمکان $\vec{AC}$ نمایش داده میشود .

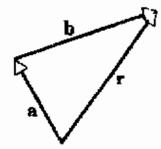
درنتیجه بردارها کمیاتی هستندکه هم دارای مقداروهم دارای جهت میباشند ومطابق قواعد معینی ازجمع بایکدیگر ترکیب میشوند . این قوانین بعداً بیان خواهد شد . بردار تغییر مکان رامیتوان بعنوان یك نمونه درنظرگرفت . کمیات فیزیکی دیگری هستندکه بردار میباشند مانند نیرو ، سرعت ، شتاب ، شدت میدان الکتریکی واندوکسیون مغناطیسی . خیلی ازقوانین فیزیکی رابصورت کلی وجامع میتوان توسط بردارها شرح داد ، بااین کاربدست آوردن روابطی که ازاین قوانین ناشی میشوند ساده ترمیگردد . کمیاتی که بطورکامل بوسیله یك عدد وواحد مشخص میشوند وبنابراین فقط دارای مقدار میباشند اسکالر Scalar نامیده میشوند .

ازکمیات فیزیکی که اسکالر میباشند میتوان جرم ، طول ، زمان ، چگالی ، انرژی ودرجه حرارت رانام برد . محاسبات روی اسکالرها توسط قوانین جبرمعمولی صورت میگیرد .

۲-۲- جمع بردارها ، روش هندسی

برای نشان دادن یك بردار در یك شکل یك پیکان رسم میکنیم وطول این پیکان را متناسب بابزرگی بردار انتخاب مینمائیم (یعنی مقیاسی راانتخاب میکنیم) وجهت پیکان را جهت بردار درنظر میگیریم . سراین پیکان احساس جهت رابما میدهد . برای مثال یك تغییر مکان ٤٠ فوتی درامتداد شمال شرقی رامیتوان ، درمقیاس یك اینچ بازاء ۱۰ فوت توسط برداری بدرازای چهاراینچ نمایش داد . این بردار زاویه ٤٥ درجه باامتداد افقی میسازد وسرپیکان درمنتهی الیه راست وبالا میباشد . یك بردار مانند این رابطور قراردادی درچاپ بوسیله حرف ضخیم bald face Symbol نشان میدهند [توضیح مترجمان : درترجمه متن این کتاب همواره بردارهارا باگذاشتن علامت $\rightarrow$ برروی حروف مشخص میسازیم ، درضمن بردارهای واحد راباگذاشتن علامت ^ برروی حروف مشخص مینمائیم .] درموقع نوشتن بادست راحت تراین است که یك پیکان کوچك بالای علامت قراردهیم تامشخص شود که کمیت برداری است مانند $\vec{d}$. گاهی فقط بزرگی بردارمورد نظراست نه جهت آن . بزرگی $\vec{d}$ راممکن است بصورت $|\vec{d}|$ نوشت که قدرمطلق $\vec{d}$ نامیده میشود ، غالبا" بزرگی بردار راباحرف خوابیده (italic letter Symbol) نشان میدهیم ، مانند d . حروف ضخیم رابرای مشخص کردن هردوخاصیت بردار یعنی بزرگی وجهت آن بکارمیبریم .

حالا بشکل ۲-۲ توجه کنید که درآن بردارهای شکل ۲-۱ رادوباره کشیده ومشخص کرده ایم رابطه بین این تغییرمکانها (بردارها) رامیتوان بصورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{r}$ (۲-۱) نوشت . قواعدی که دراین جمع هندسی بردارها بایستی مراعات شود ازاین قراراست :

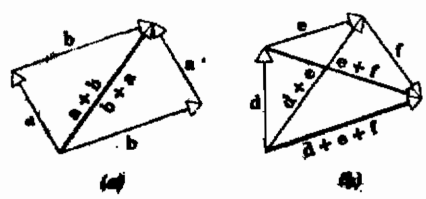


شکل ۲-۲ جمع برداری $\vec{a}+\vec{b}=\vec{r}$
را باشکل (a ۱-۲) مقایسه کنید .

درشکلی که بارعایت مقیاس کشیده میشود بردار تغییر مکان $\vec{a}$ رارسم میکنیم سپس $\vec{b}$ راطوری رسم میکنیم که انتهای آن درسر $\vec{a}$ باشد وسپس خطی ازانتهای $\vec{a}$ بسر $\vec{b}$ وصل میکنیم تابردارمنتجه بدست آید . این تغییر مکان ازنقطه نظر طول وجهت معادل بادو تغییرمکان متوالی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ میباشد . این رویه رابرای بدست آوردن هرتعداد تغییرمکان متوالی میتوان تعمیم داد .

ازآنجاکه بردارهاکمیات جدیدی هستند میبایستی انتظارقواعد جدیدی رادرکاربرد آنها داشته باشیم . علامت (+) دررابطه (۱-۲) مفهوم متفاوتی ازمعنی آن درحساب یاجبر معمولی دارد . این بمامیگوید که یک رشته عملیات متفاوت باید انجام دهیم .

بادرنظرگرفتن شکل ۳-۲ دوخاصیت مهم جمع برداری رامیتوان ثابت کرد :



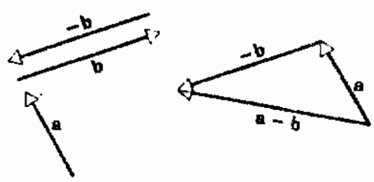
شکل ۳-۲ (a) قانون جابجائی برای جمع برداری یعنی $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (b) قانون انجمنی که جمع $\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$ رامعین میکند

(قانون جابجائی Commutative law) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (۲-۲)

(قانون انجمنی associative law) $\vec{d}+(\vec{e}+\vec{f})=(\vec{d}+\vec{e})+\vec{f}$ (۳-۲)

این قوانین نشان میدهند که فرق نمیکند که بچه ترتیب ویابوسیله چه نوع دسته بندی بردارها را باهم جمع کنیم ، چه حاصل جمع یکی است. ازاین نقطه نظرجمع برداری وجمع اسکالر از قوانین واحدی تبعیت میکنند . اگرمنفی یك بردار رابرداری بگیریم که دارای همان مقدار بوده ولی درجهت عکس بردار اصلی است دراین صورت جبربرداری شامل تفریق بردارها هم میشود . پس

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad (۲-٤)$$



شکل ٤-۲ تفاضل دوبردار $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

همانطوریکه درشکل ٤-۲ نشان داده شده است .

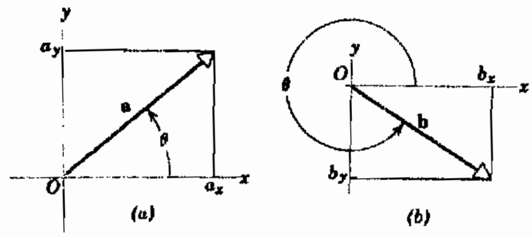
بخاطرداشته باشید که اگرچه ماتغییرمکان رابرای توضیح این اعمال بکاربردیم ولی این قواعد درمورد تمام کمیات برداری صادق است .

۳-۲- تجزیه وجمع بردارها ، روش تحلیلی

روش هندسی جمع بردارها برای فضای سه بعدی زیاد مناسب نیست وحتی گاهی مناسب فضای دوبعدی نیز نمیباشد . راه دیگر برای جمع بردارها روش تحلیلی میباشد که عبارت ازتجزیه یك بردار به مولفه هایش نسبت بیك سیستم مختصات معین .

شکل ٥-۲ بردار a $\vec{a}$ راکه انتهای آن درمرکز یك سیستم مختصات قائم الزاویه قرار دارد نشان میدهد . اگرازسربردار $\vec{a}$ خطوط عمودی برمحورها رسم کنیم مقادیر a_x و a_y که باین ترتیب بدست میآیند مولفه های بردار $\vec{a}$ نامیده میشوند . این عمل به تجزیه یك بردار به مولفه هایش موسوم است . شکل ٥-۲ یك مورد دوبعدی رابرای سهولت نشان میدهد

تمیم این نتایج درسه بعد بعداً روشن خواهد شد .



شکل ۵-۲ دومثال برای تجزیه یك بردار به مؤلفه های اسکالرآن دریك دستگاه مختصات مشخص.

یك بردار ممکن است دارای مجموعه زیادی از مولفه ها باشد . مثلاً اگرمحورهای x و y را درشکل a ۵-۲ باندازه 10° درجه برخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت بگردانیم مولفه های $\vec{a}$ فرق خواهند کرد . بعلاوه مامیتوانیم یك سیستم محورهای مایل بکاربریم یعنی زاویه بین دومحور لزومی ندارد که ۹۰ باشد . بنابراین مولفه های یك بردار وقتی منحصراً مشخصند که سیستم مختصات بخصوصی بکاررود . برای پیداکردن مولفه های یك بردار لزومی ندارد که انتهای بردار از مرکزسیستم مختصات کشیده شود . اگرچه تاکنون برای سهولت این کار راکرده ایم . بردارممکن است بهرجائی درسیستم مختصات حرکت کند وتاوقتی که زوایایش بامحورهای مختصات حفظ شود مولفه هایش تغییرنخواهند کرد .

مولفه های a_x و a_y درشکل a ۵-۲ به آسانی ازروابط

$$a_x = a\cos\theta \qquad , \qquad a_y = a\sin\theta$$

بدست میآیند که درآن θ زاویه ای است که بردار $\vec{a}$ باجهت مثبت محور x هامیسازد و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت ازاین محوراندازه گیری میشود . توجه داشته باشید که بسته به مقدارزاویه θ ، a_x و a_y میتوانند مثبت ویامنفی باشند . مثلاً درشکل b ۵-۲ b_y منفی و b_x مثبت است . مولفه های یك بردار مانند کمیات اسکالر عمل میکنند زیرادرهر سیستم مختصات بخصوصی (دریك دستگاه مقایسه معین) فقط یك عدد باعلامت جبری برای مشخص کردن آنها کافی است .

وقتی یك بردار به مولفه هایش تجزیه شد ، خود مولفه هابرای مشخص کردن بردار

میتوانند بکار روند . بجای دوعدد a (بزرگی بردار) و θ (جهت بردار نسبت بمحور x)
اکنون دوعدد a_x و a_y رادراختیارداریم. یك بردار رامیتوان از روی مولفه های a_x و a_y
آن ویامعادل آن از روی بزرگی وجهت a و θ بدست آورد . برای بدست آوردن a و θ
ازروی a_x و a_y باتوجه به شکل ۲-۵ a داریم :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (2\text{-}6\,a)$$

$$\tan = \frac{a_y}{a_x} \qquad (2\text{-}6\,b)$$

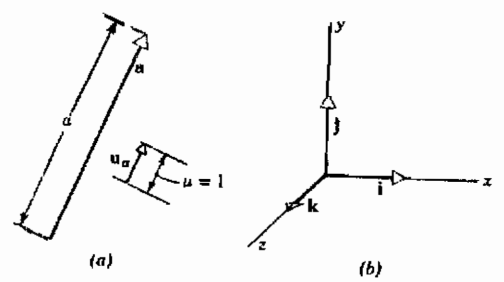
ربعی ازصفحه که θ درآن واقع است بوسیله علامت a_x و a_y تعیین میگردد .

وقتی یك بردار رابه مولفه هایش تجزیه میکنیم گاهی بکاربردن یك بردار باطول واحد دریك جهت معین مفید میباشد . بنابراین بردار $\vec{a}$ درشکل (a ۲-۶) رابعنوان مثال بصورت

$$\vec{a} = \hat{U}_a \cdot a \qquad (2\text{-}7)$$

میتوان نوشت که درآن $\hat{U}_a$ یك "بردارواحد" Unit Vector درجهت $\vec{a}$ میباشد .

اغلب مناسب است که بردارهای واحد درامتداد محورهای مختصات بخصوص که انتخاب شده اند کشیده شود . درسیستم مختصات قائم الزاویه علامات ویژه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ معمولاً به عنوان بردارهای واحد به ترتیب درجهت مثبت محورهای x و y و z بکارمیرود ، بشکل ۲-۶ b توجه کنید . البته لزومی ندارد که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ درمرکز واقع باشند ومانند تمام بردارها میتوانند بهرجائی ازدستگاه مختصات انتقال یابند . بدیهی است که امتداد آنها نباید نسبت به محورهای مختصات تغییری کند .



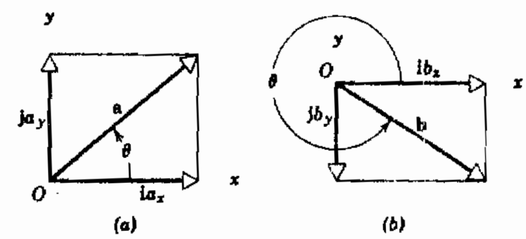
شکل ۲-۶ (a) بردار $\vec{a}$ رامیتوان بصورت $\hat{U}_a \cdot a$ نوشت که درآن $\hat{U}_a$ برداراواحدی در جهت بردار $\vec{a}$ میباشد . (b) بردارهای واحد $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ کهبرای مشخص کردن جهت مثبت محورهای x و y و z بکارمیرود .

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ درشکل ۲-۵ رامیتوان بااستفاده ازمولفه هایشان وبردارهای واحد بصورت

$$(۲\text{-}۸\, a) \qquad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$(۲\text{-}۸\, b) \qquad \vec{b} = b_y \hat{j} + b_x \hat{i}$$

نوشت . بشکل ۲-۷ توجه کنید . رابطه برداری ($۲\text{-}۸\,a$) معادل رابطه اسکالر (۲-۶) میباشد هرکدام ازاینها بردار ($\vec{a}$ یا (a و θ)) رابامولفه هایش (a_y و a_x) مرتبط میکند . گاهی کمیاتی مثل $a_x \hat{i}$ و $a_y \hat{j}$ ، درمعادله ($۲\text{-}۸\,a$) ، رامولفه های برداری $\vec{a}$ خواهیم نامید . اینهابشکل بردارهائی درشکل ($۲\text{-}۷\,a$) رسم شده اند . کلمهٔ مولفه تنها همچنان برای اشاره به کمیات اسکالر a_x و a_y بکارخواهند رفت .



شکل ۲-۷ دومثال برای تجزیه یك بردار به مولفه های برداری آن دریك دستگاه مختصات معین(باشکل ۲-۵ مقایسه کنید).

حال جمع بردارهابطریق تحلیلی رامورد توجه قرارمیدهیم . فرض کنیم $\vec{r}$ مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، که درصفحه $x\text{-}y$ قراردارند ،باشد بطوریکه

$$(۲\text{-}۹) \qquad \vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

دریك سیستم مختصات معین ، دوبردار مانند $\vec{r}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ فقط وقتی میتوانند مساوی باشندکه مولفه های نظیرآنها مساوی باشند یعنی :

$$(۲\text{-}۱۰\, a) \qquad r_x = a_x + b_x$$

$$(۲\text{-}۱۰\, b) \qquad r_y = a_y + b_y$$

این دومعادله جبری رویهمرفته معادل رابطه برداری (۲-۹) میباشند . ازمعادلات (۲-۶) میتوان r وزاویه θ راکه $\vec{r}$ بامحور x میسازد پیداکرد یعنی

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{r_y}{r_x}$$

بنابراین قاعده تحلیلی زیر را برای جمع بردارها دراختیارداریم : دردستگاه مختصات معین هربردار را به مولفه هایش تجزیه میکنیم ، جمع جبری تك تك مولفه ها درامتداد یك محوربخصوص عبارت است ازمولفه بردارمنتجه روی همان محور والبته بردارمنتجه راباداشتن مولفه هایش میتوان تشکیل داد . این روش برای جمع بردارها رامیتوان برای وقتیکه تعداد زیادی بردارداریم ویادر حالت فضای سه بعدی تعمیم داد . (به مسائل ۱۰ و ۱۷ رجوع کنید) .

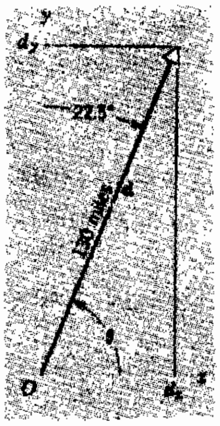
مزیت روش تجزیه بردارها به مولفه هایشان بجای جمع مستقیم آنهابااستفاده از روابط مناسب مثلثاتی این است که دراین روش ، همیشه با مثلثهای قائم الزاویه سروکارداریم ودرنتیجه محاسبات ساده میشود .

درجمع بردارهابروش تحلیلی میزان سادگی عمل بستگی به انتخاب محورهای مختصات دارد . گاهی مولفه های بردارها نسبت بدستگاه محورهای بخصوص معلوم است ودرنتیجه انتخاب محورها واضح است . درمواقع دیگرانتخاب ماهرانه محورها بمقدارزیادی عمل تجزیه بردارها به مولفه هایشان راآسان میکند . مثلاً محورهارامیتوان طوری انتخاب کرد که حداقل یکی ازبردارهابه موازات یکی ازمحورهاباشد .

■ مثال ۱ـ یك هواپیما مسافت ۱۳۰ مایل راروی مسیر مستقیمی که زاویه ۲۲/۵ ازشمال بطرف شرق میسازد حرکت میکند . ازنقطه شروع هواپیما چه مسافتی بطرف شمال وچه مسافتی بطرف شرق حرکت کرده است ؟

جهت مثبت محور x را بطرف شرق وجهت مثبت y رابطرف شمال انتخاب میکنیم سپس (شکل ۸-۲) یك بردار تغییرمکان ازمرکز (نقطه شروع) که زاویه ۲۲/۵ با محور y ـ ها (شمال) و متمایل بطرف مثبت محور منفی x ـ ها (شرق) میسازد رسم میکنیم. طول بردار را طوری انتخاب میکنیم کهنشان دهنده اندازه ۱۳۰ میل باشد . اگر این بردار را $\vec{d}$ بنامیم ، d_x مسافتی راکه هواپیما ازنقطه شروع بطرف شرق و d_y مسافتی راکه ازنقطه شروع بطرف شمال حرکت کرده است نشان میدهد . دراینصورت :

$$\theta = ۹۰^\circ - ۲۲/۵^\circ = ۶۷/۵^\circ$$



بنابراین (باتوجه به معادله ۵-۲)

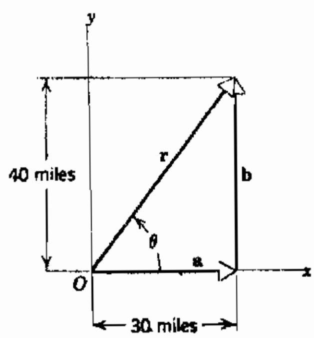
$$d_x = d\cos\theta = (۱۳۰ \text{ miles}) \cos(۶۷/۵^\circ) = 50 \text{ miles}$$

$$d_y = d\sin\theta = (۱۳۰ \text{ miles}) \sin(۶۷/۵^\circ) = ۱۲۰ \text{ miles}$$

شکل ۸-۲ مثال ۱

■ مثال ۲ـ یك اتومبیل مسافت ۳۰ میل راروی جاده مسطحی بطرف شرق حرکت میکند . سپس دریك تقاطع بطرف شمال پیچیده وقبل از توقف مسافت ۴۰ میل راطی میکند . منتجه تغییر مکان اتومبیل را پیدا کنید .

دستگاه مقایسه رانسبت بزمین ثابت فرض میکنیم بطوریکه جهت x دستگاه مختصات بطرف شرق وجهت مثبت y بطرف شمال باشد . سپس دوتغییرمکان متوالی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم میکنیم ، همانطورکه درشکل ۹-۲ نشان داده شده است . تغییرمکان برآیند $\vec{r}$ از روی $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ بدست میآید . چون $\vec{b}$ مولفه x و $\vec{a}$ مولفه y ندارد بدست میآوریم :



$r_x = a_x + b_x = ۳۰$ مایل ۳۰ = ۰ + مایل

$r_y = a_y + b_y = ۰ + ۴۰$ مایل ۴۰ = مایل

اندازه وجهت $\vec{r}$ عبارتنداز (باتوجه برابطه ۶-۲)

شکل ۹-۲ مثال ۲

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(\text{۳۰ مایل})^2 + (\text{۴۰ مایل})^2} = \text{۵۰ مایل}$$

$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{\text{۴۰ مایل}}{\text{۳۰ مایل}} = ۱٫۳۳ ,\ \theta = \tan^{-1}(۱٫۳۳) = ۵۳^\circ$$

بردار منتجه تغییرمکان $\vec{r}$ دارای بزرگی ۵۰ مایل بوده ودرامتدادی متمایل به شمال که با شرق زاویه ۵۳ میسازد قراردارد .

■ **مثال ۳** - سه بردار راکه دریک سطح واقعند درنظر میگیریم . نسبت بیک سیستم مختصات قائم الزاویه معین ازدستگاه مقایسه ای بردارها بصورت زیر بیان میشوند .

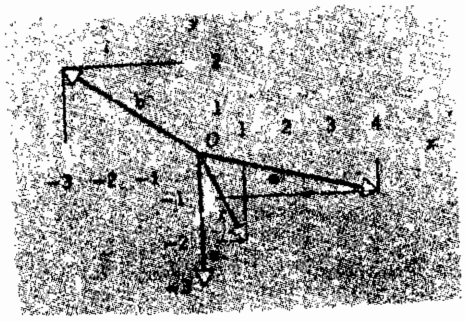
$$\vec{a} = ۴\hat{i} - \hat{j}$$
$$\vec{b} = -۳\hat{i} + ۲\hat{j}$$
$$\vec{c} = -۳\hat{j}$$

دراین جامولفه ها بایک واحد اختیاری داده شده اند . بردار $\vec{r}$ راکه برآیند این بردارها است پیدا کنید .

ازمعادلات (۲-۱۰) نتیجه میشود :

$$r_x = a_x + b_x + c_x = ۴ - ۳ + ۰ = ۱$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -۱ + ۲ - ۳ = -۲$$

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} = \hat{i} - ۲\hat{j}$$



شکل ۲-۱۰ . سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وبرآیند آنها $\vec{r}$

شکل ۲-۱۰ این چهاربردار رانشان میدهد . ازمعادله ۲-۶ میتوانیم بزرگی $\vec{r}$ راحساب کنیم که برابر $\sqrt{a}$ میباشد وزاویه ای که $\vec{r}$ درخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باجهت مثبت محور x ـ ها میسازد برابراست با

$$\tan^{-1}\left(-\frac{۲}{۱}\right) = ۲۹۷^{\circ}$$

۲-۴ـ ضرب بردارها

دربحث قبلی فرض کرده ایم که بردارهائی که باهم جمع میشوند ازیك نوع میباشند ، یعنی جمع بردارهای تغییرمکان وشدت میدان الکتریکی بی معنی میباشد .

لیکن شبیه اسکالر ها بوده بردارهائی از انواع مختلف را میتوان دریکدیگر ضرب نمود و کمیاتی با ابعاد فیزیکی جدید بدست آورد . ازانجا که بردارها علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز میباشد ضرب بردارها نمیتواند از همان قوانین جبری ضرب اسکالر ها تبعیت کند وبایستی قوانین جدیدی برای ضرب بردارها درنظر بگیریم .

مفید است که سه نوع عمل ضرب برای بردارها تعریف کنیم : (۱) ضرب بردارها در یك اسکالر (۲) ضرب دوبردار بطوریکه یك اسکالر بدست آید و (۳) ضرب دو بردار بطوریکه یك بردار دیگر بدست آید . البته امکانات دیگری نیز وجود دارد ولی مادراینجا آنهارادرنظر نخواهیم گرفت .

ضرب یك بردار دریك اسکالرمعنی ساده ای دارد : حاصلضرب اسکالر K دریك بردار $\vec{a}$ که آنرابصورت $K\vec{a}$ مینویسیم ، برحسب تعریف عبارت است ازیك بردار جدید که بزرگی آن K برابر بزرگی $\vec{a}$ میباشد . این بردارجدید همان جهت $\vec{a}$ رادارد هرگاه K مثبت و درخلاف جهت $\vec{a}$ است هرگاه K منفی باشد .

برای تقسیم بردار به یك اسکالر بردار را درعکس آن اسکالر ضرب میکنیم .

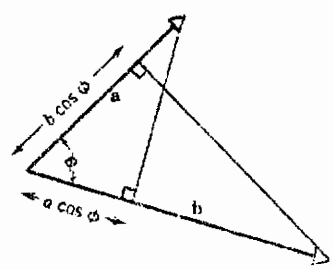
وقتی یك کمیت برداری رادریك کمیت برداری دیگر ضرب میکنیم بایستی بین ضرب اسکالر (یانقطه ای scalar product یا dot product) وضرب برداری ـ Vector product یا Cross product تفاوت قائل شویم . ضرب اسکالر دوبردار

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ بصورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته میشود وبرحسب تعریف عبارت است از :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi \qquad (۲-۱۱)$$

که درآن a بزرگی بردار $\vec{a}$ ، b بزرگی بردار $\vec{b}$ و $\cos\phi$ عبارت است ازکسینوس زاویه ϕ بین این دو بردار (شکل ۲-۱۱) بین دوبردار دوزاویه مختلف بسته به جهت دوران وجود دارد وما همیشه درضرب دوبردار زاویه کوچکتر را اختیارمیکنیم . ازآنجاکه a و b اسکالربوده و $\cos\phi$ یک عدد خالص میباشد حاصلضرب اسکالر دوبردار یک اسکالر میباشد .
حاصلضرب اسکالر دو بردار رامیتوان بصورت ضرب اندازه یک بردار درمولفه بردار دیگردرجهت بردار اول درنظرگرفت . بواسطه نوتاسیون $\vec{a}\cdot\vec{b}$ این نوع ضرب نقطه ای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیز میگویند " $\vec{a}$ نقطه $\vec{b}$ " .

البته میتوانستیم $\vec{a}\cdot\vec{b}$ راببهرصورت دیگرکه میخواستیم تعریف کنیم مثلاً $a^{k}b^{1/3}\tan(\frac{\phi}{2})$ ولی تجربه نشان داده است که این تعریف مورد استعمال درفیزیک ندارد . برحسب تعریفی که مابرای ضرب اسکالر کرده ایم تعدادی ازکمیات مهم فیزیکی میتوانند بعنوان ضرب اسکالر دو بردار تعریف شوند . ازجمله اینهامیتوان کارمکانیکی ، انرژی پتانسیل جاذبه ای ،پتانسیل الکتریکی ، توان الکتریکی ودانسیته انرژی الکترو مغناطیسی رانام برد . وقتی که بعداً این کمیات شرح داده میشوند ارتباط آنها باضرب اسکالر بردارها خاطرنشان خواهد شد .



شکل ۲-۱۱ ضرب اسکالر دو بردار
$\vec{a}\cdot\vec{b}\,(=ab\cos\phi)$ حاصلضرب اندازه
یکی ازدوبردار (مثلا $\vec{a}$) درتصویر
بردار دیگر درامتداد برداراول ($\vec{b}$)
میباشد .

ضرب برداری دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بصورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته میشود ونتیجه آن بردار دیگری است مانند $\vec{c}$ بطوریکه $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ بزرگی $\vec{c}$ برحسب تعریف عبارت است از

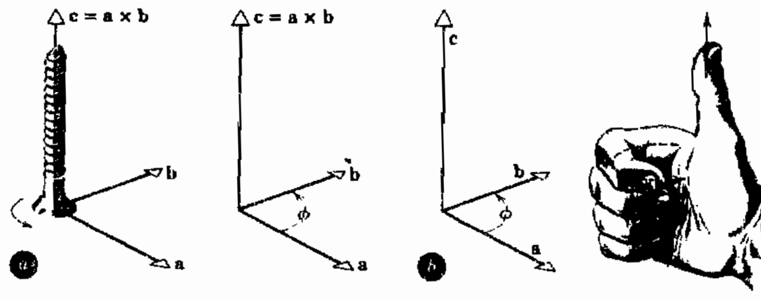
$$c = ab\sin\phi \qquad (۲-۱۲)$$

که درآن ϕ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است .

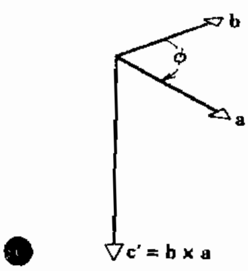
جهت $\vec{c}$ یعنی حاصلضرب برداری $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، برحسب تعریف عمود به صفحه ای است که از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل میشود . برای تعیین جهت بردار $\vec{c}$ بشکل ۱۲-۲ مراجعه کنید . یك پیچ راست گرد که محورش برصفحه ای که از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل میشود عمود باشد درنظرمیگیریم وآنرا از $\vec{a}$ بطرف $\vec{b}$ باندازه زاویه ϕ بین این دو میچرخانیم . جهت جلو رفتن نوك پیچ عبارت است ازجهت حاصلضرب برداری $\vec{a}\times\vec{b}$ (شکل ۱۲a-۲).

راه ساده دیگری برای یافتن جهت حاصلضرب برداری بشرح زیراست :یك محور عمود بصفحه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ازمبداء آنها درنظر میگیریم . انگشتان دست راست راحول این محور بپیچانید بطوریکه نوك انگشتان درزاویه کوچکتر درجهت $\vec{a}$ به $\vec{b}$ باشد . اگرانگشت شصت راستقیم نگه دارید ، جهت آن جهت حاصلضرب برداری $\vec{a}\times\vec{b}$ رامیدهد (شکل ۱۲b-۲)

[روشی که درشکل ۱۲-۲ شرح داده شد یك قرارداد است . دوبردارمانند a و b تشکیل یك صفحه میدهند وازهرصفحه دوجهت بطرف خارج وجود دارد ، درجهتی که انتخاب کرده ایم (باقرارداد) دست راست ویایك پیچ راست گرد بکار میرود ، دست چپ ویایك پیچ چپ گرد جهت دیگر رابرای $\vec{a}\times\vec{b}$ خواهد داد] . بعلت



شکل ۱۲-۲ ضرب برداری



(a) دررابطه $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ جهت وامتداد $\vec{c}$ جهت حرکت پیچ راست گرد است هنگامی که از $\vec{a}$ بطرف $\vec{b}$ درجهت زاویه کوچکتر پیچانیده شود . (b) جهت وامتداد $\vec{c}$ همچنین از قانون دست راست نیز بدست میآید . اگرنوك انگشتان دست راست درجهت $\vec{b}$ از $\vec{a}$ به $\vec{b}$ بپیچانیده شود شست دست راست جهت وامتداد $\vec{c}$ رانشان خواهد داد . (c) حاصلضرب برداری باعوض کردن ترتیب عوامل تغییرعلامت میدهد $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

نوتاسیون $\vec{a} \times \vec{b}$ این نوع ضرب ، ضرب خارجی cross product $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامیده میشود و در خواندن میگوئیم " $\vec{a}$ ضرب در $\vec{b}$ " .

دقت کنید که $\vec{a} \times \vec{b}$ همان بردار $\vec{b} \times \vec{a}$ نمیباشد . بنابراین ترتیب عوامل در ضرب برداری اهمیت دارد . این درمورد اسکالرها صادق نیست زیرا ترتیب عوامل درجبر یاحساب درحلضرب موثرنیست . درواقع $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (شکل ۱۲a (۲-۱۲)) . این را میتوان ازاینجا استنباط کرد که بزرگی $ab \sin\phi$ مساوی بابزرگی $ba \sin\phi$ ولی جهت $\vec{a} \times \vec{b}$ مخالف جهت $\vec{b} \times \vec{a}$ میباشد . علت این امر اینست که یك پیچ راست گرد وقتی از $\vec{a}$ به $\vec{b}$ باندازه ϕ بچرخد دریك جهت جلو میرود و وقتی از $\vec{b}$ به $\vec{a}$ باندازه ϕ بچرخد درجهت مخالف جلومیرود . دانشجویان همین نتیجه رامیتوانند بوسیله بکاربردن قانون دست راست بدست آورند .

اگر ϕ برابر ۹۰ باشد $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ $(= \vec{a} \times \vec{b})$ همه بریکدیگر عمود بوده وجهات یك دستگاه مختصات سه بعدی راست گرد رامیدهند .

علت تعریف ضرب برداری به ترتیب فوق این است که معلوم شده است که درفیزیك مفید میباشد . گاهی به کمیاتی فیزیکی برخورد میکنیم که برداری هستند وضرب آنها آنطوریکه در بالا تعریف شده است یك کمیت برداری نتیجه میدهد که دارای معنی فیزیکی مهمی میباشد . بعضی ازنمونه های کمیات فیزیکی که نتیجه یك ضرب برداری هستند عبارتند از گشتاور ، اندازه حرکت زاویه ای ، نیروئیکه بیك بار متحرك درمیدان مغناطیسی وارد میشود وشار انرژی الکترومغناطیسی بعداً" وقتیکه این کمیات راشرح دادیم ارتباط آنها باضرب برداری دوبردار نشان خواهیم داد .

ضرب اسکالرساده ترین ضرب دو بردار میباشد . ترتیب عوامل درنتیجه ضرب موثر نیست . ازنظر سادگی بعد ازضرب اسکالر ضرب برداری است . دراینجا ترتیب عوامل درنتیجه ضرب موثر است ولی تاثیر آن فقط یك ضریب ۱- میباشد که نشان میدهد جهت معکوس شده است . ضربهای دیگر برداری مفیدولی پیچیده تر میباشند مثلاً" بوسیله ضرب هرکدام ازسه مولفه یك

بردار درسه مولفه بردار دیگر یک تانسور بدست میآید . بنابراین بیک تانسور رتبه دوم ۹عدد ، بیک بردار سه عدد وبیک اسکالر فقط یک عدد مربوط میشود . ازجمله کمیات فیزیکی که میتوانند بوسیله تانسور نشان داده شوند عبارتند از تنش مکانیکی والکتریکی ، ممان اینرسی وکشش . البته کمیات فیزیکی پیچیده تر نیز وجود دارند ولی دراین کتاب ، فقط بااسکالرها وبردارها سروکارخواهیم داشت .

فصـــل ســـوم

۱-۳- مکانیک

مکانیک یعنی قدیمی‌ترین علم فیزیکی ، عبارت است از مطالعه حرکت اجسام . محاسبه مسیرگلوله یک توپ یا مسیر یک وسیله پژوهشی فضائی که ازطرف زمین بطرف مریخ فرستاده شده است ازجمله این مسائل میباشد . همچنین است تجزیه وتحلیل مسیرهائی که در محفظه حباب (bubble chamber) تشکیل میشود ونشان دهنده برخورد، تلاشی ویااندرکنش ذرات بنیادی است .

وقتی حرکت راشرح میدهیم باآن قسمت ازمکانیک که " سینماتیک " (kinematics) نام دارد سروکارداریم . وقتی حرکت رابنیروهای وابسته بآن وخواص ذرات متحرك مربوط میکنیم با " دینامیک " (dynamics) سروکارداریم. دراین فصل بعضی کمیات سینماتیکی راتعریف میکنیم وآنهارا به تفصیل برای حالت خاص حرکت یک بعدی مطالعه خواهیم کرد . درفصل ۴ بعضی موارد حرکت دوبعدی وسه بعدی راموردبحث قرارخواهیم داد .

۲-۳- سینماتیک ذرات :

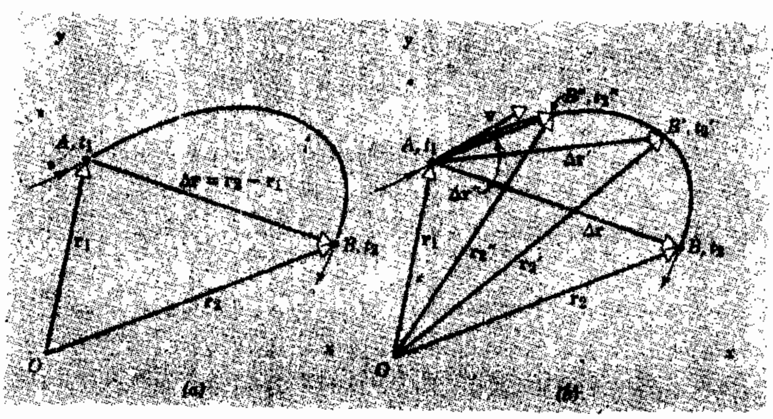
حرکت واقعی اجسام حقیقی میتواند کاملا وپیچیده باشد ، درحالت کلی وقتی که یک جسم روی یک مسیر حرکت میکند میتواند بدورخود دوران نیز بنماید ویاهمچنین ممکن است درموقع حرکت ارتعاش نیز داشته باشد ، دربعضی ازمواقع که فقط حرکت کلی جسم مورد نظر است میتوان ازاین حرکات داخلی صرفنظر کرد . معمولا " درچنین حالاتی ابعاد جسم درمقایسه باطـــول مسیری که طی میکند آنقدر کوچك است که میتوان این جسم را یك نقطه ریاضی درنظرگرفت . این چنین جسمی را " ذره " (particle) مینامیم . بعنوان مثال وقتیکه میخواهیم فقط حرکت زمین را بدور خورشید بادقت کافی محاسبه کنیم میتوانیم زمین رابصورت یك ذره در نظربگیریم . البته درمواقعی که باپدیده های مانند جذرومد اقیانوس هاوانقلابات جوی و یا زمین لرزه سروکارداریم دیگرنمیتوان زمین رابصورت ذره درنظر گرفت . بهمین ترتیب درمورد گازها

تا وقتیکه ما توجه خود را به روابط بین فشار دانسیته ودرجه حرارت معطوف کرده ایم یک مولکول گاز را میتوانیم بصورت یک ذره درنظر بگیریم ، امابرای پدیده هائی که برای آنها حرکات داخلی مولکول مهم است دیگر نمیتوان مولکول رابصورت ذره درنظر گرفت . هرگاه جسمی آنقدر بزرگ باشد که برای یک مسئله خاص نتوان آنرا بصورت ذره درنظرگرفت میتوان فرض کرد که این جسم ازتعداد زیادی ذره تشکیل شده است ونتایج حرکت ذره میتواند درتحلیل مساله مفیدباشد . برای ایجاد سهولت ما خود را به بررسی حرکت ذره محدود میکنیم .

حرکت ذراتی که دارای دوران وارتعاش نیستند " حرکت انتقالی " نامیده میشود .

۳-۳- سرعت متوسط

" سرعت " (Velocity) یک ذره عبارت ازآهنگ تغییرمکان ذره نسبت به زمان میباشد . مکان یک ذره دریک سیستم مقایسه بخصوص توسط بردار مکان که ازمرکز سیستم به ذره وصل میشود معین میگردد . فرض کنیم درلحظه t_1 ذره درنقطه A ازشکل ۱(a)-۳ باشد ، موقعیت نقطه در



شکل (۱-۳) . (a) - ذره ای درزمان $\Delta t=(t_2-t_1)$ از A به B میرود . تغییر مکان حاصله $\Delta\vec{r}=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ است . بردار سرعت متوسط $(\vec{\bar{v}})$ بین A و B درجهت بردار $\vec{r}$ میباشد . (b)- وقتی B به A نزدیک شود بردار سرعت متوسط بسمت بردار سرعت لحظه ای $\vec{v}$ درنقطه A میل مینماید ، بردار $\vec{v}$ درنقطه A برمسیر حرکت ذره مماس است.

صفحه $x-y$ توسط بردار $\vec{r}_1$ مشخص میشود . برای سادگی حرکت رافقط دردو بعد درنظر میگیریم ولی تعمیم آن به سه بعد مشکل نمیباشد . درزمان دیگر t_2 فرض میکنیم که ذره درنقطه B باشد که توسط بردار $\vec{r}_2$ مشخص میگردد . بردار تغییرمکان که تغییروضعیت ذره را (وقتی از A به B حرکت میکند) مشخص مینماید عبارت است از $\Delta\vec{r}(=\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ وزمان طی شده برای حرکت بین این نقاط برابر است با $\Delta t=(t_2-t_1)$ سرعت متوسط ذره دراین فاصله بنابرتعریف عبارت است از :

$$(۳-۱)\qquad \overline{\vec{V}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\text{تغییرمکان (یك بردار)}}{\text{زمان طی شده (یك اسکالر)}}$$

خط کوچك بالای V معرف مقدار متوسط کمیت مورد بحث میباشد .

کمیت $\vec{V}$ یك برداراست ، زیرا ازتقسیم بردار $\Delta\vec{r}$ به اسکالر Δt بدست میآید . در نتیجه سرعت هم دارای جهت وهم دارای اندازه میباشد . جهتش جهت $\Delta\vec{r}$ بوده واندازه اش عبارت است از $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$ این اندازه بصورت نسبت واحد های طول به واحد های زمان بیان میشود . مثلا متر به ثانیه ویامایل به ساعت .

سرعتی که توسط معادله ۱-۳ تعریف شده است سرعت متوسط نامیده میشود زیرا اندازه‌گیری تغییرمکان کل وزمان طی شده ابدا" اطلاعی درباره حرکت بین A و B بمانمیدهد . مسیر ممکن است خمیده ویامستقیم بوده وحرکت ممکن است متشابه ویامتغیر بوده باشد . سرعت متوسط شامل تغییرمکان کل وزمان آن میباشد . مثلا" فرض کنید که شخصی خانه اش راترك نماید وبسا اتومبیلش به مسافرت کوتاهی برود وپس از زمان Δt به خانه اش مراجعت کند . سرعت متوسط این شخص دراین مسافرت صفر میباشد زیرا تغییرمکان او دراین فاصله زمانی Δt بخصوص صفر است .

اگرما زمان ورود ذره رابهریك ازنقاط مسیرش بین A و B (درشکل a ۱-۳) تعیین میکردیم دراینصورت میتوانستیم حرکت آنرا کاملا شرح دهیم . اگرسرعت متوسط (ازنظر بزرگی و جهت) بین هردو نقطه اختیاری ازمسیر یکی باشد میتوانیم نتیجه بگیریم که ذره باسرعت ثابت

حرکت کرده است یعنی درامتداد خط مستقیم (جهت ثابت) ویاسرعت یکنواخت (اندازه ثابت) .

٤-۳- سرعت لحظه ای (instantaneous velocity)

فرض کنید که یك ذره طوری حرکت کند که سرعت متوسطش ، که درچندین فاصله زمانی مختلف اندازه گیری شده است ، مقدار ثابتی نباشد . دراینحالت میگوئیم که این ذره باسرعت متغیر حرکت میکند . حال میخواهیم سرعت ذره درهرلحظه معین راکه سرعت لحظه ای نامیده میشود تعیین کنیم. سرعت میتواند دراثر تغییر دراندازه ، تغییر درجهت ، ویاهردوباهم تغییرکند . برای حرکتی که درشکل a ۱-۳ رسم شده است سرعت متوسط درفاصله زمانی $t_2 - t_1$ ممکن است ازنظر بزرگی وجهت ازسرعت متوسطی که درفاصله زمانی دیگر $t'_2 - t'_1$ بدست میآوریم متفاوت باشد . درشکل b ۱-۳ این موضوع راباانتخاب نقطه B که مرتب بەنقطه A نزدیکتر شده است شرح داده ایم. نقاط B' و B'' دونقطه حدفاصل ذره رادردوزمان مربوط t'_2 و t''_2 نشان میدهندوبه ترتیب توسط بردارهای $\vec{r}'_2$ و $\vec{r}''_2$ نمایش داده شده اند . بردارهای تغییرمکان $\Delta\vec{r}$ ، $\Delta\vec{r}'$ و $\Delta\vec{r}''$ ازنظرجهت متفاوت هستند وبتدریج کوچکترمیشوند ، بهمین ترتیب فواصل زمانی مربوطه $\Delta t (= t_2 - t_1)$ ، $\Delta t' (= t'_2 - t_1)$ ، $\Delta t'' (= t''_2 - t_1)$ بتدریج کوچکتر میشوند . اگراین عمل راادامه دهیم ، یعنی بگذاریم B به A نزدیك شود ملاحظه میکنیم که نسبت تغییرمکان به زمان طی شده بسمت حد معینی میل میکند . اگرچه تغییر مکان دراین عمل فوق العاده کوچك میشود فاصله زمانی نیز فوق العاده کوچك میشود ولذا نسبت آنها لزوماً مقدارفوق العاده کوچکی نیست. بهمین ترتیب وقتی اینها کوچك میشوند بردار تغییرمکان بسمت حدی میل میکند که مماس به مسیر ذره درنقطه A میباشد . مقدارحدی $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ سرعت لحظه ای درنقطه A ویاسرعت ذره درلحظه t_1 نامیده میشود . اگر $\Delta\vec{r}$ تغییر مکان درفاصله زمانی کوچك Δt پس از زمان t باشد سرعت درزمان t عبارت است از مقدار حدی $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ وقتیکه $\Delta\vec{r}$ و Δt هردو بسمت صفرمیل کنند . یعنی اگرسرعت لحظه ای رابا $\vec{V}$ نمایش دهیم داریم :

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

جهت $\vec{V}$ حد جهتی است که $\Delta\vec{r}$ اختیار میکند وقتی B بسمت A ویا Δt بسمت صفر میل مینماید .
همانطورکه دیدیم این جهت حدی مماس به مسیر ذره درنقطه A میباشد .

باعلائمی که درآنالیز بکار میرود حد مقدار $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ وقتی Δt بسمت صفر میل میکنـــد بصورت $\frac{d\vec{r}}{dt}$ نوشته میشود ومشتق $\vec{r}$ نسبت بزمان نا میده میشود . پس داریم :

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۳-۲)$$

اندازه سرعت لحظه ای" تندی" $(Speed)$ نامیده میشود وآن قدر مطلق $\vec{V}$ میباشد ،بنابر این تندی

$$V=|\vec{V}|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \qquad (۳-۳)$$

که اندازه یك بردار است ذاتاً مثبت میباشد .

همانطوریکه ذره یك مفهوم فیزیکی است ازمفهوم ریاضی نقطه گرفته شده است ، همیـــن طور هم سرعت دراینجا یك مفهوم فیزیکی است که از مفهوم ریاضی دیفرانسیل گیری گرفته شده است . درحقیقت آنالیز ابتدا بوسیله اسحق نیوتن (۱۷۲۷-۱٦٤۲) بعنوان یك ابزارریاضی مناسب جهت بحث مسائل اساسی مکانیك اختراع شد .

درفصل بعد ، به تفصیل مفهوم سرعت لحظه ای رادرحالت ویژه حرکت یك بعدی ، کــه گاهی حرکت خطی نیز نامیده میشود ،بررسی خواهیم کرد .

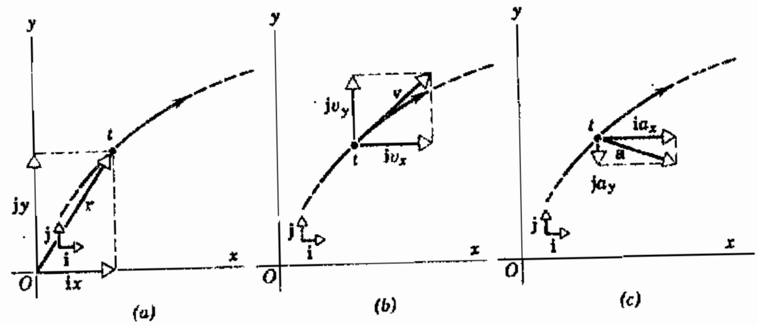
۳-۵- حرکت یك بعدی ـ سرعت متغیر

شکل ۲-۳ یك ذره راکه روی یك مسیر واقع درصفحه $x-y$ درحال‌حرکت است نشـــان میدهد . درزمان t موقعیت ذره نسبت به مرکز بوسیله بردار مکان $\vec{r}$ مشخص‌میشود (بشکل a ۲-۳توجه کنید) سرعت ذره $\vec{V}$ میباشد واین همانطورکه درشکل b ۲-۳ نشان داده شده

برمسیر ذره مماس است .

حال با درنظرگرفتن معادله ۸-۲ میتوان نوشت :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (۳-۴)$$



شکل (۲-۳) ذره ای درلحظه t دارای : (a) بردار مکان $\vec{r}$ ، (b) بردار سرعت لحظه ای $\vec{v}$ و (c) بردار شتاب لحظه ای $\vec{a}$ میباشد . همچنین مولفه‌های $\hat{i}x$ و $\hat{j}y$ ازمعادله (۳-۴) ومولفه های $\hat{j}v_y$ و $\hat{i}v_x$ ازمعادله (۳-۵) مولفه های $\hat{i}a_x$ و $\hat{j}a_y$ ازمعادله (۳-۱۰) وبردارهای واحد $\hat{i}$ و $\hat{j}$ نشان داده شده اند .

که درآن $\hat{i}$ و $\hat{j}$ به ترتیب بردارهای واحد درامتداد مثبت محورهای x و y بوده و x و y مولفه های (اسکالر) بردار $\vec{r}$ میباشند . ازآنجاکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای ثابتی هستند ، با ترکیب معادلات ۲-۳ و ۴-۳ داریم :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

که میتوان آنرا بصورت

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad (۳-۵)$$

(حرکت دوبعدی)

نوشت که درآن $v_x = \left(\frac{dx}{dt}\right)$ ، $v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)$ مولفه های (اسکالر) بردار $\vec{v}$ میباشند .

حالا ، فقط حرکت یك بعدی را درنظر میگیریم . اگربرای این منظورمحور x راانتخاب کنیم دراین صورت $V_y = 0$ وبنابراین معادله ۵-۳ بصورت زیردرمیآید :

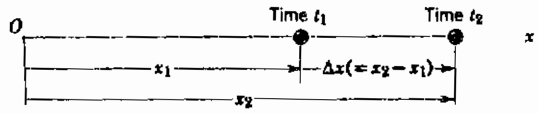
$$\vec{V} = V_x \hat{i} \qquad (۳-۶)$$ (حرکت یك بعدی)

ازآنجاکه $\hat{i}$ درجهت مثبت محور x قراردارد ،وقتیکه $\vec{V}$ دراین جهت قرارداشته باشد V_x مثبت (ومساوی $+V$) ووقتی که درجهت خلاف آن قرارداشته باشد منفی (ومساوی $-V$) خواهد بود .

باین علت که درحرکت یك بعدی فقط دوجهت برای $\vec{V}$ وجود دارد ، استفاده از روش برداری مورد احتیاج نیست ومیتوان تنهابامولفه V_x سرعت کارنمود .

مثال ۱ "عمل حدگیری"

برای توضیح عمل حد گیری دریك بعد ، جدول اطلاعات زیر رابرای حرکت درامتداد محور x-ها درنظر میگیریم . چهار ستون اول اطلاعات تجربی است . علامات بکاررفته مربوط است به شکل ۳-۳ که درآن ذره ازچپ براست یعنی درجهت مثبت محور xها درحال حرکت است. درلحظه t_1



شکل (۳-۳) .
ذره ای درروی‌محور xها بطرف راست حرکت میکند .

(۱/۰۰ ثانیه) ذره درموقعیت x_1 (۱۰۰ سانتیمتر ازمبداء) ودرزمان t_2 درروضعیت x_2 قراردارد وقتی مقادیر مختلفی برای x_2 وبالنتیجه t_2 درنظر بگیریم خواهیم داشت:

x_1, cm	t_1, sec	x_2, cm	t_2, sec	$x_2 - x_1 = \Delta x$, cm	$t_2 - t_1 = \Delta t$, sec	$\Delta x/\Delta t$, cm/sec
100.0	1.00	200.0	11.00	100.0	10.00	10.0
100.0	1.00	180.0	9.60	80.0	8.60	9.3
100.0	1.00	160.0	7.90	60.0	6.90	8.7
100.0	1.00	140.0	5.90	40.0	4.90	8.2
100.0	1.00	120.0	3.56	20.0	2.56	7.8
100.0	1.00	110.0	2.33	10.0	1.33	7.5
100.0	1.00	105.0	1.69	5.0	0.69	7.3
100.0	1.00	103.0	1.42	3.0	0.42	7.1
100.0	1.00	101.0	1.14	1.0	0.14	7.1

معادل ۲-۳ که برای حالت کلی حرکت سه بعدی صادق است عبارت است از :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

برای حرکت یك بعدی در امتداد محور x ـ ها رابطه مشابه دیگری که اصولا اسکالر است خواهیم داشت که در آن هرکمیت برداری جای خود را به مولفه مربوطه اش داده است ویا :

$$V_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (۳-۷)$$

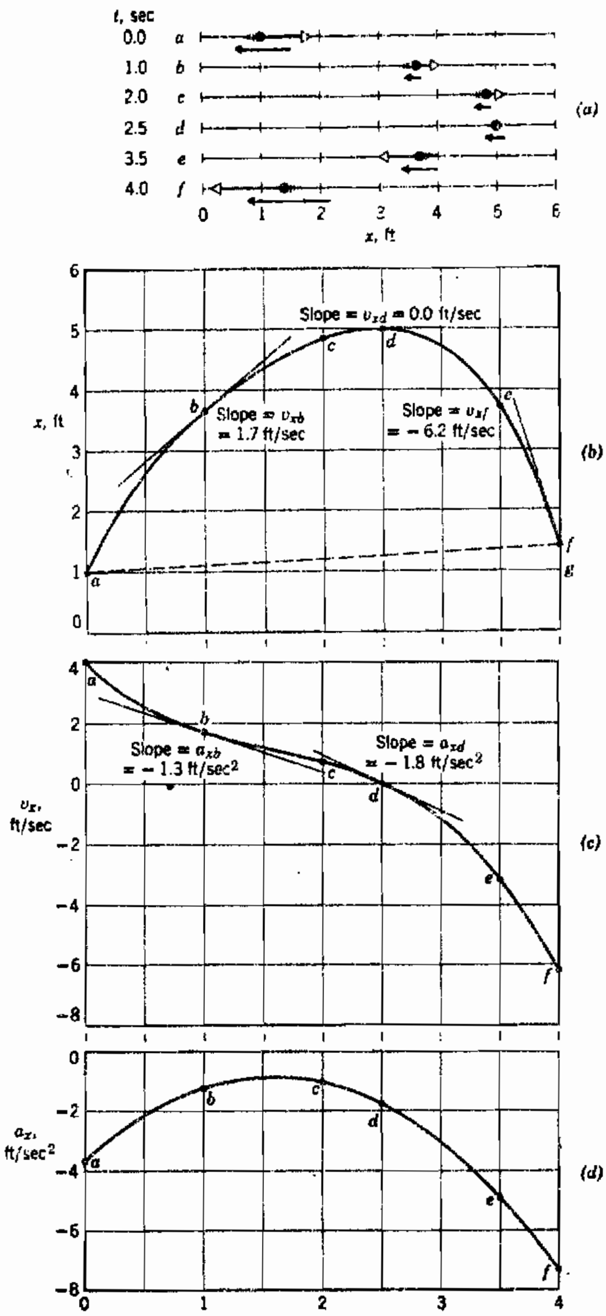
ازروی این جدول واضح است که وقتی مقادیر x_2 رانزدیك تر به x_1 اختیار میکنیم Δt بسمت صفر میل نموده ونسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ آشکارا بسمت مقدار حدی cm/sec ۷/۱+ میل میکند . بنابراین درزمان t_1 تاآن حد که ازمفروضات میتوان تعیین نمود $V_x = +۷/۱ \; cm/sec$ میباشد . چون V_x مثبت است سرعت (معادله ۶-۳ $\vec{V} \; (= V_x \hat{i}$ درشکل ۴-۳ بطرف راست متوجه بوده وهمانطورکه انتظارداریم مماس به مسیردرجهت حرکت میباشد .

مثال ۲

شکل ۴-۳ a شش عکس فوری متوالی ازیك ذره راکه درامتداد محور x ـ ها باسرعت متغیر حرکت میکند نشان میدهد . در $t=0$ ذره درمکان $x = 1ft$ درسمت راست

مبدا' قرار داشته ، در $t = 2/5\ sec$ درمکان $x = 5/0\ ft$ بحال سکون درآمده ودر $t = 4/0\ sec$ به مکان $x = 1/40\ ft$ بازگشته است . شکل b ۵-۳ تغییرات مکانی x رانسبت به زمان برای این حرکت نشان میدهد . سرعت متوسط برای تمام فاصله زمانی ۴/۰ ثانیه عبارت است ازتغییرمکان منتجه (۰/۴۰ + فوت) تقسیم برزمان طی شده (۴/۰ ثانیه) ، این سرعت متوسط برابر $\overline{V_x} = 0/10\ ft/sec$ میباشد . (دریك بعد $\overline{V_x}$ راسرعت متوسط و V_x راسرعت مینامیم ، اگرچه سرعت برداربوده واسکالر نمیباشد . این با رسم معمول تطبیق میکند ونبایستی باعث اشتباه گردد این کمیات تندی نیستند زیراممکن است منفی باشند درحالیکه تندی ذاتا" مثبت است) . سرعت متوسط $\overrightarrow{V}$ درجهت مثبت امتداد (یعنی بطرف راست درشکل a ۴-۳) میباشد زیرا تغییرمکان منتجه بطرف این جهت است . مقدار $\overline{V_x}$ رامیتوان مستقیما" ازروی ضریب زاویه خط نقطه چین af درشکل a ۴-۳ بدست آورد ، که درآن منظورازضریب زاویه نسبت تغییر مکان منتجه gf به زمان طی شده ga میباشد . (ضریب زاویه ، تانژانت زاویه $\hat{fag}$ که درشکل توسط یك نقاله اندازه گرفته میشود نیست . این زاویه اختیاری است زیرابستگی به مقیاسهائی که برای x و t انتخاب میکنیم دارد) .

سرعت V_x در هر لحظه ازروی ضریب زاویه منحنی شکل b ۴-۳ درهمان لحظه پیدا میشود درحقیقت معادله ۷-۳ رابطه ای است که از روی آن درآنالیز ضریب زاویه یك منحنی راتعریف میکنند . درمثال فوق الذکر ضریب زاویه درنقطه b ، که عبارت ازمقدار V_x درنقطه b میباشد ، برابراست با $+1/7\ ft/sec$ ، ضریب زاویه درنقطه d صفربوده ودرنقطه f برابر $-6/2\ ft/sec$ میباشد ،وقتی ضریب زاویه $\frac{dx}{dt}$ رادرهرلحظه t معین کردیم میتوانیم تغییرات V_x نسبت به t رارسم کنیم (مانند شکل c ۴-۳) . دقت کنید که برای فاصله زمانی $0 < t < 2/5\ sec$ V_x مثبت است بطوریکه بردارسرعت $\overrightarrow{V}$ درشکل a ۴-۳ بطرف راست وبرای فاصله زمانی $2/5\ sec < t < 4/0\ sec$ V_x منفی است یعنی $\overrightarrow{V}$ درشکل a ۴-۳ به طرف چپ میباشد .



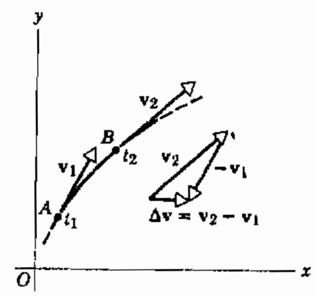
شکل (۴-۳) ۰ (a) شش عکس متوالی از یک ذره که در روی محور x ها حرکت میکند . بردار متصل بذره نشان دهنده سرعت لحظه ای وبرداری که درزیرآن کشیده شده است نشان دهنده شتاب لحظه ای ذره است . (b) منحنی نمایش تغییرات x برحسب t برای حرکت ذره .

(c) منحنی نمایش تغییرات v_x برحسب t

(d) منحنی نمایش تغییرات a_x برحسب t

٣-٦ شتاب

اغلب سرعت یك جسم متحرك ، وقتی که حرکت ادامه پیدا میکند ، یا از نظر بزرگی یا از نظر جهت یا هر دو تغییر میکند . در اینصورت میگوئیم که جسم دارای شتاب است . شتاب (acceleration) یك ذره عبارت است از آهنگ تغییر سرعت نسبت بزمان . فرض میکنیم که یك ذره درلحظه t_1 در نقطه A بوده و در روی صفحه $x-y$ باسرعت لحظه‌ای $\vec{V}_1$ درحال حرکت است (مانند شکل



شکل (٥ -٣) . ذره ای دارای سرعت $\vec{V}_1$ درنقطه $\vec{A}$ است این ذره به نقطه B میرود که درآنجا سرعتش $\vec{V}_2$ میباشد . مثلث نشان دهنده تغییرسرعت $\Delta\vec{V}=(\vec{V}_2-\vec{V}_1)$ ذره است که از A به B میرود .

(٣-٥) ودرچند لحظه بعد (t_2) درنقطه B قراردارد وباسرعت لحظه ای $\vec{V}_2$ حرکت میکند . شتاب متوسط $\vec{\bar{a}}$ درحین حرکت از A به B برحسب تعریف عبارت است از تغییر سرعت تقسیم بر فاصله زمانی ویا

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \qquad (٣-٨)$$

کمیت $\vec{\bar{a}}$ یك بردار است زیرا ازتقسیم بردار $\Delta\vec{V}$ براسکالر Δt بدست آمده است. بنابراین شتاب توسط اندازه وجهت مشخص میگردد . جهت آن جهت $\Delta\vec{V}$ مقدار برابر $\left|\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right|$ میباشد .

اندازه شتاب برحسب واحد های سرعت تقسیم برواحد های زمان بیان میشود مثل $meters \cdot sec^{-1}/sec$ (که بصورت $meters/sec^2$ ، نوشته میشود ومتربرمجذورثانیه خوانده میشود) ، cm/sec^2 و ft/sec^2

مقدار $\vec{a}$ درمعادله ۸-۳ راشتاب متوسط میخوانیم زیرا چیزی درمورد تغییرات سرعت درفاصله زمانی Δt گفته نشده است . مافقط تغییرکلی درسرعت وتمام زمان طی شده رامیدانیم . اگر تغییر درسرعت (یك بردار) تقسیم برزمان طی شده مربوط یعنی $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ (صرفنظرازفواصل زمانیکه دران شتاب اندازه گیری شده است) مقدار ثابتی باشد دراینصورت یك شتاب ثابت خواهیم داشت . بنابراین شتاب ثابت مبین این است که تغییر درسرعت ازنظرمقدار وجهت نسبت بزمان یکنواخت است. اگرسرعت تغییر نکند ، یعنی سرعت ازنظرمقدار وجهت ثابت باشد ، آنوقت $\Delta \vec{V}$ برای تمام فواصل زمانی صفربوده وشتاب برابر صفرخواهد بود .

اگریك ذره بطریقی حرکت کند که شتاب متوسطش که درفواصل زمانی مختلف اندازه گیری میشود . مقدارثابتی نباشد دراینصورت میگوئیم که ذره دارای شتاب متغیر میباشد . شتاب میتواند ازنظرمقدار یاجهت ویاهردو تغییرکند . دراین حالت میبایستی شتاب ذره رابرای هرلحظه معین بدست آوریم . این شتاب را شتاب لحظه ای گویند .

شتاب لحظه ای باین ترتیب تعریف میشود :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (۳-۹)$$

یعنی شتاب یك ذره درزمان t برابر حد مقدار $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ است وقتیکه $\Delta \vec{V}$ و Δt هر دو بسمت صفرمیل کنند . جهت شتاب لحظه ای $\vec{a}$ جهت تغییر بردار سرعت $\Delta \vec{V}$ میباشد .

مقدار a شتاب لحظه ای برابراست با $a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right|$. وقتیکه شتاب ثابت است شتاب لحظه ای برابرشتاب متوسط میباشد . دانشجویان باید توجه کنند که نسبت $\vec{a}$ با $\vec{V}$ درمعادله ۹-۳ همان نسبت $\vec{V}$ با $\vec{r}$ درمعادله ۲-۳ میباشد .

دوحالت ویژه زیر نشان میدهند که شتاب میتواند ازتغییرمقدار ویاتغییر جهت سرعت ناشی شود . یك موردعبارت است از حرکت باتغییرتندی یکنواخت درامتداد یك خط مستقیم (مانند بخش ۸-۳) ، دراین مورد سرعت ازنظرجهت تغییرنمیکند ولی مقدارش بازمان بطور یکنواخت تغییرمیکند . این یك حالت ازشتاب ثابت است . مورد دوم عبارت است از حرکت با

تندی ثابت روی یك دایره ، (بخش ٤-٤) در این جابردار سرعت دائما ازنظر جهت تغییر میکند ولی بزرگیش ثابت میماند . این نیز یك حرکت شتابدار است اگرچه جهت بردار شتاب ثابت نیست . بعدا" موارد مهم دیگری ازحرکت شتابدار را ملاحظه خواهیم کرد .

۳-۷- حرکت یك بعدی - شتاب متغیر

ازمعادلات ۳-۵ و ۳-۹ برای حرکت دو بعدی (مانند شکل ۳-۲) نتیجه میشود :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\hat{i} + \frac{dV_y}{dt}\hat{j}$$

یا

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \qquad (۳-۱۰)$$

که درآن $a_x\left(=\frac{dV_x}{dt}\right)$ و $a_y\left(=\frac{dV_y}{dt}\right)$ مولفه های (اسکالر) بردار شتاب $\vec{a}$ میباشند (شکل ۳-۲a) .

ما مجددا" خود را فقط بحرکت یك بعدی ، محدود مینمائیم وبرای سهولت امتداد حرکت را محور x اختیار میکنیم . چون V_y برای این چنین حرکتی با زمان تغییر نمیکند (ودر واقع صفر است) a_y نیز که برابر $\frac{dV_y}{dt}$ است بایستی صفر باشد دراینصورت

$$\vec{a} = a_x\hat{i} \qquad (۳-۱۱)$$

چون $\hat{i}$ درجهت مثبت امتداد x است a_x مثبت است ، وقتیکه $\vec{a}$ بطرف این جهت باشد ، ومنفی است اگر $\vec{a}$ درخلاف این جهت باشد .

مثال ۳

حرکت درشکل ۳-٤ a یکی ازموارد شتاب متغیر در امتداد محور x- ها است . برای پیدا کردن شتاب a_x [مانند سرعت ، ما معمولا برای حرکت یك بعدی a_x را شتاب مینامیم اگر چه شتاب یك بردار بوده و a_x بطور صحیح یك مولفه شتاب است. برای حرکت یك بعدی اگر محور در امتداد خط حرکت انتخاب شود فقط یك مولفه وجود دارد.] در هر لحظه بایستی $\frac{dV_x}{dt}$ را تعیین کنیم. این درحقیقت عبارت ازضریب زاویه منحنی V_x

نسبت به t . در آن لحظه ضریب زاویه شکل a ۴-۳ در نقطه b برابر $-1/3 \; ft/sec^2$ و در نقطه d برابر $-1/8 \; ft/sec^2$ میباشد (همانطور که در شکل می‌بینیم) . نتیجه محاسبه ضریب زاویه برای تمام نقاط در شکل b ۴-۳ نشان داده شده است. توجه کنید که a_x در تمام لحظات منفی است یعنی بردار شتاب $\vec{a}$ بطرف جهت منفی امتداد x میباشد . یعنی همانطورکه بوضوح از شکل a ۴-۳ پیدا است V_x همواره با زمان کاهش می یابد . این حرکت یکی از موارد یاست که بردار شتاب یك جهت ثابت داشته ولی مقدارش تغییر میکند (شکل a ۴-۳ را ملاحظه کنید) .

۳-۸ حرکت یك بعدی ـ شتاب ثابت

ما اکنون ملاحظات خود را بیشتر محدود میکنیم بحرکتی که نه فقط در یك بعد (محور x) انجام میگیرد بلکه برای آن شتاب a_x یك مقدار ثابت است . برای این نوع حرکت ، شتاب متوسط برای هرفاصله زمانی مساوی شتاب لحظه ای (ثابت) a_x میباشد . فرض کنیم $t_1 = 0$ و t_2 یك زمان اختیاری باشد . همچنین V_{x_0} مقدار V_x در $t = 0$ و V_x مقدار آن در زمان اختیاری t باشد . برحسب این علامات a_x برابر است با (معادله ۸-۳ را ببینید)

$$a_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{V_x - V_{x_0}}{t - 0}$$

یا

$$V_x = V_{x_0} + at \qquad (۳-۱۲)$$

بنابراین معادله سرعت V_x در زمان t برابر مجموع سرعت آن در زمان $t = 0$ وتغییر سرعت درفاصله زمانی t (یعنی $a_x t$) میباشد . شکل a ۶-۳ تغییرات V_x با زمان رابرای شتاب ثابت نشان میدهد که این منحنی نمایش معادله ۱۲-۳ میباشد . دقت کنید که ضریب زاویه منحنی سرعت همانطوریکه انتظار داریم مقدار ثابتی است ، زیراشتاب $a_x \left(= \frac{dV_x}{dt}\right)$ مقدار ثابتی فرض شده است (این مطلب ازروی شکل b ۶-۳ آشکار است) .

وقتی سرعت V_x بطوریکنواخت با زمان تغییرکند ، مقدارمتوسط آن درهر فاصله

زمانی مساوی نصف مجموع مقدار V_x درابتدا وانتهای فاصله زمانی میباشد . یعنی سرعت متوسط V_x بین $t=o$ و $t=t$ برابراست با :

$$\bar{V}_x = \frac{1}{2}\left(V_{x_o} + V_x\right) \qquad (٣-١٣)$$

این رابطه اگرشتاب ثابت نباشد صادق نیست زیرا دراین حال منحنی V_x نسبت به t خط مستقیم نمیباشد . اگردرلحظه $t=o$ ذره در موقعیت x_o باشد موقعیت x آن درزمان $t=t$ رامیتوان ازرابطه

$$x = x_o + \bar{V}_x t$$

بدست آورد . اگر این رابطه رابامعادله ٣-١٢ ترکیب کنیم خواهیم داشت :

$$x = x_o + \frac{1}{2}\left(V_{x_o} + V_x\right)t \qquad (٣-١٤)$$

تغییرمکان ناشی ازحرکت درزمان t برابر $x - x_o$ میباشد . اغلب مبداء طوری انتخـــاب میشودکه $x_o = o$ باشد .

توجه کنید که صرفنظر ازشرایط ابتدائی حرکت یعنی مقادیر x و V_x در $t=o$ (که دراینجا $x = x_o$ و $V_x = V_{x_o}$ اختیار شده است) چهارعامل برای حرکت وجـــود دارند . اینهاعبارتند از x معرف تغییرمکان ، V_x معرف سرعت ، a_x معرف شتـــاب ، و t معرف زمان طی شده. اگرفقط بدانیم که شتاب مقدارثابتی است ، ولی لزوما" مقدارش را ندانیم ، بکمك هردو تاازاین عوامل دوتای دیگررامیتوان بدست آورد . مثلا اگر a_x و t مشخص باشند بااستفاده ازمعادله ٣-١٢ میتوان V_x رابدست آوردوسپس x رابااستفاده ازمعادله ٣-١٤ بدست میآوریم.

دراغلب مسائل مربوط به حرکاتی که درآنها شتاب یکنواخت است دوعامل معلوم وعامـــل سوم مورد نظراست . بنابراین مناسب است که روابطی بین هرسه عامل ازچهار عامل بدســـت آوریم. معادله ٣-١٢ شامل V_x و a_x و t است ولی شامل x نیست ،معادله ٣-١٤ شامل x ، V_x و t است وشامل a_x نمیباشد . برای تکمیل سیستم معادلات دومعادلـــه

دیگرمورد احتیاج است که یکی شامل x ، a_x و t ولی نه V_x ودیگری شامل x ، V_x و a_x ولی نه t باشد . اینها به آسانی باترکیب معادلات ۳-۱۲ و ۳-۱٤ بدست میآیند . بنابراین اگرمقدار V_x راازمعادله ۳-۱۲ درمعادله ۳-۱٤ قرارد هیم ودرنتیجه V_x راحذف نمائیم خواهیم داشت :

$$x = x_0 + V_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (۳-۱٥)$$

وقتی معادله ۳-۱۲ برحسب t حل شود واین مقدار t رادرمعادله ۳-۱٤ قرارد هیم خواهیم داشت :

$$V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (۳-۱٦)$$

معادلات ۳-۱۲ ، ۳-۱٤ ، ۳-۱٥ و ۳-۱٦ (جدول ۳-۱ راملاحظه کنید) یك دستگاه معادلات کامل برای حرکت باشتاب ثابت درامتداد یك خط مستقیم میباشند .

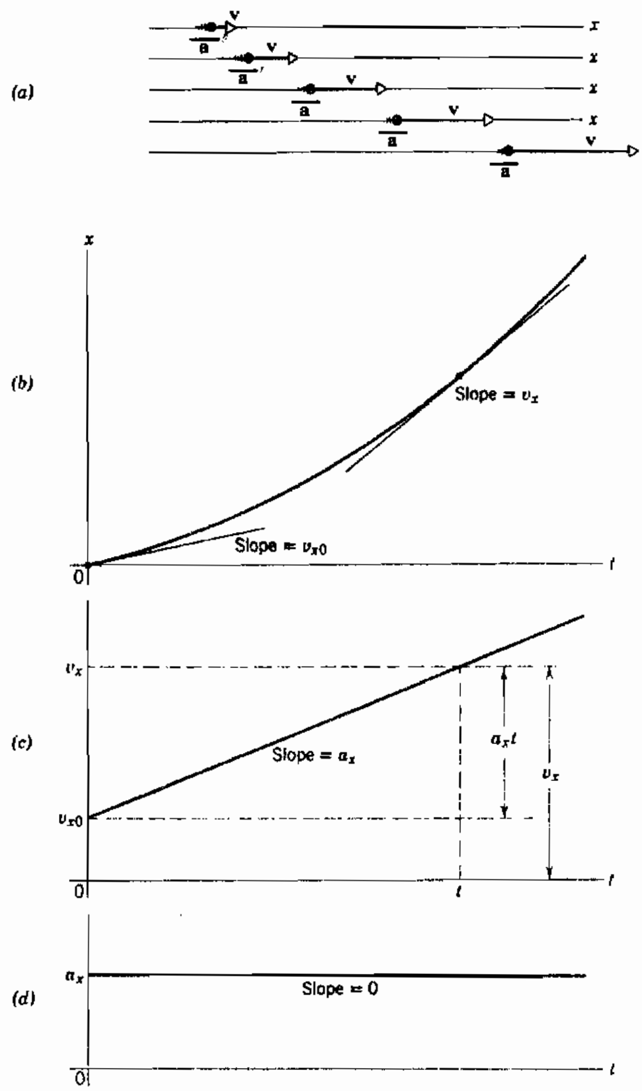
جدول ۳-۱

« معادلات سینماتیکی برای حرکت مستقیم الخط باشتاب ثابت »

مکان x_0 وسرعت V_{x_0} درلحظه اولیه $t = 0$ ، شرایط ابتدائی داده شده هستند .

شماره معادله	معادله	حضور t	a_x	V_x	x
(۳-۱۲)	$V_x = V_{x_0} + a_x t$	✓	✓	✓	—
(۳-۱٤)	$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_x + V_x)t$	✓	—	✓	✓
(۳-۱٥)	$x = x_0 + V_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	✓	✓	—	✓
(۳-۱٦)	$V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	—	✓	✓	✓

یك مورد خاص حرکت باشتاب ثابت حرکتی است که درآن شتاب صفراست یعنی $a_x = 0$. در این حالت چهارمعادله جدول ۳-۱ بصورت مورد انتظار $V_x = V_{x_0}$ (سرعت تغییرنمیکند) و $x = x_0 + V_{x_0} t$ (تغییرمکان نسبت بزمان بطورخطی تغییرمیکند) خلاصه میگردند .



شکل (٦-٣) . (a) پنج عکس متوالی ازذره ای که باشتاب ثابت حرکت میکند . بردارمتصل بذره نشان دهنده $\vec{V}$ وبردارزیرآن نشان دهنده $\vec{a}$ است . (b) تغییرمکان ذره مطابق معادله حرکت $x = V_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ افزایش می یابد . شیب این منحنی بطوریکنواخت زیاد میشود و درهرلحظه مقدارآن V_x یعنی سرعت است . (c) V_x بطوریکنواخت طبق رابطه $V_x = V_{x_0} + a_x t$ زیاد میشود . شیب این منحنی ثابت است ودرهرلحظه مقدارآن a_x شتاب ذره میباشد . (d) شتاب a_x دارای مقدارثابتی است وشیب آن صفرمیباشد . شکل (٤-٣) منحنی های مشابهی رابرای حرکت یک بعدی نشان میدهد که درآن شتاب ثابت نیست .

مثال ٤-

منحنی شکل ٦b-٣ نمایش تغییرمکان نسبت بزمان برای حرکت باشتاب ثابت است ، یعنی نمایش معادله ٥ ١-٣ که در آن $x_o = 0$ است میباشد . ضریب زاویه مماس براین منحنی درزمان t مساوی سرعت V_x دراین زمان است . توجه کنید که ضریب زاویه بامقدار V_{x_o} شروع شده وبتدریج بازمان زیاد میشود . آهنگ ازدیاد این ضریب زاویه شتاب a_x رامیدهد که دراین حالت ثابت است . منحنی ٦-٣ یك سهمی است ، زیرا معادله ٥ ١-٣ معادله یك سهمی است که در $t=0$ ضریب زاویه آن V_{x_o} میباشد . بادیفرانسیل گیری متوالی ازمعادله ٥ ١-٣ خواهیم داشت :

$$x = x_o + V_{x_o}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{x_o} + a_x t$$

$$V_x = V_{x_o} + a_x t$$

که سرعت V_x درزمان t رامیدهد . (بامعادله ٢ ١-٣ مقایسه کنید) و

$$\frac{dV_x}{dt} = a_x$$

که درآن شتاب ثابت است . درنتیجه نمایش تغییرمکان نسبت بزمان برای حرکت مستقیم الخط باشتاب ثابت همیشه سهمی خواهد بود .

٩-٣ سازگاری واحدها وابعاد

دانشجویان نباید احساس کنندکه مجبورند روابطی مانند روابط جدول (١-٣) راحفظ نمایند مطلب مهم این است که خط مشی مارا دربدست آوردن این نتایج درك کنند . این روابط بعدازآنکه دانشجویان آنهارا مکرراً درحل مسائل بکار بردند خود بخود بخاطر آورده خواهند شد . این امر گرچه بخاطر آشنائی باآنهاست ولی بیشتر بعلت فهم بهتری است که در اثر کاربرد آنهابدست میآید .

ما میتوانیم هرواحد مناسبی رابرای زمان ومسافت دراین معادلات بکاربریم. اگربـــرای زمان ثانیه وبرای مسافت فوت رابکاربریم ، برای سازگاری بایستی سرعت را با ft/sec وشتاب را با ft/sec^2 شرح دهیم . اگر اطلاعاتی بما داده شده است که درآن واحد های یك كمیت مثلا" سرعت سازگاری باواحد های کمیت دیگر مثلا شتاب ندارند ، بایستی قبل ازبکـار بردن این اطلاعات درمعادلات این دوکمیت رابواحد هائی تبدیل کنیم که بایکدیگر سازگـاری داشته باشند . باانتخاب واحد های کمیات اصلی ، خودبخود واحد های کمیات مشتق شـده ازآنها بطورسازگاری بایکدیگر تعیین میشوند . درانجام هرمحاسبه ای بخاطرداشته باشید که نتیجه نهائی رابا ذکر واحد بیان کنید ، زیرا نتیجه بدون ذکر واحد بی معنی میباشد .

مثال ٥

تندی یك ذره راکه دارای شتاب ثابت $\text{۵/۰۰}\ cm/sec^2$ وتندی اولیه $\text{۱۰/۰}\ ft/sec$ میباشد پس از نیم ساعت ازابتدای حرکت پیدا کنید .

واحد طول رافوت وواحد زمان راثانیه اختیار میکنیم دراینصورت

$$a_x = \text{۵}\ cm/sec^2 = \text{۵}\ \cancel{cm}/sec^2\left(\frac{1\ \cancel{in}}{\text{۲/۵۴}\ \cancel{cm}}\right)\left(\frac{1\ ft}{\text{۱۲}\ \cancel{in}}\right) = \frac{\text{۵}}{\text{۳۰/۵}}\ ft/sec^2$$

$$a_x = \text{/۱۶۴}\ ft/sec^2$$

ونیز

$$\Delta t = t - t_\circ = \frac{1}{\text{۲}}\ \cancel{hr}\left(\frac{\text{۶۰}\ \cancel{min}}{1\ \cancel{hr}}\right)\left(\frac{\text{۶۰}\ sec}{1\ \cancel{min}}\right) = \text{۱۸۰۰}\ sec$$

دقت کنید که فاکتورهای تبدیل درپرانتز های بزرگ برابرواحد میباشند . اگرزمان اولیه راصفـــر بگیریم (همانطوریکه درمورد معادله ۲ (۱-۳ انجام داده ایم) دراینصورت خواهیم داشت :

$$V_x = V_{x_\circ} + a_x t = \text{۱۰}\ ft/sec + (\text{/۱۶۴}\ ft/sec^2)\times(\text{۱۸۰۰}\ sec) = \text{۳۰۵}\ ft/sec$$

یك راه برای تشخیص یك معادله غلط ، مقایسه ابعاد تمام جملات آن معادله میباشـــــد .

ابعاد هرکمیت فیزیکی راهمواره میتوان باترکیب بعضی کمیات اصلی مثل جرم ،طول و زمان

بیان نمود . ابعاد سرعت عبارت است از طول (L) تقسیم بر زمان (T) ، ابعاد شتاب عبارت است از طول تقسیم بر مجذور زمان وغیره . در هر معادله معتبر فیزیکی ابعاد تمام جمله ها بایستی یکسان باشد . یعنی مثلاً نمیتوانیم جمله ای راکه ابعاد کُلّیش سرعت است با جمله ای که ابعاد کُلّیش شتاب است مساوی قرار دهیم . برچسب های ابعادی که همراه کمیات مختلف میباشند ممکن است کاملاً شبیه کمیات جبری درنظر گرفته شوند وبنابراین میتوانند مثل عواملی که در معادلات هستند ترکیب ، حذف وغیره بشوند . مثلا برای کنترل معادله ۵ ۱-۳ $x=x_0+v_{x_0}t+\frac{1}{2}a_x t^2$ از نظر ابعادی توجه داریم که x و x_0 ابعاد طول رادارند . بنابراین دوجمله دیگر نیز بایستی ابعاد طول راداشته باشند . ابعاد جمله $v_{x_0}t$ عبارت است از

$$\frac{\text{طول}}{\text{زمان}} \times \text{زمان} = \text{طول} \qquad \left(\frac{L}{T} \times T = L \right)$$

وابعاد $a_x t^2$ برابر است با :

$$\frac{\text{طول}}{\text{زمان}^2} \times \text{زمان}^2 = \text{طول} \qquad , \quad \left(\frac{L}{T^2} \times T^2 \right) = L$$

بنابراین معادله بالا ازنظر ابعاد درست است . دانشجویان بایستی ابعاد تمام معادلاتی راکه بکارمیبرند کنترل بنمایند .

مثال ٦

هسته اتم هلیوم (ذره α) درداخل یك لوله مستقیم توخالی بطول ۰/۲ مترکه قسمتی ازیك دستگاه شتاب دهنده ذره راتشکیل میدهد حرکت مینماید . (الف)ـ اگرشتاب رایکنواخت فرض کنیم چه مدت زمان ذره داخل لوله است درصورتیکه با تندی ۱۰۰۰۰ متر برثانیه داخل وبا تندی $5/0 \times 10^6$ متربرثانیه خارج شود ؟

(ب) شتاب آن درطی این مدت چقدر است ؟

(الف) محور x را موازی لوله اختیار میکنیم ، بطوریکه جهت مثبت آن بطرفی که ذرمحرکت میکند ، بوده ومبدا آن درابتدا طرف ورودی لوله باشد . مقادیر x و v_x راداریم ومیخواهیم

را پیدا کنیم . باشتاب a_x سروکار نداریم . پس معادله ۱۴-۳ ، $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x_0}+v_x)t$
را بکار میبریم که در آن $x_0 = 0$ میباشد این معادله رامیتوان بصورت زیر نوشت :

$$t = \frac{2x}{v_{x_0}+v_x}$$

$$t = \frac{2(2 \text{ meters})}{(500+1)\times 10^{4} \text{ meters/sec}} = 8 \times 10^{-7} \text{ sec}$$

یا ۰/۸۰ میکروثانیه .

(ب) شتاب از معادله ۱۲-۳ ، $v_x = v_{x_0} + a_x t$ بدست میآید . این معادله رامیتوان بصورت زیرنوشت :

$$a_x = \frac{v_x - v_{x_0}}{t} = \frac{(500-1)\times 10^{4} \text{ meters/sec}}{8 \times 10^{-7} \text{ sec}}$$

$$a_x = 6.2 \times 10^{12} \text{ meters/sec}^2$$

یا 6.3×10^{12} متر برمجذور ثانیه . اگرچه این شتاب درمقابل استاندارد مثالهای قبلی خیلی بزرگ است ولی دریک زمان فوق‌العاده کوتاه اتفاق میافتد . شتاب a درجهت مثبت محور x یعنی جهتی که ذره حرکت میکند میباشد زیرا a_x مثبت است .

۱۰-۳ سقوط آزاد اجسام

عمومی ترین مثال حرکت باشتاب ثابت (تقریبا) سقوط یک جسم بطرف زمین میباشد . اگرمقاومت هواوجود نداشته باشد ، ملاحظه میشود که تمامی اجسام صرفنظر ازاندازه ، وزن یا ترکیب آنها بایک شتاب ودریک نقطه ازسطح زمین سقوط میکنند واگرمسافت طی شده خیلی بزرگ نباشد ، شتاب در تمام مدت سقوط ثابت میماند . این حرکت ایده آل که در آن ازمقاومت هوا وتغییر جزئی شتاب باارتفاع صرفنظر شده است : " سقوط آزاد " free-fall نامیده میشود .

شتاب یك جسم درسقوط آزاد شتاب ثقل نامیده میشود وباعلامت $\vec{g}$ مشخص میگردد .
بزرگی این شتاب درنزدیکی سطح زمین تقریباً" $32\ ft/sec^2$ ، $9/8\ meters/sec^2$ یا $980\ cm/sec^2$ بوده وجهت آن بطرف پائین یعنی بطرف مرکز زمین میباشد .
تغییرات مقدار دقیق آن باعرض وارتفاع جغرافیائی بعدا" درفصل ۱٤ مورد بحث قرارخواهد گرفت.

یك دستگاه مقایسه که محکم به زمین متصل باشد انتخاب میکنیم. جهت مثبت محور y در امتداد قائم وبطرف بالا اختیارمیشود . دراینصورت شتاب جاذبه $\vec{g}$ برداری بطرف پائین (بطرف مرکززمین) یعنی درجهت منفی محور y خواهدبود . (این انتخاب اختیاری است. درمسائل دیگر ممکن است مناسب این باشد که جهت مثبت رابطرف پائین بگیریم) . دراینجا باید معادلات حرکت باشتاب یکنواخت رابکاربریم. کافی است درمعادلات ۲-۱۲ ، ۳-۱٤ و ۳-۱۵ و ۳-۱٦ y رابجای x و y_0 رامساوی صفر قراردهیم دراین صورت خواهیم داشت :

$$v_y = v_{y_0} + a_y t$$

$$y = \frac{1}{2}(v_y + v_{y_0})t$$

$$y = v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad (۳-۱۷)$$

$$v_y^2 = v_{y_0}^2 + 2 a_y y$$

برای مسائل سقوط آزاد $a_y = -g$ میباشد . توجه کنید که وضعیت ابتدائی رابعنوان مبداء اختیارکرده ایم ، یعنی در $t = 0$ ، $y_0 = 0$ انتخاب شده است. همچنین توجه کنید که g بزرگی شتاب ثقل میباشد .

مثال ۷

یك جسم ازحال سکون رهاشده وسقوط آزاد مینماید . مکان وتندی جسم راپس ازطی ۱/۰ ، ۲/۰ ، ۳/۰ ، ٤/۰ ثانیه تعیین کنید .

نقطه ابتدائی رابعنوان مبداء اختیارمیکنیم. تندی اولیه وشتاب رامیدانیم وزمان داده

شده است . برای یافتن مکان از معادله

$$y = v_{y_0} t + \frac{1}{2} g t^2$$

استفاده میکنیم چون $v_{y_0}=0$ و $g=32\ ft/sec^2$ لذا برای $t=1\ sec$ داریم

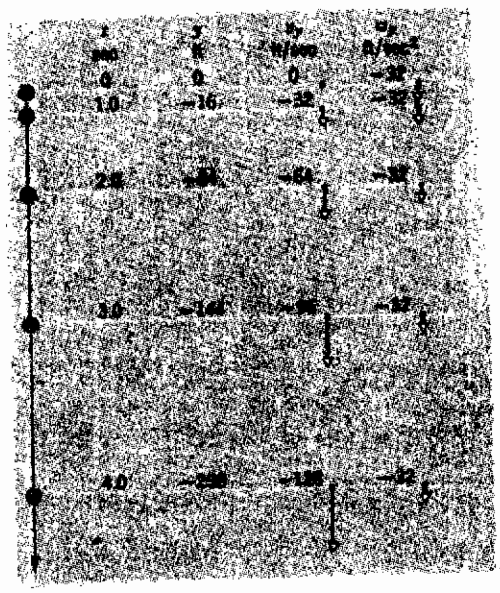
$$y = 0 - \frac{1}{2}(32\ ft/sec^2)(1\ sec)^2 = -16\ ft$$

برای یافتن تندی برای $t=1$ از معادله

$$v_y = v_{y_0} - g t$$

استفاده میکنیم . در اینحال خواهیم داشت :

$$v_y = 0 - (32\ ft/sec^2)(1\ sec) = -32\ ft/sec$$



شکل (۲-۷) . یك جسم در حال سقوط آزاد است وشکل نشان دهنده y و v_y و a_y در لحظات بخصوص t میباشد .

پس از ۱/۰ ثانیه سقوط از حالت سکون جسم ۱۶ فوت پائین نقطه شروع و دارای سرعتی است بطرف پائین که مقدار آن ۳۲ ft/sec میباشد ، علامت منفی برای y و v_y نشان میدهد که بردارهای مربوطه بطرف جهت منفی محور y یعنی بطرف پائین میباشند .

اکنون دانشجویان میبایستی نشان دهند که مقادیر y ، v_y و a_y که درزمانهای

$t = ۲/۰$ و $۳/۰$ و $۴/۰$ sec بدست میآیند مقادیری است که درشکل ۷-۳ نشان داده شده است .

مثال ۸

یك توپ رابطور قائم ازسطح زمین بطرف بالا باتندی ۸۰ ft/sec میاندازیم .

(الف) ـ چه مدت طول میکشد که ببالا ترین نقطهٔ صعود اش برسد ؟

دربالا ترین نقطه صعود اش ، $V_y = 0$ داریم $V_{y_0} = +۸۰ \, ft/sec$ برای بدست آوردن زمان t رابطه $V_y = V_{y_0} - gt$ رابکار میبریم .

$$t = \frac{V_{y_0} - V_y}{g} = \frac{(۸۰ - ۰) ft/sec}{۳۲ \, ft/sec^۲} = ۲/۵ \, sec$$

(ب) ـ توپ تاچه ارتفاعی بالا میرود ؟

بااستفاده ازمفروضات اصلی ، رابطه $V_y^2 = V_{y_0}^2 - 2gy$ رابکارمیبریم .

$$y = -\frac{V_y^2 - V_{y_0}^2}{2g}$$

$$y = \frac{(۸۰ \, ft/sec)^۲ - ۰}{۲ \times ۳۲ \, ft/sec} = ۱۰۰ \, ft$$

(ج) درچه زمانی توپ ۹۶ فوت بالای سطح زمین خواهد بود ؟ بابکاربردن رابطه $y = V_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$ داریم

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_{y_0} t + y = 0$$

یا

$$\frac{۱}{۲}(۳۲ \, ft/sec^2) t^۲ - (۸۰ \, ft/sec) \, t + (۹۶ \, ft) \Rightarrow t^۲ - ۵t + ۶ = ۰$$

که دارای جوابهای $t = ۲/۰ \, sec$ و $t = ۳/۰ \, sec$ میباشد .

در $t = ۲/۰ \, sec$ ، توپ بطرف بالا وباسرعت ۱۶ ft/sec حرکت میکند ، زیرا

$$V_y = V_{y_0} - gt = ۸۰ \, ft/sec - (۳۲ \, ft/sec^2)(۲/۰ \, sec) = ۱۶ \, ft/sec$$

در $t = ۳/۰$ ، توپ بطرف پائین با همین سرعت حرکت میکند ، زیرا

$$V_y = V_{y_0} - gt = 80\,ft/sec - (32\,ft/sec^2)(3/0\,sec) = -16\,ft/sec$$

توجه کنید که در این فاصله زمانی ۰/۱ ثانیه سرعت باندازه ft/sec ۳۲- تغییرکرده است.
وبنابراین شتاب ft/sec^2 ۳۲- میباشد .

دانشجویان باید بتوانند خود را متقاعد کنند که با نبودن مقاومت هوا برای توپ زمانی که طول میکشد توپ بالا رود برابر زمان سقوط آنست و در موقع سقوط ، جسم در هر نقطه همان سرعتی را خواهد داشت که در موقع بالا رفتن در همان نقطه داشته است .

فصل چهارم

۴-۱ـ تغییرمکان ، سرعت وشتاب

در این فصل برمیگردیم به مطالعه حرکت در دو بعد ، که برای سهولت آنرا صفحه $x-y$ اختیار میکنیم . شکل ۴-۱ یك ذره را در زمان t نشان میدهد که درامتداد مسیرخمیده ای در این صفحه حرکت میکند . مکان ذره ، یاتغییر مکان آن نسبت به مبدا ، توسط بردار $\vec{r}$ اندازه گرفته میشود ، سرعتش بابردار $\vec{v}$ مشخص شده وهمانطورکه درقسمت ۳-۴ دیدیم باید مماس برمسیر ذره باشد . شتاب آن بابردار $\vec{a}$ نشان داده میشود وجهت $\vec{a}$ ،همانطور که بعداً بوضوح خواهیم دید ، رابطه واحدی بامسیر ذرهنداشته بلکه درطول مسیر آن بسه آهنگ تغییرات سرعت نسبت بزمان بستگی دارد .

بردارهای $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ بایکدیگر مربوطند (معادلات ۳-۴ ، ۳-۵ و ۳-۱۰ را ببینید) و میتوانند توسط مولفه هایشان وبابکاربردن بردار واحدبیان شوند :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{۴-۱}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \tag{۴-۲}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{۴-۳}$$

به آسانی میتوان این معادلات رابه ترتیب بااضافه کردن جملات $z\hat{k}$ ، $v_z\hat{k}$ و $a_z\hat{k}$ بآنها به سه بعد تعمیم داد . دراینجا $\hat{k}$ یك برداروا حد درامتداد z میباشد .

درفصل سوم حالت خاصی رامشاهده کردیم که درآن ذره فقط دریك بعد ، مثلا محور x حرکت میکرد وبردارهای $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ درامتداد این محوردرجهت مثبت یامنفی ان ، قرار داشتند . مولفه های y و v_y و a_y صفربودند وحرکت رابوسیله معادلاتی که کمیـــات اسکالر x ، v_x و a_x رابهم مربوط میکردند شرح دادیم. همینطور وقتی که ذره فقط درامتداد محور y حرکت میکرد ، مولفه های x و a_x و v_x صفربودند وحرکت توســـط

معادلاتی که کمیات اسکالر y ، v_y و a_y رابهم مربوط میکردند شرح داده شد . در این فصل حرکت درروی صفحه $x-y$ درنظرگرفته میشود بطوریکه در حالت کلی هردو دسته ازمولفه هامقادیری غیرازصفرداشته باشند .

۲-٤- حرکت روی یك صفحه باشتاب ثابت

ابتدا حالت خاص حرکت درروی یك صفحه باشتاب‌ثابت رادرنظر میگیریم. دراینجاوقتی ذره حرکت میکند ،شتاب $\vec{a}$ از نظر بزرگی وجهت تغییر نمیکند . ازاینرو مولفه های $\vec{a}$ نیز در هردستگاه مقایسه بخصوصی تغییرنخواهند کرد یعنی ، مقدارثابت = a_x ومقدارثابت = a_y . دراین حالت میتوانیم حرکت رامجموع دوحرکت باشتاب یکنواخت دردوامتداد عمود بر هم فرض کنیم . ذره درحالت‌کلی روی مسیرخمیده ه‌ای درصفحه حرکت خواهدکرد . این مطلب حتی‌اگریکی ازمولفه های شتاب ،مثلا a_x ، صفرباشد نیز صادق است زیرامولفه سرعت مربوطه ، v_x ، ممکن است مقدار ثابتی غیر ازصفرداشته باشد.نمونه این حرکت حالت اخیر حرکت یك گلوله توپ است که تحت تاثیر شتاب ثابت ثقل $\vec{g}$ که درجهت منفی محور y است ، باصرفنظر کردن ازمقاومت هوا ، یك مسیر خمیده راروی صفحه قائم دنبال میکند .

معادلات‌عمومی حرکت درصفحه باشتاب یکنواخت a پس‌ازقراردادن مولفه های a بصورت

مقدار ثابت = a_y ومقدارثابت = a_x

بدست خواهندآمد .

پس‌معادلات برای شتاب ثابت ، که درجدول ۱-۳ خلاصه شده است ، برای هردومولفه x و y بردارمکان $\vec{r}$ ،بردار سرعت $\vec{v}$ وبردار شتاب $\vec{a}$ صادق است (جدول ۱-٤ را ببینید) .

دودستگاه معادلات جدول ۱-٤ بهم مربوطند . علت این ارتباط این است‌که t درهردو معادله یکی است‌واین ازآنجاناشی میشودکه t زمانی رانشان میدهد که ذره ضمن حرکت روی

یک مسیرخمیده درصفحه $x-y$ درمکانی به مختصات x و y قرارداشته است .

معادلات حرکت درجدول ۱-۴ همچنین ممکن است بشکل برداری نوشته شوند . مثلاً

با قراردادن معادلات ۴-۴a' و ۴-۴a درمعادله ۲-۴ خواهیم داشت :

$$\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$= (v_{x_0} + a_x t)\hat{i} + (v_{y_0} + a_y t)\hat{j}$$

$$= (v_{x_0}\hat{i} + v_{y_0}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t = \vec{V}_0 + \vec{a}\,t$$

جــــــــدول ۱-۴

" حرکت با شتاب ثابت روی صفحــه $x-y$ "

معادلات حرکت y	شماره معادله	معادلات حرکت x	شماره معادله
$V_y = V_{y_0} + a_y t$	۴-۴a'	$V_x = V_{x_0} + a_x t$	۴-۴a
$y = y_0 + \frac{1}{2}(V_{y_0} + V_y)t$	۴-۴b'	$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_{x_0} + V_x)t$	۴-۴b
$y = y_0 + V_{y_0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$	۴-۴c'	$x = x_0 + V_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	۴-۴c
$V_y^2 = V_{y_0}^2 + 2a_y(y - y_0)$	۴-۴d'	$V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	۴-۴d

اولین کمیت داخل پرانتز ها بردارسرعت اولیه $\vec{V}_0$ (معادله ۲-۴ راببینید) ودومین کمیــت بردار شتاب (ثابت) $\vec{a}$ میباشد (معادله ۳-۴ راببینید) . بنابراین رابطه برداری

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}\,t \qquad (4\text{-}5a)$$

معادل دورابطه اسکالر ۴-۴a و ۴-۴a' درجدول ۱-۴ میباشد . این رابطه بسادگی وبطور اختصار نشان میدهد که سرعت $\vec{V}$ برابراست با مجموع سرعت اولیه $\vec{V}_0$ که ذره درغیاب شتـــاب دارد بعلاوه تغییرسرعت (بردار) در زمان t $\vec{a}t$ که ذره درمدت زمان t تحت تاثیر شتاب ثابت $\vec{a}$

بدست میآورد ، همچنین معادلات اسکالر a۲-۴ و a'۲-۴ معادل یك معادله برداری واحد

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (۴-۵b)$$

میباشد که بآسانی تفسیر میشود .

۴-۳ حرکت پرتابی

یك نمونه حرکت منحنی الخط با شتاب ثابت حرکت پرتابی است که عبارت از حرکت دو بعدی یك ذره است که بطور مایل بهوا پرتاب شده باشد . حرکت ایده آل یك توپ بیسبال ، یك توپ گلف یا یك گلوله نمونه حرکت پرتابی میباشد . برای یك بحث جالب درباره پژوهشهای گالیله در مورد حرکات پرتابی مراجعه کنید به :

Dialogues Concerning Two New Sciences, the "Fourth Day," Galileo Galilei,

در اینجا فرض میکنیم که بتوان از اثر هوا روی اینها صرفنظر نمود .

حرکت پرتابی یك حرکت با شتاب ثابت $\vec{g}$ (بطرف پائین) میباشد . وبنابراین بایستی توسط معادلات جدول ۴-۱ شرح داده شود . هیچ مولفه افقی ازشتاب وجود ندارد . اگر یك دستگاه مقایسه اختیارکنیم که محور y آن در امتداد قائم بوده ومتوجه بالا باشد دراین صورت میتوانیم دراین معادلات از روابط $a_y = -g$ و $a_x = 0$ استفاده کنیم .

بعلاوه ، مبداء دستگاه مقایسه خودرا نقطه پرتاب جسم انتخاب میکنیم (شکل ۴-۲ را ببینید) بنابراین مثلا مبداء عبارت است ازنقطه ایکه توپ دست شخص پرتاب کننده راترك میکند ویا سوخت درراکت بحال اشتغال بیرون میآید .

درجدول ۴-۱ این انتخاب مبدا دلالت دارد براینکه $x_0 = y_0 = 0$ میباشد . سرعت در $t = 0$ یعنی لحظه ایکه جسم شروع بحرکت میکند ، برابر v_0 است که زاویه θ_0 باجهت مثبت محور میسازد . بنابراین مولفه های x و y سرعت v_0 عبارتند از (شکل ۴-۲ راببینید) .

$$V_{x_0} = V_0 \cos\theta_0 \quad , \quad V_{y_0} = V_0 \sin\theta_0$$

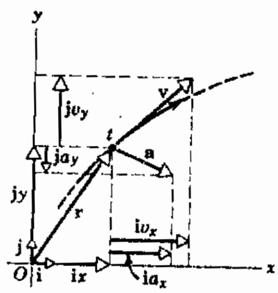
ازآنجاکه مولفه افقی برای شتاب وجود ندارد ، مولفه افقی سرعت ثابت میباشد . اگردرمعادله ٤-٤a قراردهیم $a_x = 0$ و $V_{x_0} = V_0 \cos\theta_0$ دراینصورت خواهیم داشت

$$(٤-٦) \quad V_x = V_0 \cos\theta_0$$

مولفه افقی سرعت مقداراولیه اش رادر تمام مدت حرکت حفظ میکند .

تغییرات مولفه قائم سرعت بازمان مطابق حرکت قائم باشتاب ثابت بطرف پائین میباشد . درمعادله ٤-٤ a' قرار میدهیم $V_{y_0} = V_0 \sin\theta_0$ و $a_y = -g$

دراین صورت



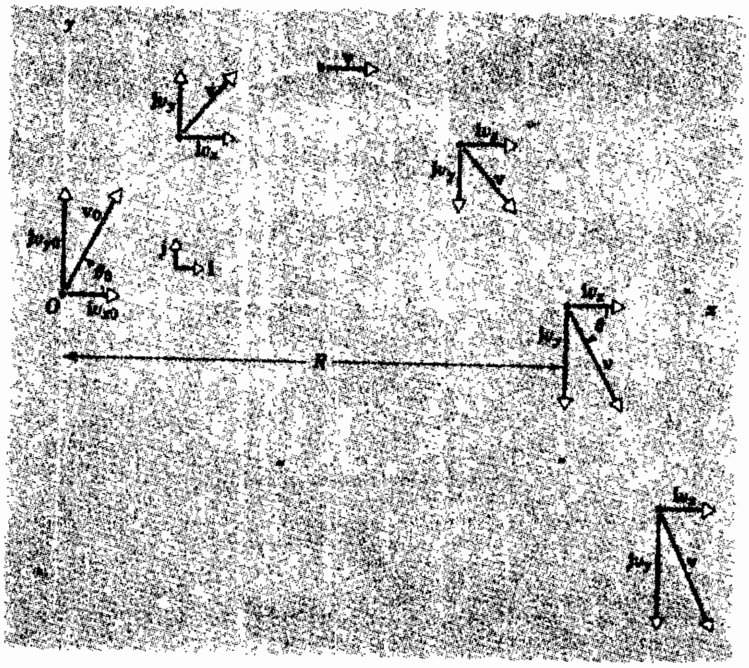
شکل ٤-١ . ذره ای روی یك منحنی درصفحه $x-y$ حرکت میکند . مکان ذره $\vec{r}$ ، سرعت آن $\vec{V}$ وشتاب آن $\vec{a}$ درلحظه t همراه با مولفه های برداری آنها نشان داده شده اند . توجه کنیدکه x ، y ، V_x ، V_y و a_x مثبت اند ، ولی a_y منفی است .
باشکل ٣-٣مقایسه کنید .

$$(٤-٦ a') \quad V_y = V_0 \sin\theta_0 - gt$$

مولفه قائم سرعت همان فرم معادله سقوط آزاد رادارد . درواقع اگرحرکت شکل ٤-٢ راازدستگاه مقایسه ای که باسرعت V_{x_0} بطرف راست حرکت میکند نگاه کنیم ، حرکت مانند حرکت جسمی است که باسرعت اولیه $V_0 \sin\theta_0$ بطور قائم بطرف بالا پرتاب شود .

بزرگی بردارسرعت منتجه درهرلحظه عبارتست از

$$(٤-٧) \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$



شکل ۲-٤ . مسیر یک پرتاب ، سرعت اولیه $\vec{V_0}$ ومولفه های برداری آن وهمچنین سرعت ومولفه های برداری آن در پنج نقطه متوالی نشان داده شده اند . توجه کنید که درتمـــام طول پرواز $V_x = V_{x_0}$ فاصله R ، برد افقی پرتاب است .

زاویه θ که بردارسرعت درهمان لحظه باافق میسازد بوسیله

$$tg\,\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

تعیین میشود . بردار سرعت ، همانطورکه درشکل ۲-٤ نشان داده شده ، درهرلحظـــه برمسیر ذره مماس است .

مختصات x مکان ذره درهرلحظه ازمعادله a ٤-٤ باقراردادن $x_0=0$ ، $a_x = 0$

و $V_{x_0} = V_0 \cos\theta_0$ بدست میآید وبرابراست با

$$x = (V_0 \cos\theta_0)\, t \qquad (٤-٦a)$$

مختصات y ازمعادله $٤-٤a'$ باقراردادن $y_0 = 0$ ، $a_y = -g$ و $V_{y_0} = V_0 \sin\theta_0$ بدست میآید
وبرابر است با

$$y = (V_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (٤-٦a')$$

معادلات $٤-٦a$ و $٤-٦a'$ مختصات x و y رابصورت توابعی ازعامل مشترک t یعنی زمان
میدهند باترکیب وحذف t ازاینها خواهیم داشت

$$y = \tan\theta_0\, x - \frac{g}{2(V_0 \cos\theta_0)^2} x^2 \qquad (٤-٨)$$

که x و y راباهم مربوط میکند ومعادله مسیر یک حرکت پرتابی است . ازآنجاکه V_0 ، θ_0
و g ثابت میباشند این معادله شکل

$$y = bx - cx^2$$

رادارد که معادله یک سهمی است . بنابراین مسیر حرکت پرتابی یک سهمی میباشد .

■ **مثال یک**

یک بمب افکن باسرعت افقی وثابت ۸۲۰ مایل درساعت درارتفاع ۵۲۰۰۰ فوتی بطـــرف
نقطه ای که درست دربالای هدفش قراردارد پرواز میکند . باچه زاویه دید ϕ بمب بایستی
رها شود تابهدف اصابت نماید ؟ (شکل ٣-٤) .

دستگاه مقایسه رانسبت بزمین ثابت فرض مینمائیم بطوریکه مبداء درنقطه رهائی بمب باشد .
سرعت بمب درلحظه پرتاب همان سرعت بمب افکن میباشد . درنتیجه سرعت اولیه V_0 جسم پرتاب
شونده افقی بوده وبزرگی آن $٨٢٠\ \text{miles/hr}$ یا $١٢٠٠\ \text{ft/sec}$ میباشد . زاویـــه
پرتاب θ_0 برابر صفراست .

زمان سقوط ازمعادله $٤-٦a'$ بدست میآید . برای $\theta_0 = 0$ و $y = -٥٢٠٠٠\ \text{ft}$
داریم

$$t=\sqrt{-\frac{2y}{g}}=\sqrt{-\frac{2(-52000)ft}{32\,ft/sec^2}}=57\,sec$$

توجه کنید که زمان سقوط بمب ارتباطی باتصویر افقی سرعت هواپیما ندارد . فاصله افقی که بمب دراین زمان طی کرده است بوسیله معادله ٦-٤ c داده میشود ، $x_0=(V_0\cos\theta_0)t$

ویا $x=(1200\ ft/sec)\ (57\ sec)=68000\ ft$

بطوریکه زاویه دید (شکل ٣-٤) باید مساوی

$$\phi=\tan^{-1}\frac{x}{|y|}=\tan^{-1}\frac{68000}{52000}=53^{\circ}$$

باشد . آیاحرکت بمب وقتیکه ازدستگاه مقایسه ثابتی نسبت به بمب افکن دیده شود سهمی بنظر میآید ؟

■ **مثال ٢**

یك فوتبالیست توپی راتحت زاویه 37° نسبت بافق وباسرعت اولیه $50\ ft/sec$ پرتاب میکند (دریك مثلث قائم الزاویه که یکی از زوایا 37° درجه است ، نسبت اضلاع ٥ : ٤ : ٣ یا ١٠ : ٨ : ٦ میباشد) بافرض اینکه توپ درصفحه قائم حرکت میکند .

(الف) زمان t_1 راکه درآن توپ به بالا ترین نقطه مسیرش میرسد پیدا کنید . دربالا ترین نقطه ، مولفه عمودی سرعت V_y صفراست . باحل معادله ٦-٤ a' نسبت به t بدست میآوریم

$$t=\frac{V_0\sin\theta_0-V_y}{g}$$

که درآن $V_y=0$ ، $V_0=50\ ft/sec$ و $\theta_0=37^{\circ}$ ، $g=32\ ft/sec$ میباشد بااین مفروضات خواهیم داشت :

$$t_1=\frac{(50(\frac{6}{10})-0)\ ft/sec}{32\ ft/sec^2}=\frac{15}{16}\ sec$$

(ب) چقدر توپ بالا میرود ؟ درزمان $t=\frac{15}{16}\ sec$ توپ به ماکزیمم ارتفاعش رسیده است . با

بکاربردن ٤-٦ c'

$$y = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2$$

داریم

$$y_{Max} = (50\,ft/sec)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{15}{16}\,sec\right) - \frac{1}{2}(32\,ft/sec^2)\left(\frac{15}{16}\right)^2 sec^2 = 14\,ft$$

(ج) فاصله افقی که توپ میرود وزمانی که درهوا است چقدراست ؟

فاصله افقی ازنقطه شروع حرکت تانقطه بازگشت بزمین برد توپ میباشد وماآنرا به نشان R میدهیم . برای بدست آوردن زمان لازم برای طی این مسافت درمعادله ٤-٦ c' قرارمیدهیم . $y = 0$ دراینصورت خواهیم داشت :

$$t_2 = \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2(50\,ft/sec)\left(\frac{6}{10}\right)}{32\,ft/sec^2} = \frac{15}{8}\,sec$$

توجه کنیدکه $t_2 = 2t_1$ علت این امراین است که زمان لازم برای بالارفتن توپ (رسیدن بــــه ماکزیمم ارتفاع از زمین) بازمان لازم برای پائین آمدن توپ (رسیدن بزمین ازماکزیمم ارتفاعش) یکی است .

فاصله R رامیتوان بوسیله قراردادن این مقدار t_2 بجای t درمعادله ٤-٦ c بدست آورد ازرابطه $[x = (v_0 \cos\theta)\, t]$ نتیجه میشود .

$$R = (v_0 \cos\theta_0)t_2 = (50\,ft/sec)\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{15}{8}\,sec\right) = 75\,ft$$

(د) سرعت توپ وقتی بزمین میخورد چقدراست ؟ ازمعادله ٤-٦ a داریم

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (50\,ft/sec)\left(\frac{8}{10}\right) = 40\,ft/sec$$

ازمعادله ٤-٦ a' باقراردادن $t = t_2 = \frac{15}{8}\,sec$ نتیجه میشود

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt = (50\,ft/sec)\left(\frac{6}{10}\right) - (32\,ft/sec)\left(\frac{15}{8}\,sec\right) = -30\,ft/sec$$

پس ازمعادله ۷-٤ نتیجه میشود

$$V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{(40\,ft/sec)^2+(-30\,ft/sec)^2} = 50\,ft/sec$$

و

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = -\frac{30}{40}$$

بنابراین $\theta = -37^\circ$ وبازاویه 37° بامحور x - ها درجهت حرکت عقربه های ساعت . توجه کنید همانطورکه ازروی تقارن انتظارداریم $\theta = -\theta_0$ میباشد .

٤-٤ - حرکت دورانی یکنواخت

درقسمت ٦-٣ دیدیم که شتاب ازتغییر سرعت ناشی میشود . درمورد ساده سقوط آزاد سرعت فقط ازنظر بزرگی تغییرمیکرد ، نه جهت . درمورد حرکت یك ذره که روی یك دایره با سرعت ثابت حرکت میکند وحرکت دورانی یکنواخت نامیده میشود ، بردار سرعت دائماً ازنظر جهت تغییرمیکند ولی بزرگی آن ثابت میماند . حال میخواهیم شتاب رادرحرکت دایره ای یکنواخت پیداکنیم .

این حالت درشکل a ٤-٤ نشان داده شده است . فرض کنیم p وضعیت ذره درزمان t و p' وضعیت آن درزمان $t+\Delta t$ باشد . سرعت درنقطه p بردار $\vec{V}$ است که مماس به منحنی درنقطه p میباشد . سرعت درنقطه p' برابر $\vec{V}'$ است که برداری مماس به منحنی در نقطه p' میباشد بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ ازنظر بزرگی برابرند ، زیرا تندی ثابت است ، ولی امتدادشان متفاوت است . طول مسیری که درمدت Δt طی شده است طول قوس pp' میباشد که برابر $V.\Delta t$ است دراین جاتندی V ثابت است .

حال مجدداً بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ رامانند شکل b ٤-٤ رسم میکنیم بطوریکه ازیك نقطه مشترك کشیده شده باشند . تاوقتی که بزرگی وجهت هربردار مانند شکل a ٤-٤ میباشد اینکار مانعی ندارد . این نمودار (شکل b ٤-٤) ماراقادرمیسازد که به وضوح تغییر سرعت راوقتی

که ذره از P به P' حرکت میکند مشاهده کنیم . این تغییر، $\vec{V'}-\vec{V}=\vec{\Delta V}$ ، بسرداری است که باید با $\vec{V}$ جمع شود تا $\vec{V'}$ بدست آید . توجه کنید که این بسمت داخل وتقریباً بطرف مرکز متوجه میباشد .

حال مثلث OQQ' که از $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{\Delta V}$ تشکیل شده با مثلث CPP' که از وتر PP' و شعاعهای CP و CP' تشکیل شده متشابه میباشد . زیرا هردو مثلث متساوی الساقین بوده وزاویه رأسشان مساوی است. زاویه θ بین $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ مساوی زاویه PCP' میباشد زیرا $\vec{V}$ بر CP عمود بوده و $\vec{V'}$ عمود بر CP' میباشد بنابراین میتوان نوشت

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V\Delta t}{r} \qquad \text{تقریباً}$$

وتر PP' مساوی طول قوس PP' گرفته شده است. این رابطه وقتیکه Δt کوچک میشود دقیقتر میگردد زیرا وتر وقوس بیکدیگر نزدیکتر میشوند . همچنین توجه کنید که وقتی Δt کوچکتر میشود ΔV بیشتر بسمت عمود به V و V' میل میکند ومتوجه به مرکز دایره میشود .

ازاین رابطه داریم

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V^2}{r} \qquad \text{تقریباً}$$

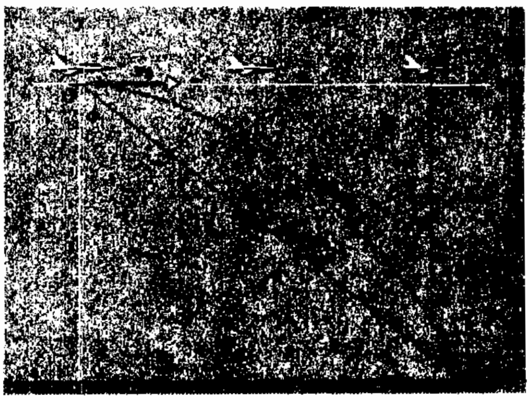
ودرحد $\Delta t\to 0$ این رابطه دقیق میگردد . بنابراین برای بزرگی شتاب داریم

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V^2}{r} \qquad (٤-٩)$$

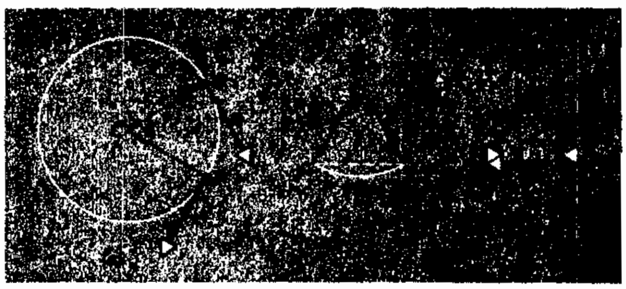
شتاب لحظه ای $\vec{a}$ درامتداد شعاع ومتوجه بسوی مرکز دایره میباشد . شکل ٥-٤ ارتباط لحظه ای بین $\vec{V}$ و $\vec{a}$ را درنقاط مختلف حرکت نشان میدهد . بزرگی $\vec{V}$ ثابت بوده ولی جهتش بطور پیوسته تغییرمیکند . این تغییر باعث پیدایش شتاب $\vec{a}$ میگردد که این یکی نیز از نظر بزرگی ثابت است (ولی صفرنیست) ولی جهتش دائماً تغییرمیکند . سرعت $\vec{V}$ همواره مماس بر دایره درجهت حرکت بوده وشتاب $\vec{a}$ همواره درامتداد شعاع وبسوی داخل میباشد . باین علت "شتاب شعاعی" (radial) یا "متوجه بمرکز" (Centripetal) نامیده میشود .

هم درسقوط آزاد وهم درحرکت پرتابی ، $\vec{a}$ ازنظر امتداد وبزرگی ثابت است ومیتوان معادلاتی را که برای شتاب ثابت بدست آورده‌یم بکاربرد (جدول ١-٤ راببینید) . این معادلات را نمیتوان برای حرکت دورانی یکنواخت بکاربرد زیرا $\vec{a}$ جهتش تغییرمیکند ودرنتیجه مقدار ثابتی نیست . واحدهای شتاب مرکزی همان واحدهای شتابی است که ازتغییر دربزرگی سرعت ناشی میشود . بطور ابعادی داریم .

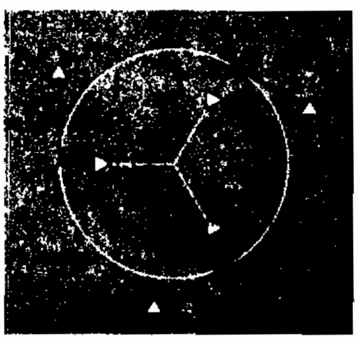
$$\frac{V^2}{r} = \left(\frac{\text{طول}}{\text{زمان}}\right)^2 \Big/ \text{طول} = \frac{\text{طول}}{(\text{زمان})^2} = \left(\frac{L}{T^2}\right)$$



شکل ٣-٤ . مثال ١- بمبی باسرعت افقی $\vec{V_0}$ ازیک هواپیمارهامیشود .



شکل ٤-٤ . حرکت دورانی یکنواخت . ذره باتندی ثابت بدوریک دایره حرکت میکند . سرعت آن درنقطه p و p' نشان داده شده است بردار تغییرسرعت آن ازنقطه p تانقطه p' مساوی $\Delta\vec{V}$ است .



شکل ٥-٤ . درحرکت دورانی یکنواخت شتاب $\vec{a}$ همیشه بسمت مرکز دایره است وبنابراین عمود بر $\vec{V}$ میباشد .

که همان بعد شتاب است . بنابراین واحد ها ممکن است مثلاً ft/sec^2 یا $meters/sec^2$ باشد .

شتابی که از تغییر جهت سرعت بدست میآید همانقدر حقیقی است که شتابی که از تغییر در بزرگی سرعت حاصل میشود . برحسب تعریف ، شتاب عبارت است ازمیزان تغییرسرعت ، وسرعت که یك بردار میباشد ، میتواند ازنظرجهت یابزرگی (ویاهردو باهم) تغییر کنـــد . اگریك کمیت فیزیکی یك بردار باشد ، نمیتوان ازمفاهیم مربوط به جهتش صرفنظر کرد ، زیرا ثابت میشود که اثرشان باندازه تغییر طول بردار اهمیت دارد . خوب است دراینجا تاکید کنیم کـه لزومی ندارد حرکتی درامتداد شتاب وجود داشته باشد وبطورکلی رابطه ثابتی بین جهات $\vec{a}$ و $\vec{V}$ وجود ندارد در شکل ۶-۴ مثالهائی ذکر کرده ایم که درآنها زاویه بین $\vec{V}$ و $\vec{a}$ از 0 تا 180° تغییرمیکند . فقط درمورد $\theta = 0$ حرکت در امتداد $\vec{a}$ میباشد .

مثال ۳

یکدوره کامل حرکت ماه بدور زمین ۲۷/۳ روزمیباشد . فرض میکنیم که مدارآن دایـره ای به شعاع ۲۳۹۰۰۰ مایل باشد . بزرگی شتاب ماه (متوجه بزمین) چقدراست ؟

دراین مورد داریم $r = 239000$ مایل $= 3/85 \times 10^{8}$ متر

زمان لازم برای گردش کامل پریود نامیده میشود وبرابر است باثانیه $T = 27/3 = 2/36 \times 10^{6}$ روز

بنابراین اگرسرعت ماه راثابت فرض کنیم خواهیم داشت

$$V = \frac{2\pi r}{T} = 1020 \ meters/sec$$

شتاب مرکزی برابراست با

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{(1020 \ meters/sec)^2}{3/85 \times 10^{8} \ meters} = 0/00273 \ meters/sec^2$$

یافقط $a = 2/78 \times 10^{-4} g$

مثال ٤

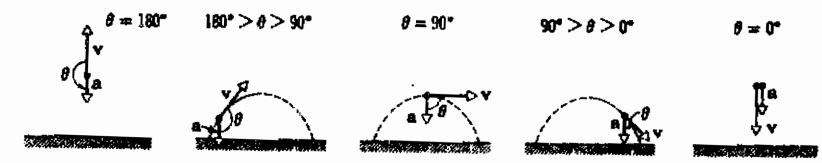
سرعت یك قمر مصنوعی را بدست آورید درصورتیکه درارتفاع h برابر ۱٤۰ مایل بـــالای سطح زمین ، که درآنجا $g = 30\ ft/sec$ است ، حرکت میکند . شعاع R زمین برابر ۳۹٦۰ مایل میباشد . مانند هرجسم آزادی درنزدیك سطح زمین قمر مصنوعی دارای شتاب g بطرف مرکز زمین میباشد . این شتاب است که باعث میشود که قمر مصنوعی یك مسیر دایره ای راتعقیب کند . درنتیجه شتاب مرکزی برابر g است وازمعادله ٤-۹ ، $a=\frac{v^2}{r}$ داریم

$$g = \frac{v^2}{R+h}$$

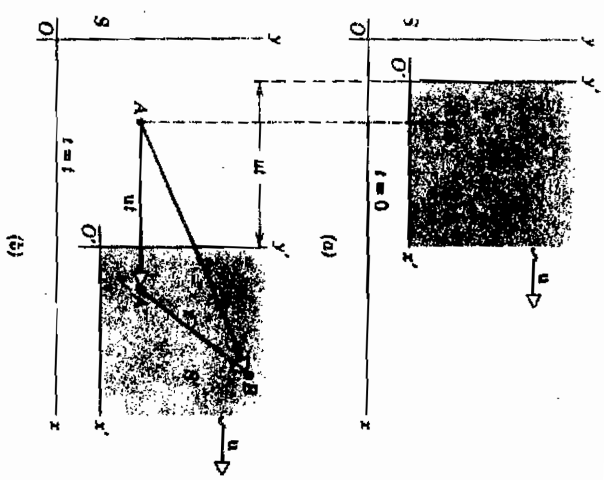
یا

$$v=\sqrt{(R+h)\,g} = \sqrt{(3960\,\text{miles}+140\,\text{miles})\left(5280\,\frac{ft}{miles}\right)\left(30\,\frac{ft}{sec^2}\right)}$$

$$= 2.55\times 10^4\ ft/sec = 17.400\ miles/hr$$



شکل ٤-٦ . توپ ببالا پرتاب میشود ، صعود دریك حرکت پرتابی ، حرکت دورانی یکنواخت ، سقوط دریك حرکت پرتابی ، توپ بپائین پرتاب میشود



شکل ٤-٧ . دوسیستم مقایسه $S(=x,y)$ و $S'(=x',y')$: S' باتندی U نسبت به S بسمت راست حرکت میکند . (a) موقعیت در لحظه $t=0$ (b) موقعیت درزمانهای بعدی

۴-۵ ـ سرعت وشتاب نسبی

درقسمتهای قبل جمع سرعتها را دریک دستگاه مقایسه بخصوص درنظر گرفتیم . حال دو دستگاه مقایسه S و S' که نسبت بهم درحال حرکت هستند را درنظر میگیریم ومیخواهیم رابطه‌ای بین مقادیری که این دو دستگاه برای سرعت جسم تعیین میکنند پیدا کنیم .

فرض میکنیم ناظر S نسبت بزمین ثابت باشد ، بطوریکه دستگاه مقایسه اش زمین باشد . ناظر دیگر S' ، روی زمین حرکت میکند . مثل مسافری که دریک قطار متحرک نشسته است . در مورد این مسافر دستگاه مقایسه قطار میباشد . هردو ، حرکت یک جسم (مثلاً اتومبیلی در روی یک جاده یامردی که داخل قطار درحال راه رفتن است) راتعقیب میکنند . هرناظر یک تغییر مکان ، یک سرعت ویک شتاب برای این جسم پیدا میکند که نسبت بدستگاه مقایسه خود شراندازه گیری شده است . چگونه میتوان این اندازه گیریها را مقایسه کرد ؟ دراین قسمت فقط مورد یرا که درآن دستگاه دوم نسبت به دستگاه اول باسرعت ثابت $\vec{u}$ حرکت میکند درنظر میگیریم .

درشکل ۷-۴ دستگاه مقایسه S راکه بوسیله محورهای x و y نشان داده شده میتوان نسبت بزمین ثابت فرض کرد . قسمت سایه دار دستگاه مقایسه دیگر S' بامحورهای x' و y' رامشخص میکند که باسرعت ثابت $\vec{u}$ نسبت بدستگاه S درامتداد x حرکت میکند . مثلاً میتوان آنـرا نظیر محورهائی که روی کف یک واگن رسم شده درنظر گرفت .

درابتدا ، یک ذره (مثلاً یک توپ روی یک واگن) دردستگاه S درنقطه A ودر دستگاه S' درنقطه A' قرار دارد . پس اززمان t واگن ودستگاه مقایسه S' فاصله $\vec{u}t$ را (بطرف راست) طی کرده اند وذره به B حرکت کرده است . تغییر مکان ذره ازموقعیت اولش دردستگاه S بردار $\vec{r}$ از A به B میباشد . تغییرمکان ذره ازموقعیت اولش در دستگاه S' بردار $\vec{r}'$ از A' به B میباشد . اینهابردارهای مختلفی هستند زیرانقطه مبنای A' ازدستگاه متحرک درحال حرکت دراین مدت باندازه فاصله ut درامتداد محور x ـ هاجابجا شده است . ازروی شکل دیده میشودکه $\vec{r}$ جمع برداری $\vec{r}'$ و $\vec{u}t$ میباشد :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t \qquad (۴-۱۰)$$

اگر از این معادله مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{U}$$

ولی $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ سرعت لحظه ای ذره در سیستم S و $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}'$ سرعت لحظه ای ذره در سیستم S' میباشد بنابراین

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U} \qquad (۴-۱۱)$$

در نتیجه سرعت ذره نسبت به سیستم S یعنی $\vec{V}$ عبارت است از جمع برداری سرعت ذره نسبت به سیستم S' یعنی $\vec{V}'$ وسرعت $\vec{U}$ سیستم S' نسبت به سیستم S .

مثال ۵

(الف)ـ قطب نمای یك هواپیما نشان میدهد که هواپیما بطرف شرق میرود . اطلاعات زمین نشان میدهد که باد بطرف شمال میوزد . سرعت هواپیما را نسبت بزمین در یك دیاگرام نمایش دهید . جسم مورد نظر در این جا هواپیما است . زمین یك دستگاه مقایسه S وهوا دستگاه مقایسه دیگر S' میباشد که نسبت باولی در حال حرکت است . پس

$\vec{U}$ برابر است با سرعت هوا نسبت بزمین

$\vec{V}'$ برابراست با سرعت هواپیما نسبت بهوا

$\vec{V}$ برابراست با سرعت هواپیما نسبت بزمین

در این مورد $\vec{U}$ بطرف شمال و $\vec{V}'$ بطرف مشرق میباشد . پس رابطه $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U}$ سرعت هواپیما نسبت بزمین را مشخص میکند ، همانطورکه درشکل α ۴-۸ نشان داده شده است. زاویه α عبارت است از زاویه مسیرهواپیمادر صفحه N و E با زمین وتوسط

$$\tan\alpha = \frac{U}{V'}$$

داده میشود . سرعت هواپیما نسبت بزمین برابراست با

$$V = \sqrt{V'^2 + U^2}$$

مثلاً اگرثبت کننده سرعت هوانشان دهد که هواپیما نسبت بهوابا سرعت $200\ \frac{miles}{hr}$ حرکت میکند وسرعت باد نسبت بزمین $40/0\ \frac{miles}{hr}$ باشد دراینصورت خواهیم داشته

$$V=\sqrt{(200)^2+(40/0)^2}\ \frac{miles}{hr}=204\ \frac{miles}{hr}$$

که عبارت است ازسرعت هواپیما نسبت به زمین وزاویه

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{40/0}{200}=11^{\circ}\ 20'$$

مسیر هواپیما درصفحه N و E رامیدهد .

(ب) حال یکدیاگرام برداری رسم کنید که جهتی راکه خلبان بایستی هواپیمارادرآن جهت درهوا هدایت کند تا هواپیمانسبت بزمین بطرف شرق حرکت کند نشان دهد .

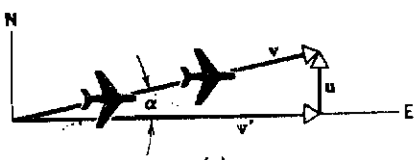
هواپیما طبیعتاً تاحدی درخلاف جهت حرکت باد خواهد رفت وبنابراین تندی اونسبت بزمین ازقبل کمترخواهد بود . دیاگرام برداری درشکل b ۸-۴ نمایش داده شده است .

دانشجویان بایستی بابکاربردن مقادیر قبلی $\vec{V}'$ و $\vec{U}$ مقادیر θ و V رامحاسبه نمایند .

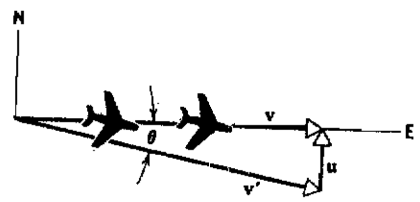
دیده ایم که ناظران مختلف کـه نسبت بهم درحال حرکت هستند سرعت های مختلفی بیك جسم نسبت میدهند . این سرعتها همیشه باسرعت نسبی دو ناظر ، که دراینجا ثابت فرض میشود تغییر میکند بنابراین نتیجه میگیریم که وقتی سرعت ذره تغییر میکند ، تغییر بـرای هردو ناظر یکی است . در نتیجه هردو یك شتاب یکسان برای ذره پیدامیکنند . پس شتاب ذره درتمام دستگاههای مقایسه ای که نسبت به یکدیگر باسرعت ثابت حرکت میکنند یکسان است یعنی $\vec{a}=\vec{a}'$.

این نتیجه رامیتوان بادیفرانسیل گرفتن ازطرفین معادله (۱-۴) بطور رسمی بدست آورد . بنابراین $\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{V}'}{dt}+\frac{d\vec{U}}{dt}$ ولی وقتی که $\frac{d\vec{U}}{dt}=0$ ثابت است

بنابراین $\vec{a}=\vec{a}'$.



(a)



(b)

شكل ٨-٤ . مثال ٥

فصـــل پنجـــم

۱ ـ ۵ ـ مقدمه

در فصلهای سوم و چهارم ، حرکت یك ذره راباتاکید روی حرکت در امتداد یك خط مستقیم ویا روی یك صفحه مطالعه کردیم . درآنجا ما علت حرکت را جویاشدیم بلکه حرکت رابرحسب بردارهای $\vec{r}$ ، $\vec{V}$ ، $\vec{a}$ بیان کردیم . بنابراین بحث مابیشترجنبه هندسی داشت . در این فصل ما علل حرکت رابحث خواهیم کرد . مطالعه این جنبه حرکت دینامیك نامیده میشود . در اینجا نیزما اجسام رامانند ذرات مادی خواهیم پنداشت ولی بعداً این بحث رابه گروه ذرات و اجسام گسترده تعمیم خواهیم داد .

دراین فصل ابتدا مفاهیم نیرو و قوانین نیوتن مورد بررسی قرار خواهد گرفت . سپس دینامیك ذره برای اجسامی که تحت تاثیر نیروئی با اندازه وجهت ثابت قرار دارند . عرضه خواهد شد . نیرو های جاذبه و الاستیك که بترتیب ازجانب زمین و طنابهای سخت اثر میکنند بـــرای روشن شدن مطالب ذکر خواهند شد .

نیروهائی که ثابت نیستند درآخرین قسمت این فصل مورد توجه قرار خواهد گرفت . دینامیك حرکت دورانی یکنواخت که در آن نیرو ازنظر مقدار ثابت است ولی جهتش با زمـــان تغییر میکند یکی از مواردی است که ببحث درباره آن خواهیم پرداخت .

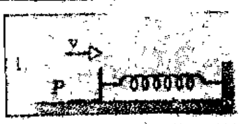
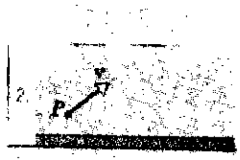
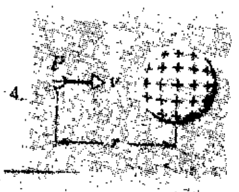
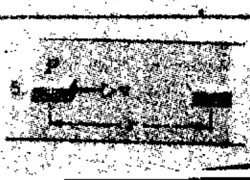
در فصل ۹ درباره نیروهای انتقالی مانند آنچه که در مسئله برخورد پیش می‌آید ـ صحبت خواهیم کرد ، این نیرو ها ازنظر جهت ثابت هستند ولی مقدار آنها با زمان تغییـــر می کند وبالاخره درفصل ۱۳ نیروهائی راکه هم ازنظر جهت و هم ازنظر مقدار با زمان تغییر می‌کنند مورد بررسی قرار میدهیم .

۲ ـ ۵ ـ مکانیك کلاسیك

حرکت یکذره معین بماهیت و ترتیب ذرات محیط آن بستگی دارد . معمولاً فقط اجسام

نزدیك رابايد جزو محيط بشمارآوريم . اثر اجسام دورتر غالبا" صرفنظركردنى است. جدول ۱-۵ نمونه‌هائى از"ذرات" ومحيطهاى احتمالى آنان رانشان ميدهد . دراينجا ما خودرا به حالت خاص وبسيار مهم اجسام بزرگ (مراد از اجسام بزرگ اجسامى هستندكه ازتعداد بسيار زيادى اتم يا ملكول درست شده اند ، مطابق اين تعريف ذرات غبار نيز در شمار اجسام بزرگ بحساب ميآيند) كه سرعتشان در مقايسه با سرعت نور(c)كوچك است محدود ميكنيم . اين حالت قلمرو مكانيك كلاسيك رامشخص ميكند . ما مخصوصاً" وارد سؤالاتى ازقبيل حركت الكترون در اتم اورانيوم يابرخورد دوترون با سرعت $0/9C$ نخواهيم شد . بحث در مورد اول ماراوارد تئورى كوانتم وبحث درمورد دوم ماراوارد تئورى نسبيت ميكند . ماگفتگو درباره اين تئوريهاراكه مكانيك كلاسيك حالت خاص آنها است بآينده موكول ميكنيم .

جدول ۱-۵

محيط	ذره	دستگاه
فنر - سطح ناهموار	يك قطعه فلزى	
زمين	يك توپ گلف	
زمين	يك قمر مصنوعى	
يك كره بزرگ كه بطور يكنواخت باردار شده است	يك الكترون	
ميله مغناطيس ديگر	يك ميله مغناطيس	

مساله اساسی در مکانیک کلاسیک ذرات بقرار زیراست :(۱) یک ذره معین با مشخصات معلوم (جرم ، بار الکتریکی ، گشتاور دیپل مغناطیسی وغیره) درنظر میگیریم . (۲) این ذره را با سرعت اولیه معین درمحیطی که مشخصات آن معلوم است قرارمیدهیم . (۳) میخواهیم بدانیم حرکت بعدی این ذره چه خواهد بود .

اسحق نیوتن (۱۷۲۷ - ۱۶۴۲) این مساله رابرای تعداد زیادی محیطهای مختلف بکمک قوانین حرکت وقانون جاذبه عمومی خویش حل کرد . روش حل این مساله مطابق ادراکات فعلی ما ازمکانیک کلاسیک چنین است :(برای مطالعه قوانین مکانیک کلاسیک بنحویکه اکنون تقریبا* ۳۰۰ سال بعدازنیوتن بدانها مینگریم مقاله زیر راببینید :

"Presentation of Newtonian Mechanics" by Norman Austern, in *American Journal of Physics*, September 1961.

(۱) مفهوم نیرو $\vec{F}$ (force) رابرحسب شتاب $\vec{a}$ وارد برجسم تعریف میکنیم .
(۲) بهر جسمی یک " جرم " (mass) طوری نسبت میدهیم که ذرات مختلف ازیک نوع در یک محیط ثابت شتابهای متفاوتی داشته باشند . (۳) سعی میکنیم ازروی خواص ذرات و محیطشان راههائی برای محاسبه نیروهائیکه بآنها وارد میشود پیدا کنیم یعنی در حقیقت قوانین نیرو force laws راپیدا میکنیم .

نیرو که درحقیقت عامل ارتباط محیط باحرکت ذره است هم درقوانین حرکت(که میزان شتاب وارد بریک جسم رادراثر یک نیرو تعیین میکنند) وهم درقوانین نیرو (که مقدار نیروی وارد بریک جسم را دریک محیط مشخص تعیین میکنند) وارد میشود . قوانین حرکت و قوانین نیرو رویهمرفته قوانین مکانیک راتشکیل میدهند .

برنامه مکانیک رانمیتوان بطورتکه تکه امتحان کرد بلکه باید آنرا بعنوان یک واحد در نظر گرفت ودرصورتی موفق دانست که بتواند بدو سؤال زیرپاسخ دهد . (۱) آیا نتایج این برنامه با تجربه مطابقت دارد ؟ (۲) آیا قوانین نیرو ساده هستند ؟ ازافتخارات مکانیک نیوتنی اینستکه بهر دو سؤال جواب مثبت میدهد . موارد استثنائی راکه میتوان با استفاده ازدو-

تعمیم مکانیك نیوتنی یعنی - کوانتم مکانیك و تئوری انشتین پاسخگو بود . در این بخش ما الفاظ نیرو و جرم رابطور غیر دقیق بکار برده ایم . نیرو رابه تاثیر محیط و جرم رابخاصیت مقاومت دربرابر شتاب (که اغلب ماند یااینرسی intertia نامیده میشود) مرتبط ساخته ایم . در فصلهای بعدی توصیفات بهتری از نیرو وجرم خواهیم داد .

۳ - ۵ قانون اول نیوتن

برای قرنها حرکت وعلل آن مساله اساسی فلسفه طبیعی بودتا اینکه در زمان گالیله ونیوتن پیشرفتهای مهمی دراین مورد شد . اسحق نیوتن که درسال مرگ گالیله درانگلستان متولد شد بانی اصلی مکانیك کلاسیك است . نیوتن همچنین آنالیزراکشف کرد ، بقانون جاذبه عمومی پی برد و آنرا بصورت فرمول درآورد وترکیب نورسفیدراپیدا نمود . او یك آزمایشگرماهر ، یك ریاضیدان درجه اول ، یك عالم الهی ، وبالاخره بزبان امروزی یك دانشمند در فیزیك نظری بود . اوعقاید گالیله رابطورنهائی بثمررساند . سه قانون حرکت وی برای اولین باردرسال ١٦٨٦ در کتابش موسوم به Principia Mathematica Philosophiae Naturalis. ظاهر شد .

قبل ازگالیله بیشتر فلاسفه فکرمیکردند که وجود یك عامل یا " نیرو " است که سبب ادامه حرکت یك جسم میشود . آنها فکرمیکردند یك جسم در " حالت طبیعی اش " بحال سکون میباشد . بنابراین برای اینکه مثلا" یك جسم درامتداد خط مستقیم حرکت یکنواختش راادامه دهد باید عاملی وجود داشته باشد والا حرکت بطور " طبیعی " توقف خواهد کرد .

اگر ما بخواهیم این نظریات رابطور تجربی آزمایش کنیم باید در درجه اول راهی پیدا کنیم که بتوان بدانوسیله جسم راازتمام تاثیرات محیطش و یا نیرو ها آزاد کرد . انجام این کار البته مشکل است ولی در برخی موارد میتوان نیروهاراکوچك کرد . اگربا کاهش تدریجی نیرو ها حرکت رامورد مطالعه قرارد هیم میتوانیم حدس بزنیم درصورتیکه نیروهاواقعا" وجود نداشتند حرکت چه صورتی بخود میگرفت.

جسم مورد آزمایش ، مثلا" یك قطعه چوب یافلزراروی یك سطح افقی میگذاریم اگر بآن یك

حرکت لغزشی بد هیم میبینیم که پس از چندی حرکتش کند شده و جسم توقف خواهد کرد . این مشاهده در حقیقت مبنای نظریه افرادی بود که عقیده داشتند با از بین رفتن نیرو (در این مثال دست آزمایشگر) جسم ازحرکت بازخواهد ایستاد . گالیله بترتیب زیر این نظریه را رد کرد : تجربه را با بکاربردن یک جسم صافتر ، یک سطح افقی مسطح تر، ویک ماده لغزان تکرار میکنیم میبینیم که کاهش سرعت کند تر صورت میگیرد . با ز اجسام وسطوح صاف ترومواد لغزنده بهتری بکارمیبریم . دراینصورت میزان کاهش سرعت بازهم کمتر بوده وجسم مسافت بیشتری را قبل از - توقف طی خواهد کرد .

بنا براین میتوانیم نتیجه این آزمایش راتعمیم داده وبگوئیم اگر اصطکاک نبود جسم حرکت یکنواخت درامتداد خط مستقیم رابطور دائم ادامه میداد . این نتیجه ای بود که گالیله گرفت . گالیله اظهارنظرکرد که برای " تغییر " سرعت نیروی خارجی لازم است ولی برای " ادامه " حرکت یکنواخت بهیچ نیروی خارجی نیازی نیست . بعنوان مثال دست ما هنگامیکه جسم را بحرکت درمیآورد بآن نیروئی وارد میکند . سطح ناهموارهم هنگامیکه حرکت راکند میکند بجسم نیرو وارد مینماید . درهرد ومورد نیرو باعث تغییر سرعت یعنی ایجاد شتاب میشود .

این قانون گالیله رانیوتن بعنوان قانون اول حرکت برگزید . نیوتن این قانون را بدینصورت شرح داد :" هر جسم که درحال سکون ویاحرکت یکنواخت در امتداد خط مستقیم باشد باین حالت ادامه خواهد داد مگر اینکه در اثر نیروهای وارده مجبور شود آن حالت راتغییربدهد ."

قانون اول نیوتن در حقیقت توضیحی درباره دستگاههای مقایسه میباشد . زیرا بطور کلی شتاب یک جسم بستگی بدستگاه مقایسه ای که نسبت بآن اندازه گیری میشود دارد ، قانون اول میگوید که اگر اجسامی در نزدیکی وجود نداشته باشند (منظور اینستکه نیروهائی وجود - نداشته باشند زیراهر نیروئی بایستی وابسته بیک جسم از محیط باشد) دراینصورت میتوان یکدسته دستگاههای مقایسه که درآنها ذره شتابی نداشته باشد پیدا نمود . این حقیقت که اجسام در غیاب نیرو ودرحال سکون مانده ویاحرکت خطی یکنواخت خودرا حفظ میکنند اغلب بوسیله نسبت دادن خاصیتی بماده که اینرسی نام دارد شرح داده میشود . قانون اول

نیوتن اغلب قانون اینرسی نامیده میشود وبنابراین دستگاههای مقایسه ای که درمورد آنها این قانون بکار میرود دستگاههای اینرسی نامیده میشوند . این نوع دستگاهها یانسبت به ستارگان دورثابت بوده و یانسبت بآنها باسرعت یکنواختی درحال حرکت میباشند .

توجه کنید که درقانون اول اختلافی بین ذره درحال سکون و ذره ای که باسرعت ثابت حرکت میکند وجود ندارد . هردوحرکت درغیاب نیرو " طبیعی " میباشند . علت این امر وقتی روشن میشود که یك ذره درحال سکون دریك دستگاه اینرسی راازدستگاه اینرسی دیگری که نسبت بدستگاه اینرسی اولی باسرعت ثابت درحرکت است ملاحظه کنیم . ناظری که دردستگاه اول قرار دارد ملاحظه میکند که جسم درحال سکون است وناظری که در دستگاه دوم قرار دارد ملاحظه میکند که همان جسم باسرعت یکنواخت درحال حرکت است . هردوناظر ملاحظه میکنند که جسم شتاب یعنی تغییر سرعت ندارد و هر دو ازقانون اول نتیجه میگیرند که نیروئی به جسم وارد نمیشود .

همچنین از قانون اول استنباط میشود که بین نبودن نیروها و وجود نیروهائی بامنتجه صفر تفاوتی نیست . مثلا " اگر فشار دست بکتاب دقیقا " نیروی اصطکاك راخنثی کند کتاب باسرعت یکنواخت حرکت خواهد کرد . بنابراین راه دیگری برای بیان قانون اول این است : اگر نیروی منتجه ای روی جسمی اثرنکند شتاب $\vec{a}$ آن جسم صفر میباشد .

اگر یك اثر متقابل بین جسم واجسام حاضر در محیط وجود داشته باشد ، این اثر چنان خواهد بود که ممکن است حالت " طبیعی " حرکت جسم تغییر کند . برای بررسی این موضوع حال بایستی مفهوم نیرو رادقیقا " مطالعه کنیم .

٤-٥ - نیرو

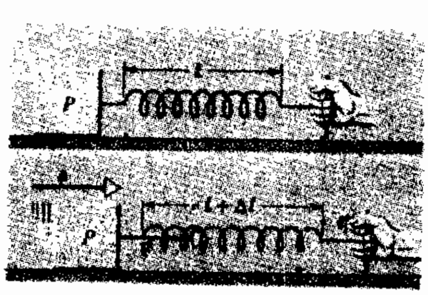
مفهوم نیرو رابوسیله تعریف علمی آن مورد موشکافی قرارمیدهیم . در محاورات روزانه مانیرو مربوط است به فشاردادن ویاکشیدن ، که مثلا " بوسیله عضلات ما انجام میشود . ولی البته درفیزیك تعریف دقیقتری مورد نیاز است . دراینجا نیرو رابرحسب شتابی که یك جسم استاندارد معین در

یك محیط مناسب پیدا میکند تعریف میکنند .

برای درنظرگرفتن یك جسم استاندارد مناسب بهتراست استوانه بخصوصی از پلاتین راکه با دقت دراداره بین المللی اوزان ومقادیردر نزدیکی پاریس نگهداری وکیلوگرم استاندارد نامیده میشود بکاربریم (ویافکرکنیم که بکارمیبریم) . برای بکاربردن در بخشهای بعدی در اینجا متذکر میشویم که این جسم بعنوان استاندارد جرم انتخاب شده و بر حسب تعریف یك جرم m_o برابر یك کیلوگرم بآن نسبت داده شده است . بعداً شرح خواهیم داد که چگونه جرم باجسام دیگر نسبت داده میشود .

مثلاً بعنوان یك محیط جسم استاندارد را روی یك میز افقی که اصطکاك آن صرفنظر کردنی است قرارمیدهیم وفنری راباآن وصل میکنیم و سر دیگر فنر رامطابق شکل a ۱ ـ ۵ در دست میگیریم حال فنر رابطورافقی بطرف راست میکشیم بطوریکه پس ازچندین باراصحان جسم استاندارد یك شتاب یکنواخت $meter/sec^2$ ۱/۰۰ بدست آورد . دراینصورت برحسب تعریف میگوئیم که فنر (که جسم مورد نظر در محیط میباشد) نیروی ثابتی که ما بزرگیش را " ۱/۰۰ نیوتن " خواهیم نامید برجسم استاندارد وارد میکند . البته همانطوریکه از شکل b ۱ ـ ۵ هویدا است دراثر بکاربردن این نیرو طول فنر باندازه Δl افزوده شده است .

این تجربه رامیتوان بوسیله کشیدن بیشتر فنرویابکاربردن فنر سخت تری تکرار کرد بطوریکه جسم استاندارد شتاب $meters/sec^2$ ۲/۰۰ پیدا کند . حال میگوئیم که فنر نیروی ۲/۰۰ نیوتن برجسم استاندارد وارد کرده است . بطورکلی اگر ملاحظه کنیم که جسم استاندارد معینی



شکل (۱ـ۵) (a) یك " ذره " P (کیلوگرم استاندارد) برروی یك سطح افقی بدون اصطکاکی ساکن است . (b) ـ بوسیله کشیدن فنربطرف راست بجسم شتاب داده میشود .

در یک محیط معین دارای شتاب a است ، آنوقت میگوئیم که محیط نیروی $\vec{F}$ برجسم استاندارد مزبور وارد میکند که درآن F (برحسب نیوتن) بطور عددی مساوی a (برحسب متر بر مجذور ثانیه) بطور عددی میباشد .

حال ببینیم که آیا نیرو ، آنطورکه آنراتعریف کرده ایم ، یك کمیت برداری است یا نه .
درشکل ۵-۱ b یك مقدار به نیروی $\vec{F}$ نسبت دادیم ، همینطوربسهولت میتوانیم جهتی بآن نسبت بدهیم ، این جهت همان جهت شتاب است. بهر حال برای بردار بودن تنها کافی نیست که یك کمیت دارای مقدار وجهت باشد ، بلکه بایستی از قوانین جمع برداری نیز (که در فصل دوم شرح داده شد) تبعیت کند . تنها از روی آزمایش میتوان فهمید که آیا نیروها ، آنطوریکه آنهاراتعریف کرده ایم ، واقعاً ازاین قوانین تبعیت میکنند یانه .

جسم استاندارد رامانند قبل درروی یك سطح افقی بدون اصطکاك قرارمیدهیم ودرآن واحد نیروهائی برابر ۴/۰۰ نیوتن درامتداد محور x و ۳/۰۰ نیوتن در امتداد محور y برآن وارد میکنیم. میخواهیم بدانیم شتاب جسم استاندارد چقدر خواهد بود ؟ توسط آزمایش پیدا میکنیم که شتاب ۵/۰۰ $meters/sec^2$ است ودرامتداد خطی است که زاویه 37^0 بامحور x میسازد . وبعبارت دیگر میگوئیم که بجسم استاندارد نیروئی برابر ۵/۰۰ نیوتن در همین جهت وارد شده است . همین نتیجه را میتوان بوسیله جمع برداری نیروهای ۴/۰۰ نیوتن و ۳/۰۰ نیوتن مطابق روش متوازی الاضلاع بدست آورد . این قبیل آزمایشهانشان میدهد که نیروها قطعاً بردار بوده دارای مقدار و جهت میباشند و مطابق قانون متوازی الاضلاع جمع میگردند .

نتیجه این نوع آزمایشهای عمومی اغلب بصورت زیربیان میشود :
وقتی چند نیرو برجسمی اثر کنند ، هر کدام مستقلاً شتاب مربوط بخود بآن جسم میدهند شتاب منتجه جمع برداری چندین شتاب مستقل میباشد .

۵-۵ - جرم ، قانون دوم نیوتن

در قسمت ۵-۴ فقط شتاب داده شده بیك جسم معین یعنی کیلوگرم استانداردرا د ر نظر گرفتیم ودرنتیجه توانستیم نیروهارابطور کمی تعریف کنیم . این نیروها روی سایر اجسام چه اثری دارند ؟ ازآنجاکه درمرحله اول جسم استاندارد ما بطور اختیاری انتخاب گردید ، میدانیم که برای هر جسم معینی شتاب مستقیماً متناسب با نیروی وارده میباشد . سئوال مهمی که پس ازآن باقی میماند این است : یك نیروی معین چه اثری روی اجسام مختلف دارد ؟ تجارب روزمره یك جواب کیفی بمامیدهد . این نیروشتابهای مختلفی باجسام مختلف خواهد داد .یك توپ بیسبال بیشتر ازیك اتومبیل بتوسط یك نیروی معین شتاب خواهد یافت. برای این که یك جواب کمی برای این سئوال پیدا کنیم بمتدی احتیاج داریم که بتوسط آن بتوانیم جرم یعنی خاصیت مقاومت در برابر تغییر حرکت رااندازه بگیریم .

یك فنر بجسم استاندارد خود (استاندارد کیلوگرم ، که بآن بطور اختیاری جرم $1/00\ Kg$ رانسبت داده ایم) وصل میکنیم وبابکاربردن روش شکل b ۵-۱ بآن شتاب a_0 (مثلاً - $2/00\ meters/sec^2$) میدهیم . سپس اضافه طول Δl فنر راکه مربوط به نیروئی است که فنر بجسم وارد کرده است بدقت اندازه میگیریم .

حال کیلوگرم استاندارد رابرداشته ویك جسم دلخواه که جرمش رابه m_1 نشان میدهیم بجای آن قرارمیدهیم . همان نیرورا (نیروئی که شتاب $2/00\ meters/sec^2$ به کیلوگرم استاندارد میدهد) به جسم دلخواه وارد آورده (بوسیله کشش فنربهمان مقدار) وشتاب a_1 مثلاً $0/50\ meters/sec^2$ رااندازه میگیریم .

برحسب تعریف نسبت جرمهای بین دو جسم مساوی عکس نسبت شتاب داده شده باین اجسام توسط یك نیروی یکسان میباشد یا

(بهرد وجسم نیروی $\vec{F}$ وارد میشود)

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

دراین مثال عدداً داریم

$$m_1 = m_0\frac{a_0}{a_1} = 1/00\ Kg\left[\left(2/00\ \frac{m}{sec^2}\right)\Big/\left(0/50\ \frac{m}{sec^2}\right)\right] = 4/00\ Kg$$

جسم دوم که فقط یک چهارم شتاب جسم اول را در اثر همان نیرو پیدا میکند ، بر حسب تعریف دارای جرمی برابر با چهار برابر جرم جسم اول است . بنابراین جرم ممکن است بعنوان یک اندازه گیری کمی اینرسی در نظر گرفته شود .

اگر تجربه قبل را با یک نیروی مشترک دیگر تکرار کنیم ملاحظه میکنیم که نسبت شتابها $\frac{a_0'}{a_1'}$ همان مقدار آزمایش قبلی است یعنی :

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0'}{a_1'}$$

در نتیجه نسبت جرمهای دو جسم مستقل از نیروی مشترک بکار رفته میباشد . بعلاوه آزمایش نشان میدهد که با این روش میتوانیم جرمهائی به هر جسم نسبت دهیم . مثلاً یک جسم دلخواه دوم را با جسم استاندارد مقایسه میکنیم ، بنا براین جرمش را تعیین میکنیم (مثلاً m_2'' میشود) . حال میتوانیم دو جسم دلخواه m_1 و m_2 را مستقیماً مقایسه کنیم و وقتیکه نیروی ثابتی بآنها وارد میشود شتابهای a_1'' و a_2'' را بدست آوریم . نسبت جرمها که از رابطه

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2''}{a_1''} \qquad \text{(بهر دو یک نیرو وارد میشود)}$$

بدست میآید بانسبتی که از طریق مقایسه مستقیم این جرمها با جرم استاندارد بدست میآید یکی است .

همچنین با تجربه دیگری از این نوع میتوان نشان داد که اگر اجسامی با جرمهای m_1 و m_2 بیکدیگر متصل شوند آنها از نظر مکانیکی مانند جسم واحدی بجرم ($m_1 + m_2$) میباشند . بعبارت دیگر جرمها مانند کمیات اسکالر جمع میشوند (واسکالر میباشند) جدول ۲-۵ حوزه تغییرات جرم را (که بروشهای مختلف تعیین میشوند) نشان میدهد .

حال میتوانیم تمام آزمایشها و تعاریفی که در بالا شرح دادیم در یک معادله خلاصه کنیم . این معادله که معادله اساس مکانیک کلاسیک میباشد بقرار زیر است :

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (۵-۱)$$

در این معادله $\vec{F}$ عبارت است از حاصل جمع برداری تمام نیروهائی که بر جسم وارد میشوند ،

m جرم جسم بوده و $\vec{a}$ (بردار) شتاب آن میباشد . معادله ۱-۵ ممکن است بعنوان بیان قانون دوم نیوتن درنظر گرفته شود . اگر آنرا بشکل $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ بنویسیم بآسانی مشاهده میشود که شتاب یك جسم مستقیماً متناسب است با نیروی منتجه ای که روی آن اثرمیکند وازنظر جهت موازی همین نیرو میباشد وبرای یك نیرومعین نسبت عکس با جرم جسم دارد .

توجه کنید که قانون اول حرکت حالت خاصی ازقانون دوم است ، زیرااگر $\vec{F} = 0$ باشد $\vec{a} = 0$ خواهد بود . بعبارت دیگراگرمنتجه نیروهای وارد بیك جسم صفرباشد ، شتاب جسم صفر میباشد . بنابراین درغیاب نیروهای وارده جسم باسرعتی ثابتی حرکت خواهد کرد و یادرحال سکون (سرعت صفر) باقی خواند ماند ، واین همان است که قانون اول بیان میکند . بنا بر این از سه قانون نیوتن فقط دوتای آنهامستقل میباشند ، قوانین دوم و سوم (قسمت ۶-۵) . قسمتی از دینامیك انتقالی ذره که فقط شامل سیستمهائی است که برای آنها نیروی منتجه $\vec{F}$ صفر میباشد "استاتیك" static نامیده میشود .

معادله ۱-۵ یك معادله برداری است . این معادله برداری را میتوان بشکل سه معادله اسکالر نوشت :

$$F_x = ma_x \quad , \quad F_y = ma_y \quad , \quad F_z = ma_z \qquad (۲-۵)$$

که مولفه های x ، y و z نیروی منتجه (F_x ، F_y و F_z) رابه مولفه های x ، y و z شتاب (a_x ، a_y و a_z) برای جرم m مربوط میکنند . بایستی تاکید کنیم که F_x عبارت است از حاصل جمع تمام مولفه های x ، F_y عبارت است از حاصل جمع تمام مولفه های y و F_z عبارتست ازحاصل جمع تمام مولفه های z نیروهائی که به m وارد میشوند .

۶-۵ سومین قانون حرکت نیوتن

نیروهائی که روی یك جسم اثر میکند ، ازاجسام دیگری که محیط آن رامیسازند ناشی میشود هر نیرو فقط یك جنبه تاثیر متقابل بین دوجسم است . تجربه نشان میدهد که وقتی یك جسم

جدول ۲-۵

« بعضی جرمهای اندازه گیری شده »

جرم (کیلوگرم)		جسم
$۲/۲\times۱۰^{۴۱}$		کهکشان ما
$۲/۰\times۱۰^{۳۰}$		خورشید
$۶/۰\times۱۰^{۲۴}$		زمین
$۷/۴\times۱۰^{۲۲}$		ماه
$۱/۴\times۱۰^{۲۱}$		جرم تمام آب اقیانوسها
$۷/۲\times۱۰^{۷}$		کشتی اقیانوس پیما
$۴/۵\times۱۰^{۳}$		فیل
$۷/۳\times۱۰^{۱}$		انسان
$۳/۰\times۱۰^{-۳}$		یک دانه انگور
$۶/۷\times۱۰^{-۱۰}$	(A tobaco mosaic-Virus)	نوعی ویروس
$۲/۳\times۱۰^{-۱۳}$		یک ذره خاک
$۵/۰\times۱۰^{-۱۷}$		یک مولکول پنیسیلین
$۴/۰\times۱۰^{-۲۵}$		یک اتم اورانیوم
$۱/۷\times۱۰^{-۲۷}$		یک پروتون
$۹/۱\times۱۰^{-۳۱}$		یک الکترون

نیروئی برجسم دوم وارد میکند ، جسم دوم نیز همیشه همان نیرو رابرجسم اول وارد میکند . بعلاوه ملاحظه میکنیم که این نیروهاازنظر بزرگی مساوی بوده ولی دردوجهت مخالف میباشد . بنا بسر این وجود یك نیروی تنها امکان ندارد .

اگر یکی از دونیروئی که دراثر متقابل بین دوجسم وجود دارند نیروی "عمل" نامیده شود دیگری نیروی "عکس العمل" نامیده میگردد . هر کدام از دو نیرو ممکن است "عمل ودیگری "عکس العمل" نامیده شود . علت و معلول دراین جامورد نظر نیست بلکه تاثیر متقابل همزمان آنها مورد توجه است .

این خاصیت نیروها اولین بار توسط نیوتن درسومین قانون حرکتش بیان شد "با هر عمل همیشه یك عکس العمل مساوی مخالفت میکند ، یا ، عمل متقابل دوجسم روی یکدیگر همیشه مساوی ودر جهت عکس یکدیگر میباشند .

بعبارت دیگر اگر جسم A نیروئی به جسم B وارد کند ، جسم B نیروئی برابر ولی در جهت مخالف آن نیرو بر جسم A وارد میکند و بعلاوه نیروها در امتداد خطی که دو جسم راببهم متصل میکند قرار دارند . توجه کنید که نیروهای عمل وعکس العمل که همیشه بصورت دوتائی وجود دارند براجسام مختلفی وارد میشوند . اگر آنها بریك جسم اثر میکردند ، هرگز حرکت شتابدار نمیداشتیم زیرا نیروی منتجه وارد بهر جسم همیشه صفر میبود .

تصور کنید که بچه ای با لگد دری راباز میکند . نیروئی که توسط بچه B به در D وارد میشود شتابی به در میدهد (در بسرعت باز میشود) ودر همان زمان در D نیروئی مساوی ـ ولی در جهت مخالف به بچه B وارد میکند که شتاب بچه راکم میکند (سرعت پایش بطرف جلو کم میشود) بچه بطور دردناکی ازنیروی "عکس العمل" در قبال نیروی "عمل" خود آگاه میشود مخصوصا" اگر پایش برهنه باشد .

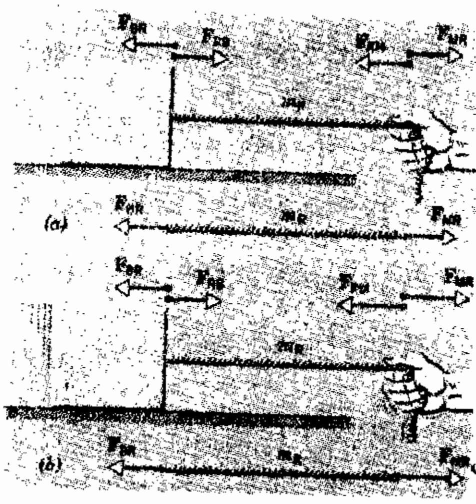
مثالهای زیر کاربرد قانون سوم را شرح داده و معنی آنرا روشن میسازند :

مثال یك ـ فرض کنید شخصی یك طناب افقی راکه به جسمی روی یك میز افقی (مانند شکل ۲ ـ ۵) وصل شده است میکشد . شخص طناب را بانیروی $\vec{F}_{MR}$ میکشد . طناب نیروی عکس العمل

$\vec{F}_{RM}$ بر شخص وارد میکند . مطابق قانون سوم نیوتن $\vec{F}_{MR}=-\vec{F}_{RM}$. همچنین - طناب نیروی $\vec{F}_{RB}$ برجسم وارد میکند وجسم نیروی عکس العمل $\vec{F}_{BR}$ بر طناب وارد مینماید . دوباره مطابق قانون سوم $\vec{F}_{RB}=-\vec{F}_{BR}$ میباشد .

فرض کنیم که جرم طناب m_R است ، حال برای اینکه جسم و طناب از حال سکون شروع بحرکت کنند بایستی یک شتاب مثلاً $\vec{a}$ داشته باشیم . تنها نیروهائیکه برطناب اثر میکنند $\vec{F}_{MR}$ و $\vec{F}_{BR}$ میباشند بطوریکه برآیند نیروهائیکه برآن اثر میکنند برابر است با $\vec{F}_{BR}+\vec{F}_{MR}$ واگر بخواهیم طناب دارای شتاب باشد این مقدار بایستی مخالف صفر باشد . در واقع از قانون دوم داریم

$$\vec{F}_{BR}+\vec{F}_{MR}=m_R\vec{a}$$



شکل ۲ - ۵ . مثال ۱ - مردی طنابی راکه بیک قطعه فلزی متصل است میکشد . (a) نیروهای وارد بر طناب بوسیله قطعه فلز ومرد باهم مساوی بوده و در دوجهت مخالف هم میباشند بنابراین نیروی کل وارد بر طناب صفراست ، همانطورکه در دیاگرام" جسم آزاد " نشان داده شده است . طناب شتاب ندارد .

(b) نیروی وارد بر طناب بوسیله مرد بیشتر از نیروی وارد بآن بوسیله قطعه فلزاست ، نیروی افقی کل دارای مقدار $\vec{F}_{MR}-\vec{F}_{BR}$ بوده وبطرف راست متمایل است . بنا براین طناب بطرف راست شتاب داده میشود . بر قطعه فلز یک نیروی اصطکاکی نیزکه دراینجا نشان داده نشده است ، وارد میشود .

از آنجا که نیروها و شتاب درامتداد یک خط هستند میتوان علامت بردار را حذف کرده رابطه بین بزرگی بردارها رابنویسیم ، یعنی

$$F_{MR}-F_{BR}=m_R a$$

بنا براین ملاحظه میکنیم $\vec{F}_{MR}$ و $\vec{F}_{BR}$ از نظر مقدار باهم مساوی نیستند (شکل b ۵-۲) این دونیرو بر روی یك جسم اثر میکنند ولی نیروهای عمل وعکس العمل نیستند . مطابق قانون سوم نیوتن مقدار $\vec{F}_{MR}$ همیشه مساوی مقدار $\vec{F}_{RM}$ ومقدار $\vec{F}_{BR}$ همیشه مساوی مقدار $\vec{F}_{RB}$ میباشد . البته فقط در حالتیکه شتاب $\vec{a}$ سیستم صفر باشد نیروهای $\vec{F}_{MR}$ و $\vec{F}_{RM}$ مقدارشان برابر نیروهای $\vec{F}_{BR}$ و $\vec{F}_{RB}$ میشود . (شکل a ۵-۲) . فقط در این مورد خاص میتوانیم فرض کنیم که طناب صرفاً نیروئی راکه شخص وارد کرده است بدون تغییر به جسم منتقل کرده است . همین نتیجه وقتی $m_R = 0$ باشد صادق میباشد . در عمل هرگز طناب بدون جرم پیدا نمیکنیم. بهر حال میتوان اغلب ازجرم طناب صرفنظر نمود . در این مورد فرض میشود که طناب نیرو را بدون تغییر منتقل‌میکند . نیروی وارده به هر نقطه طناب کشش در آن نقطه نامیده میشود . میتوان کشش در هر نقطه از طناب رابابریدن طول مناسبی ازآن وقرار دادن یك فنر مدرج (Spring Scale) درآنجا اندازه گرفت ،کشش از روی درجه بندی فنر خوانده میشود . فقط در حالتیکه طناب شتاب ندارد ویا بدون جرم است کشش در تمام نقاط طناب یکی است .

مثال ۲ - فرض کنید یك فنر به سقف وصل شده ودر طرف دیگر فنر جسمی در حال سکون قرار داده شده باشد (شکل a ۵-۳) . چون هیچکدام از این اجسام شتاب ندارند مجموع - برداری نیروهائی که برهرجسم وارد میشود صفر است . مثلاً نیروهای وارد برجسم آویزان شده عبارتند از $\vec{T}$ یعنی کشش فنر کشیده شده که جسم را درامتداد قائم بطرف بالا میکشاند و $\vec{W}$ یعنی کشش زمین (وزن جسم) که در امتداد قائم وبطرف پائین متوجه است . این نیرو ها در شکل b ۵-۳ کشیده شده ودرآنجا برای وضوح فقط جسم رانشان داده ایم . نیرو های دیگری روی جسم اثر نمیکنند .

در قانون دوم نیوتن $\vec{F}$ حاصل جمع تمام نیروهای وارد برجسم را نشان میدهد . بنا براین برای جسم داریم :

$$\vec{F} = \vec{W} + \vec{T}$$

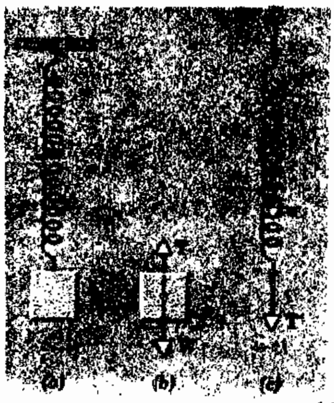
جسم ساکن است بنابراین شتاب آن صفر میباشد یعنی $\vec{a} = 0$. پس از رابطه $\vec{F} = m\vec{a}$ بدست میآوریم $\vec{T} + \vec{W} = 0$ و یا

$$\vec{T} = -\vec{W}$$

نیرو ها در امتداد یك خط اثرمیکنند بنابراین مقدارآنها برابراست و داریم

$$T = W$$

بنا براین کشش فنر دقیقاً برابروزن جسم میباشد . بعداً این نتیجه را هنگام توضیح یك طریقه استاتیك برای اندازه گیری نیروها بکار خواهیم برد .



شکل ۳-۵ . مثال ۲-(a) - یك قطعه فلزی بوسیله یك فنر آویزان شده است . (b) - یك دیاگرام "جسم آزاد" کهتمام نیروهای قائم وارد برجسم رانشان میدهد . (c) دیاگرام مشابهی برای نیروهای قائم وارد برفنر

بهتراست که نیروهای وارد بفنر را مطالعه کنیم ، این نیروها در شکل ۳c - ۵ نمایش داده شده اند . $\vec{T}'$ کشش جسم روی فنر بوده و نیروی عکس العمل در مقابل نیروی عمل $\vec{T}$ می باشد بنا براین $\vec{T}'$ همان مقدار $\vec{T}$ یعنی $\vec{W}$ رادارد . $\vec{P}$ کششی است که سقف بطرف بالا روی فنر وارد میکند و $\vec{w}$ وزن فنر است یعنی کشش زمین روی فنر میباشد چون فنر در حال سکون است وتمام نیروها روی خط واحدی اثرمیکنند داریم

$$\vec{P} + \vec{T}' + \vec{w} = 0$$

یا

$$P = W + w$$

بنا براین سقف بانیروئی که مقدارش برابر مجموع وزنهای جسم و فنر است فنر را بطرف بالا میکشد .

بنا برقانون سوم حرکت نیروئیکه فنر به سقف وارد میکند (یعنی $\vec{P}'$) بایستی از نظر مقدار مساوی $\vec{P}$ (عکس العمل در مقابل عمل $\vec{P}'$) باشد . بنا براین $\vec{P}'$ دارای مقدار $W + w$ میباشد .

بطور کلی فنر نیروهای مختلفی به اجسامی که دو طرف مختلف آن وصل شوند وارد میکند

یعنی $P' \neq T$ در حالت خاصی که در آن وزن فنر قابل صرفنظر کردن است ، $W=0$ ، $P'=W=T$ بنابراین میتوان فرض کرد که یك فنر بی وزن (یا ریسمان) نیرو را از یك سر بسر دیگر بدون تغییر منتقل میکند .

بهتر است که تمامی نیروها ی این مسئله رابصورت جفتهای عمل و عکس العمل طبقه بندی کنیم. عکس العمل در قبال $\vec{W}$ ، یعنی نیروئی که زمین روی جسم وارد میکند ، بایستی نیروئی باشد که جسم بزمین وارد میکند . بهمین ترتیب عکس العمل در مقابل $\vec{W'}$ نیروئی است که فنر روی زمین وارد میکند . بعلت اینکه زمین خیلی وزین میباشد انتظار نداریم که این نیروها شتاب قابل ملاحظه ای در زمین ایجاد کنند . چون زمین در شکل ، نشان داده نشده است ، این نیروهانشان داده نشده اند نیروهای $\vec{T}$ و $\vec{T'}$ ونیز نیروهای $\vec{P}$ و $\vec{P'}$ جفتهای عمل و عکس - العمل میباشند . توجه کنید که اگر چه در مساله ما $\vec{T}=-\vec{W}$ با این وجود این دو نیرو جفت عمل - عکس العمل نیستند زیرا آنها روی یك جسم اثر میکنند .

۷-۵ سیستم و آحاد مکانیکی

نیروی واحد برحسب تعریف نیروئی است که وقتی بجرم واحد اثر کند باعث شتاب واحد گردد . واحد جرم در MKS (متر - کیلو گرم - ثانیه) کیلوگرم میباشد . واحد جرم در cgs (سانتیمتر - گرم - ثانیه) گرم است که بر حسب تعریف یك هزارم کیلوگرم جرم میباشد ، در سیستم MKS واحد نیرو عبارت است از نیروئی که باعث شتاب یك متر بر مجذور ثانیه بجرم یك کیلو گرم گردد ودیدیم که این واحد " نیوتن " $newton$ نام دارد . در سیستم cgs که شامل سیستم گوس نیز میشود واحد نیرو برابر نیروئی است که بجرم یك گرم شتاب یك سانتیمتر بر مجذور ثانیه بدهد ، این واحد " دین " $dyne$ نام دارد . چون $1\,Kg = 10^3 gr$ و $1\ meters/sec^2 = 10^2\ cm/sec^2$ پس نتیجه میشود $1\,nt = 10^5 dyne$

درهر کدام از سیستم آحاد جرم ، طول و زمان رابعنوان کمیتهای اصلی انتخاب کرده ایم . استانداردها برای این کمیات اصلی اختیارشده و واحد ها برحسب این استاندارد ها تعریف

شده اند . نیرو بعنوان یک کمیت فرعی ظاهر میشود و از رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$ تعیین میگردد .

در سیستم آحاد مهندسی انگلستان ، نیرو ، طول ، وزمان بعنوان کمیات اصلی انتخاب شده اند وجرم یک کمیت فرعی میباشد . در این سیستم جرم از رابطه $m=\frac{F}{a}$ تعریف میشود . استاندارد واحد نیرو در این سیستم پوند است . در واقع یک پوند نیرو ابتدا توسط کشش زمین روی جسم استاندارد معینی در نقطه معینی از زمین تعریف شد . عملاً میتوان این نیرو راتوسط آویزان کردن جسم استاندارد از یک فنر در نقطه معینی از زمین که کشش زمین روی آن یک پوند نیرو تعریف شده است بدست آورد . اگر جسم در حال سکون باشد کشش زمین روی جسم یعنی وزنش (W) باکشش فنر تعادل میکند . بنا براین در این لحظه $T=W=1lb$ میباشد . حال میتوان این فنر را (یاهر فنر دیگری راکه بااین طریق مدرج شده باشد) برای وارد کردن نیروی یک پوند بجسم دیگر بکار برد ، برای این کار فنر را بجسم دیگر وصل میکنیم و آنرا بهمان مقدار میکشیم که نیروی یک پوند آنراکشیده بود . این جسم استاندارد را میتوان با کیلوگرم مقایسه کرد بدینطریق دیده میشودکه دارای جرم Kg ۰/۴۵۳۵۹۲۳۷ میباشد . شتاب ثقل در یک مکان معین در روی زمین برابر ft/sec^2 ۳۲/۱۷۴۰ میباشد . بنابراین پوند نیرو رامیتوان از روی $F=ma$ بعنوان نیروئی تعریف کرد که بجرم ۰/۴۵۳۵۹۲۳۷ کیلو گرم شتابی برابر ft/sec^2 ۳۲/۱۷۴۰ بدهد .

بااین روش میتوان پوند نیرو رابانیوتن مقایسه کرد . با استفاده از این حقیقت که ft/sec^2 ۳۲/۱۷۴ معادل $meters/sec^2$ ۹/۸۰۶۶ است ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 1\ lb &= (۰/۴۵۳۵۹۲۳۷\ Kg)(۳۲/۱۷۴۰\ ft/sec^2) \\ &= (۰/۴۵۳۵۹۲۳۷\ Kg)(۹/۸۰۶۶\ meters/sec^2) \\ &= ۴/۴۵\ nt \end{aligned}$$

حال میتوان واحد جرم در سیستم مهندسی انگلستان را بدست آورد . این واحد برابر جرم جسمی است که وقتی نیروی یک پوند بآن وارد شود شتابش برابر ft/sec^2 ۱ باشد ، این جرم $slug$ نامیده میشود بنابراین در این سیستم آحاد

$$F\,[lb] = m\,[slug] \times a\,[ft/sec^2]$$

حقیقتا" پوند یك واحد جرم ولی در عملیات مهندسی پوند بعنوان واحد نیرو یا وزن در نظـــر گرفته میشود . این موضوع باعث بوجود آمدن اصطلاحات "پوند جرم" و "پوند نیرو" شـــده است . "پوند جرم "جسمی است بجرم $0/45359237\ Kg$ ، هیچ جسم فلزی استاندارد بعنوان" پوند جرم " نگهداری نشده است ولی مانند یارد ، بر حسب استانداردهای MKS تعریف شده است .

" پوند نیرو " برابر نیروئی است که بپوند استاندارد شتابی معادل " شتاب استاندارد جاذبه " یعنی $32/1740\ ft/sec^2$ بدهد . همانطورکه بعدا" خواهیم دید ، شتاب جاذبـــه با فاصله از مرکز زمین تغییر میکند وبنا براین " شتاب استاندارد " عبارت است از مقدار شتاب جاذبه در فاصله بخصوص از مرکز زمین . (یك نقطه در سطح دریا با عرض ۴۵ درجه شمالـــی تقریب خوبی میباشد) .

در این کتاب فقط نیروها باپوند اندازه گیری خواهند شد . وبنا براین واحد جـــرم مربوطه slug میباشد . واحدهای نیرو ، جرم و شتاب در سه سیستم در جدول ۳-۵ خلاصه شده است .

جـــدول ۳-۵

" واحدهادر $F = ma$ "

شتاب	جرم	نیرو	سیستم آحاد
$meters/sec^2$	کیلوگرم (Kg)	نیوتن (nt)	MKS
cm/sec^2	گرم (gr)	دین (dyne)	cgs (گوسی)
ft/sec^2	slug	پوند / lb	مهندسی

ابعاد نیرو برابر ابعاد جرم در شتاب میباشد . بنا براین در سیستمی که در آن جرم ، طــول وزمان کمیات اصلی هستند ، ابعاد نیرو برابر است با (زمان)^{2} / طول × جرم و یا MLT^{-2} مابطور دلخواه جرم ، طول وزمان رابعنوان کمیات مکانیکی اصلی اختیارخواهیم کرد .

باتوجه باین مطلب که استاندارد های طول وزمان استاندارد های اتمی هستند ، عده ای بفکر افتاده اند که ممکن است روزی یك استاندارد اتمی جرم جایگزین استاندارد کیلو گرم بشود . این استاندارد جدید ممکن است از تعداد معینی از اتمهای نوع بخصوصی که جرم کلیه آنهــا تحت شرایط مناسبی یك کیلو گرم است تشکیل شده باشد . البته در حال حاضر دقتی که در سنجش جرم (مثلاً در یك ترازو) بکار میرود از دقتی که در تعیین تعداد اتمها بکار میــرود تجاوز میکند .

۸ - ۵ قوانین نیــرو

سه قانون حرکت که تا بحال شرح داده ایم فقط قسمتی از برنامه مکانیکی است که در قسمت ۵ طرح نموده ایم . باقی میماند که " قوانین نیرو " راپیدا کنیم . این قوانین عبارت از روشهائی هستند که بوسیله آنها میتــوان نیروی وارد بر یك جسم معین را بر حسب خواص جسم و محیط آن حساب کرد . قانون دوم نیوتن

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (۵-۳)$$

اصولاً یك قانون طبیعت نیست بلکه یك تعریف نیرو است . ما بایستی توابع مختلفی از نوع زیــر را مشخص کنیم :

$$\vec{F} = \text{تابعی ازخواص ذره و محیط} \qquad (۵-۴)$$

بطوریکه بوسیله آن بتوانیم $\vec{F}$ رابین معادلات ۳ -۵ و ۴-۵ حذف نمائیم و بنا براین معادله ای بدستآوریم که بما امکان دهد شتاب ذره رابر حسب خواص ذره ومحیطش محاسبه نمائیم .

در اینجا بوضوح دیده میشودکه نیرو مفهومی است که شتاب یك ذره رااز یك طرف باخواص ذره و محیطش از طرف دیگر بهم مربوط میکند . قبلاً نشان داده یم که یك ملاك برای طرح برنامــه

مکانیك کشف این موضوع است که قوانین ساده ای ازنوع معادلـه ٤ـ۶ در واقع وجود دارنـد. صحت این مطلب آشکار شده واین حقیقت دلیل اصلی "اعتقاد" ما بقوانین مکانیك کلاسیك ـ میباشد. اگر قوانین نیرو خیلی پیچیده میبودند ، این احساس برای ما ایجاد نمی شد که ما مقدار زیادی یکنه رفتار طبیعت دست یافته ایم.

تعداد محیطهای ممکن برای یك ذره شتابدار آنقدر زیاد است که بحث دقیق تمام ـ قوانین نیرو دراین فصل امکان ندارد. با وجود این درجدول ٤ـ۵ قوانین نیرو را بـرای پنج نمونه مختلف از جسم ومحیط مربوطش (از جدول ۱ـ۵) نشان داده ایم. درموقعیت هـا ی مناسبی درمتن کتاب این قوانین و سایر قوانین نیرو را بتفضیل بحث خواهیم کرد ، چند تا از قوانین جدول ٤ ـ۵ تقریبی یا حالات خاصی میباشنـد.

جدول ۴ - ۵

قوانین نیرو برای سیستمهای جدول ۱ - ۵

قانون نیرو	سیستم
(الف) ـ نیروی فنر : $F=-kx$ ، که در آن x اضافه طول فنر و k ضریبی است مربوط بفنر و $\vec{F}$ بطرف راست میباشد ، فصل ۱۳ را مشاهده کنید . (ب) ـ نیروی اصطکاک : $F=\mu mg$ ، که در آن μ ضریب اصطکاک و mg وزن جسم است و $\vec{F}$ بطرف چپ میباشد . بخش ۱۲-۵ رامشاهده کنید .	۱ - یك قطعه فلزی یا چوبی توسط یك فنر روی یك سطح ناهموار افقی بجلو کشیده میشود .
$F=mg$ و $\vec{F}$ بطرف پائین است (بخش ۹-۵ رابببینید)	۲ - یك توپ گلف در حال پرواز
$F=GmM/r^2$ که در آن G ثابت جاذبه ، M جرم زمین و r شعاع مدار است . $\vec{F}$ بطرف مرکز زمین میباشد . فصل ۱۴ رابببینید . این " قانون جاذبه عمومی نیوتن " است .	۳ - یك قمر مصنوعی
$F=(1/4\pi\epsilon_0)eQ/r^2$ ، که در آن ϵ_0 مقداری ثابت ، e بارالکترون ، Q بارکره و r فاصله الکترون ازمرکز کره میباشد . بطرف راست است . فصل ۲۲ را مشاهده کنید . این " قانون الکترواستاتیك کولمب "	۴ - یك الکترون نزد یك کره باردار
$F=(3\mu_0/2\pi)\mu^2/r^4$ که در آن μ_0 مقداری ثابت μ گشتاور پیل مغناطیسی هرکدام ازمغناطیسها و r فاصله مراکزد ومغناطیس میباشد . فرض کرده ایم که $l \ll r$ است که در آن l طول هرکدام ازمغناطیسها است . $\vec{F}$ بطرف راست میباشد .	۵ - دو میله مغناطیسی

۹ - ۵ - وزن وجرم

" وزن " (Weight) یک جسم نیروی جاذبه ای است که توسط زمین برآن جسم وارد میشود . وزن که یک نیرو است کمیت برداری میباشد . جهت این بردار جهت نیروی جاذبه یعنی بطرف مرکز زمین میباشد . مقدار وزن باواحدهای نیرو مانند پوند ونیوتن بیان میشود .

وقتی جسمی بجرم m آزادانه سقوط میکند ، شتابش شتاب جاذبه $\vec{g}$ ونیروئی که بر آن اثر میکند وزنش $\vec{W}$ میباشد . وقتی قانون دوم نیوتن یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$ رادر مورد جسمی که آزادانه سقوط میکند بکاربریم خواهیم داشت $\vec{W} = m\vec{g}$ هردو $\vec{W}$ و $\vec{g}$ بردارهائی هستندکه بسمت مرکز زمین میباشند .

بنا براین میتوانیم بنویسیم

$$W = mg \qquad (۵-۵)$$

که درآن W و g مقادیر بردارهای وزن و شتاب میباشند . برای اینکه مانع سقوط جسمی شویم بایستی نیروئی که از نظر مقدار برابر W باشد بطرف بالا برآن وارد کنیم بطوریکه نیروی منتجه صفر باشد . در شکل ۳a - ۵ کشش فنر این نیرو راتامین مینماید .

قبلاً بیان کردیم که g بطور تجربی یافته شده وبرای تمام اجسامی که در یک محل هستند مقدار واحدی است . از این موضوع نتیجه میشود که نسبت وزن دوجسم بایستی مساوی نسبت جرمهایشان باشد . بنابراین یک ترازوی شیمیائی ،که در واقع وسیله ای است برای مقایسه دونیروی بطرف پائین ،عملاً میتواند برای مقایسه جرمها نیز بکار رود . اگر مقدار نمک دریک کفه ترازو آن کفه راهمان مقدار پائین بکشد که یک جرم استاندارد یک گرمی کفهٔ دیگر را ، در اینصورت می فهمیم که جرم نمک مساوی یک گرم است [تصحیحاتی بعلت نیروی رانش (ارشمیدس) هوا که مربوط است به حجمهای هوای جابجا شده توسط نمک و استاندارد - بایستی بعمل آید . اینها درفصل ۱۸ مورد بحث قرار خواهند گرفت] . گاهی میگوئیم که نمک یک گرم " وزن " دارد ،اگر چه گرم واحد جرم است نه وزن .

بهر حال همیشه مهم است که دقیقاً وزن وجرم رااز هم تشخیص دهیم .

ما ملاحظه کرده ایم که وزن یك جسم یعنی کششی که زمین بسمت پائین به جسم وارد میکند . یك کمیت برداری است . جرم یك جسم یك کمیت اسکالراست . رابطه کمی بین جرم وزن توسط $\vec{W} = m\vec{g}$ داده میشود . از آنجا که $\vec{g}$ از نقطه ای بنقطه دیگر روی زمین تغییر میکند . $\vec{W}$ یعنی وزن جسمی بجرم m در مکانهای مختلف متفاوت میباشد . بنابراین وزن یك کیلو گرم جرم در محلی که g برابر $9/80$ $metres/sec^2$ است مساوی $9/80$ نیوتن میباشد درصورتیکه وزن همان یك کیلو گرم جرم در محلی که g برابر $9/78$ $metres/sec^2$ است $9/78$ نیوتن میباشد . اگر میخواستیم این وزنها را بوسیله اندازه گیری میزان کشش لازم برای تعادل آنها بوسیله یك فنر معلوم کنیم ، اختلاف وزن یك کیلو گرم جرم در مکانهای مختلف بعلت اختلاف جزئی در کشش فنر در این مکانها معلوم میشد . بنابراین برخلاف جرم یك جسم که یك خاصیت ذاتی جسم است ، وزن جسم به موقعیت آن نسبت بمرکز زمین بستگی دارد . ترازوهای فنری برای یك جسم در قسمتهای مختلف زمین درجات مختلفی را نشان میدهد .

ما مفهوم وزن را در فصل ۱۴ که مربوط به جاذبه عمومی است تعمیم خواهیم داد . در آنجا ملاحظه خواهیم کرد که وزن یك جسم در قسمتهائی از فضا که جاذبه وجود ندارد صفر میباشد ، در حالی که اثرات اینرسی ودرنتیجه جرم جسم با آنچه در روی زمین مشاهده میشود فرقی ندارند . در یك سفینه فضائی که از قید جاذبه آزاد است کار ساده ای است که قطعه بزرگی از سرب را بلند کنیم $W = 0$ ولی درعمل با لگد زدن به جسم ، فضانورد همچنان پایش ضربه میخورد $m \neq 0$ همانقدر نیرو برای شتاب دادن یك جسم در فضای بدون جاذبه لازم است که برای شتاب دادن همان جسم در امتداد سطح افقی بدون اصطکاك روی زمین ، زیرا جرم آن در هر دو مورد یکی است . ولی برای نگهداشتن جسمی (در برابر کشش زمین) روی سطح زمین نیروی بیشتری لازم است تا برای نگهداشتن آن در فضای خیلی بالا ، زیرا وزن آن در هر محل مختلف است .

اغلب بجای جرم ، وزن جسمی که بآن نیروها وارد میشوند داده میشود . شتاب $\vec{a}$

حاصل از نیروی $\vec{F}$ را که بجسمی بوزن W اثرمیکند بوسیله ترکیب معادلات ۳ ـ ۵ و ۵ ـ ۵ میتوان بدست آورد . بنابراین از معادلات $\vec{F}=m\vec{a}$ و $W=mg$ نتیجه میشود

$$\vec{F}=\frac{W}{g}\vec{a} \qquad (5-6)$$

کمیت $\frac{W}{g}$ نقش راد ر معادله $F=ma$ بازی میکند و د رحقیقت جرم جسمی است که مقدار وزن آن W است . مثلا شخصی که وزنش د ر نقطه ای با $g=32/0\ ft/sec^2$ برابر ۱۶۰ پوند میباشد دارای جرم

$$m=\frac{W}{g}=(160\,lb)/(32.0\,ft/sec^2)=5.00\ slugs$$

است . توجه کنید که وزن همین شخص د ر نقطه د یگری که $g=32.2\,ft/sec^2$ است برابر

$$W=(5.00\,slugs)(32.2\,ft/sec^2)=161\,lb$$

میباشد .

۱۰ ـ ۵ یك روش استاتیکی برای اندازه گیری نیروها

د ر قسمت ٤ ـ ۵ نیرو را بوسیله اندازه گیری شتاب حاصله د ر یك جسم استاندارد توسط کشید ن آنها یك فنر کشید ه شد ه تعریف کرد یم . این را میتوان روش " د ینامیکی " برای اندازه گیری نیرو نامید . این اگر چه برای تعریف روش مناسبی است ولی ازنظر عملی روش مناسبی برای اندازه گیری نیرو نمیباشد . روش د یگر برای اندازه گیری نیرو ها براساس اندازه گیری تغییر د ر شکل ظاهری (shape) یا ابعاد (sizes) جسم (مثلا یك فنر) د ر اثر نیرو های وارد ه بر آن جسم بی آنکه جسم شتاب پیدا کند ، میباشد . این طریقه را میتوان روش " استاتیك " اندازه گیری نیرو نامید .

اید ه روش استاتیکی بکار برد ن این حقیقت است که وقتی جسمی تحت اثر چند نیرو شتابش صفر است ، جمع برد اری تمام نیرو های وارد ه بجسم بایستی صفرباشد . البته این همان مفهوم قانون اول حرکت میباشد . یك نیروی تنها که بجسمی وارد میشود شتابی ایجاد خواهد کرد . این شتاب را میتوان با بکار برد ن نیروی د یگری بجسم که از نظر مقدار همان

است ولی در جهت مخالف اثرمیکند برابر صفر نمود . عملا سعی میکنیم جسم را ساکن نگهداریم . حال اگر نیروئی را بعنوان نیروی واحد انتخاب کنیم ، میتوانیم نیروها را اندازه بگیریم . مثلا کشش زمین روی جسم استاندارد ی در نقطه معینی را میتوان نیروی واحد در نظر گرفت . وسیله ای که اغلب برای اندازه گیری نیرو باین طریق بکار میرود ترازوی فنری است . این وسیله تشکیل شده از یك فنر پیچیده که در انتهای آن عقربه ای است که میتواند در مقابل خط کشی حرکت کند ، نیروئی که بترازو وارد میشود طول فنر را تغییر میدهد . اگر جسمی که یك پوند وزن دارد از فنر آویزان شود فنر آنقدر کشیده میشود تا کشش فنر روی جسم از نظر مقدار مساوی ولی در خلاف جهت وزن آن بشود . در این حال یك علامت ۱/۰۰ پوند روی خط کش در مقابل عقربه میگذاریم . بهمین طریق وزنهائی برابر ۲/۰۰ پوند ، ۳/۰۰ پوند وغیره را میتوان بفنر آویزان نمود و علامتهای مربوط بآنهارا در روی خط کش گذارد . باین طریق فنر مدرج میگردد . البته ، فرض میکنیم که نیروئی که بفنر وارد میشود وقتیکه عقربه در جای معینی میایستد همیشه یکسان است . حال میتوان این ترازوی مدرج را نه فقط برای اندازه گیری کشش زمین روی یك جسم ، بلکه برای اندازه گیری هر نیروی مجهول مناسب بکار برد .

قانون سوم با مهارت در این روش استاتیکی بکار رفته است زیرا فرض کرده ایم که نیروئی که توسط فنر بر جسم وارد میشود از نظر مقدار برابر نیروئی است که جسم بفنر وارد میکند . این نیروی آخر نیروئی است که میخواهیم اندازه بگیریم .

۵-۱۱ - بعضی کاربرد های قوانین حرکت نیوتن

در اینجا مفید بنظر میرسد که چند روش برای حل مسائل مکانیك کلاسیك ذکر کنیم و آنهارا باذکر چند مثال روشن سازیم . قانون دوم نیوتن بیان میکند که جمع برداری تمام نیروهائی که برجسمی وارد میشوند مساوی حاصلضرب جرم آن در شتابش میباشد . بنابراین قدم اول در حل مسائل عبارت است از: (۱) شناخت جسمی که در مسئله بحرکت آن اشاره شده است . این مطلب گرچه بدیهی بنظر میرسد ولی واضح نبودن این که چه چیزی بعنوان "جسم"

انتخاب شده سرچشمه اصلی اشتباهات میباشد . (۲) پس از انتخاب جسم توجه خود را - معطوف به اشیائی که در محیط قرار دارند میکنیم، زیرا این اشیاء (سطوح شیبدار، فنر، ریسمان ، زمین وغیره) روی جسم نیروهائی وارد میکنند . ماهیت این نیروها بایستی برای ما روشن باشد . (۳) قدم بعد این است که یك دستگاه مقایسه مناسب (دستگاه اینرسی) انتخاب کنیم . مبداء و جهات محورهای مختصات را بایستی طوری انتخاب کنیم که تا حد امکان کار ما را در قدم بعدی ساده تر کند . (٤) حال یك دیاگرام از جسم تنها تشکیل میدهیم که دستگاه مقایسه و تمام نیروهائی که برجسم اثرمیکنند را نشان بدهد . این دیاگرام را دیاگرام "جسم آزاد" (free body) مینامند . (٥) بالاخره قانون دوم نیوتن را بفرم معادله ۲ - ٥ برای هر کدام از مولفه های نیرو و شتاب بکار میبریم .

مثالهای زیر روشهای تحلیلی بکار رفته در کاربرد قوانین حرکت نیوتن را نشان میدهند. هر جسم را مانند ذره ای بجرم م معین در نظر میگیریم ، در اینصورت میتوان فرض نمود که نیروهای وارده بر آن در یك نقطه اثر میکنند . فرض میکنیم که جرم ریسمانها وقرقره ها صرفنظر کردنی است . اگرچه بعضی حالات که برای تحلیل انتخاب شده ممکن است ساده و مصنوعی بنظر برسند ولی اینها برای حالات واقعی و جالب نمونه های مناسبی میباشند . بعلاوه مطلب مهم این است که متد تحلیلی که موضوع اصلی آموزش است در تمام موارد برای مسائل مدرن وسائل مشکل مکانیك کلاسیك (حتی فرستادن کشتی فضائی به مریخ) قابل استفاده میباشد .

■ مثال ۳ - شکل a ٤ - ٥ وزنه W راکه بریسمانهائی آویزان است نشان میدهد . - فرض کنیم که گرهی که در نقطه تقاطع سه ریسمان است "جسم" باشد . این جسم تحت اثر سه نیروئی که در شکل b ٥ - ٤ نشان داده شده اند در حال سکون باقی میماند . فرض کنیم که مقدار یکی از این نیروها بما داده شده است ، چگونه میتوانیم مقادیر سایر نیروها را پیدا کنیم ؟ $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_B$ و $\vec{F}_C$ تمامی نیروهائی هستند که برجسم اثرمیکنند . چون جسم شتاب ندارد (در واقع در حال سکون است) ، $\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_C=0$ با انتخاب محورهای x و y آنطور که نشان داده شده میتوانیم این معادله برداری را با بکاربردن معادله ۲ - ٥ بصورت

سه معادله اسکالر بنویسیم :

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$
$$F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} = 0$$

سومین معادله اسکالر که برای محور z هاست عبارت است از

$$F_{Az} = F_{Bz} = F_{Cz} = 0$$

یعنی تمام بردارها در صفحه $x-y$ قرار دارند وبنابراین مولفه z وجود ندارند ، از روی شکل می بینیم که

$$F_{Ax} = -F_A \cos 30^\circ = -0.866 F_A$$
$$F_{Ay} = F_A \sin 30^\circ = 0.500\ F_A$$
$$F_{Bx} = F_B \cos 45^\circ = 0.707 F_B$$
$$F_{By} = F_B \cos 45^\circ = 0.707 F_B$$

همچنین

$$F_{Cy} = -F_C = -W$$

یرا عمل ریسمان C صرفا انتقال نیرو از یك انتهای آن بانتهای دیگرش که محل تقاطع ریسمانها است میباشد . با قرار دادن این نتایج در معادلات اصلی بدست میآوریم :

$$-0.866 F_A + 0.707 F_B = 0$$
$$0.500 F_A + 0.707 F_B - W = 0$$

اگر بزرگی یکی از این سه نیرو داده شده باشد ، میتوان این معادلات را برای دو نیروی دیگر حل نمود .

مثلا اگر $W = 100\ lb$ باشد بدست میآوریم $F_B = 89.6\ lb$ و $F_A = 73.3\ lb$

مثال ٤- میخواهیم حرکت یك قطعه چوب یا فلز را روی سطح مورب صافی بررسی کنیم .

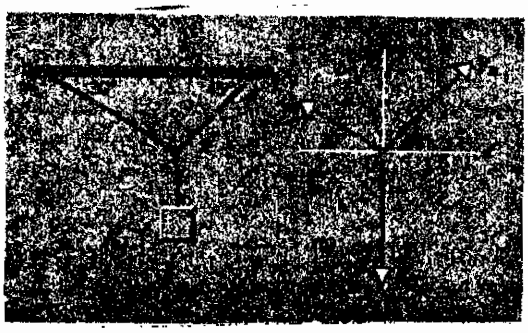
(الف) " حالت استاتیك " : یك سطح مورب داریم که زاویه θ با افق میسازد ، در روی آن جسمی بجرم m توسط ریسمانی که بدیوار قائم متصل میباشد بحال سکون نگهداشته شده است (شکل a ٥ - ٥) نیروهائیکه برجسم اثرمیکنند در شکل b ٥- ٥ نشان داده شده است .

$\vec{F}_1$ نیروئی است که توسط ریسمان بر جسم وارد میشود ، $m\vec{g}$ نیروئی است که زمیـــــن برجسم وارد میکند یعنی وزنش و $\vec{F}_2$ نیروئی است که توسط سطح شیبدار برجسم وارد میشود . $\vec{F}_2$ که نیروی قائم Normal نامیده میشود عمود برسطح تماس است زیرا نیروی اصطکاکی بین سطوح وجود ندارد . [نیروی قائم یك نمونه از نیروهای "قیدی" (constraining) است ، یعنی نیروئی است که آزادی حرکت جسم را محدود میکند . این یك نیروی الاستیك است که از تغییرشکلهای کوچك دو جسم که با هم در تماس هستند (و هیچوقت مطابق تصور ماکامــلا سخت نمیباشند) ناشی میشود] . اگر نیروی اصطکاك وجود میداشت ، $\vec{F}_2$ دارای مولفه دیگری بموازات سطح مورب میبود . چون منظور ما تحلیل حرکت جسم است لذا تمام نیروهائی راکه برآن جسم اثرمیکنند انتخاب مینمائیم . دانشجویان توجه خواهندکرد که جسم مطابق اصل عمل و عکس العمل نیروهائی به سایراشیاء محیطش (ریسمان ، زمین سطح شیبدار) وارد میکند ولی البته لزومی ندارد که این نیروها درتعیین حرکت جسم منظور شوند زیرا آنهابر جسم اثــر نمیکنند .

فرض‌کنیم θ و m داده شده اند . چگونه میتوانیم $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را بدست آوریــــم ؟ چون جسم شتاب ندارد لذا

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+m\vec{g}=0$$

مناسب است که محور x دستگاه مقایسه خود را امتداد سطح شیبدار و محور y را عمود برآن اختیارکنیم (شکل b ۵-۵) . بااین انتخاب محورها فقط یك نیرو یعنی $m\vec{g}$ ، بایستـــی



شکل ۴ ـ ۵ . مثال ۳ - (a) ـ جرمی مطابق شکل بوسیله ریسمان آویزان شده است . (b) ـ یك دیاگرام "جسم آزاد" که تمام نیروهای وارد برگره را نشان میدهد . ریسمان بدون وزن فرض شــده است .

برای حل مساله به مولفه هایش تجزیه شود . دومعادله اسکالری که دراثر تجزیه $m\vec{g}$ درامتداد x و y بدست میآیند عبارتنداز

$$F_1 - mg\sin\theta = 0$$
$$F_2 - mg\cos\theta = 0$$

که ازآنها اگر θ و m داده شده باشند F_1 و F_2 رامیتوان بدست آورد .

(ب) " حالت دینامیکی " : حال فرض کنیم که ریسمان قطع شود . دراین موقع نیروی $\vec{F_1}$ یعنی کشش ریسمان روی جسم حذف میشود . منتجه نیرو روی جسم دیگر صفرنبوده وجسم شتاب پیدا خواهدکرد . شتابش چقدراست ؟

ازمعادله ۲-۵ داریم $F_x = a_x m$ و $F_y = a_y m$. بااستفاده ازاین روابط داریم

$$F_2 - mg\cos\theta = ma_y = 0$$
$$-mg\sin\theta = ma_x$$

که ازآن نتیجه میشود

$$a_x = -g\sin\theta \qquad a_y = 0$$

شتاب بطرف پائین سطح شیبدار بهزرگی $g\sin\theta$ میباشد .

مثال ۵

شکل ۶-۵ a یك قطعه چوب یافلز بجرم m_1 رانشان میدهد که روی سطح افقـــی همواری قرارداردوتوسط ریسمانی بجرم m_2 که ازقرقره ای آویزان است متصل میباشد . فرض میکنیم که قرقره جرم نداشته وبدون اصطکاك باشد و فقط برای تغییر جهت کشش ریسمان در آن نقطه بکار برود . شتاب سیستم وکشش ریسمان راحساب کنید .

فرض میکنیم جسم بجرم m_1 رابعنوان جسمی که حرکتش مورنظراست اختیارکنیم . نیروهائی که باین جسم (که مثل یك ذره درنظرگرفته میشود) واردمیگردند درشکل ۶-۵ b نشان داده شده اند . $\vec{T}$ یعنی کشش ریسمان جسم رابطرف راست میکشد ، $m_1\vec{g}$ عبارتست ازکشش بسمت پائین ازطرف زمین برجسم و $\vec{N}$ نیروی عمودی است که توسط سطح صاف روی جسم وارد

میشود . جسم فقط درامتداد x شتاب خواهد یافت بنابراین $a_{1y}=0$ است ومیتوان نوشت

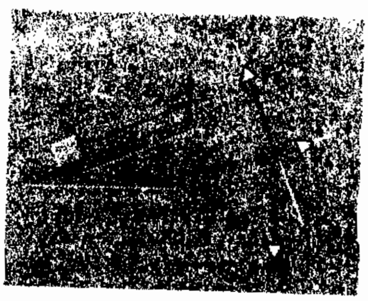
$$N - m_1 g = 0 = m_1 a_{1y}$$

$$T = m_1 a_{1x} \qquad (۵-۷)$$

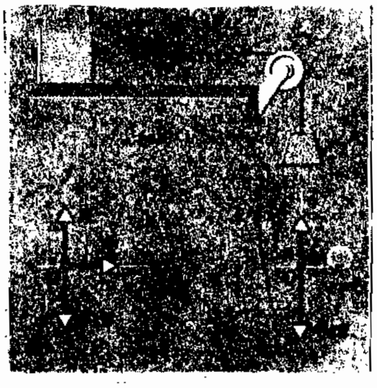
ازاین معادلات نتیجه میگیریم که $N = m_1 g$ میباشد . چون T رانمیدانیم درنتیجه نمیتوانیم a_{1x} رابدست آورد .

برای تعیین T بایستی حرکت جسم m_2 رادرنظر بگیریم . نیروهائی که بر m_2 اثرمیکنند در شکل ۵-۶c نشان داده شده اند . چون ریسمان وجسم شتاب دارند نمیتوانیم نتیجه بگیریم که T مساوی $m_2 g$ است ، درواقع اگر T معادل $m_2 g$ میبود نیروی منتجه روی m_2 صفرمی بود ، آنگاه این شرط که سیستم شتاب نداشته باشد برقرارمیبود ، معادله حرکت برای جسم معلق عبارت است از

$$m_2 g - T = m_2 a_{2y} \qquad (۵-۸)$$



شکل ۵-۵ . مثال ۴-(a) - قطعه فلزی برروی یک سطح شیب داربوسیله ریسمانی نگهداشته شده است . (b) - یک دیاگرام " جسم آزاد " که تمام نیروهای وارد برقطعه رانشان میدهد .



شکل ۵-۶ . مثال ۵- (a) - دوجرم بوسیله ریسمانی بهم متصل شده اند . m_1 برروی یک میزصاف قراردارد و m_2 بطورآزاد آویزان است . (b) - دیاگرام "جسم آزاد" برای m_1 که تمام نیروهای وارد برآن رانشان میدهد (c) - دیاگرام مشابهی برای m_2

جهت کشش در ریسمان در نقطه ای که قرقره قرار دارد تغییر میکند زیرا ریسمان طول ثابتی دارد ،

پس واضح است که $a_{2y} = a_{1x}$

بنابراین میتوان شتاب سیستم را برای سهولت به a نشان داد . پس از معادلات ۷-۵ و ۸-۵ بدست میآوریم .

$$m_2 g - T = m_2 a \qquad (۵-۹)$$

و

$$T = m_1 a$$

اینها نتیجه میدهند

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a \qquad (۵-۱۰)$$

یا

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (۵-۱۱)$$

که شتاب سیستم a وکشش ریسمان T رامیدهند .

توجه کنید که کشش در ریسمان همیشه کوچکتر از $m_2 g$ میباشد . این مطلب از رابطه ۱۱-۵ که میتوان آنرا بصورت

$$T = m_2 g \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

نوشت واضح است .

همچنین توجه کنید که a همیشه کوچکتر از g یعنی شتاب جاذبه میباشد . فقط وقتی m_1 مساوی صفرباشد ، یعنی ابدا" جسمی روی میز وجود نداشته باشد $a = g$ است (بنا برمعادله ۱۰-۵) . دراین مورد $T = 0$ است (بنابرمعادله ۹-۵) . میتوان معادله ۱۰-۵ رابروش ساده ای تفسیرکرد . نیروی خالص موازنه نشده که روی سیستم (بجرم $m_1 + m_2$) اثر میکند برابر $m_2 g$ است . درنتیجه از رابطه $F = ma$ ، مستقیما" معادله ۱۰-۵ را بدست میآوریم .

برای روشن شدن مطلب ، فرض کنیم $m_1=2.0\ Kg$ و $m_2=1.0\ Kg$

دراینصورت داریم

$$a=\frac{m_2}{m_1+m_2}g=\frac{1}{3}g=3.3\ meters/sec^2$$

و

$$T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g=\left(\frac{2}{3}Kg\right)\left(9.8\ meters/sec^2\right)=6.5\ nt$$

مثال ٦

دوجرم نامساوی توسط ریسمانی که از روی یك قرقره وزن وبدون اصطکاك میگذرد بهم متصل شده اند (همانطور که درشکل ۷-۵ نشان داده شده است) . فرض میکنیم m_2 بزرگتر از m_1 باشد . کشش درریسمان وشتاب جرمها راپیدا کنید .

شتاب بطرف بالا رامثبت فرض میکنیم . اگر شتاب m_1 برابر a باشد ، شتاب بایستی $-a$ باشد . نیروهائی که روی m_1 و m_2 اثرمیکنند درشکل b ۷-۵ نشان داده شده اند که درآن T کشش درریسمان میباشد . معادله حرکت برای m_1 عبارت است از

$$T-m_1g=m_1a$$

وبرای m_2 عبارت است از

$$T-m_2g=-m_2a$$

باترکیب این معادلات بدست میآوریم

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g \qquad (۵-۱۲)$$

و

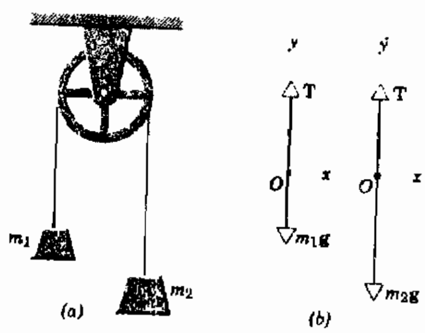
$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

مثلا اگر $m_2=2.0\ slugs$ و $m_1=1.0\ slugs$ باشد

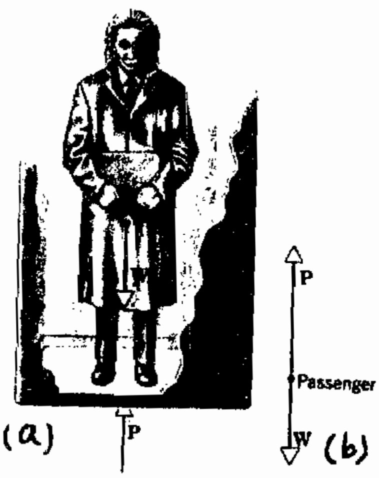
$$a=(32/3.0)ft/sec^2=1.3g$$

$$T=(4/3)(32)\ slugs\times ft/sec^2=43\ lb$$

توجه کنید که همیشه بزرگی T حد واسط بین وزن جرم m_1 (در این مثال $32\ lb$) و وزن جرم m_2 (در این مثال $64\ lb$) میباشد . و این چیزیست که انتظار داریم زیرا T بایستی از $m_1 g$ تجاوز کند تا به جرم m_1 شتاب بطرف بالا بدهد و $m_2 g$ بایستی از T تجاوز کند تا جرم m_2 شتاب بطرف پائین داشته باشد . در مورد خاصی که $m_1 = m_2$ است بدست میآوریم $a = 0$ و $T = m_1 g = m_2 g$ که همان نتیجه استاتیکی است که انتظارش را داریم.



شکل ۷-۵ مثال ۶- (a)- دو جرم نامساوی بوسیله ریسمانی از قرقره ای معلقند (ماشین آت وود- Atwood Machine) . (b) - دیاگرام "جسم آزاد" برای m_1 و m_2



شکل ۸-۵ . مثال ۷- (a) - مسافری برکفه آسانسور ایستاده است.(b) - دیاگرام جسم آزاد برای مسافر .

مثال ۷- یك آسانسور راکه درامتداد قائم باشتاب $\vec{a}$ حرکت میکند درنظر میگیریم . میخواهیم نیروئی راکه توسط یك مسافر به کف آسانسور وارد میشود پیداکنیم .

شتاب بطرف بالا رامثبت وبطرف پائین رامنفی اختیارمیکنیم . بنابراین شتاب مثبت دراین مورد به معنی این است که یاآسانسور باسرعت زیاد شونده بطرف بالا ویاباسرعت کند شونده بطرف پائین حرکت میکند . شتاب منفی یعنی آسانسور باسرعت کند شونده بطرف بالا ویاباسرعت تند شونده بطرف پائین حرکت میکند .

بنابرقانون سوم نیروئی که توسط مسافر به کف آسانسور وارد میشود همیشه ازنظر مقدار مساوی ولی در خلاف جهت نیروئی است که کف آسانسور برمسافر وارد میکند . بنابراین میتوانیم نیروی عمل ویاعکس العمل را محاسبه کنیم . وقتیکه نیروهای وارد برمسافر را بکار بریم نیروی عکس العمل راحساب میکنیم . وقتیکه نیروی وارده برکف آسانسور رابکار ببریم نیروی عمل راحساب میکنیم .

حالت این مساله درشکل ۸-۵ نشان داده شده است : وزن حقیقی مسافر $\vec{W}$ است ونیروئی

که توسط کف آسانسور براووارد میشود $\vec{P}$ نامیده میشود که این نیرو وزن ظاهری (apparent wieght) او در آسانسور شتابدار میباشد . منتجه نیروهائی که براواثرمیکنند $\vec{W}+\vec{P}$ میباشد . نیروها وقتی که بطرف بالا باشند مثبت اختیار خواهند شد . ازقانون دوم حرکت داریم

$$F = ma$$

یا

$$P - W = ma \qquad (۵-۱۳)$$

که درآن m جرم مسافر و a شتاب او (وآسانسور) میباشد .

مثلا" فرض کنیم وزن مسافر ۱۶۰ پوند وشتابش ۲/۰ ft/sec^2 باشد دراینصورت داریم

$$m = \frac{W}{g} = \frac{160\ lb}{32\ ft/sec^2} = 5\ slugs$$

وازمعادله ۱۳-۵ داریم

$$P - 160\ lb = (5.0\ slugs)(2.0\ ft/sec^2)$$

یا

$$P = \text{وزن ظاهری} = 170\ lb$$

اگرمیخواستیم این نیرو راباقراردادن مسافر روی ترازوی فنری مدرجی که درون آسانسور ثابت نگهداشته شده است (ویاازسقف آن آویزان است) مستقیما" اندازه بگیریم ، درمی یافتیم که برای شخصی که وزن حقیقیش ۱۶۰ پوند است ترازو ۱۷۰ پوند رانشان میدهد . مسافر حس میکند که دربن حالت نسبت به حالتی که اووآسانسور ساکن هستند بانیروی بیشتری به کـــف آسانسور فشاروارد میآورد (یاکف آسانسور بانیروی بیشتری روی اوبطرف بالا فشار وارد میسازد) . این احساس درآسانسوری که ازحالت سکون باشتاب شروع بحرکت میکند ، بهرکسی دست میدهد .

اگرشتاب مثلا" ۲/۰ ft/sec^2 بطرف پائین اختیار شده بود آنوقت $a = -2/0\ ft/sec^2$ وبرای مسافر $P = 150\ lb$ میبود . شخص مسافرکه وزن حقیقتش ۱۶۰ lb است حس

میکند که درین حالت نسبت به حالتی که او وآسانسور ساکن هستند با نیروی کمتری بکف آسانسور فشاروارد میآورد .

اگرسیم آسانسور قطع شود وآسانسور آزادانه باشتاب $a=-g$ سقوط بنماید درآنوقت P مساوی $W+\left(\frac{W}{g}\right)(-g)=0$ خواهد بود . درآنوقت مسافروکف بریکدیگر نیروئی دارد نمیکنند ووزن ظاهری مسافرکه بوسیله ترازونشان داده داده میشود صفر خواهد بود .

۱۲-۵- نیروهای اصطکاک

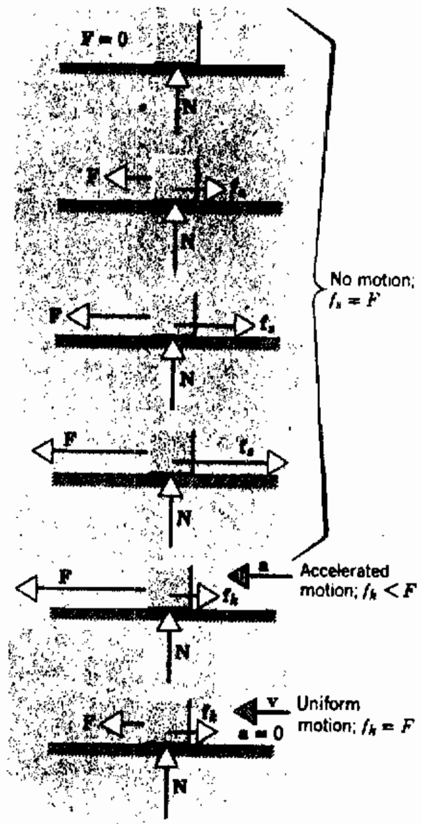
بعنوان یك منبع رجوع جامع ومفید به

"The Friction of Solids" by E. H. Freitag, in *Contemporary Physics,* Vol. 2, 1961, p. 198,

مراجعه کنید . همچنین مقاله " Friction " دردایره المعارف بریتانیارا ببینید .

در اینجا دسته مهمی ازنیروها راتحت عنوان اصطکاك دسته بندی شده اند مورد بررسی قرارمیدهیم ازآنجائیکه یك قانون عمومی وبسیار ساده بیشتر نیروهای اصطکاك را توجیه میکنــــد ، بسیاری ازمسائل اصطکاك را میتوان بدون درك منبع اصلی این نیروهاحل کرد قبل ازاینکه درباره کاربرد قانون نیروی اصطکاك صحبت کنیم ابتدابطورخلاصه قدری درباره ایده های مختلف درباره منبع اصلی وطبیعت بین نیروها بحث خواهیم کرد . اگریك قطعه چوبی فلزی بجرم m باسرعت اولیه $\vec{v}_0$ درامتداد یك میزافقی رهاکنیم این جسم بالاخره ساکن میشود . یعنی وقتی کــه مشغول حرکت است دارای شتاب متوسط $\vec{a}$ است که درجهت عکس حرکت میباشد . اگر (دریك دستگاه مقایسه اینرسی) ملاحظه کنیم که جسم دارای شتاب است همیشه برحسب تعریف از روی قانون دوم نیوتن نیروئی رابااین حرکت ارتباط میدهیم . دراین مورد میگوئیم که میز یك " نیـــروی اصطکاکی (force of friction) " بجسم لغزنده وارد میکندکه مقدارمتوسط آن $m\vec{a}$ است .

درواقع وقتی که یك سطح جسمی روی یك سطح جسم دیگری میلغزد ، هریك نیــــــروی



شکل (۹-۵) . وقتی نیروی $\vec{F}$ وارده برجسم برنیروهای اصطکاک فائق میشود ، جسم بحرکت درمیآید . درچهارشکل اول نیروی $\vec{F}$ بتدریج ازصفرافزایش مییابد تااینکه بمقدار $\mu_s N$ میرسد . تااین لحظه حرکتی روی نمیدهد زیرا نیروی اصطکاک همواره درست معادل نیروی وارده برجسم بوده است . بمحض اینکه F از $\mu_s N$ بیشتر میگردد جسم شروع بحرکت میکند ، چنانکه درشکل پنجم نشان داده شده است . بطورکلی $\mu_s N > \mu_k N$ این باعث میشود که تعادل نیروها برهم خورده ونیروی برآیندی درجهت چپ برجسم وارد گشته وجسم دراین جهت شتاب پیداکند . درشکل آخر F آنقدر کم شده است که مساوی $\mu_k N$ بشود . برآیند نیروها صفراست، درنتیجه جسم باسرعت ثابت بحرکت خود ادامه میدهد .

اصطکاکی به موازات این سطوح بر دیگری وارد میکند . نیروی اصطکاک که بجسمی وارد میشود در جهت مخالف حرکتش نسبت بجسم دیگرمیباشد . نیروهای اصطکاک خود بخود باحرکت مخالفت میکنند وهیچوقت بآن کمك نمی نمایند . حتی اگر حرکت نسبی وجود نداشته باشد نیروهای اصطکاک ممکن است بین دو سطح وجود داشته باشند .

اگرچه تاکنون ازاثرات نیروهای اصطکاک صرفنظر کرده ایم ، اصطکاک درزندگی روزانه ما بسیار اهمیت دارد . اگربگذاریم نیروی اصطکاك تنهاعمل نماید باعث سکون هرمیله دوران کننده خواهد گردید . دریك اتومبیل ، حدود ۲۰٪ قدرت موتورصرف برطرف نمودن نیروی اصطکاك میگردد (دریك موتور توربو جت فقط ۱٪ ویا ۲٪) . اصطکاك باعث سائیدن وبرش قسمتهـــای متحرك میشود وانرژی زیادی صرف تقلیل آن میگردد . ازطرف دیگر بدون اصطکاك ، نمیتوانستیم مانند حالا راه برویم ، نمیتوانستیم مدادی رادردست نگهداریم واگرمیتوانستیم ازعهده نوشتـــن برنمی آمدیم ووسائل نقلیه چرخداری که مامیشناسیم وجود نداشت .

میخواهیم بدانیم که چگونه نیروهای اصطکاکی رابرحسب خواص جسم ومحیطش توضیح دهیم ، یعنی میخواهیم قوانین نیرو رابرای نیروی اصطکاکی بدانیم . دراینجا مالغزش(ونه غلتش) یك سطح خشك (صیقل نشده) روی سطح دیگر رادرنظر میگیریم . همانطور که بعداً خواهیـــم دید ، اصطکاك ازنظرمیکروسکپی پدیده خیلی پیچیده ای [بعنوان مثال مراجعه کنید بـــه مقاله Stick and Slip از Ernest Rabinowicz در Scientific American در May 1965]

وقوانین نیروبرای اصطکاك خشك ولغزان تجربی بوده وپیش بینی آنها تقریبی است. این قوانیـن زیبائی ، سادگی ودقت قانون نیروی ثقل (فصل ۱۶) یاقانون نیروی الکترواستاتیك (فصل ۲۲) راندارند . باوجوداین قابل ملاحظه است که ، باتوجه باختلاف فوق العاده زیاد درسطوحی که باآنها برخورد میکنیم ، بسیاری از جنبه های نیروی اصطکاك رامیتوان بطورکیفی براساس چند مکانیسم ساده فهمید .

یك قطعه چوب یافلز راکه روی یك میزافقی بحال سکون قرار دارد درنظر میگیریم (شکل ۹-۵)

فنری بآن متصل میکنیم تابتوانیم نیروی‌لا زم برای‌بحرکت درآوردن آنرا اندازه بگیریم . ملاحظـه میکنیم که اگرنیروی‌کوچکی بکاربریم جسم حرکت نخواهد کرد . دراینحال میگوئیم که نیروی بکاررفته ما بانیروی اصطکاك مخالف که توسط میز برجسم وارد میشود ودرامتداد سطح تماس‌عمل میکنـد تعادل کرده است . حال نیروئی بکار رفته رابتدریج بیشتر میکنیم تابجائی میرسیم که جسـم شروع بحرکت میکند . وقتی حرکت شروع شد ، همین نیروایجاد حرکت شتابدار مینماید . هنگامیکه حرکت آغاز شد نیرو راکم میکنیم تاحرکت جسم یکنواخت (بدون شتاب) شود . نیروئی کـه به جسم دراین حال وارد میشود گرچه ممکنست کوچك باشد ولی صفر نیست .

نیروهای اصطکاکی که بین سطوح ساکن وجود دارد نیروهای" اصطکاك استاتیك " (Static friction) نامیده میشوند . ماکزیمم نیروی اصطکاك استاتیك همان کوچکترین نیروی لازم برای شروع حرکت میباشد . وقتی حرکت شروع شد ، نیروهای اصطکاك که بین سطوح وجود دارد معمولا" کم میشود بطوریکه نیروی کمتری برای ادامه حرکت یکنواخت لازم است . نیروهائی که بین‌سطوحی که درحال حرکت نسبی هستند وجود دارد نیروهای" اصطکاك جنبشی " نامیده میشوند . (Kinematic fr.)

ماکزیمم نیروی اصطکاك استاتیك که بین دو سطح خشك وغیرلغزنده وجود دارد ازاین دو قانون تجربی تبعیت میکند . (۱) این نیرو تاحد زیادی مستقل ازوسعت سطح تماس‌میباشد . (۲) این نیرومتناسب‌بانیروی قائم میباشد . نیروی قائم نیروئی است‌که هرجسم برجسم دیگـر وعمود برسطح تماسشان وارد میکند . این نیرواز تغییرشکل الاستیك اجسام درحال تماس‌ناشی میشود زیرادرواقع اجسام هیچوقت کاملا" سخت نمیباشند . برای یك قطعه چوب یافلز که روی یك میز افقی قرارداردویادرامتداد آن می لغزد مقدارنیروی قائم برابروزن آن میباشد . چون این جسم شتاب‌عمودی ندارد ، میز بایستی نیروئی بجسم واردکند که متوجه بالابوده وازنظر مقدار برابر کشش‌بطرف پائین زمین روی‌جسم ، یعنی‌مساوی وزن قطعه چوب یافلز باشد .

نسبت مقدارماکزیمم نیروی‌اصطکاك استاتیك به مقدارنیروی عمودی ضریب اصطکاك استاتیك برای سطوح مزبورنامیده میشود . اگر f_s مقدارنیروی اصطکاك استاتیك رانمایش دهد میتـوان

نوشت

$$f_s \leq \mu_s N \quad (5-14)$$

که درآن μ_s ضریب اصطکاک استاتیک و N مقدار نیروی قائم میباشند .علامت تساوی فقط وقتی f_s ماکزیمم مقدار خود راد ارد برقرار است .

نیروی اصطکاک جنبشی f_k بین دوسطح خشک وغیرلغزنده ازهمان دو قانون اصطکاک استاتیک تبعیت میکند . (۱) این نیروتقریبا" تاحدود زیادی مستقل ازوسعت سطح تماس است. (۲) متناسب بانیروی قائم میباشد . نیروی اصطکاک جنبشی نیز مطلقا" مستقل از سرعت نسبی دوسطح است .

[دو قانون بالا درمورد اصطکاک باورتجربی توسط لئونارد داوینچی (Leonardo-da-Vinci) (۱۵۱۹-۱۴۵۲) کشف گردیدند ودر ۱۶۹۹ مجددا" یک مهندس فرانسوی بنام آمونتون (G. Amontons) بآنهایی برد . بیان لئونارد داوینچی درباره این دوقانون قابل ملاحظه بود ، زیرادو قرن قبل ازاین که مفهوم نیرو توسط نیوتن توسعه پیدا کند انجام شد .

فرموله کردن لئونارد واین بود :(۱) "اصطکاک ایجاد شده توسط وزن ثابتی ،دارای مقاومت یکسانی درشروع حرکت خواهد بود ، اگرچه تماس ممکن است درپهنا یا طولهای مختلف باشد". (۲) "درصورتیکه وزن دوبرابرشود اصطکاک باعث دوبرابر شدن نیروی لازم برای حرکت میشود" یک دانشمند فرانسوی بنام کولمب (Charles-A. Coulomb) (۱۸۰۶-۱۷۳۶) تجارب زیادی روی اصطکاک انجام داد واختلاف بین اصطکاک استاتیک وجنبشی راخاطرنشان ساخت]

نسبت مقدارنیروی اصطکاک جنبشی بمقدارنیروی قائم ضریب اصطکاک جنبشی نامید میشود اگر f_k بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی رانشان دهد :

$$f_k = \mu_k N \quad (5-15)$$

که درآن μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است .

μ_s و μ_k هردو ثابتهای بدون بعد هستند زیراهرکدام نسبت (مقدار) دونیرومیباشند .

معمولا" برای یك جفت سطح $\mu_K \rangle \mu_S$ است . مقادیر واقعی μ_S و μ_K به ماهیت دو سطح در حال تماس بستگی دارند . μ_S و μ_K هردو میتوانند ازواحد تجاوز کنند ، درحالیکه اغلب از یك کمتر میباشند . توجه کنید که معادلات ٤-۵ و ۵-۵ فقط روابطی بین بزرگی نیروهای قائم و اصطکاکی هستند . این نیروها همیشه درجهت عمود بریکدیگر میباشند .

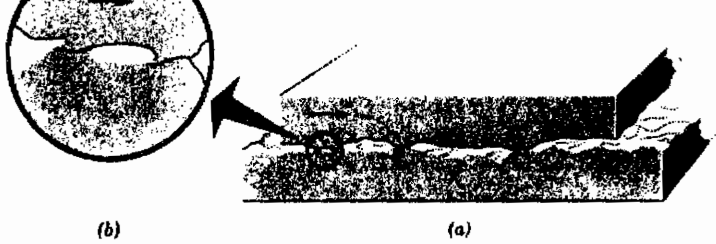
درمقیاس اتمی حتی بهترین سطح صیقلی شده خیلی ازصاف بودن بدوراست میتوان به آسانی دریافت که وقتی دوسطح تماس پیدا میکنند ، سطح میکروسکپی که واقعا" درتماس است خیلی کمتراز سطح ماکروسکپی است که ظاهرا" درتماس میباشد ، درمورد بخصوص نسبت این سطوح بسهولت میتواند مانند یك به ۱۰٤ باشد .

سطح واقعی (میکروسکپی) تماس متناسب با نیروی قائم است زیرا درتماس نقاط تحت فشار زیادی که بآنها وارد میشود تغییر شکل میدهند . خیلی ازنقاط مماس درواقع بیکدیگر "جوش - سرد" (Cold-Welded) میخورند . این پدیده ، "الحاق سطحی" (surface-adhesion) باین علت رخ میدهد که درنقاط مماس مولکولهائی که در دو سطح قراردارند بقدری بیکدیگرنزدیکند که نیروهای بین مولکولی شدیدی بیکدیگر وارد میکنند .

وقتی یك جسم (مثلا" یك فلز) درامتداد جسم دیگری کشیده میشود مقاومت اصطکاکی ناشی ازگسیختگی این الحاقهای سطحی است که دائما" دراثرتماسهای جدید تشکیل میشوند (شکل ۱-۵ راببینید) .

ضریب اصطکاك به عوامل زیادی بستگی دارد ، مثل ماهیّت مواد ، صیقل سطح ، لایه های نازکی که روی سطح وجود دارند . دما ومیزان آلودگی سطح . مثلا" اگردوسطح فلزی راکه کاملا" تمیز شده اند دراطاقکی که کاملا" تخلیه شده است قراردهیم بطوریکه لایه های اکسید سطحی تشکیل نشوند ، ضریب اصطکاك بمقدارخیلی زیادی بالا میرود وسطوح درواقع محکم بیکدیگر "جوش" میخورند . دخول مقدارکمی هوابه اطاقك بطوریکه لایه های اکسید روی سطوح مجاور تشکیل شود ضریب اصطکاك رابه مقدار "عادی" خود تقلیل میدهد .

نیروی اصطکاکی که با غلتیدن جسمی روی جسم دیگر مخالفت میکند خیلی کمتر از نیروی اصطکاکی است که برای حرکت لغزشی وجود دارد ، و این در واقع مزیت چرخ بر وسائل کشیدنی میباشد . این نقصان اصطکاک به میزان زیاد بعلت این حقیقت است که در غلتش تماسهای میکروسکپی جوش خورده " جدا " میگردد در صورتیکه اصطکاک لغزشی این تماسها " بریده " میشود . این امر نیروهای اصطکاکی را تا ۱۰۰۰ برابر ممکن تقلیل دهد .



شکل (۱۰-۵) اصطکاک لغزان - (a) - در این شکل بزرگ شده ، جسم بالائی بر روی جسم پائینی بطرف راست میلغزد . (b) - در یک تصویر بزرگتر از محل تماس دو سطح دو نقطه را که در آن . . . . الحاق سطحی صورت گرفته است نشان میدهد . برای بحرکت درآمدن جسم بالائی نیروئی لازم است تا این الحاق را قطع کند .

در اینجا مثالهائی در مورد کاربرد قانون تجربی نیروی اصطکاک ذکر میشود . فرض میشود که

ضرایب اصطکاک داده شده ثابت باشد . درواقع برای μ_k میتوان مقدارمتوسط خوبی که با مقدار آن ، درهر سرعت دلخواهی اختلاف زیاد ندارد درنظر گرفت .

مثال ۸

اتومبیلی راکه درامتداد جاده مستقیم افقی باسرعت $\vec{V}_0$ حرکت میکند درنظر میگیریم اگرضریب اصطکاک استاتیک بین لاستیک وجاده μ_s باشد ، کوتاهترین مسافتی‌که برای توقف اتومبیل لازم است چقدراست ؟

نیروهائی راکه براتومبیل (که یك ذره فرض میگردد) وارد میشوند درشکل ۱۱-٥ نشان داده شده اند . فرض میشودکه اتومبیل درجهت مثبت محور x حرکت میکند . اگرفرض‌کنیم که f_s نیروی‌ثابتی باشد ، حرکت‌کند شونده ای خواهیم داشت . ازرابطه(معادله ۱٦-۳ را ببینید)

$$V^2 = V_0^2 + 2ax$$

برای سرعت انتهائی $V=0$ بدست میآوریم

$$x = -\frac{V_0^2}{2a}$$

که درآن علامت منها باین معنی است که $\vec{a}$ درجهت منفی x میباشد .

برای تعیین a قانون دوم حرکت‌رابرای مولفه x حرکت بکارمیبریم :

$$-f_s = ma = \frac{W}{g}a \quad \text{یا} \quad a = -g f_s / W$$

ازمولفه y بدست میآوریم

$$N - W = 0 \qquad \text{یا} \qquad N = W$$

بنابراین

$$\mu_s = f_s/N = f_s/W$$

و

$$a = -\mu_s g$$

پس مسافت طی شده قبل ازتوقف عبارت است از

$$x = -V_0^2/2a = V_0^2/2g\mu_s \qquad (۵-۱۶)$$

هرقدر سرعت اولیه بیشتر باشد ، مسافت بیشتری قبل ازتوقف کامل طی میشود ، درواقع ایــــن مسافت با مجذور سرعت اولیه تغییر میکند . همچنین هرچه ضریب اصطکاک استاتیک بین سطوح بیشتر باشد مسافت کمتری تاتوقف کامل طی میشود .

دراین مساله ضریب اصطکاک استاتیک رابجای ضریب اصطکاک لغزشی بکاربرده ایــم ، زیرافرض کرده ایم که بین لاستیکها وجاده لغزشی وجود ندارد . اصطکاک غلتشی صرفنظرنموده ایم. بعلاوه فرض کرده ایم که دراینجا ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیک $(f_s = \mu_s N)$ عمل مینماید زیرامساله کوتاهترین فاصله برای توقف راجستجو مینماید . البته واضحست که بانیروی اصطکــــاک استاتیک کمتر مسافت طی شده قبل ازتوقف بیشترخواهدبود . طریقه ترمزکردن درست که دراینجا لازم است عبارت ازاین است که ماشین رادرست درحد سرخوردن نگهداریم. اگرسطح صاف باشد وازترمز بطورکامل استفاده شود ممکن است لغزش اتفاق بیفتد . دراین مورد μ_k جایگزین μ_s شده ومسافت طی شده قبل از توقف کامل (همانطورکه ازمعادله ۱۶-۵ دیده میشود) زیادتر میگردد .

بعنوان یك مثال معین ، اگر $V_0 = 60\,\frac{mile}{hr} = 88\,ft/sec$ و $\mu_s = 0.6$ (یك مقدار نمونه) باشد ، بدست میآوریم

$$x = \frac{V_0^2}{2g\mu_s} = \frac{(88\,ft/sec)^2}{2 \times 0.6 \times (32\,ft/sec^2)} = 200\,ft$$

توجه کنیدکه جرم ماشین درمعادله ۱۶-۵ ظاهرنمیشود . چگونه میتوانید تجربه" سنگین کردن " ماشین رابمنظور زیادترکردن ایمنی برای رانندگی درجاده های یخ زده توضیح دهید ؟

حال دانشجویان بایستی تحقیق کنندکه چگونه نیروهای اصطکاک بطور اصولی نتایج مثالهای بخش ۱۱-۵ راتغییر میدهند .

۵-۱۳ دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

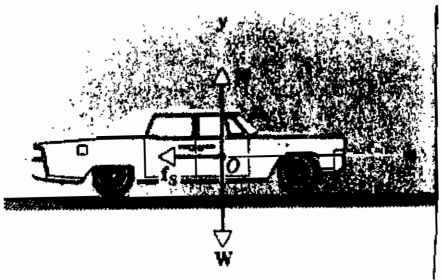
در قسمت ۴-۱ خاطرنشان کردیم که اگرجسمی دارای حرکت یکنواختی باسرعت V روی دایره ای بشعاع r باشد ، شتاب متوجه بمرکز $\vec{a}$ که مقدارش $\frac{V^2}{r}$ است برآن وارد میشود . جهت $\vec{a}$ همیشه درامتداد شعاع وبطرف مرکز دوران میباشد . بنابراین $\vec{a}$ بردار متغیری است زیرا اگرچه مقدارش ثابت میماند ، ولی جهتش وقتی حرکت ادامه پیدا میکند دائماً تغییرمینماید .

دراینجا یادآور میشویم که لزومی ندارد حرکتی درامتداد شتاب وجود داشته باشد . عموماً رابطه ثابتی بین جهات شتاب $\vec{a}$ وسرعت $\vec{V}$ ذره وجود ندارد (همانطور که شکل ۴-۶ نشان میدهد) . برای ذره ای که دارای حرکت دورانی یکنواخت است ، شتاب $\vec{a}$ وسرعت $\vec{V}$ همیشه بریکدیگر عمود میباشد .

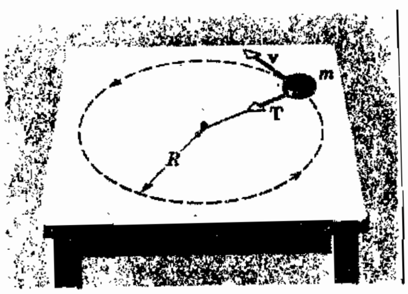
بهرجسم شتابداری بایستی یک نیروی $\vec{F}$ وارد شود که توسط قانون دوم نیوتن $(\vec{F}=m\vec{a})$ تعریف میشود . بنابراین (بافرض اینکه دریک سیستم اینرسی هستیم) اگر ملاحظه کنیم کهجسمی دارای حرکت دورانی یکنواخت است ، میتوانیم مطمئن باشیم که نیروی منتجهٔ $\vec{F}$ که مقدارش توسط

$$F=ma=\frac{mV^2}{r}$$

داده میشود برجسم اثرمیکند وجسم درحال تعادل نمیباشد . جهت $\vec{F}$ درهرلحظه بایستی درجهت $\vec{a}$ درآن لحظه باشد ، یعنی درامتداد شعاع وبطرف داخل باشد . ماهمواره بایستی قادربه محاسبه این نیرو بااشاره بجسم معینی ازمحیط که نیروبجسم درحال دوران شتابدار وارد میکند باشیم . اگرجسمی که دارای حرکت دورانی یکنواخت است یک دیسک که درانتهای نخی قرارگرفته است باشد واین حرکت روی یک میزافقی بدون اصطکاک انجام گیرد (مثل شکل ۵-۱۲) ، نیروی $\vec{F}$ وارد بدیسک توسط کشش $\vec{T}$ درریسم ایجاد میشود . این نیروی $\vec{T}$ تنهانیروئی است که بر دیسک اثر میکند . این نیرو باعث تغییرپیوسته جهت سرعت (وایجاد شتاب) در حرکت دورانی دیسک میشود . $\vec{T}$ همیشه متوجه بطرف سنجاق واقع درمرکز بوده ومقدارش $\frac{mV^2}{r}$ میباشد . اگر ریسمان ازجائی که به دیسک وصل میشود قطع گردد ، دیگرنیروئی که بردیسک اثر کند وجود نخواهد داشت وآنوقت دیسک باسرعت ثابتی درامتداد خط مماس بردایره(درنقطه



شکل (۱۱-۵) - مثال ۸- نیروهای وارد بر اتومبیلی که دارای شتاب کاهنده است.



شکل (۱۲-۵) . دیسکی بجرم m با تندی ثابت روی یک مسیر دایره ای برروی سطح افقی بدون اصطکاکی درحرکت است . تنها نیروی افقی وارد برجرم m نیروی مرکزی $\vec{T}$ است که توسط نخ برجرم m وارد میشود .

قطع ریسمان) حرکت خواهد کرد . پس برای اینکه دیسک را در حال حرکت دورانی نگه داریم ، باید نیروئی بآن وارد شود که آنرا بطرف مرکز بکشد .

نیروهائی که باعث حرکت دورانی یکنواخت میگردند نیروهای مرکزی (centripetal force) نامیده میشوند زیرا آنها متوجه بطرف مرکز حرکت دورانی میباشند . البته نامیدن نیروئی بعنوان " مرکزی " فقط معینش این است که این نیرو در امتداد شعاع وبطرف مرکز میباشد ، واین اسم چیزی درمورد ماهیت نیرو یا جسمی که آنرا وارد آورده است نمیگوید . بنابراین برای دیسک درحال دوران درشکل ۲ ۱–۵ ، نیروی مرکزی نیروی الاستیکی است که توسط ریسمان وارد میشود ، برای ماه که دورزمین درمداری تقریبا " دایره ای میچرخد ، نیروی مرکزی نیروی جاذبه زمین روی ماه است ، وبرای الکترونی که دورهسته اتم میچرخد نیروی مرکزی ازنوع الکترو استاتیک میباشد . نیروی مرکزی نوع جدیدی ازنیرو نیست بلکه طریقه ای است برای شرح چگونگی تغییرات زمانی نیروهائی که باجسام مخصوصی درمحیط نسبت داده شده اند بنابراین یك نیرو میتواند مرکزی والاستیك ، مرکزی وثقلی ، مرکزی والکترواستاتیك وغیره باشد . حال چند نمونه ازنیروهای مرکزرا درنظر میگیریم .

<u>مثال ۹</u>

آونگ مخروطی ، شکل a ۱۳–۵ جسم کوچکی بجرم m رانشان میدهد که بانتهای ریسمانی بطول L وصل شده وباسرعت ثابت V روی یك دایره افقی میچرخد . وقتیکه جسم به اطراف تاب میخورد ریسمان سطح یك مخروط راطی میکند . این وسیله " آونگ مخروطی " (conical pend) نام دارد . زمان لازم برای یك دور چرخش کامل راحساب کنید .

اگرریسمان زاویه θ باخط قائم بسازد ، شعاع دایره مسیر $R=L\sin\theta$ میباشد نیروهائی که بجسم باجرم m اثر میکنند عبارتند ازوزن آن $\vec{W}$ و $\vec{T}$ کشش ریسمان (همانطور که درشکل b ۱۳–۵ نشان داده شده است) . واضح است که $\vec{T}+\vec{W}\neq 0$ میباشد . پس نیروی منتجه ای که روی جسم اثرمیکند صفرنیست واین همان چیزی است که انتظارداریم زیرا نیروئی برای نگهداشتن حرکت دورانی یکنواخت لازم است .

میتوانیم $\vec{T}$ را درهرلحظه بیک مولفه شعاعی ویک مولفه قائم تجزیه کنیم

$$T_r = T\sin\theta \quad \text{و} \quad T_z = T\cos\theta$$

ولی چون جسم شتاب قائم ندارد

$$T_z - W = 0 \quad \text{ولی} \quad W = mg$$

بنابراین

$$T\cos\theta = mg$$

شتاب شعاعی مساوی $\frac{V^2}{R}$ میباشد . این شتاب توسط T_r ایجاد شده است که مولفه شعاعی بوده ونیروی مرکزی است که بر m اثر میکند . پس

$$T_r = T\sin\theta = m\frac{V^2}{R}$$

باتقسیم این رابطه بررابطه قبل خواهیم داشت

$$\tan\theta = \frac{V^2}{Rg} \qquad \text{یا} \qquad V^2 = Rg\tan\theta$$

که سرعت ثابت وزنه رامیدهد . اگر t زمان یک دوران کامل جسم باشد داریم

$$V = \frac{2\pi R}{t} = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

$$t = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{R/(g\tan\theta)}$$

ولی $R = L\sin\theta$ پس

$$t = 2\pi\sqrt{L\cos\theta/g}$$

این معادله رابطه بین L ، t و θ رامیدهد . توجه کنید که t پریود حرکت نامیده میشود به m بستگی ندارد .

اگر $L = 3.0\,ft$ و $\theta = 30^\circ$ باشد پریود حرکت چقدراست ؟ دراین مورد داریم

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(3\,ft)(0.866)}{32\,ft/sec^2}}$$

مثال ۱۰

" گردونه " The rotor : دربسیاری ازپارکهای تفریحی وسیله ای بنام گردونه می یابیم . گردونه یك اطاق استوانه ای توخالی است که میتواند بدور محور قائم مرکزی خود بچرخش واداشته شود . شخصی وارد گردونه شده ودررامی بندد کنار دیوارمی ایستد . گردونه بتدریج سرعتش ازحال سکون زیاد میشود تاوقتیکه درسرعتی که ازقبل معین شده است کف گردونه بطرف پائین باز میشود وچاه عمیقی آشکار میگردد . شخص مسافر نمی افتد وچسبیده بدیوارگردونه باقی میماند . ضریب اصطکاك لازم برای ممانعت ازسقوط راپیدا کنید .

نیروهائیکه برمسافروارد میشوند درشکل ٤-١٥ نمایش داده شده است. $\vec{W}$ وزن مسافر $\vec{f_s}$ نیروی اصطکاك استاتیك بین مسافرودیواره گردونه و $\vec{P}$ نیروی مرکزی لازمی است که ازطرف دیوار برای نگهداری حرکت مسافر روی یك دایره براو وارد میشود . فرض کنیم شعاع گردونه R وتندی نهائی مسافر V باشد . چون مسافر حرکت قائم نداشته ولی شتاب شعاعی $\frac{V^2}{R}$ درهر لحظه براووارد میشود داریم

$$f_s - W = 0$$

و

$$P(=ma) = \left(\frac{W}{g}\right)\left(\frac{V^2}{R}\right)$$

اگر μ_s ضریب اصطکاك استاتیك لازم بین مسافر ودیواره برای ممانعت ازسرخوردن باشد داریم

$$f_s = W = \mu_s P \qquad \text{و} \qquad f_s = \mu_s P$$

یا

$$\mu_s = \frac{W}{P} = \frac{gR}{V^2}$$

این معادله کمترین ضریب اصطکاك استاتیك لازم رابرای ممانعت ازلغزش یك ذره که روی دیوار گردونه بدواری باتندی V وشعاع R قرارداردمیدهد . توجه کنیدکه نتیجه ارتباطی بوزن مسافر ندارد . بطورعملی ، ضریب اصطکاك بین مواد بافته شده لباس ودیواره معمولی گردونه (پارچه کرباسی) حدود ٤٠ ٪ میباشد . برای گردونه معمولی شعاع برابر ٧/٠ فوت است ، بنابراین تندی بایستی حدود ft/sec ٢٤ (١٦ miles/sec) ویابیشتر باشد .

مثال ۱۱

فرض کنیم مکعب شکل ۵a ۱-۵ نمایش یک اتومبیل یا واگن راه آهن باشد که با تندی ثابت V روی جاده مسطح خمیده ای بشعاع انحناء R حرکت میکند . علاوه بر دو نیروی قائم یعنی نیروهای ثقل $\vec{W}$ نیروی قائم سطح $\vec{N}$ یک نیروی افقی مرکزی $\vec{P}$ بر او واگن وارد میشود . در مورد اتومبیل نیروی مرکزی توسط نیروی اصطکاک که از طرف جاده به لاستیك وارد میشود . ایجاد میگردد . درمورد واگن راه آهن این نیروی مرکزی توسط ریلهاکه یك نیروی مماس به کناره داخلی چرخهای واگن وارد میکنند ایجاد میشود . لکن نمیتوان با اطمینان فرض نمود که این نیروهای جانبی همیشه به میزان کافی وجود خواهند داشت. بعلاوه این نیروها موجب فرسایش بی جهت میشوند . ازاین رو جاده را روی قوس مورب میسازند (همانطور که درشکل ۵b ۱-۵ نشان داده شده است) . دراین مورد نیروی قائم سطح $\vec{N}$ نه تنها مانند قبل یك مولفه عمودی دارد بلکه دارای یك مولفه افقی نیز میباشد که باعث نیروی مرکزی لازم برای حرکت دورانی یکنواخت میگردد ، بنابراین باشیب مناسب جاده هیچ نیروی کناری دیگری لازم نیست. زاویه شیب به طریق زیر بدست میآید . شتاب قائم وجود ندارد بنابراین

$$N\cos\theta = W$$

نیروی مرکزی برابر $N\sin\theta$ است بنابراین $N\sin\theta = \frac{mV^2}{R}$. باتقسیم معادله آخری به قبلی وباقراردادن $W = mg$ خواهیم داشت

$$\tan\theta = \frac{V^2}{Rg}$$

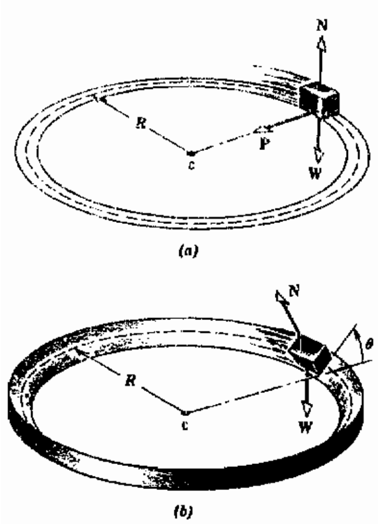
توجه کنید که زاویه شیب بستگی بتندی واگن وشعاع انحناء جاده دارد . برای شعاع انحناء معینی زاویه شیب برای یك تندی متوسط درنظر گرفته میشود . اغلب جاده های قوس دار با نشانه هائی علامت گذاری میشوند که تندی مناسب را برای شیب آن جاده مشخص میکند .

دانشجویان بایستی فرمول شیب رابرای حالتهای حدی $V = 0$ ، $R \to \infty$ ، V بزرگ و R کوچك مورد بررسی قرار دهند . همچنین بایستی شباهت زیاد بین شکل ۱۳-۵ (درمثال ۹) وشکل ۵b ۱-۵ (دراین مثال) مورد توجه واقع شود .

شکل (۵-۱۳) ، مثال ۹- (a) - جرم m که بنخی بطول L آویخته شده است برروی یک مسیر دایره ای تاب میخورد . نخ سطح یک مخروط راکه نیم زاویه راس آن θ است میپیماید ؛

(b) - دیاگرام " جسم آزاد " برای جرم m .

شکل (۵-۱٤) . نیروهای وارد بریک شخص دریک گردونه بشعاع R



شکل ۵-۱۵

فصـــل ششـــم

۱-٦ مقدمـــــه

مساله اساسی دینامیك ذره عبارت از این است که با دانستن نیروهائیکه به ذره وارد میشوند نوع حرکت ذره راپیدا کنیم . ازجمله ذره چگونه حرکت خواهد کرد " منظور این است کـه چگونه موقعیت ذره با زمان تغییرمیکند . اگر حرکت یك بعدی باشد ، مساله عبارت است ازیافتن x بصورت تابعی اززمان یعنی $x(t)$. دردوفصل قبلی این مساله رابرای حالت خاص یـك نیروی ثابت حل نمودیم . متدی که بکار رفت ازاین قراراست . نیروی منتجه $\vec{F}$ راکه بذره وارد میشود توسط قانون نیروی مربوط پیدا میکنیم . سپس $\vec{F}$ وجرم ذره m رادرقانون حرکت نیوتن قرارمیدهیم وبدینطریق شتاب $\vec{a}$ ذره رابدست میآوریم

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

اگرنیروی $\vec{F}$ وجرم m ثابت باشند ، شتاب $\vec{a}$ بایستی ثابت باشد . محور x رادرامتداد این شتاب ثابت اختیار میکنیم. سپس میتوان سرعت ذره راازمعادله ۱۲-۳ بدست آورد ،

$$v = v_0 + at$$

ومکان ذره ازمعادله ۱۰-۳ (با $x_0 = 0$) بدست میآید :

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

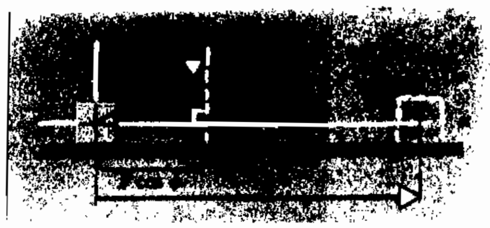
توجه کنید که برای سهولت وراحتی اندیس x رادراین معادلات حذف کرده ایم. معادلهآخر آنچه را که مامعمولا میخواهیم بدانیم یعنی $x(t)$ مکان ذره رابصورت تابعی از زمان ، مستقیما " بمامیدهد . درحالیکه نیروئیکه بذره وارد میشود ثابت نباشد مساله مشکل تر میباشد . درچنیـن موردی بازهم مانند قبل شتاب ذره ازقانون دوم حرکت نیوتن بدست میآید . برای بدست آوردن سرعت یامکان ذره دیگر نمیتوان فرمولهائی راکه سابقا " برای شتاب ثابت بدست آوردیم بکاربرد زیراحالا شتاب مقدارثابتی نیست . برای حل چنین مسائلی عمل ریاضی انتگرال گیری را ،که در این فصل درنظر میگیریم ، بکار میبریم .

ماتوجه خود را معطوف به نیروهائی مینمائیم که با موقعیت ذره در محیطش تغییرمینمایند . این نوع نیرود رفیزیک معمول میباشد . نیروهای ثقلی بین اجسامی مثل خورشید وزمین یا زمین و ماه ونیروی وارده توسط یك فنرکشیده شده به جسمی که بآن متصل است ازاین جمله میباشند . روشی‌که برای تعیین حرکت ذره وارده تحت تاثیر چنین نیروئی است مارابه مفهوم کاروانرژی جنبشی وبه بیان قضیه کار ـ انرژی که سمت برجسته ومرکزی‌این فصل است هدایت میکند . درفصل ۷ نظریه عمومی تری ازانرژی رادرنظر خواهیم گرفت که متضمن‌قانون بقاء انرژی میباشد ، مفهومی‌که رل بزرگی را درتکامل فیزیك بازی کرده است.

۲-۶- کارانجام شده توسط یك نیروی ثابت

ذره ای راکه نیروئی بآن وارد میشود درنظر میگیریم . درساده ترین حالت نیروی ثابت بوده وحرکت روی یك خط مستقیم درامتداد نیرو صورت میگیرد . دراین حالت کارانجام شده روی ذره توسط نیرو را برابر حاصلضرب نیروی F درفاصله d که ذره طی کرده است تعریف میکنیم . نیروی ثابتی که بر یك ذره اثرمیکند ممکن است درامتداد حرکت ذره وارد نشود . دراین حالت کارانجام شده روی ذره توسط نیرو رابرابر حاصلضرب مولفه نیرو درامتداد حرکت در فاصله طی شده d تعریف مینمائیم . در شکل ۱-۶ نیروی ثابت $\vec{F}$ که زاویه φ بامحور X میسازد بذره ای وارد میشود وتغییرمکان ذره درامتداد محور X برابر d است . اگر W کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ طی این تغییرمکان باشد ، مطابق تعریف ،

$$W = (F\cos\varphi)d \qquad (۱-۶)$$



شکل ۱-۶- نیروی $\vec{F}$ باعث میشود قطعه تغییرمکان $\vec{d}$ بدهد . مولفه ای ازنیروی $\vec{F}$ که کارانجام میدهد اندازه ای برابر $F\cos\varphi$ دارد ، کارانجام شده $Fd\cos\varphi\ (=\vec{F}\cdot\vec{d})$ است .

البته نیروهای دیگری به ذره ای که باین طریق حرکت میکند وارد میشود (مثلاً نیروی وزنش ونیروی اصطکاک وارده توسط سطح) یك ذره که فقط تحت تاثیر یك نیروقرارد ارد ممکنست تغییرمکانش درجهت این نیرو نباشد (مثل حرکت پرتابی) . ولی این ذره نمیتواند روی خط مستقیمی غیرازامتداد نیروی وارد حرکت کند . معادله ۱-٦ فقط مربوط به کارانجام شده توسط نیروی معین $\vec{F}$ میباشد . کارانجام شده روی ذره توسط نیروهای دیگربایستی جداگانه محاسبه شود . کار انجام شده کلی روی ذره عبارت است از حاصل جمع کارهای انجام شده توسط نیروهای جداگانه.

وقتی که φ صفراست کارانجام شده توسط $\vec{F}$ برابر Fd است که موافق بامعادله قبلی میباشد . وقتیکه φ برابر 90° است ، نیرومولفه ای درجهت حرکت ندارد وبنابراین کاری روی جسم انجام نمیدهد . مثلاً یك نیروی عمودی که جسم رادرفاصله ثابتی نسبت بزمین نگه میدارد روی جسم کاری انجام نمیدهد حتی اگر جسم بالای زمین بطورافقی حرکت کند . همچنین یك نیروی مرکزی که به جسمی درحال حرکت وارد میشود روی آن جسم کاری انجام نمیدهد زیرانیرو همیشه عمود برجهت حرکت جسم میباشد . البته ، نیروروی جسمی که حرکت نمیکند کارانجام نمیدهد ، زیرا تغییرمکان صفرمیباشد .

توجه کنید که معادله ۱-٦ را میشود بشکل $(F\cos\varphi)d$ ویا $F(d\cos\varphi)$ نوشت . این موضوع بیان میکند که کار را بدو طریق میتوان محاسبه کرد : با بزرگی تغییر مکان ضرب میکنیم با بزرگی نیرو را در مولفه تغییر مکان در جهت نیرو ضرب مینمایم . این دو روش همیشه نتیجه واحدی دارد .

کاریك کمیت اسکالر است ، اگرچه دوکمیتی که درتعریف آن بکارمیروند یعنی نیروو تغییر مکان ، بردار میباشند . درفصل ٤-٢ حاصلضرب اسکالر دوبردار را بصورت کمیت اسکالری که نتیجه حاصلضرب بزرگی یك بردار درمولفه بردار دوم روی جهت اولی است تعریف کردیم . در آن بخش وعده دادیم که بزودی به کمیات فیزیکی که مثل ضرب اسکالر عمل میکنند برخواهیم خورد . معادله ۱-٦ نشان میدهد که کارچنین کمیتی است به اصطلاح جبر برداری این معادله رامیتوان بصورت

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (٦-٢)$$

نوشت که در آن نقطه معرف یك ضرب اسکالرمیباشد . معادله ۲-٦ برای $\vec{F}$ و $\vec{d}$ نظیرمعادله ۲-۱۱ برای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ میباشد .

کارمیتواند مثبت ویامنفی باشد . اگرذره که برآن نیروئی وارد میشود مولفه حرکتی برخلاف جهت نیرود اشته باشد ، کارانجام شده توسط آن نیرومنفی است . این مربوط بیك زاویه منفرجه بین بردارهای نیروو جابجائی میباشد . مثلاً وقتی شخصی جسمی رابکف اطاق پائین میآورد کاری که توسط نیروی بسمت بالای دست شخص که جسم را نگه داشته است ، صورت میگیرد منفی است. دراین مورد φ برابر ۱۸۰° است زیرا $\vec{F}$ بسمت بالاو $\vec{d}$ بسمت پائین است .

کارآنچنانکه ماآنرا تعریف کرده ایم (معادله ۲-٦) مفهوم مفیدی درفیزیك میباشد . تعریف بخصوص ما ازکلمه کارارتباطی بااستعمال محاوره ای آن ندارد واین ممکن است مغشوش کننده باشد . شخصی که جسم سنگینی رادرهوادرحال سکون نگه میدارد ممکن است بگوید که کار سختی انجام میدهد وازنظر فیزیو لوژیکی ممکن است اوکارسختی راانجام دهد . ولی ازنظـــر فیزیکی میگوئیم که او کاری انجام نمیدهد ، واین رابااین دلیل میگوئیم که نیروی بکاررفته تغییـــر مکانی راباعث نمیشود . درفیزیك کلمه کار فقط به مفهوم دقیق معادله ۲-٦ بکاربرده میشود . دربسیاری ازرشته های علمی کلماتی ازمکالمات روزمره بعاریت گرفته میشوند ولی برای مفهـــوم بخصوص بکارمیروند . مثلاً کلمات basic و cell معانی کاملاً مختلفی درشیمی وزیست شناسی بامحاوره روزانه ما دارد .

واحد کارعبارت ازکاری است که توسط واحد نیرو درحرکت دادن جسمی باندازه واحـــد مسافت درجهت نیروانجام میشود .

درسیستم MKS واحد کاربرابر یك نیوتن مترکه یك ژول نامیده میشود میباشد . درسیستم مهندسی انگلستان واحد کاریك فوت ـ پوند است . درسیستم cgs واحد کار برابریك دین ـ سانتیمتر که ارگ نامیده میشود میباشد . بابکار بردن روابط بین نیوتن ، دین ، پوند ، متـــر سانتیمتر وفوت بدست میآوریم .

$$1\ \text{Joule} = 10^{7}\ \text{erg} = 0.7376\ \text{ft-lb}$$

مثـال ۱

یك جسم چوبی یافلزی بجرم $10/0\ kg$ رامیخواهیم ازیك سطح شیبدار که طول آن ۵/۰۰ متر وارتفاع نوك آن تازمین ۳/۰۰ متر است بالا ببریم . بافرض اینکه سطوح بـــدون اصطکاك باشند ، چه مقدارکاربایستی توسط نیروئی موازی سطح شیبدار که جسم رابا سرعت ثابتی ببالا میکشاند درمحلی‌که $= 9/80\ meters/sec^2$ است انجام شود .

این وضعیت درشکل ۶-۲ a نشان داده است . نیروهائی که بجسم وارد میشوند درشکل ۶-۲b نشان داده شده اند . ابتدابایستی p یعنی بزرگی نیروئی که جسم رابه بالای سطـــح شیبدار میکشاند پیداکنیم . چون حرکت شتابدار نیست ، منتجه نیروی موازی سطح بایستـــی صفر باشد ،بنابراین

$$p - mg \sin\theta = 0$$

یا

$$p = mg \sin\theta = (10/0\ kg)(9/8\ meters/sec^2)\left(\frac{3}{5}\right) = 58/8\ nt.$$

پس کارانجام شده توسط $\vec{p}$ بنابرمعادله ۱-۶ (با $\varphi = 0^\circ$) برابراست با

$$W = \vec{p} \cdot \vec{d} = pd \cos 0 = pd = (58/8\ nt)(5/00\ meters) = 294\ Joule$$

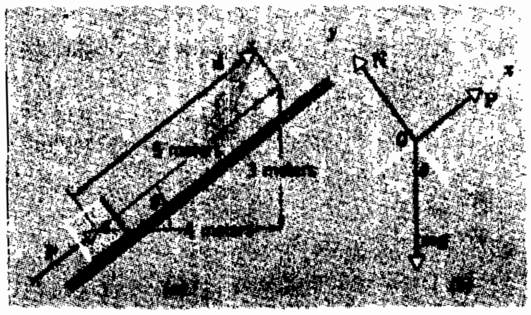
اگرشخصی بخواهد بدون بکاربردن سطح شیبدار جسم رابلندکند ، کاری راکه انجام میدهــد برابر نیروی قائم mg درفاصله قائم میباشد ، یا

$$(98/0\ nt)(3/00\ meters) = 294\ Joule$$

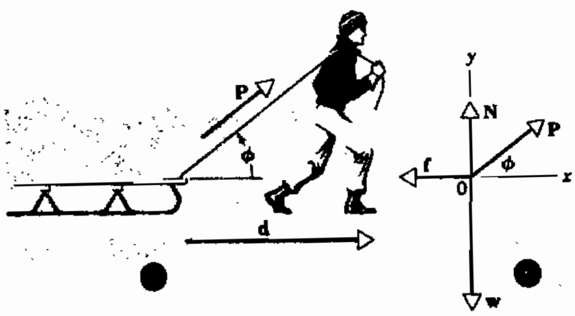
که همان مقدار قبلی است . تنهااختلاف این است که باسطح شیبدار شخص میتواند بانیروئی کمتر $(p = 58/8\ nt)$ ازنیروئی که بدون سطح شیب دار لازم است $(mg = 98/0\ nt)$ جسم رابالا ببرد ،واماازطرف دیگرمسافتی که اومجبوراست جسم را روی سطح شیبدار بکشانــــد (۵/۰۰ متر) بیشتر ازمسافتی است که بایستی مستقیما" جسم رابالا ببرد (۳/۰۰ متر) .

مثال ۲

بچه ای سورتمه بوزن ۱۰ پوند را باندازه ۳۰ فوت روی یك سطح افقی باسرعت ثابـــت



شکل ٢-٦ - مثال ١- (a) - نیروی $\vec{p}$ قطعه ای رابرروی سطح شیبداری که باافق زاویه میسازد بسمت بالا تغییرمکان $\vec{d}$ میدهد . (b) - یك دیاگرام جسم - آزاد برای قطعه .



شکل ٣-٦- مثال ٢- (a) پسری باکشیدن طنابی که باافق زاویه φ میسازد بانیروی $\vec{p}$ سورتمه ای رابانداازه $\vec{d}$ تغییرمکان میدهد . (b) -یك دیاگرام جسم آزاد برای سورتمه

میکشد . اگر ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۲۰ باشد ونیروی کشش زاویه ۴۵ باافق تشکیل دهد او چه کاری انجام میدهد ؟

وضعیت درشکل a ۳-۶ نشان داده شده ونیروهائی که برسورتمه وارد میشوند درشکل ۶-۳ b نشان داده شده اند . $\vec{p}$ نیروی کشش بچه است ، $\vec{\omega}$ وزن سورتمه ، $\vec{f}$ نیروی اصطکاک و $\vec{N}$ نیروی عمودی وارده ازسطح به سورتمه میباشد . کارانجام شده توسط بچه روی سورتمه عبارتست از

$$W = \vec{p}\cdot\vec{d} = pd\cos\varphi$$

برای انجام این محاسبه ابتدا بایستی $\vec{p}$ راکه مقدارش داده نشده است معین کرد . برای بدست آوردن $\vec{p}$ به دیاگرام نیرو مراجعه میکنیم .

سورتمه شتاب ندارد بنابراین ازقانون دوم حرکت بدست میآوریم

$$p\cos\varphi - f = 0$$

و

$$p\sin\varphi + N - \omega = 0$$

همچنین میدانیم که f و N توسط رابطه $f = \mu_k N$ بهم مربوطند . این سه معادله شامل سه مجهول P ، f و N میباشند . برای یافتن p ، f و N راازاین معادلات حذف کرده و معادله باقیمانده رابرای p حل میکنیم . دانشجویان بایستی نشان دهند که

$$P = \mu_k \omega / (\cos\varphi + \mu_k \sin\varphi)$$

برای $\mu_k = ۰/۲۰$ و $\omega = ۱۰\,lb$ و $\varphi = ۴۵^\circ$ داریم

$$p = (۰/۲۰)(۱۰\,lb)(۰/۷۰۷ + ۰/۱۴۱) = ۲/۴\ lb$$

پس برای $d = ۳۰\,ft$ ، کارانجام شده توسط بچه روی سورتمه برابراست با

$$W = pd\cos\varphi = (۲/۴\ lb)(۳۰\,ft)(۰/۷۰۷) = ۵۱\ ft\text{-}lb$$

مولفه قائم کشش $\vec{p}$ بچه کاری روی سورتمه انجام نمیدهد . توجه کنید که این مولفه نیروی قائم بین سورتمه وزمین $(N = \omega - P\sin\varphi)$ راکم میکند ودرنتیجه بزرگی نیروی اصطکاک $(f = \mu_k N)$ راکم مینماید .

اگرچه سورتمه بطورافقی بکشد (درعوض زاویه 45°) آیاکار انجام شده بیشتر ، کمتر ویاهمانقدر است ؟ آیا نیروهای دیگری که برسورتمه وارد میشوند کارانجام میدهند ؟

۶-۳ ـ کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر ـ حالت یک بعدی

حال کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر را درنظر میگیریم . ابتدا نیروئی رادرنظر میگیریم که فقط ازنظر بزرگی تغییرکند . فرض کنیم نیرو توسط تابعی ازمکان $F(X)$ داده شده باشد وفرض میکنیم که نیرو درجهت X وارد شود . فرض‌کنیم که جسم توسط این نیرودرجهت X حرکت کند . کارانجام شده توسط این نیروی متغیر درتغییرمکان جسم از X_1 به X_2 چقدراست ؟

درشکل ۴-۶ نیروبرحسب X رسم شده است . تغییرمکان کلی رابه تعداد زیادیفواصل مساوی کوچک X تقسیم میکنیم (شکل ۴a-۶) . تغییر مکان کوچک X از X_1 تا $X_1+\Delta X$ را درنظر میگیریم . درطی این تغییرمکان کوچک نیروی F تقریبا" مقدار ثابتی داشته وکاری که انجام میدهد یعنی ΔW تقریبا" مساوی است با

$$\Delta W = F\,\Delta X \qquad (۶-۳)$$

که درآن F مقدار نیرو در X_1 است . همچنین طی تغییرمکان از $X_1+\Delta X$ تا $X_1+2\Delta X$ نیروی F تقریبا" مقدارثابتی داشته وکاریکه انجام میدهد تقریبا" $\Delta W = F\Delta X$ است که درآن F مقدار نیرودر $X_1+\Delta X$ است . کار کلی انجام شده توسط F درتغییر مکان جسم از X_1 تا X_2 یعنی W_{12} تقریبا" برابرمجموع تعداد زیادیجمله های شبیه معادله ۳-۶ است که درآن F مقدارهای مختلفی برای‌هرجمله دارد . پس

$$W_{12} = \sum_{X_1}^{X_2} F\,\Delta X \qquad (۶-۴)$$

که درآن حرف یونانی *Sigma* (Σ) نماینده جمع روی تمام فواصل از X_1 تا X_2 میباشد . برای دقت بیشتر میتوان تغییرمکان کلی از X_1 تا X_2 رابتعداد فواصل مساویبیشتری

مانند شکل b ٤-٦ تقسیم نمود بطوریکه ΔX کوچکتربوده ومقدار F درابتدای هرفاصله بیشتر معرف مقدار واقعی آن درهرفاصله میباشد . واضح است که میتوان دقت بیشتری باکوچکترکردن ΔX (وبالنتیجه زیادکردن تعداد فواصل) بدست آورد . میتوان نتیجه دقیق کارانجام شده توسط $\vec{F}$ رابامیل دادن ΔX بسمت صفروتعداد فواصل بسمت بینهایت بدست آورد .
پس نتیجه دقیق عبارت است از

$$W_{12} = \lim_{\Delta X \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta X \qquad (٦-٥)$$

رابطه

$$\lim_{\Delta X \to 0} \sum_{X_1}^{X_2} F \Delta X = \int_{X_1}^{X_2} F dX$$

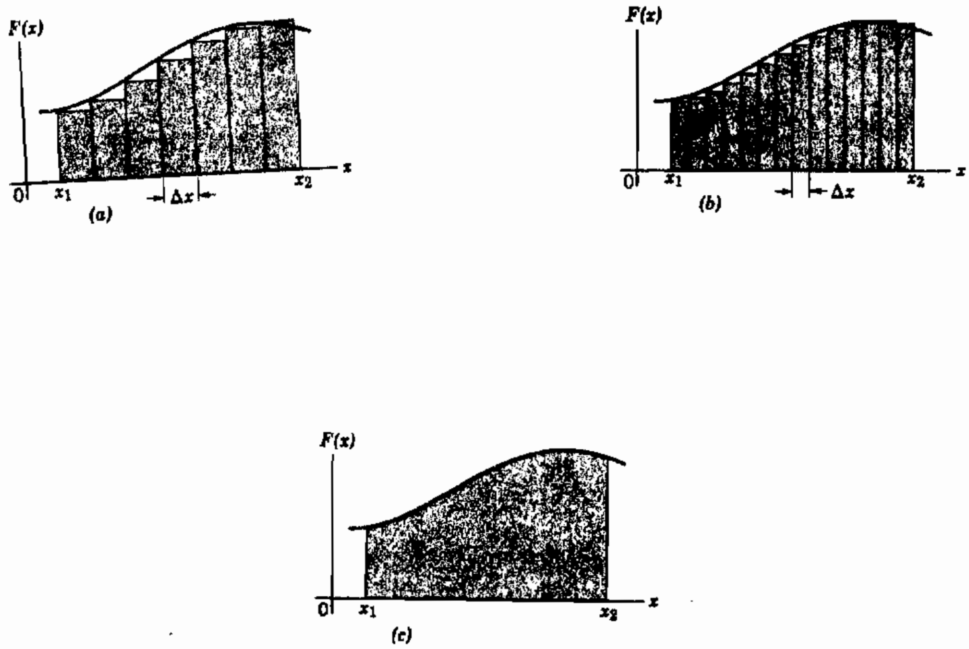
همانطورکه دانشجویان دردرس آنالیز آموخته اند ، عبارت است ازتعریف انتگرال $\vec{F}$ نسبت به X از X_1 تا X_2 . عدداً این مقدارد قیقاً برابرمساحت بین منحنی نیرو ومحور X بین دوحد X_1 و X_2 (شکل c ٤-٦) میباشد . بنابراین ازنظر ترسیمی یك انتگرال میتواند توسط یك سطح تعبیر شود . علامت $\int$ یك S (ازلغت Sum) تغییرشکل یافته است ومیتواند نشانه عمل انتگرال گیری باشد . بنابراین کارکلی انجام شده توسط $\vec{F}$ درتغییرمکان جسم از X_1 به X_2 رامیتوان بصورت زیرنوشت ،

$$W_{12} = \int_{X_1}^{X_2} F(x) dX \qquad (٦-٦)$$

مثلاً فنری رادرنظر میگیریم که بدیواری متصل شده است . محور (افقی) فنر رامحور X انتخاب کرده وبعداً $X=0$ رامنطبق برانتهای فنردرحالت عادیش که کشیده نشده است اختیـــار میکنیم . فرض میکنیم که جهت مثبت X بطرف خارج دیوارباشد . درآنچه میآید فرض میکنیـــم که فنر راچنان باآهستگی بکشیم که همواره درحال تعادل باشد ($\vec{a}=0$) .

اگرفنر راطوری بکشیم که انتهای آن بنقطه X بیاید ، فنر برعاملی که این کار رامیکند نیروئی وارد میکند که باتقریب خوبی توسط

$$F = -KX \qquad (٦-٧)$$



شکل ٤-٦- محاسبه $F(x)dx$ منتهی میشود به یافتن سطح زیر منحنی $F(x)$ بین دو حد X_1 و X_2 . اینکار رامیتوان بطورتقریبی مطابق شکل (a) باتقسیم سطح میان چند نوار، هریك به پهنای ΔX ، انجام داد . سپس سطح مستطیل هارامیتوان جمع کرد تامقدارتقریبی سطح راپیدا کرد . درشکل (b) نوارها باریك ترندوچون خطا دربالای مستطیل کمتر شده است اندازه سطح دقیق تر میشود . درشکل (c) پهنای نوارهابینهایت کوچك است . چون وقتی که پهنای نوارها بسمت صفر میرود مقدارخطای دربالای مستطیلها نیزبسمت صفر میرود اندازه گیری سطح دقیق است .

داده میشود ،که در آن K مقدار ثابتی است که ثابت نیروی فنر نامیده میشود . معادله ۷-۶ قانون نیرو برای فنر است . جهت نیرو همواره با تغییرمکان انتهای فنر از مبدا مخالفت میکند .
وقتی که فنر کشیده شود ، $x>0$ و F منفی است ، ووقتیکه فنر فشرده شود ، $x<0$ و F مثبت میباشد . نیروی وارده توسط فنر یك نیروی برگردانند ه است بدین معنی که همواره به طرف مبدا میباشد . فنرهای حقیقی درصورتیکه بیشتر از حد معینی کشیده نشوند از معادله ۷-۶ که بقانون هوك $(HOOK)$ معروف است تبعیت میکنند و K را میتوان بعنوان نیروی لازم برای تغییر طول واحد تصورکرد . بنابراین فنرهای سخت دارای مقدار K بزرگ میباشند .

برای کشیدن فنر بایستی نیروئی برابر F' برآن وارد کرد که مساوی ودرجهت خلاف نیروی F است که ازطرف فنر برما وارد میشود . بنابراین نیروی بکاررفته [اگرنیروی بکاررفته بـا $F'=KX$ فرق داشت یك نیروی منتجه غیرمتعادل برفنر وارد میشد وبالنتیجه فنر دارای شتاب می بود . برای محاسبه کارانجام شده میبایستی دقیقاً معین کنیم که نیروی وارده درهرنقطه چقدر است . نیرو هرقدرکه باشد ، کارانجام شده همیشه برای تغییرمکان یکسانی از X_1 به X_2 مقدار یکسانی است ، مشروط براینکه فنر درابتدا وانتها سرعت یکسانی داشته باشد . بسیـار آسان تر است که نیروی ساده $F'=KX$ را درمحاسبه کارانجام شده بکاربریم . زیرا این نیرو باعث حرکت بدون شتاب خواهد شد . برای اینکه بتوانیم این نیروی ساده را بکار بریم درابتدا مافرض کردیم که حرکت بدون شتاب است]

برابر $F'=KX$ بوده وکارانجام شده توسط نیروی بکاررفته برای کشش فنر بطوریکه انتهـای آن از X_1 به X_2 حرکت کند برابراست با

$$W_{12}=\int_{X_1}^{X_2}F'(X)\,dX=\int_{X_1}^{X_2}(KX)\,dX=\tfrac{1}{2}KX_2^2-\tfrac{1}{2}KX_1^2$$

باقراردادن $X_1=0$ و $X_2=X$ داریم

$$W=\int_0^X(KX)\,dX=\tfrac{1}{2}KX^2 \qquad (۶-۸)$$

این برابر کارانجام شده برای کشیدن فنربانداره x میباشد . توجه کنید که کاربرای فشردن یك فنر باندازه x برابر مقدارکاربرای کشش آن باندازه x است زیراتغییرمکان x درمعادله ۶-۸ به صورت مربع ظاهرمیشود وبنابراین چه x مثبت وچه منفی باشد W مثبت است.

همچنین میتوان این انتگرال رابوسیله محاسبه مساحت بین منحنی نیروتغییرمکان ومحور x از $x=0$ تا $x=X$ تعیین نمود . این بصورت سطح سفیدی درشکل ۶-۵ کشیده شده است این سطح مثلثی بقاعده X وارتفاع KX میباشد . بنابراین سطح سفیدبرابراست با

$$\tfrac{1}{2}(X)(KX)=\tfrac{1}{2}KX^2$$

که موافق بامعادله ۶-۸ میباشد .

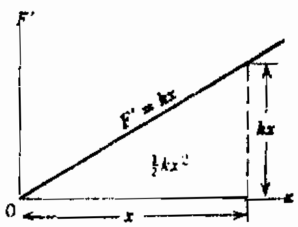
۶-۴- کارانجام شده توسط یك نیروی متغییر- حالت دوبعدی .

نیروی وارده $\vec{F}$ بیك ذره ممکن است ازنظر جهت نیز مانند مقدارتغییر کند ،وذره ممکن است درامتداد یك مسیرمنحنی حرکت نماید . برای محاسبه کاردراین حالت کلی ، مسیر رابه تعداد زیادی تغییرمکانهای کوچك $\Delta\vec{r}$ که هرکدام درامتداد مسیر و در جهت حرکت میباشند تقسیم میکنیم . شکل ۶-۶ دوتغییر مکان اختیار شده برای یك وضعیت بخصوص رانشان میدهد . این شکل همچنین مقدار F وزاویه φ بین $\vec{F}$ و $\Delta\vec{r}$ درهر موقعیت رانشان میدهد . میتوان مقدار کارانجام شده روی ذره حین تغییر مکان $\Delta\vec{r}$ رااز

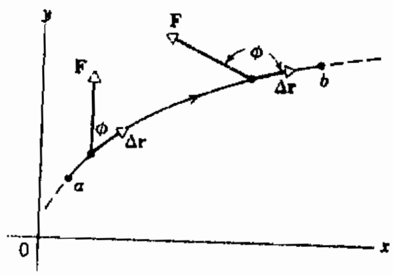
$$dW=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\cos\varphi\,\Delta r \qquad (6-9)$$

بدست آورد . کارانجام شده توسط نیروی متغیر $\vec{F}$ روی ذره وقتی ذره مثلا از a به b درشکل ۶-۶ حرکت میکند باتقریب زیاد ازجمع کردن کارهای انجام شده درفواصل کوچك $\Delta\vec{r}$ بدست میآید . وقتی فواصل $\Delta\vec{r}$ کوچکتر شوند ، بجای آن میتوان دیفرانسیل های $d\vec{r}$ را قرارداد وعمل جمع کردن روی این فواصل رامیتوان بانتگرال تبدیل کرد ، هم چنانکه درمعادله ۶-۶ انجام دادیم . بنابراین کار از

$$W_{ab}=\int_a^b\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b F\cos\varphi\,dr \qquad (6-10)$$



شکل ۵-۶ ـ هنگام کشیدن فنرنیروی وارده برابر $F'=kx$ است . سطح زیرمنحنی نیرو برابرکارانجام شده برای کشیدن فنر به فاصله X است ومیتوان آنرا با انتگرال گیری یابوسیله فرمول سطح مثلث پیدا کرد .



شکل ۶-۶- چگونه $\vec{F}$ و φ میتوانند درطول مسیر تغییرکنند . وقتی که $\Delta\vec{r}\to 0$ میتوان آنرا با دیفرانسیل $d\vec{r}$ که همواره درجهت سرعت جسم متحرک قرار دارد ، چون $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ ، درتمام نقاط مماس برمسیر است ، جایگزین کرد .

بدست میآید .

این انتگرال رانمیتوان محاسبه کرد مگراینکه چگونگی تغییرات F و φ (درمعادله (۶-۱)) ازنقطه بنقطه دیگرمسیرمعلوم باشد ، F و φ هردوتابع مختصات X و Y ذره درشکل ۶-۶ میباشند نامیده میشوند .

٦-٥ انرژی جنبشی وقضیه کار ـ انرژی

درمثالهای قبلی برای کارانجام شده توسط نیروها ، راجع باجسام بدون شتاب بحث کردیم . دراین موارد نیروی منتجه ای که بجسم وارد میشود صفراست. حال فرض میکنیم که نیروی منتجه وارده بجسم صفرنباشد بطوریکه جسم شتاب داشته باشد . شرایط ازهمه نظر همان شرایطی است که وقتی یک نیروی تنهای خنثی نشده بجسم وارد شود .

ساده ترین موردیکه میتوان درنظرگرفت حالت یک نیروی منتجه ثابت $\vec{F}$ است . این نیرو وقتی به ذره ای بجرم m وارد شود شتاب ثابت $\vec{a}$ ایجاد خواهد کرد . محور X راامتداد مشترک $\vec{F}$ و $\vec{a}$ فرض میکنیم . کارانجام شده روی این ذره بعلت تغییرمکان X چقدراست؟ برای شتاب ثابت داریم

$$a=\frac{V-V_0}{t}$$

و

$$X=\frac{V+V_0}{۲}t$$

که به ترتیب معادلات ۳-۱۲ و ۳-۱٤ میباشند که درآنها برای سهولت اندیس X راحذف کرده ایم و درمعادله آخر $X_0=o$ اختیار شده است . در اینجا V_0 سرعت ذره در $t=o$ و V سرعت آن درزمان t میباشد . پس کارانجام شده برابربا

$$W=FX=maX$$

$$=m\left(\frac{V-V_0}{t}\right)\left(\frac{V+V_0}{t}\right)=\tfrac{1}{۲}mV^{۲}-\tfrac{1}{۲}mV_0^{۲} \qquad (٦-١١)$$

۲

میباشد . نصف حاصلضرب جرم جسم درمجذور سرعتش راانرژی جنبشی جسم مینامیم . اگر انرژی جنبشی را باعلامت K نشان دهیم داریم .

$$K=\tfrac{1}{۲}mV^{۲} \qquad (٦-١٢)$$

معادله ٦-١١ رابااین طریق میتوان بیان کرد : کارانجام شده توسط نیروی منتجه روی یک ذره

مساوی‌تغییرانرژی جنبشی ذره میباشد .

اگرچه این نتیجه رافقط برای نیروی ثابت اثبات کردیم ، این موضوع برای‌نیروی ثابت یامتغیر صادق است . فرض‌کنیم مثلاً نیروی‌منتجه ازنظر بزرگی (نه ازنظرجهت) تغییر کند . تغییرمکان در امتداد نیرو رادرنظر میگیریم وفرض‌میکنیم این تغییرمکان درجهت محور X باشد . کارانجام شده توسط نیروی منتجه درتغییرمکان دادن ذره از X_0 به X برابراست‌با

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{X_0}^{X} F\,dX$$

ولی ازروی قانون دوم نیوتن داریم $\vec{F}=m\vec{a}$ وشتاب a رامیتوان بصورت

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dX}\cdot\frac{dX}{dt}=\frac{dv}{dX}\cdot v=v\,\frac{dv}{dX}$$

نوشت . پس

$$W=\int_{X_0}^{X} F\,dX=\int_{X_0}^{X} m\,\frac{dv}{dX}\,dX=\int_{v_0}^{v} mv\,dv=\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad (٦\text{-}١٣)$$

حالت کلی ترابن است که نیرو هم ازنظرجهت وهم ازنظر بزرگی تغییرکند وحرکت درامتداد یك مسیر منحنی مانند شکل ٦-٦ باشد . (مساله ۱۱ راملاحظه کنید) . دوباره درخواهیم یافت که کارانجام شده توسط نیروی منتجه روی ذره برابر تغییرانرژی جنبشی ذره میباشد .

کارانجام شده توسط منتجه نیرو هاروی ذره همیشه برابر تغییر انرژی جنبشی ذره است :

$$W=K-K_0=\Delta K \qquad \text{(دراثر منتجه نیرو)} \qquad (٦\text{-}١٤)$$

معادله ٦-١٤ به قضیه کار-انرژی برای ذره معروف است .

توجه کنیدکه وقتی سرعت ذره ثابت است ، تغییر درانرژی جنبشی وجود نداشته وکار انجام شده توسط نیروی‌منتجه برابر صفراست . مثلاً برای‌حرکت یکنواخت دورانی سرعت ذره ثابت بوده ونیروی مرکزی کاری روی ذره انجام نمیدهد . نیروئی که عمود به جهت حرکت باشد صرفاً جهت سرعت راتغییر میدهد نه بزرگی آنرا . فقط وقتی‌نیروی منتجه مولفه ای درجهت حرکت داشته باشد ، سرعت ذره ویا انرژی جنبشی آنرا تغییرمیدهد . کارتوسط آن مولفه ای از

منتیجه نیرو انجام میشود که درامتداد حرکت باشد . این موضوع با تعریفی که از کار بوسیله ضرب اسکالر نمودیم مطابقت دارد زیرادر $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ فقط مولفه $\vec{F}$ که درامتداد $d\vec{r}$ است در ضرب وارد میشود .

اگرانرژی جنبشی ذره کم شود ، کار انجام شده توسط نیروی منتجه روی آن منفی است . تغییر مکان ومولفه نیروی منتجه درامتداد حرکت درخلاف جهت یکدیگر میباشند . کارانجـــام شده روی یك ذره توسط یك نیرو ، عکس کارانجام شده توسط ذره روی عاملی که آن نیرو راایجاد کرده است ، میباشد . این نتیجه قانون سوم حرکت نیوتن میباشد ، بنابراین معادله ٤ ۱ - ٦ رامیتوان اینطور تعبیرکرد که بگوئیم مقدارکاهش انرژی جنبشی ذره برابراست بامقدارکاری که ذره انجام میدهد . بنابراین میگوئیم یك ذره درحال حرکت دارای ذخیره انرژی است . وقتیکه این ذره کارانجام میدهد آهسته میشود وقدری ازاین انرژی ازدست میدهد پس انرژی جنبشی جسمی که درحرکت است مساوی کاری است که جسم وقتی ساکن شود میتواند انجام دهد . این نتیجـــه برای وقتی که نیروی بکاررفته ثابت ویا متغیر باشد صادق است. واحدهای انرژی جنبشی همـــان واحدهای کاراست . انرژی جنبشی ، مانند کاریك کمیت اسکالرمیباشد . انرژی جنبشی یکدسته ذره جمع(اسکالر) انرژی های جنبشی تك تك ذرات این دسته میباشد .

مثال ۳

فرض کنیم که نیروی ثقل برای فواصل کوچکی بالای سطح زمین مقدارثابتی باشد . جسمی از حال سکون ازارتفاع h بالای سطح زمین رها میشود . انرژی جنبشی اش درموقع برخورد با زمیـــن چقدراست ؟

ازیاد انرژی جنبشی برابرکارانجام شده توسط نیروی منتجه که دراینجا نیروی ثقل اســـت میباشد . نیرو ثابت بوده ودرامتداد خط حرکت میباشد ، بنابراین کارانجام شده توسط ثقـــل برابراست با

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=mgh$$

سرعت اولیه جسم $V_0=0$ وسرعت انتهای آن V میباشد . ازدیاد انرژی جنبشی جسم برابر

است با

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

باتساوی قرار دادن این دوجمله معادل هم بدست میآوریم.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

که عبارت است ازانرژی جنبشی جسم درست قبل ازبرخوردش با زمین .

سرعت جسم برابراست با

$$V = \sqrt{2gh}$$

دانشجویان بایستی نشان دهند که سقوط یك جسم ازارتفاع h_1 به ارتفاع h_2 ، انرژی جنبشی اش را از $\frac{1}{2} m v_1^2$ به $\frac{1}{2} m v_2^2$ افزایش میدهد که در آن

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = mg(h_1 - h_2)$$

در این مثال با یك نیرو شتاب ثابت سروکارداریم. روشهائی که درفصول قبلی ذکر کردیم در اینجا نیز مفید میباشند . آیا میتوانید نشان دهید که نتایجی راکه توسط درنظرگرفتن انرژی بدست آوردیم میتوان ، مستقیما" ازروی قوانین حرکت برای اجسام باشتاب یکنواخت بدست آورد ؟

مثال ٤

یك قطعه چوبی یافلزی بوزن ۸/۰ پوند روی یك میز اتمی بدون اصطکاکی باسرعت ٤/۰ ft/sec می لغزد . این جسم بوسیله فشردن یك فنر بحال سکون درمیآید فنرچه مقدار فشرده میشود درصورتیکه ثابت نیروی آن lb/ft ۰/۲۵ باشد ؟

انرژی جنبشی جسم برابراست با

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right) V^2$$

این انرژی جنبشی برابرکار W است که جسم قبل ازسکون میتواند انجام دهد .کارانجام شده درفشردن فنر باندازه X برابراست با

$$W = \frac{1}{2} k x^2$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(w/g)V^2$$

یا

$$X=\sqrt{\frac{w}{gK}}\;V=\sqrt{\frac{۸۰}{(۳۲)(۰/۲۵)}}\quad ۴/۰ ft = ۴/۰ ft$$

۶-۶- اهمیت قضیه کار- انرژی

قضیه کار- انرژی یك قانون جدید ومستقل مکانیك کلاسیك را نشان نمیدهد . ماکاروانرژی راتعریف نموده ورابطه بین آنهارا مستقیما" ازروی قانون دوم نیوتن پیدا نموده ایم. استفاده از قضیه کار انرژی درحل مسائلی مفید است که درآنها کارانجام شده توسط منتجه نیروها به آسانی محاسبه میشود وماعلاقه مند بیافتن سرعت ذره درمحلهای بخصوصی هستیم ولی شاید اهمیت بیشترش این حقیقت باشد که قضیه کار- انرژی نقطه شروعی برای تعمیم جامعی درفیزیك میباشد . درانیجاتاکید کرده ایم که قضیه کاروانرژی درصورتی معتبراست که W رابعنوان کارانجام شده توسط نیروی منتجه وارد بذره تعبیرکنیم . ولی دربسیاری ازمسائل مفید است که کارانجام شده توسط هرنوع نیرو راجداگانه حسابکنیم وهرکدام ازاین کارها رااسم جداگانه ای بدهیم. این موضوع منجر به مفهوم انواع مختلف انرژی واصل بقاء انرژی که موضوع فصل بعدی است میشود .

۶-۷- تـــــوان

حال زمان لازم برای انجام کاررادرنظرمیگیریم. برای بالا بردن یك جسم بارتفاع معینی اندازه معینی کارلازم است واین مقدارکاربستگی بزمان صرف شده (یك ثانیه یایك سال) ندارد . ولی میزان انجام کاراغلب برای ماجالبتر ازکار کلی انجام شده است.

توان رابعنوان میزان انجام کارتعریف میکنیم . توان متوسط یك عامل عبارت است ازکار انجام شده توسط آن تقسیم برزمان مصروفه یا

$$\bar{P}=\frac{W}{t}$$

توان لحظه ای توسط یك عامل برابر است با

$$p = \frac{dW}{dt} \qquad (٦-١٥)$$

اگر توان با زمان ثابت باشد آنوقت $p = \bar{p}$ بوده و

$$W = pt$$

میباشد . درسیستم MKS واحد توان $joule/sec$ است که watt نامیده میشود . این واحد توان با نام وات در مورد جیمز وات که ماشین بخار منجر به ماشینهای قوی ترامروزی گردید نام گذاری شده است درسیستم مهندسی انگلستان واحد توان $ft\text{-}lb/sec$ است . چون این واحد برای مقاصدعملی کاملاً کوچك است ، واحد بزرگتری که اسب بخارنامیده میشــود اختیارگردیده است. در واقع خود وات بعنوان واحد توان یك اسب (بعنوان یك ماشین) را پیشنهاد نمود یك اسب بخار برابر ۵۵۰ $ft\text{-}lb/sec$ اختیار شده است . یك اسب بخار تقریبا مساوی ۷٤٦ وات یا تقریبا " سه چهارم کیلو وات میباشد . یك اسب نمیتواند به مدت زیادی این توان را داشته باشد .

کار را هم میتوان برحسب واحد های توان X زمان شرح داد . این مطلب مثلاً " صدا" عبارت کیلووات ساعت میباشد . یك کیلو وات ساعت عبارت است از کار انجام شده در یکساعت توسط عاملی که کار را به میزان ثابت ۱ کیلووات انجام دهد .

مثال ٦

یك اتومبیل ۱۰۰ اسب بخاربکار میبرد و با سرعت ثابت ($60\ miles/hr$ ($= 88\ ft/sec$ حرکت میکند . نیروی بطرف جلوی وارد ازموتور به اتومبیل چقدر است ؟

$$p = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{d}}{t} = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

نیروی بطرف جلوی $\vec{F}$ درامتداد حرکت یعنی $\vec{V}$ میباشد بنابراین $p = FV$ و

$$F = \frac{p}{V} = \left(\frac{100\ hp}{88\ ft/sec}\right)\left(\frac{550\ ft\text{-}lb/sec}{1\ hp}\right) = 630\ lb$$

چرا اتومبیل شتاب نمیگیرد ؟

بقـــاء انرژی

فصل هفتـــم

۱-۷- مقدمــــه

درفصل ٦ قضیه کار- انرژی راازروی قانون دوم حرکت نیوتن بدست آوردیم . این قضیه بیان میکند که کار W انجام شده توسط منتجه نیروی $\vec{F}$ روی ذره ای که ازنقطه ای به نقطه دیگرحرکت میکند مساوی تغییر ΔK انرژی جنبشی ذره میباشد ، یا

$$(۱-۷) \qquad W = \Delta K$$

اغلب چندین نیرو برذره اثرمیکنند که نیرو $\vec{F}$ جمع برداری آنهااست یعنی اگر n نیرو اثر کنند $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots\vec{F}_n$ کار انجام شده توسط نیروی‌منتجه $\vec{F}$ برابر جمع جبری کارانجام شده توسط تك تك نیروهامیباشد یا ، $W=W_1+W_2+\cdots W_n$ بنابراین قضیه کار- انرژی (معادله (۱-۷) که میتوان بصورت

$$(۲-۷) \qquad W_1+W_2+\cdots+W_n=\Delta K$$

نوشت . دراین فصل سیستمهائی رادرنظرخواهیم گرفت که درآنها یك ذره تنها تحت اثر نیروهای مختلفی قرارمیگیردو W_1 و W_2 وغیره رابرای‌این نیروها محاسبه خواهیم کرد ، این موضوع باعث خواهد شد که انواع مختلف انرژی ازقبیل انرژی پتانسیل وانرژی حرارتی راتعریف بنمائیم . این عمل منجربه فرموله کردن یکی ازبزرگترین اصول علمی یعنی‌اصل بقاء انرژی خواهد شد .

۲-۷- نیروهای کنسرواتیف

ابتدا اختلاف بین دونیروی کنسرواتیف وغیرکنسرواتیف رامشخص میکنیم . نمونه ای‌ازهر کدام رادرنظرگرفته وهرنمونه را ازچند جنبه مختلف ولی مربوط بهیکدیگر موردبحث قرارمیدهیم.

فنری رادرنظرمیگیریم که ازیکطرف بدیوار سختی متصل شده باشد (مثل شکل (۱-۷) .

یك قطعه چوبی یافلزی بجرم را باسرعت مستقیما" بطرف فنر میلغزانیم وفرض میکنیم که صفحه افقی بدون اصطکاك بود ؛ وفنر یك فنر ایده آل باشد یعنی ازقانون هوك (معادله ۷-٦) تبعیت کند .

$$F = -Kx \qquad (۷-۳)$$

که درآن F نیروی وارده توسط فنر وقتیکه طرف آزاد شباندازه X تغییرمکان یافته میباشد ، بعلاوه فرض میکنیم که جرم فنر بقدری درمقابل جرم جسم کوچك است که میتوان ازانرژی جنبشی فنر صرفنظر نمود . بنابراین درسیستم (جرم + فنر) تمام انرژی جنبشی درجرم متمرکز خواهد بود . وقتی جسم بفنر برخورد کند سرعت ودرنتیجه انرژی جنبشی جسم کم میشود تااینکه بالاخره جسم بعلت نیروی فنر متوقف میگردد (شکل b ۷-۱) . حال فنر شروع ببازشدن میکند وجسم جهت حرکتش راتغییرمیدهد . بدین ترتیب هنگامیکه بوضعیت اولیه برخورد بافنر برمیگردد همان سرعت وانرژی جنبشی اولیه راداردفقط جهتش تغییرکرده است. جسم درحین قسمتی ازحرکتش انرژی جنبشی خود راازدست میدهد ولی درضمن قسمتی دیگر از حرکتش که به نقطه شروع برمیگردد تمام آنرا بدست میآورد . (شکل c ۷-۱) ما انرژی جنبشی رابعنوان قدرت انجام کار دراثر حرکت تعبیرکرده ایم . واضح است که درخاتمه یك دورکامل قدرت انجام کارجسم شکل ۷-۱ ثابت میماند یعنی این نوع توانائی انجام کارحفظ میشود . نیروی الاستیك وارده توسط یك فنر ایده آل وهمچنین نیروهای دیگریکه باین طریق عمل میکنند کنسرواتیف نامیده میشوند . نیروی ثقل نیز کنسرواتیف است ، اگرتوپی راعمودا" بطرف بالا پرتاب کنیم وفرض کنیم مقاومت هوا صرفنظرکردنی باشد توپ باهمان انرژی که هنگام ترك دست مارا داشت بدست مابرمیگردد .

اگر ذره ای که تحت تاثیر یك یاچندین نیروقراردارد باانرژی‌جنبشی بیشتر یاکمتر از آنچه درابتدا" داشت به موقعیت اولیه‌اش برگردد ، دریك دورکامل حرکت قدرت انجام کارش تغییر کرده است . در این مورد قدرت‌انجام کارمحفوظ نمانده ولااقل یکی ازنیروهای وارده غیر کنسرواتیف میباشد .

بعنوان یك نمونه ازیك نیروی غیرکنسرواتیف فرض میکنیم که سطوح جسم وصفحه درشکل

٧-١ بدون اصطکاک نبوده بلکه یک نیروی اصطکاک f توسط صفحه برجسم وارد میشود . نیروی اصطکاک صرفنظر ازاینکه جسم چه راهی راطی میکند باحرکت جسم مخالفت میکند ، بنابراین جسم با انرژی جنبشی کمترازآنچه درابتدا داشت به نقطه شروعش برمیگردد . ازآنجاکه درآزمایش اول نشان داد یم که نیروی فنر کنسرواتیف است ، بنابراین بایستی این نتیجه جدید رابه نیروی اصطکاک نسبت دهیم .

میگوئیم که این نیرو وسایرنیروهائی که باین طریق عمل کنند غیرکنسرواتیف میباشند . نیروی القائی دریک بتاترون (قسمت ٦-٣١) نیز یک نیروی غیرکنسرواتیف میباشد ولی درآنجا بجای ازدست دادن انرژی جنبشی ، آنرا تولید میکند ، بطوریکه الکترونی که دریک مدارد ایرهای دربتاترون حرکت میکند به وضعیت اولیه اش باانرژی جنبشی بیشتری برمیگردد . دریک دورکامل الکترون انرژی جنبشی بدست میاورد ، والبته برای موثر بودن بتاترون بایستی اینطور باشد .

میتوان نیروی کنسرواتیف راازنظر دیگر یعنی کارانجام شده روی ذره توسط نیرو تعریف نمود . دراولین مثال بالا کار انجام شده توسط نیروی الاستیک فنر روی جسم وقتیکه فنرفشرده میشود منفی است ، زیرا نیروی وارده توسط فنر روی جسم (سمت چپ درشکل a ١-٧) متوجه خلاف جهت تغییرمکان جسم بطرف راست (درشکل a ١-٧) میباشد . وقتیکه فنر بازمیشود کار انجام شده توسط نیروی فنر روی جسم مثبت است (نیرو وتغییر مکان دریک جهت میباشند) دراین مثال کارمنتجه انجام شده توسط فنر روی جسم درضمن یک دوره کامل حرکت صفر است .

دردومین مثال ، اگرنیروی اصطکاک رادرنظرگرفتیم ، کارانجام شده روی جسم توسط این نیرو برای هرقسمت ازیک دوره کامل حرکت منفی بود زیرانیروی اصطکاک همواره باحرکت مخالفت میکند . درنتیجه کارانجام شده توسط اصطکاک دریک رفت وبرگشت نمیتواند مساوی صفر باشد . پس بطورکلی : یک نیروکنسرواتیف است اگرکارانجام شده توسط نیرو روی ذره ایکه حرکت میکند درهررفت وبرگشت صفرباشد یک نیروغیرکنسرواتیف است اگر کارانجام شده توسط نیرو روی ذرهای که حرکت میکند درهررفت وبرگشت مساوی صفرنباشد .

قضیه کار- انرژی نشان میدهد که این راه دوم برای تعریف نیروهای کنسرواتیف وغیر کنسرواتیف کاملاً معادل تعریف اول است. اگر تغییری درانرژی جنبشی ذره متحرکی پس از طی یک دوره کامل وجود نداشته باشد آنوقت $\Delta K=0$ بوده وازمعادله ۷-۱ نتیجه میشود که $W=0$ است ونیروی منتجه وارده بایستی کنسرواتیف باشد. بهمین طریق اگر $\Delta K\neq 0$ باشد آنوقت ازروی معادله ۷-۱ نتیجه میگیریم که $W\neq 0$ بوده وحداقل یکی ازنیروهای وارده بایستی غیرکنسرواتیف باشد.

اختلاف بین نیروهای کنسرواتیف وغیرکنسرواتیف رامیتوان ازیک راه سومی هم مورد توجه قرارداد. فرض کنیم که ذره ای درامتداد راه (۱) از a به b رفته ودرامتداد راه (۲) از b به a برمیگردد (مانند شکل ۷-۲a). درطی این رفت وبرگشت چندین نیرو ممکن است برذره اثرکنند، هرنیرو راجداگانه درنظر میگیریم. اگر نیروی درنظر گرفته شده کنسرواتیف باشد، کارانجام شده روی ذره توسط آن نیروی مخصوص دریک رفت وبرگشت مساوی صفراست یا

$$W_{ab,1}+W_{ba,2}=0$$

که میتوان انرا بصورت

$$W_{ab,1}=-W_{ba,2}$$

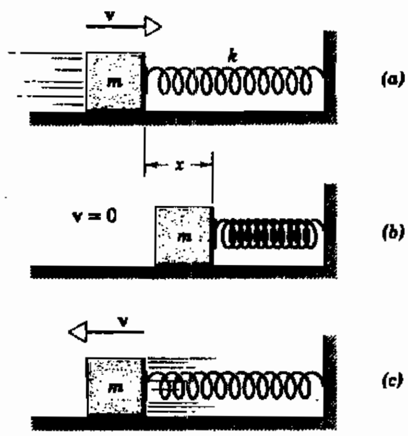
نوشت. یعنی کار برای رفتن از a به b درامتداد راه (۱) برابرمنهای کاربرای رفتن از b به a درامتداد راه (۲) میباشد. اگر باعث شویم (همانطورکه درشکل ۷-۲b نشان داده شده) که ذره درامتداد مسیر (۲) از a به b برود، ماصرفاً جهت حرکت قبلی درامتداد (۲) راتغییرداده ایم بنابراین،

$$W_{ab,2}=-W_{ba,2}$$

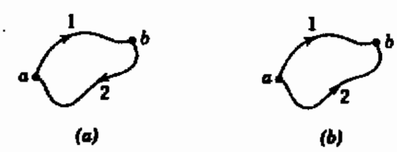
پس

$$W_{ab,1}=W_{ab,2}$$

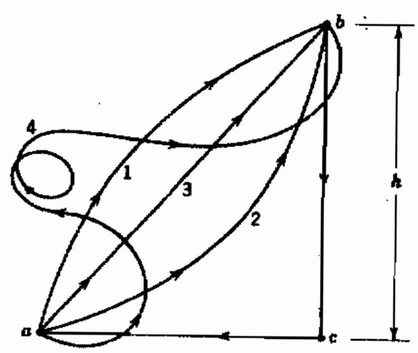
که بما میگوید کارانجام شده روی یک ذره توسط یک نیروی کنسرواتیف برای رفتن از a به b برای



شکل ۱-۷ (a) جسمی بجرم m باسرعت V بافنر برخورد میکند (b) جسم براثر نیروی فنر بحالت سکون درآورده میشود . (C) جسم دومرتبه سرعت اولیه خود V رادر بازگشت بنقطه عزیمتش بدست میآورد .



شکل ۲-۷



شکل ۳-۷ سنگی طی مسیرهای مختلف ۱و۲و۳و۴ ازنقطه a به نقطه b بالا برده میشود .

هرمسیری یکسان است .

مسیرهای (۱) و (۲) صرفنظر از نقاط a و b کاملاً اختیاری است والبته هر دو نقطه را میتوان بعنوان a و b انتخاب کرد . همواره درصورتیکه نیروی کنسرواتیف باشد نتیجه یکسانی بدست میآوریم . مسیرهای (۱) و (۲) میتوانند هرمسیری اختیاری باشند بشرطیکه از a به b بروند ، ومیتوان a و b راهم درهرنقطه ای اختیارکرد . درصورتیکه نیرو کنسرواتیف باشد همواره نتیجه یکسانی بدست خواهیم آورد بنابراین تعریف معادل دیگری برای نیروهای کنسرواتیف وغیرکنسرواتیف داریم : یك نیروی کنسرواتیف است اگرکار انجام شده توسط آن روی ذره ای که بین دو نقطه حرکت میکند فقط باین دو نقطه بستگی داشته باشد نه مسیر طی شده . یك نیرو غیرکنسرواتیف است اگرکارانجام شده توسط آن نیرو روی ذره ای که بین دو نقطه حرکت میکند بستگی به مسیر بین آن نقاط داشته باشد . برای واضح شدن این تعریف سوم نیروهای کنسرواتیف یك نمونه دیگر ازنیروهای کنسرواتیف یعنی نیروی جاذبه را در نظر میگیریم . فرض کنید سنگی بجرم m را در دست نگه داشته وآنرا بطریق مختلف ، به ارتفاع h ازسطح زمین برسانیم (شکل ۳-۷) ، ازقبل میدانیم که دریك رفت وبرگشت کارکلی انجام شده توسط نیروی کنسرواتیف صفر است ونیروی ثقل کنسرواتیف میباشد . کارانجام شده روی سنگ توسط جاذبه درمسیر برگشت bca ، بطورساده mgh میباشد . ازاین روچون جاذبه یك نیروی کنسرواتیف میباشد ، کارانجام شده توسط ثقل روی سنگ درامتداد هرمسیری از a به b بایستی برابر $-mgh$ باشد ، زیرا اگر این موضوع درست باشد کارکلی انجام شده توسط ثقل دریك رفتوبرگشت میتواند مساوی صفر باشد . یعنی جاذبه وقتی سنگ از a به b حرکت میکند روی آن کارمنفی انجام میدهد ، بعبارت دیگر برای بردن جسم از a به b (درامتداد هرکدام ازمسیرها) بایستی برضد جاذبه کارانجام داد .

دانشجویان میتوانند این نتیجه راکه کارانجام شده توسط جاذبه درامتداد هرمسیر ab برابر $-mgh$ است مستقیماً محاسبه نمایند . زیراهرکدام ازاین مسیرهارامیتوان مکانهای بینهایت کوچکی تقسیم کرد که متناوباً افقی وقائم میباشند . درتغییرمکانهای افقی

کاری توسط جاذبه انجام نمیگیرد وتغییرمکان منتجه عمودی برای تمام حالات یکی است. در نتیجه کارانجام شده توسط جاذبه روی سنگ برای حرکت از a به b فقط بستگی به موقعیت a و b دارد نه به مسیراختیار شده .

برای یک نیروی غیرکنسرواتیف مثل اصطکاک کارانجام شده مستقل ازمسیر اختیار شده بین دو نقطه ثابت نمیباشد . فقط لازم است یادآوری کنیم که وقتی جسم را روی میز ناهمواری بین دونقطه a و b ازراههای مختلفی فشارمیدهیم ، فاصله طی شده ودرنتیجه کارانجام شده توسط نیروی اصطکاک تغییر میکند . این کاربستگی به مسیردارد .

تعاریفی که برای نیروهای کنسرواتیف نمودیم معادل یکدیگر میباشند . انتخاب یکی از این تعریفها بستگی به موقعیت دارد . طریقه رفت وبرگشت بوضوح نشان میدهد که انرژی جنبشی وقتیکه نیروهای کنسرواتیف اثر کنند ثابت میماند . برای بسط ایده انرژی پتانسیل ، بیان بستگی نداشتن به مسیرمناسبتر است .

۳-۷- انرژی پتانسیل

دراین قسمت توجه خودرا معطوف به سیستم مجزای (جسم + فنر) مینمائیم نه حرکت جسم در شکل ۱-۷ ازاین نظر بجای اینکه بگوئیم جسم درحال حرکت است ، ترجیح میدهیم بگوئیم که ترکیب دوجسم درحال تغییراست . هم وضعیت جسم وهم ترکیب سیستم درهرلحظه بوسیله پارامتر x اندازه گیری میشودکه تغییرمکان انتهای آزاد فنرازوضعیت عادیش میباشد . انرژی جنبشی سیستم همان انرژی جنبشی جسم است زیرا فنر را بدون جرم فرض کرده ایم . دیده ایم که انرژی جنبشی سیستم درشکل ۱-۷ درنیمه اول حرکت کم میشودوصفر میگردد وسپس طی نیمه دوم حرکت زیاد میگردد . اگر اصطکاکی وجود نداشته باشد ، انرژی جنبشی سیستم وقتی ترکیب اولیه اش رابدست آورد به مقدارابتدائی برمیگردد .

تحت این شرایط یعنی تاثیر نیروهای کنسرواتیف ، بامعنی است که مفهوم انرژی ترکیب یا انرژی پتانسیل U رامعرفی نمائیم وبگوئیم که اگر K برای سیستمی باندازه ΔK بعلت تغییر

ترکیب سیستم تغییر نماید (یعنی وقتی جسم درسیستم شکل ۱-۷ حرکت میکند) ،آنوقت U برای سیستم بایستی مساوی ولی به مقدار مخالفی تغییرنماید بطوریکه مجموع دوتغییر صفر باشد یا :

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad (۷-٤ a)$$

بطوردیگرمیتوان گفت که هرتغییری درانرژی جنبشی K سیستم با مقدارمساوی ولی درجهت مخالف توسط انرژی پتانسیل U سیستم جبران میشود بطوریکه مجموع آنها درمدت حرکت ثابت میماند یا

$$\text{مقدارثابت} = K + U \qquad (۷-٤ b)$$

انرژی پتانسیل سیستم نمایش یك فرم انرژی ذخیره شده است که میتوان آنرابطورکامل دوباره بدست آورد . ویا نرژی جنبشی تبدیل نمود . نمیتوان یك انرژی پتانسیل بیك نیرو ی غیرکنسرواتیف مثل اصطکاك وابسته کرد زیرا انرژی جنبشی سیستمهائی که تحت تاثیر این نوع نیروها هستند هنگام برگشت سیستم به ترکیب اولیه به مقداراولیه اش برنمیگردد .

معادلات ٤-۷ درمورد یك سیستم بسته متشکل ازاجسامی که رویهم تاثیرمتقابل دارند صادق است مانند سیستم (جرم + فنر) درشکل ۱-۷ . دراین مثال چون فنر رابدون جرم اختیارکرده ایم انرژی جنبشی تنهامربوط بجرم درحال حرکت میباشد . جسم بعلت نیرو ی وارده توسط فنرآهسته میشود (ویاسرعت میگیرد) پس مناسب است که انرژی پتانسیل سیستم رابه این نیرو یعنی فنروابسته کنیم . بنابراین ،درحالیکه انرژی پتانسیل جایگزین شده درفنر طی همین زمان بیشتر میگردد . [همانطور که فرض کرده ایم فنر بدون جرم باشد فرض مینمائیم که جسم محکم بوده یعنی خاصیت فنری موثری نداشته باشد . دریك سیستم کلی تر انرژی - جنبشی وپتانسیل میتوانند درقسمتهای مختلف سیستم وجود داشته باشد ونسبت این دو انرژی باتغییر ترکیب سیستم تغییرمیکند .]

معادلات ٤-۷ فقط معرف یکنوع ترازیابی برای انرژی هستند . این معادلات ومفهوم انرژی‌پتانسیل معنی حقیقی ندارند تاوقتیکه نشان دهیم چگونه U رابصورت تابعی ازترکیب سیستم که درآن نیروهای کنسرواتیف اثر میکنند حساب کنیم ، مثلاً درمورد شکل ۱-۷ مابایـد

قادرباشیم $U(x)$ رامحاسبه کنیم که درآن x تغییر مکان فنرمیباشد .

برای موشکافی کردن مفهوم انرژی پتانسیل U فرض کنیم قضیه کار- انرژی ، $W=\Delta K$ رادرنظر بگیریم که درآن W کارانجام شده توسط منتجه نیرو روی ذره وقتیکه از a به b حرکت میکند میباشد . برای سهولت فرض میکنیم که فقط یك نیروی تنهای $\vec{F}$ روی ذره اثـر میکند ، این مطلب در مورد سیستم شکل ۱-۷ صادق است . اگر $\vec{F}$ کنسرواتیف باشـد میتوان قضیه کار- انرژی (معادله ۱-۷) را بامعادله ٤-۷ ترکیب نموده بدست آورد :

$$(\text{۷-۵}\, a) \qquad W=\Delta K=-\Delta U$$

کار W انجام شده توسط یك نیروی کنسرواتیف فقط به نقطه ابتدا وانتهای حرکت بستگی دارد، نه راه طی شده بین آنها . این چنین نیروئی میتواند فقط به موقعیت ذره بستگی داشتـه باشد ومثلاً به سرعت ذره یا زمان بستگی دارد .

برای حرکت دریك بعد ، معادله a ۵-۷ میشود

$$(\text{۷-۵}\, b) \qquad \Delta U=-W=-\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

که ذره از x_0 به x حرکت میکند . معادله b ۵-۷ نشان میدهد که چگونه تغییـر درانرژی پتانسیل ΔU راوقتی که ذره ای که برآن یك نیروی کنسرواتیف $F(x)$ وارد میشود وازنقطه a که به x_0 نشان داده میشود به نقطه b که به x نشان داده میشود حرکت میکند حساب کنیم . این معادله نشان میدهد که میتوان ΔU رافقط وقتیکه نیروی $\vec{F}$ بموقعیت ذره بستگی داشته باشد (یعنی به ترکیب سیستم) حساب کرد که معادل این گفته است کـه انرژی پتانسیل فقط برای نیروهای کنسرواتیف معنی دارد .

حال که میدانیم انرژی پتانسیل U فقط بمکان ذره بستگی دارد معادله b ٤-۷ رامیتوان بصورت

$$(\text{۷-٦}\, a) \qquad \tfrac{1}{2}mv^2+U(x)=E \qquad (\text{دریك بعد})$$

نوشت که درآن E که دراثنای حرکت ذره ثابت میماند انرژی مکانیکی کل نامیده میشود .

فرض کنیم که ذره از نقطه a (که مکانش x_0 وسرعتش V_0 است) بنقطه b (که مکانش x وسرعتش V است) برود ، کارمکانیکی کلی E وقتی که نیروکنسرواتیف است ، بـــرای هرترکیب سیستم باید مقداریکسان باشد پس از معادله ۷-۶a داریم

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(x) = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0) \qquad (۷-۶b)$$

کمیت طرف راست فقط بستگی به موقعیت x_0 وسرعت اولیه V_0 دارد که مقادیر معینی میباشند ودرنتیجه طی حرکت ثابت هستند . این مقدار ثابت ، انرژی کلی مکانیکی E میباشد . توجه کنید که نیروو شتاب در این معادله وارد نمیشوند وفقط مکان وسرعت وجود دارند . اغلب معادله ۷-۶b قانون بقاء انرژی مکانیکی برای نیروهای کنسرواتیف نامیده میشود .

دربسیاری ازمسائل ملاحظه میکنیم که اگرچه بعضی ازنیروهای موثر برسیستم کنسرواتیف نیستند ، امابقدری کوچك هستند که میتوان ازآنها صرفنظر نمود . دراین موارد میتوان معادله ۷-۶b راباتقریب خوبی بکاربرد . مثلاً ممکن است مقاومت هواوجود داشته باشد ولی بقدری اثرش روی حرکت کم باشد که بتوان ازآن صرفنظر نمود .

توجه کنید که بجای شروع باقوانین نیوتن ، میتوان حل مسائل را وقتیکه نیروهای کنسرواتیف تنها وجود داشته باشند بامعادلات ۷-۶ شروع نمود .

البته این رابطه ازقوانین نیوتن نتیجه شده است ولی یك مرحله به حل نزدیکتر میباشد (باصطلاح انتگرال اول حرکت است) . اغلب مسائل رابدون تحلیل نیروها یانوشتن قوانیـــن نیوتن بااستفاده از چیزیکه درحرکت ثابت باشد حل میکنیم ، دراینجا انرژی مکانیکی ثابت بوده ومیتوان معادلات ۷-۶ رابعنوان اولین قدم درنظر گرفت .

برای حرکت یك بعدی میتوان رابطه بین نیروو انرژی پتانسیل (معادله ۷-۵b) را بصورت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (۷-۷)$$

نیز نوشت . برای نشان دادن این موضوع این مقدار $F(x)$ رادرمعادله ۷-۵b قرارمیدهیم

ومشاهده میکنیم این دومثل یکدیگرند . معادله ۷-۷ راه دیگری برای درنظر گرفتن انرژی پتانسیل دراختیار ما میگذارد . انرژی پتانسیل تابعی ازمکان است که منهای مشتق آن نیرو رابدهد .

ممکن است دانشجویان توجه کرده باشند که اگرچه مافقط میتوانیم تغییرات U را از معادله ۷-۵ پیدا کنیم نه خود U را ، ولی درمعادلات ۷-۶ کمیت $U(x)$ رانوشته ایم. فرض میکنیم که ذره ای درامتداد محور x از a به b حرکت میکند وتنها یك نیروی کنسرواتیف $F(x)$ برآن اثر میکند . برای نسبت دادن مقداری به U_b یعنی انرژی پتانسیل در نقطه b مینویسیم

$$\Delta U = U_b - U_a$$

یا (معادله ۷-۵ راملاحظه کنید) .

$$U_b = \Delta U + U_a = -\int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx + U_a \qquad (۷-۸)$$

نمیتوان تامقداری به U_a نسبت نداده ایم مقداری به U_b نسبت داد . اگرنقطه b یك مكان اختیاری x باشد بطوریکه $U_b = U(x)$ ، بوسیله انتخاب نقطه a بعنوان یك موقعیت مراجعه مناسب توسط $x_a = x$ ونسبت دادن یك مقدار دلخواه به انرژی پتانسیل وقتیکه جسم درآن نقطه است ، میتوان مفهومی به $U(x)$ داد . بنابر $U_a = U(x_0)$ این معادله ۷-۸ تبدیل میشود به

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + U(x_0) \qquad (۷-۹)$$

انرژی پتانسیل جسم وقتیکه درمکان مورد مراجعه یعنی $U(x_0)$ میباشد ، معمولاً مقدار اختیاری صفر نسبت داده میشود .

اغلب مناسب است که مکان مورد مراجعه x_0 رانقطه ای انتخاب کنیم که درآنجا نیروی وارده بذره برابر صفرباشد . بنابراین نیروی وارده توسط فنر وقتیکه فنر درروضعیت عادی کشیده نشده اش میباشد صفر است ، ومعمولا میگوئیم که برای این وضعیت انرژی پتانسیل نیز صفر میباشد . همچنین نیروی کشش زمین روی جسمی وقتیکه جسم اززمین دورمیشود کم میگردد وبرای

بینهایت صفرمیشود . معمولا " بینهایت رابعنوان وضعیت مورد مراجعه درنظرگرفته وبه انـرژی پتانسیل مربوط به نیروی‌ثقل دراین وضعیت (فصل ۱٤ رابببینید) مقدار صفر رانسبت میدهیم. تاکنون بیشترکشش ثقل را روی‌اجسامی مانند توپ بیسبال وغیره مورد توجه قرارداده ایم ، که در مقایسه باشعاع زمین هرگز ازسطح زمین خیلی دور نمیشوند . دراینجا نیروی ثقل $(= mg)$ اصولا " ثابت است ومناسب است که انرژی پتانسیل رانه دربینهایت بلکه درسطح زمین برابـر صفر درنظر بگیریم .

اثر تغییر درمختصات مکان مورد مراجعه استاندارد x_o یامقداراختیاری نسبت داده شده به $U(x)$ این است که به $U(x)$ مقدارثابتی اضافه میشود . وجود یك ثابت اختیـاری اضافه شده به عبارت انرژی پتانسیل (معادله ۹-۷) تغییری درمعادلاتی که تاکنون نوشته‌ایم ایجاد نمیکند . زیرایك جمله ثابت بهرطرف معادله ۶-۷ اضافه میشود وآن معادله رابدون تغییرنگه میدارد . بعلاوه تغییر $U(x)$ بوسیله اضافه کردن مقدار ثابتی به‌آن در نیروی محاسبه شده از معادله ۷-۷ تغییری ایجاد نمیکند زیرا مشتق مقدار ثابت برابر صفر است . تمام اینها معنیش این است که انتخاب یك نقطه مورد مراجعه برای انرژی پتانسیل مورد نظر است کـــه انتخاب یك نقطه مورد مراجعه برای انرژی پتانسیل مورد نظر است نه‌مقدار مطلق انرژی پتانسیل دریك نقطه معین .

همچنین در مشخص‌کردن انرژی جنبشی تاحدودی اختیاروجود دارد . برای‌معین‌کردن سرعت ودرنتیجه انرژی جنبشی بایستی یك دستگاه مقایسه رامشخص‌کنیم . سرعت شخصی که در ترن نشسته است اگرترن بعنوان دستگاه مقایسه اختیارشود برابرصفراست ، ولی‌این سرعت برای ناظریکه روی‌زمین قرارداردصفرنیست ومشاهده میکندکه این شخص‌باسرعت یکنواختی حرکـــت میکند . مقدارانرژی جنبشی بستگی داردبه دستگاه مقایسه ای‌که توسط ناظر بکارمیرود . بنابراین نکته مهم درمورد انرژی مکانیکی E که مجموع انرژی جنبشی وپتانسیل است مقدارواقعی آن‌حین حرکت مشخصی نمیباشد (این بستگی به ناظردارد) بلکه این حقیقت است که این مقداردر حین حرکت برای یك ناظرمعین وقتیکه نیروها کنسرواتیو باشند تغییری نمیکند .

۷-۴- سیستمهای کنسرواتیف یك بعدی

حال انرژی پتانسیل درحرکت یك بعدی رابرای دونمونه ازنیروهای کنسرواتیف یعنی نیروی‌جاذبه برای‌حرکات نزد یك بسطح زمین ونیروی بازگرداننده الاستیك برای یك فنرکشیده شده ایده آل محاسبه میکنیم.

برای‌نیروی‌جاذبه حرکت یك بعدی راحرکت قائم درامتداد محور y درنظر میگیریم. جهت مثبت y رابطرف‌بالا اختیارمیکنیم ، پس‌نیروی جاذبه درجهت منفی امتداد y یابطرف پائین میباشدو داریم $F(y) = -mg$ که مقدارثابتی‌است . انرژی پتانسیل درمکان ازمعادله ۷-۹ بدست‌میآید .

$$U(y) = -\int_0^y F(y)\,dy + U(0) = -\int_0^y (-mg)\,dy + U(0) = mgy + U(0)$$

انرژی پتانسیل رادرجائیکه $y=0$ صفراست‌میتوان برابر صفر اختیارکردبطوریکه $U(0)=0$

$$U(y) = mgy \qquad (۷-۱۰)$$

بنابراین انرژی پتانسیل ثقلی برابر mgy است . رابطه $F(y) = -\frac{dU}{dy}$ (معادله ۷-۷) صادق است زیرا $-\frac{d(mgy)}{dy} = -mg$ میباشد . برای‌سهولت‌سطح زمین را $y=0$ اختیار میکنیم دراینصورت‌انرژی پتانسیل ثقلی درروی سطح زمین صفربوده وبطور خطی باارتفاع y زیادمیشود .

اگرنقاط y و $y=0$ رامقایسه کنیم بقاء انرژی جنبشی بعلاوه انرژی پتانسیل (معادله b ۷-٦) رابطه

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2$$

رامیدهد . این ازنظر ریاضی معادل‌است‌بانتیجه مشهور

$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

(معادله ۱۷-۳ راملاحظه کنید) . اگرذره ازارتفاع h_1 به‌ارتفاع h_2 حرکت‌کند میتوان بابکاربردن معادله b ۷-٦ بدست‌آورد .

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

این نتیجه معادل است با نتیجه مثال ۳ در فصل ٦ ، انرژی مکانیکی کل E یك مقدار ثابت بوده و در حین حرکت نیز ثابت میماند حتی اگر انرژی های جنبشی و پتانسیل با تغییر ترکیب سیستم (ذره + زمین)تغییر کنند .

دومین نمونه از نیروهای کنسرواتیف عبارت است از نیروی وارده توسط یك فنر الاستیك که به جسمی بجرم m که بآن متصل شده و روی سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت میکند وارد میشود . اگر $x_0 = 0$ را بعنوان مکان انتهای فنر وقتیکه کشیده نشده است اختیار کنیم، نیروی وارده بجرم وقتیکه فنر باندازه x کشیده شود برابر است با $F = -kx$ انرژی پتانسیل از معادله ۹-۷ بدست میآید

$$U(x) = -\int_0^x F(x)\,dx + U(0) = -\int_0^x (-kx)\,dx + U(0)$$

با انتخاب $U(0) = 0$ انرژی پتانسیل نیز مانند نیرو وقتیکه فنر بازنشده است برابر صفر است و داریم

$$U(x) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2} k x^2$$

این نتیجه برای هردو حالت کشیدن وفشردن فنر صادق است (یعنی چه x مثبت وچه منفی باشد) رابطه $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ (معادله ۷-۷) صادق است زیرا $-\frac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dx} = -kx$

پس انرژی پتانسیل الاستیك فنر برابر است با

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (7\text{-}11)$$

جسم دارای جرم m دارای حرکتی خواهد شد که در آن انرژی کل E ثابت میماند (شکل ٤-۷) .

ازمعادله b ٦-۷ داریم

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

دراینجا V_0 سرعت ذره برای $x = 0$ میباشد . ازنظر فیزیکی بوسیله کشیدن فنر توسط یك نیروی وارده باندازه x_m وسپس رهاکردن فنراین چنین نتیجه ای بدست میآید .
توجه کنید که در $x = 0$ انرژی سیستم (ذره + فنر) تماماً ازنوع جنبشی میباشد . در $x = x_m$ (ماکزیمم مقدار x) ، V باید مساوی صفرباشدبنابراین دراینجا تمام انرژی سیستم ازنوع پتانسیل است. در $x = x_m$ داریم

$$\frac{1}{2} K x_m^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$$

یا

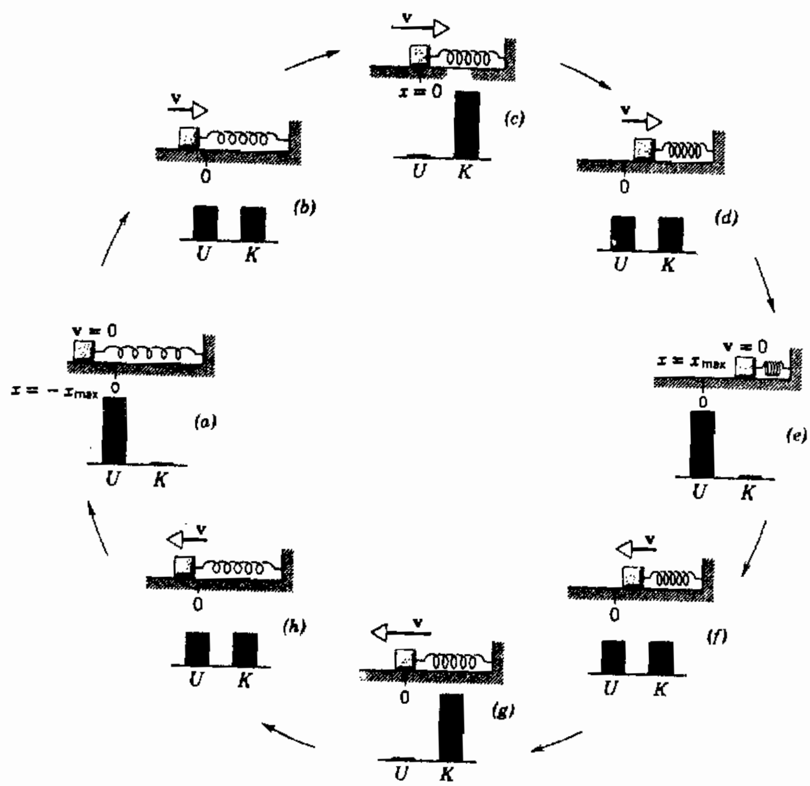
$$x_m = \sqrt{\frac{m}{K}}\; V_0$$

برای وضعیت های بین x_1 و x_2 معادله ۶-۷ نتیجه میدهد

$$\frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} K x_2^2 + \frac{1}{2} m V_2^2$$

دیده ایم که انرژی جنبشی جسمی عبارت است ازکاری که جسم میتواند بعلت حرکتش انجام دهد . انرژی جنبشی رابوسیله فرمول $K = \frac{1}{2} m V^2$ شرح میدهیم. نمیتوان یك فرمول کلی ومشابهی درنظرگرفت که بتواند انرژی پتانسیل راشرح دهد . انرژی پتانسیل یك سیستم اجسام عبارت است از کاری که این سیستم اجسام میتواند بعلت موقعیت نسبی اجزایش یعنی بعلت ترکیبش انجام دهد . درهر موردی باید تعیین کنیم که سیستم اگرازیك حالت بحالت دیگربرود چه مقدارکارمیتواند انجام دهد . درهرموردی باید تعیین کنیم که سیستم اگرازیك حالت بحالت دیگربرود چه مقدارکارمیتواند انجام دهد وسپس این رابعنوان اختلاف انرژی پتانسیل سیستم بین این دوحالت درنظرمیگیریم .

انرژی پتانسیل یك فنر بستگی به موقعیت نسبی اجزاء فنردارد . اگربگذاریم فنرازحالت کشیده اش بحالت عادیش برگردد بواسطه نیروئی که بریك جسم وارد میکند کارانجام میدهد . اگر مانند مثال بالا جرمی بفنر متصل باشد ، جرم توسط این نیروشتاب خواهد گرفت وانرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل خواهد شد . درحالت جاذبه جسم وضعیتی رانسبت بزمین اشغال



شکل ۴-۷ جرمی که بفنری متصل شده است روی سطح بدون اصطکاک، بجلووعقب سرمیخورد . این سیستم ، نوسانگرتوافقی نامیده میشود . حرکت جرم در طی یك سیکل تصویر شده است . جسم ازطرف چپ (ساعت ۹) ازمحل ماکزیمم خود شروع بحرکت میکند و در حال سکون لحظه ای میباشد : $K = 0$ فنربماکزیمم طول خود کشیده شده است $U = U_{max}$ (K و U توسط نمودارهائی درپائین هرشکل تشریح شده اند) . بعد ازیك هشتم سیکل (شکل بعدی) جرم انرژی جنبشی کسب کرده است ولی طول فنر دیگر بمقدار اولیه نیست . دراینجا K و U مقادیر یکسانی دارند $K = U = U_{max}/2$ درشکل بالای صفحه فنرنه کشیده شده است ونه فشرده ، وسرعت ماکزیمم است : $U = 0$ و $K = K_{max} = U_{max}$. سیکل انرژی کل $E = K + U$ که همیشه ثابت است $E = K_{max} = U_{max}$ ادامه میابد . نوسانگرتوافقی بادقت بیشتری درفصل ۱۳ مورد بررسی قرارخواهد گرفت .

میکند . انرژی پتانسیل خاصیت جسم وزمین است که بعنوان سیستم اجسام درنظر گرفته میشود وضعیت نسبی اجزاء این سیستم است که انرژی پتانسیل وقتیکه این اجزاء ازیکدیگر دورترند بیشترازوقتی است که آنها نزدیك یکدیگر میباشند . نقصان انرژی پتانسیل برابر کار انجام شده دراین عمل میباشد . این کار با انرژی جنبشی اجسام تبدیل میشود . درمثال ماازانرژی جنبشی بدست آمده توسط زمین وقتیکه جسم بطرف آن می افتد صرفنظر شده است . ولی دراصل این جسم نیروئی برزمین وارد کرده وباعث میشود که زمین نسبت بیك ستگاه ماندی قدری شتاب بدست آورد . البته این تغییر سرعت فوق العاده کوچك است وبعلت جرم فوق العاده زیاد زمین انرژی جنبشی اضافه شده بآن درمقایسه باانرژی جنبشی جسم قابل صرفنظر کردن میباشد . این مطلب درفصل بعد اثبات خواهد شد . درموارد دیگر مانند حرکات سیارات که اجرام اجزاء سیستم ممکن است قابل مقایسه باشند ازهیچ قسمتی از سیستم نمیتوان صرفنظر نمود . بطورکلی انرژی پتانسیل را نمیتوان بهیچ کدام ازاجسام جداگانه نسبت داد بلکه بعنوان یك خاصیت تمامی سیستم درنظر گرفته میشود .

مثال ۱

تغییر درانرژی پتانسیل ثقلی وقتیکه یك آسانسور ۱۶۰۰ پوندی از سطح خیابان بانتهای Empire State Building که ۱۲۵۰ فوت بالای خیابان است حرکت میکند چقدر است ؟ انرژی پتانسیل ثقلی سیستم (آسانسور + زمین) برابراست با $U = mgy$ پس

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

ولی $y_2 - y_1 = 1250 \text{ ft}$ و $mg = W = 1600$

پس $\Delta U = 1600 \times 1250 \text{ ft-lb} = 2/00 \times 10^6$

مثال ۲

بعنوان مثالی ازسادگی ومفید بودن روش انرژی درحل مسائل دینامیکی ، مساله شرح داده شده درشکل ۵-۷ رادرنظر میگیریم . یك قطعه چوبی یافلزی جرم m روی سطح منحنی بدون اصطکاکی بطرف پائین میلغزد . نیروی وارده توسط سطح برجسم همیشه

عمود بسطح وجهت حرکت جسم میباشد ودرنتیجه این نیرو کاری انجام نمیدهد . فقط نیروی جاذبه روی جسم کارانجام میدهد این نیرو کنسرواتیف میباشد . بنابراین انرژی مکانیکی ثابت مانده ومیتوان فورا" نوشت :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g y_2$$

که نتیجه میدهد

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2)$$

سرعت درپائین سطح منحنی سطح منحنی وار فقط بسرعت اولیه وتغییرارتفاع عمودی بستگی دارد ولی ابدا بشکل سطح بستگی ندارد . درحقیقت اگرجسم ابتدا در $y_1 = h$ درحال سکون باشد واگرقراردهیم $y_2 = 0$ بدست میآوریم

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

دراینجابایستی دانشجویان توجه کنند که کارانجام شده توسط این‌نیروی کنسرواتیف بستگی براه طی شده ندارد وباید بتوانند نشان دهند که مطالبی راکه ازحرکت یک بعدی باین حرکت دوبعدی تعمیم داده ایم صحت دارند . دراین مساله مقدار نیرو بستگی به شیب سطح درهرنقطه دارد . بنابراین شتاب ثابت نبوده وتابع مکان میباشد . اگربخواهیم سرعت را با استفاده از قوانین نیوتن تعیین کنیم بایستی ابتدا شتاب رادرهر نقطه تعیین کنیم. وسپس از شتاب روی مسیر انتگرال بگیریم . بااستفاده ازاین حقیقت که انرژی مکانیکی درحین حرکت ثابت میماند میتوان ازتمام این زحمات اجتناب نمود .

مثال ۳

ثابت یک فنر دریک تفنگ فنری 0.4 lb-in میباشد . این فنر ازطول‌طبیعی اش‌باندازه 0.2 in فشرده میشود وتوپی بوزن 0.030 lb درمقابل‌آن‌درلوله تفنگ قرارداده میشود . بافرض‌اینکه اصطکاک وجود نداشته ولوله تفنگ افقی باشد ، باچه سرعتی توپ ازتفنگ خارج میشود ؟ نیروکنسرواتیف است بنابراین انرژی مکانیکی دراین عمل ثابت

میماند . انرژی مکانیکی اولیه انرژی پتانسیل الاستیك فنریعنی $\frac{1}{2}kx^2$ وانرژی مکانیکــی انرژی جنبشی گلوله یعنی $\frac{1}{2}mv^2$ میباشد . پس

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

ویا

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}}\,x=\sqrt{\frac{48\ lb/ft}{(0.030\ lb)(32\ ft/sec^2)}}\left(\frac{1}{6}ft\right)=38\ ft/sec$$

۵-۷- انرژی مکانیکی ومنحنی انرژی پتانسیل

بااستفاده ازمنحنی انرژی پتانسیل وبقاء انرژی مکانیکی میتوان اطلاعات زیادی را بــه سادگی وبطور کیفی بدست آورد . بطورکلی بیشتر علاقمند هستیم که معادله حرکت را کــه از تعریف انرژی مکانیکی یعنی

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x)=E$$

حاصل میشود حل کنیم. که حل کامل معادله فوق منجر به پیداکردن مکان ذره بصورت تابعی از زمان $x(t)$ درحالت یك بعدی میشود . برای بیشتر سیستمها بدست آوردن جواب معادله فوق بدون استفاده ازروشهای مشکل کامپیوتری غیرممکن است . این اشکال بابخاطر اینست که انرژی E بازمان تغییرمیکند (بقاء انرژی مکانیکی) ویااینکه تابع پتانسیــــل $U(x)$ باندازه کافی ساده نیست . هرچند دربیشتر اوقات نمیتوان $x(t)$ رابطور صریــح بدست آورد . ولی درحالاتی که E ثابت است ، دانستنیهائی درباره $U(x)$ ومقدار E میتواند اطلاعات مثمر ثمر زیادی بااستفاده ازمعادله $(7-6a)$ دراختیارما قرارد هد .

بعنوان مثال برای یك مقدار معین انرژی مکانیکی E ، معادله $(7-6a)$ نشان میدهد که مسیرذره فقط محدود بآن قسمت ازمحور x است که داشته باشیم $E > U(x)$. زیرا ازنظــر فیزیکی مانمیتوانیم تندی موهومی ویاانرژی جنبشی منفی داشته باشیم. پس $E - U(x)$ باید همواره بزرگتر یا برابر صفرباشد .

میتوان یك توصیف کیفی خوب برای نوع حرکت ممکن را بارسم کردن $U(x)$ برحسب x

بدست آورد ، این توصیف وابسته به این حقیقت است که سرعت متناسب باریشه دوم $(E-U(x))$ میباشد .

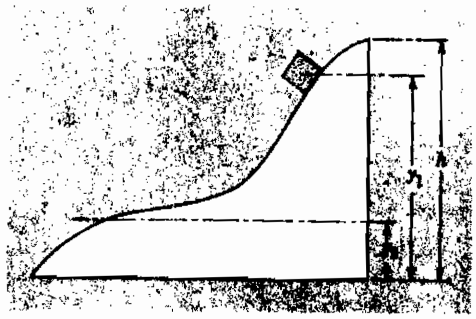
بعنوان یک مثال خاص، یک تابع انرژی پتانسیل راکه درشکل ۶-۷ نشان داده شده است درنظر بگیرید . این رامیتوان بعنوان نیمرخ واقعی یک غلطك ساحلی بدون اصطکاك درنظرگرفت. امابطورکلی این منحنی میتواند نمایانگر انرژی پتانسیل برای سیستم غیرثقلی باشد ، چون برای‌حرکت حقیقی باید داشته باشیم $E \geqslant U(x)$ ،کمترین انرژی کل ممکنه E_0 میباشد . برای این مقدار انرژی کل $E_0 = U$ بوده وانرژی جنبشی باید برابر صفر باشد . ذره بایستی درنقطه x_0 بحال سکون باشد.برای انرژی کلی بیشتراز E_1 ذره میتواند فقط بین x_1 و x_2 حرکت کند . وقتی از x_0 میگذرد باتزاید یك شدن به x_1 یا x_2 سرعتش کم میشود . در x_1 یا x_2 ذره ایستاده وجهتش معکوس میشود . بنابراین این نقاط x_1 و x_2 ونقاط برگشت حرکت نامیده میشوند . درانرژی کل E_2 چهارنقطه برگشت وجود دارد وذره میتواند دریکی از دوچاه پتانسیل نوسان کند . درانرژی کل E_3 فقط یك نقطه برگشت حرکت در x_3 وجود دارد . اگرذره درابتدا دارای حرکتی درجهت منفی x باشد ، درنقطه x_3 ساکن شده وسپس درجهت مثبت محور x حرکت میکند . وقتیکه U کم شود سرعت ذره زیاد شده ووقتی U زیاد میشود سرعت ذره کم میگردد . درانرژی های بالا E_4 نقاط بازگشت وجود نداشته وذره تغییر جهت نخواهد داد . سرعت ذره برحسب مقدار پتانسیل درهر نقطه تغییر خواهد کرد .

درنقطه ای که $x = x_0$ ، $U(x)$ مینیمم مقدار رادارد ، مانند نقطه $x = x_0$ شیب منحنی صفر میباشد بطوریکه نیرو برابر صفر است یعنی

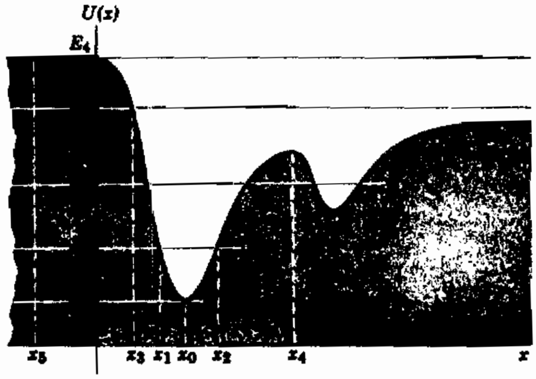
$$F(x_0) = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

ذره ای‌که دراین نقطه درحال سکون باشد درحال سکون باقی میماند . بعلاوه اگرذره قدری دریکی ازجهات جابجا شود ، نیروی $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ مایل است که آنرا برگرداند و ذره درحول نقطه تعادلش نوسان خواهد کرد . درنتیجه این نقطه تعادل رانقطه تعادل پایدار گویند . درنقطه ای‌که $U(x)$ ماکزیمم مقدارراداردمثل نقطه $x = x_4$ ، شیب منحنی صفراست بطوریکه نیرو دوباره برابر صفرمیباشد یعنی

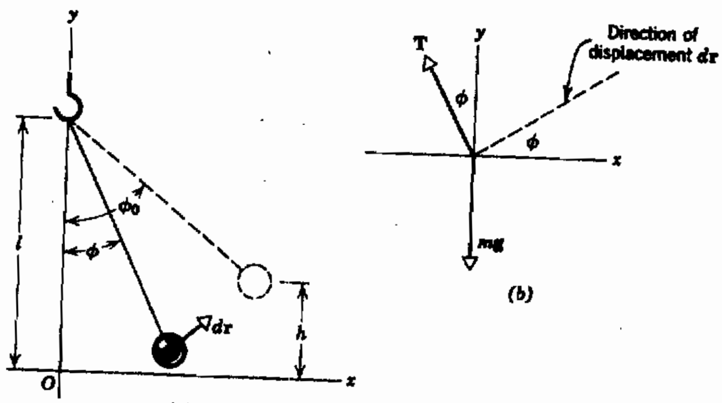
$$F(x_4) = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_4} = 0$$



شکل ٥-٧ جسمی درحال سرخوردن روی سطح منحنی بدون اصطکاکی .



شکل ٦-٧ یک منحنی انرژی پتانسیل



شکل ٧-٧ a) یک پاندول ساده. ذره‌ای بجرم m از یک نخ بطول l آویخته شده و ماکزیمم انحراف آن ϕ_0 می‌باشد. b) دیاگرام نیرو

ذره ای که در این نقطه درحال سکون باشد درحال سکون باقی میماند . ولی اگرذره حتی باندازه کوچکترین فاصله ازاین نقطه جابجاشود نیروی $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ مایل است که آنرا بیشترازوضعیت تعادل دورکند . بنابراین چنین نقطه تعادلی تعادل ناپایدار نامید میشود .
درفاصله ایکه $U(x)$ ثابت است مثل نزدیك $x = x_0$ شیب منحنی صفراست بـــه طوریکه نیرو صفر میباشد یعنی

$$F(x_5) = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_5} = 0$$

این چنین فاصله ای تعادل خنثی نامیده میشود زیراذره رامیتوان کمیجابجاکردبدون اینکــه نیروی دافعه ویانیروی بازگشت دهنده ای بآن وارد شود .

ازاینجاروشن است که اگرتابع انرژی پتانسیل رابرای ناحیه ای ازمحور x که درآن جسم حرکت میکند بدانیم مقدارزیادی درباره حرکت جسم میدانیم .

۷-٦- سیستمهای کنسرواتیف دووسه بعدی

تاکنون راجع به انرژی پتانسیل وبقاء انرژی درسیستمهای یك بعدی که درآنها نیرو در امتداد حرکت میباشد بحث کرده ایم. براحتی میتوان این بحث رابحرکت سه بعدی تعمیم داد .

اگرکارانجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ فقط بنقاط انتهائی حرکت بستگی داشته باشــد ومستقل ازراه طی شده بین این نقاط باشد ، نیرو کنسرواتیف است. انرژی پتانسیل را بــــا مقایسه باسیستم یك بعدی تعریف میکنیم وپیدامیکنیم که تابعی ازسه مختصات مکانی میباشــد یعنی $U = U(x, y, z)$ دوباره عبارتی برای بقاء انرژی مکانیکی بدست خواهیـــم آورد .

تعمیم معادله b ۵-۷ برای حرکت سه بعدی عبارت است از

$$\Delta U = -\int_{r_0}^{r} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \qquad (\text{۷-۵}C)$$

که در آن ΔU عبارتست از تغییر در انرژی پتانسیل سیستم وقتیکه ذره از نقطه (x_0 , y_0 , z_0) که با بردار مکان $\vec{r}_0$ نشان داده میشود بنقطه (x , y , z) که با بردار مکان $\vec{r}$ نشان داده میشود حرکت میکند . F_x ، F_y ، F_z مولفه های نیروی کنسرواتیف $\vec{F}(r)=\vec{F}(x , y , z)$ میباشند .

تعمیم معادله ۷-٦b بحرکت سه بعدی عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x , y , z)=\frac{1}{2}mv_0^2+U(x_0 , y_0 , z_0) \qquad (7\text{-}6c)$$

که با استفاده از علائم برداری بصورت

$$\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}+U(\vec{r})=\frac{1}{2}m\vec{v}_0\cdot\vec{v}_0+U(\vec{r}_0) \qquad (7\text{-}6d)$$

در میآید که در آن

$$\vec{v}_0\cdot\vec{v}_0=v_{0x}^2+v_{0y}^2+v_{0z}^2 \quad \text{و} \quad \vec{v}\cdot\vec{v}=v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

همینطور معادله ۷-٦a در فضای سه بعدی بصورت

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x , y , z)=E$$

در میآید که در آن ثابت E انرژی مکانیکی کل میباشد . بالاخره تعمیم معادله ۷-۷ در سه بعد عبارتست از

$$\vec{F}(r)=-\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x}-\vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y}-\vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

اگر این عبارت را بجای $\vec{F}$ در معادله ۷-۵c قرار دهیم دوباره یك اتحاد بدست میآوریم . بزبان برداری گفته میشود که نیروی کنسرواتیف $\vec{F}_r$ برابر منهای گرادیان انرژی پتانسیل $U(x , y , z)$ میباشد . دانشجویان میتوانند نشان دهند که تمام این عبارات برای حرکت در امتداد محور x به معادلات صحیح یك بعدی خلاصه میشوند .

مثال ٤

یك پاندول ساده (شکل ۷-۷a) را در نظر میگیریم . حرکت سیستم در صفحه $x-y$ واقع است یعنی یك حرکت دو بعدی میباشد . کشش ریسمان همیشه عمود بحرکت ذره معلق میباشد بطوریکه این نیرو کاری روی ذره انجام نمیدهد . اگر پاندول باندازه زاویه ای منحرف

شده و سپس رها گردد . فقط نیروی جاذبه ثقل که اززمین بذره وارد میشود روی آن کارانجام میدهد . چون این نیروکنسرواتیف است میتوانیم معادله بقاء انرژی درد وبعد رابکاربریم

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y) = E$$

ولی $U(x,y)$ مساوی mgy است که درآن y درپائین ترین نقطه کمان ($\varphi = 0^\circ$) برابرصفر گرفته میشود . پس

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

قبل از رهاکردن ذره باندازه زاویه φ_0 کشیده شده است. انرژی پتانسیل دراینجا mgh است که مربوط به ارتفاع $y=h$ بالای نقطه مقایسه میباشد . درنقطه رهاکردن ($\varphi=\varphi_0$) سرعت وانرژی جنبشی صفرهستند بنابراین دراین نقطه انرژی پتانسیل برابر انرژی مکانیکی کلی میباشد . پس

$$E = mgh$$

و

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

ویا

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y)$$

سرعت ماکزیمم درنقطه $y=0$ اتفاق می‌افتد که درآنجا $V=\sqrt{2gh}$

سرعت می نیمم درنقطه $y=h$ اتفاق می‌افتدکه درآنجا $V=0$

در $y=0$ انرژی تماما" جنبشی است وانرژی پتانسیل صفرمیباشد .

در $y=h$ انرژی تماما" پتانسیل است وانرژی جنبشی صفرمیباشد .

درقسمتهای حد واسط قسمتی ازانرژی بصورت جنبشی وقسمتی ازآن بصورت پتانسیل است .

توجه کنیدکه درتمام نقاط حرکت $U \leqslant E$ میباشدویاندولی نمیتوانداز $y=h$ یعنی نقطه ابتدائی رها شدنش بالا تر برود .

۷-۷- نیروهای غیرکنسرواتیف

تاکنون فقط تاثیر یك نیروی‌تنهای کنسرواتیف بریك ذره رادرنظر گرفتیم باشروع ازقضیه کاروانرژی ویا

$$W_1 + W_2 + \dots\dots + W_n = \Delta K \qquad (۷-۲)$$

مشاهده کردیم که اگرفقط یك نیرو مثلا $\vec{F_1}$ اثرکند واگراین نیرو کنسرواتیف باشدآنوقت میتوان کار W_1 راکه روی ذره انجام داده است توسط نقصان انرژی پتانسیل ΔU_1 سیستم نشان داد (معادله a ۷-۰ راملاحظه کنید) یعنی

$$W_1 = -\Delta U_1$$

باترکیب این معادله بامعادله ۲-۷ بدست میآید

$$\Delta K + \Delta U_1 = 0$$

اگرچندین نیروی کنسرواتیف مثل جاذبه ، نیروی الاستیك فنر ، نیروی‌الکترواستاتیك اثرکنند بآسانی میتوان این دو معادله رابه

$$\sum W_c = -\sum \Delta U \qquad (۷-۱۲a)$$

$$\Delta K + \sum \Delta U = 0 \qquad (۷-۱۲b)$$

تعمیم دادکه درآن $\sum W_c$ جمع کارهای انجام شده توسط نیروهای (کنسرواتیف) مختلف و ΔU هاتغییر درانرژی پتانسیل های سیستم وابسته باین نیروهامیباشند . کمیت طرف چپ معادله b ۱۲-۷ برابر ΔE یعنی تغییر انرژی مکانیکی کل برای حالتی که درآن - چندین نیروی کنسرواتیف روی ذره اثر کند میباشد . پس‌میتوان این معادله رابصورت ، (نیروهای کنسرواتیف)

$$\Delta E = 0 \qquad (۷-۱۳)$$

نوشت که بمامیگوید وقتیکه ترکیب سیستم تغییرکند انرژی مکانیکی کل E ثابت میماند .

حال فرض میکنیم علاوه برچندین نیروی کنسرواتیف ، یك نیروی تنهای غیرکنسرواتیف

بعلت اصطکاک روی ذره اثرکند . آنوقت معادله ۲-۷ رامیتوان بصورت

$$W_f + \sum W_c = \Delta K$$

نوشت که در آن $\sum W_c$ دوباره مجموع کارانجام شده توسط نیروهای کنسرواتیف و W_f کارانجام شده توسط اصطکاک است . میتوان این رادوباره بصورت

$$\Delta K + \sum \Delta U = W_f \qquad (\text{۷-۱۴})$$

نوشت (معادله b ۲۱-۷ راملاحظه کنید) . معادله ۱٤-۷ نشان میدهد که اگرنیروی اصطکاک اثرکند انرژی مکانیکی کلی ثابت نیست ، بلکه باکارانجام شده توسط نیروی اصطکاک تغییر مینماید . معادله ۱٤-۷ رامیتوان بصورت

$$\Delta E = E - E_0 = W_f \qquad (\text{۷-۱۵})$$

نوشت. چون W_f یعنی کارانجام شده روی ذره توسط نیروی اصطکاک همیشه منفی است از معادله ۱۵-۷ نتیجه میشود که انرژی مکانیکی انتهائی $E(= K + \sum U)$ کمتراز انرژی مکانیکی اولیه $E_0(= K_0 + \sum U_0)$ میباشد .

اصطکاک نمونه ای ازنیروهای تلف شونده میباشد یعنی نیروئی است که کار منفی روی جسم انجام میدهد ومایل است انرژی مکانیکی کلی سیستم راکم کند . اگر نیروی غیرکنسرواتیف دیگری بکاربرده بودیم آنوقت W_f درمعادلات ۱٤-۷ و ۱۵-۷ جای خودرا به جمله W_{nc} میداد که دوباره نشان میدهد که انرژی مکانیکی کلی E سیستم ثابت نبوده بلکه بامقدار کارانجام شده توسط نیروی غیرکنسرواتیف تغییر میکند بنابراین فقط وقتی نیرو های غیرکنسرواتیف وجود نداشته باشند یاوقتی بتوانیم ازکاری که انجام میدهند صرفنظر کنیم ، میتوان بقاء انرژی مکانیکی رافرض نمود .

حال ببینیم انرژی مکانیکی "گم شده" بکجا میرود ؟ این انرژی تبدیل بنوعی انرژی موسوم به انرژی داخلی U_{int} میشود که میتوانیم تصور کنیم که این انرژی درداخل جسم ذخیره میشود . مثلاً وقتی جسمی روی یک سطح صاف میلغزد انرژی مکانیکی آن که تماماً جنبشی

است تقلیل می یابد . ودرنتیجه انرژی داخلی آن بالا میرود که این بالا رفتن بوسیله ازدیاد درجه حرارت مشخص میشود . درفصل ۱۹ دراین باره بیشتر صحبت خواهیم کرد .

درست همانطور که کارانجام شده توسط یك نیروی کنسرواتیف روی‌جسمی برابرمنهای انرژی پتانسیل بدست آمده است ، کارانجام شده توسط یك نیروی اصطکاکی روی‌جسمی برابر منهای انرژی داخلی گرفته شده میباشد . بعبارت دیگر انرژی داخلی گرفته شده برابرکارانجام شده توسط جسم میباشد پس میتوان بجای W_f درمعادله ۱۵-۷ $-\Delta U_{int}$ راقرارداد و یا

$$\Delta E + \Delta U_{int} = 0 \qquad (۷-۱۶)$$

این رابطه بیان میکند که تغییری درمجموع انرژی مکانیکی وحرارتی سیستم ،وقتی فقط نیروهای کنسرواتیف واصطکاکی روی سیستم اثرکنند بوجود نمی‌آید . بانوشتن این معادله بصورت $\Delta U_{int} = -\Delta E$ ملاحظه میکنیم که نقصان انرژی مکانیکی برابر انرژی داخلی میباشد .

<u>مثال ۵</u>

یك قطعه چوبی یافلزی ۱۰ پوندی روی یك سطح مورب ۳۰ درجه ای باسرعت اولیه $16\ ft/sec$ بالا میرود . ملاحظه میشودکه جسم $5/0\ ft$ درامتداد سطح حرکت کرده میایستد وسپس بطرف عقب (پائین) برمیگردد . نیروی اصطکاك $\vec{f}$ راکه برجسم اثر میکند (بافرض اینکه مقدارش ثابت است) حساب کنید وسرعت V جسم راوقتیکه پائین سطح شیبدار برمیگردد پیدا نمائید .

ابتدا حرکت بطرف بالا رادرنظرمیگیریم . دربالا درجائی که حرکت خاتمه پیدا میکند ،

$$E = K + U = 0 + (10\ lb)(5/0\ ft)(\sin 30^\circ) = 25\ ft\text{-}lb$$

درپائین جائیکه حرکت شروع میشود

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{10\ lb}{32\ ft/sec^2}\right)(16\ ft/sec)^2 = 40\ ft\text{-}lb$$

ولی

$$W_f = -fs = -f(5/0\ ft)$$

و

$$E - E_0 = W_f$$

بنابراین

$$25\ ft\text{-}lb - 40.0\ ft\text{-}lb = -f(5.0\ ft) \Rightarrow f = 3.0\ lb$$

حال حرکت بطرف پائین را در نظر میگیریم. جسم با سرعت V بپائین سطح شیبدار برمیگردد. پس در پائین جائی که حرکت خاتمه می یابد داریم

$$E = K + U = \frac{1}{2}\left(\frac{10\ lb}{32\ ft/sec^2}\right)V^2 + 0 = \left(\frac{5}{32}\ lb\ sec^2/ft\right)V^2$$

در بالا وقتی این حرکت شروع میشود

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + (10\ lb)(5.0\ ft)(\sin 30^\circ) = 25\ ft\text{-}lb$$

ولی

$$W_f = -(3.0\ lb)(5.0\ ft) = -15\ ft\text{-}lb$$

و

$$E - E_0 = W_f$$

پس

$$\left(\frac{5}{32}\ lb\ sec^2/ft\right)V^2 - 25\ ft\text{-}lb = -15\ ft\text{-}lb$$

$$V = 8.0\ ft/sec$$

۸-۷- بقاء انـــــرژی

بحث فصل قبلی را میتوان با در نظر گرفتن نه فقط نیروهای کنسرواتیف ونیروهای اصطکاک بلکه با در نظرگرفتن سایر نیروهای غیرکنسرواتیف که اصطکاکی نیستند تعمیم داد. میتوان قضیه کار انرژی (معادله ۲-۷)

$$W_1 + W_2 + \cdots\cdots + W_n = \Delta K$$

یا

$$\sum W_c + W_f + \sum W_{nc} = \Delta K \qquad (۷-۱۷)$$

نوشت که در آن $\sum W_c$ کارکلی انجام شده روی ذره توسط نیروهای کنسرواتیف ، W_f کارانجام‌شده توسط اصطکاک و $\sum W_{nc}$ کارکلی انجام شده توسط نیروهای غیرکنسرواتیف غیر اصطکاکی است . ملاحظه کردیم که هرنیروی کنسرواتیفی میتواند بیك انرژی پتانسیل‌وهرنیروی اصطکاکی بیك انرژی **داخلی** مربوط شود یعنی

$$\sum W_c = -\sum \Delta U \quad \text{و} \quad W_f = -\Delta U_{int}$$

پس معادله ۱۷-۷ میشود

$$\sum W_{nc} = \Delta K + \sum \Delta U + \Delta U_{int}$$

حال W_{nc} هرچه که باشد ، همیشه امکان دارد که فرمهای جدیدی‌ازانرژی که باین کـــار مربوط هستند پیدا کنیم. پس میتوان $\sum W_{nc}$ رابوسیله جمله دیگری‌ازتغییر انرژی درطـرف راست معادله نمایش داد وبنابراین همواره میتوان قضیه کار- انرژی رابشکل

$$0 = \Delta K + \sum \Delta U + \Delta U_{int} + (\text{تغییر درفرمهای دیگر انرژی})$$

نوشت . به‌عبارت دیگرانرژی کلی ـ جنبشی بعلاوه پتانسیل بعلاوه **داخلی** بعلاوه تمام فرمهای دیگر تغییرنمیکند . انرژی ممکن است ازیك نوع بنوع دیگری تبدیل شود ولی نمیتواند بوجـــود آمده یا ازبین برود یعنی انرژی کلی ثابت میباشد .

این بیان تعمیمی است ازتجارب ماوتاکنون باشاهده طبیعت متناقض نبوده است. این بیان اصل بقاء انرژی نامیده میشود . گاهی درتاریخ فیزیك بنظر میرسد که این اصل رد شـده است . ولی شکست ظاهری این اصل باعث تحریك درجستجوی علل آن شده است . درایـن جستجوها آزمایشگران علاوه برحرکت که دراثرنیروهای متقابل اجسام وجود دارد پدیده هـــای فیزیکی دیگر رانیز دخیل‌میدانستند والبته این پدیده ها همواره کشف شده است. باکاری‌کـــه

برخلاف اصطکاک صورت میگیرد انرژی داخلی تولید میشود ، دراندرکنشهای دیگرممکن است انرژی بشکل صوت ، نور ، الکتریسیته وغیره تولید شود . بنابراین مفهوم انرژی تعمیم داده شده تا علاوه برانرژی جنبشی وانرژی پتانسیل اجسام قابل مشاهده سایر فرمهای انرژی رانیز شامل شود . این روش که مکانیک اجسام متحرک راباپدیده های غیرمکانیکی ویاپدیده هائی که حرکت درآنها مستقیما" قابل مشاهده نیست مربوط میکند مکانیک رابتمام علوم فیزیکی وابسته کرده است. حال مفهوم انرژی بتمام علوم فیزیکی نفوذ کرده ویکی ازایده های یک شکل کننده درفیزیک گردیده است . مثلاً مراجعه کنید به

"Concept of Energy in Mechanics" by R. B. Lindsay, in *The Scientific Monthly*, October 1957

درفصلهای بعدی تبدیل های مختلف انرژی را ـ ازمکانیکی بحرارتی ، مکانیکی به الکتریکی ، اتمی بحرارتی وغیره مطالعه خواهیم کرد . درحین این تبدیلات است که میتوانیم تغییرات انرژی رابرحسب کاراندازه بگیریم زیرادرحین این تبدیلات است که نیروهائی ایجاد شده وکارانجام میدهند .

اگرچه اصل بقاء انرژی جنبشی بعلاوه انرژی پتانسیل اغلب مفید میباشد ، ملاحظه میکنیم که این حالت محدودی ازاصل عمومی تربقاء انرژی است. انرژی جنبشی وپتانسیل فقط وقتی نیروهای کنسرواتیف اثرکنند محفوظ میباشند ، انرژی کل همیشه محفوظ است .

۷-۹ جرم وانرژی

یکی ازبزرگترین قوانین بقاء درعلم اصل بقاء ماده میباشد . ازنظر فلسفی بیان اولین این اصل عمومی توسط Lucretius شاعررومی که هم عصر ژول سزار بود (۹۴-ق‌م) در اثرمشهورش De Rerum Nature بیان شد Lucretius مینویسد " اشیاء نمیتوانند ازهیچ بوجود آیند ، ووقتی بوجود آمدند نمیتوانند بهیچ برگردند " . مدت زمان زیادی طول کشید تااین مفهوم بعنوان یک اصل محکم علمی تثبیت گردید . این اصل که بعداً " بقاء

جرم نامیده شد فوق العاده درشیمی وفیزیك سودمند واقع شد . آلبرت اینشتین درمقاله ای که تئوری نسبیت رامعرفی میکرد راعتبارکلی این اصل تردید نمود . آزمایشهای بعدی روی الکترونهای سریع وذرات هسته ای نتایج اوراتائید کرد .

نتایج اینشتین بیان میکرد که اگر بعضی قوانین فیزیکی راب‌خواهیم نگهداریم بایـــد تعریف جدیدی ازجرم بصورت زیر بنمائیم .

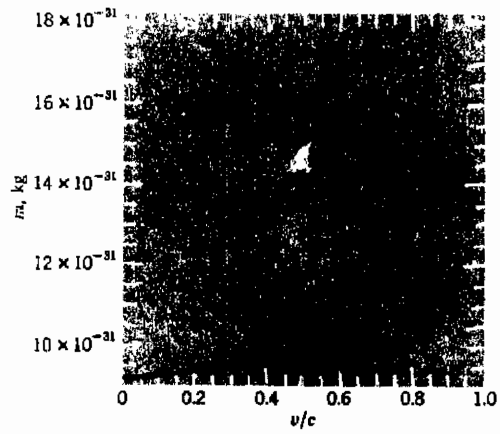
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (۷-۱۸)$$

که درآن m_0 عبارت است ازجرم ذره وقتی که ذره نسبت بناظر درحال سکون میباشد وجــرم درحال سکون نامیده میشود ، m جرم اندازه گیری شده ذره استوقتیکه باسرعت v نسبـت بناظر درحال حرکت میباشد و c سرعت نور است که دارای مقدار ثابتی تقریبا برابـــــر ۳×۱۰^{۸} $meters/sec$ میباشد . بررسی تجربی این معادله رامیتوان مثلاً بوسیلـــه انحراف الکترونهای خیلی سریع درمیدانهای مغناطیسی واندازه گیری شعاع انحناء مسیرآنها انجام داد . این مسیرها دایره ای بوده ونیروهای مغناطیسی از نوع مرکزی میباشنـــد ($F = \frac{mv^2}{R}$ و F و v معلوم هستند) . درسرعتهای معمولی اختلاف بین m و m_0 بقدری کم است که قابل تشخیص نمیباشند . ولی الکترونها میتوانند ازهسته های رادیو اکتیو باسرعتهای بیشتر از ۹/۰ سرعت نور تابیده شوند . دراین موارد نتایج تجربی (شکل ۸-۷) معادله ۱۸-۷ راتائید میکنند .

درفرمالیزم اینشتین مفاهیم انرژی جنبشی وانرژی کلی دوباره تعریف شده اند . از آنجائیکه درحال حاضر جرم بصورت تابعی از مربع سرعت است ومقدارآن باازدیاد سرعت زیاد میشود واضح است که جرم وانرژی جنبشی وابسته بهم میباشند . درنسبیت انرژی جنبشی K بصورت زیر تعریفمیشود .

$$K = (m - m_0)c^2 \qquad (۷-۱۹)$$

که درآن مقدار m از معادله ۱۸-۷ بدست میآید . وقتیکه سرعت جسم نسبت به سرعت نور



شکل ۸-۷ طریق ازدیاد جرم الکترون وقتیکه سرعت آن نسبت بناظر افزایش می یابد . خـط توپر منحنی $m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ است ودایره ها ازمقادیر تجربی کـه توسط Bvchere و Nevmann بدست آمده اند (درسال ۱۹۱٤) گرفتـه شده است. وقتی‌که $V \to c$ این منحنی بسمت بینهایت میل میکند .

خیلی کوچک است رابطه فوق به حد کلاسیک خود یعنی $\frac{1}{2} m_0 v^2$ نزدیک میشود . وقتیکه $V = 0$ باشد $m = m_0$ میشود ودرنتیجه همانطوریکه انتظارمیرود $K = 0$ خواهد بود .

این ایده اساسی راکه انرژی معادل جرم است میتوان تعمیم دادبطوریکه شامل انرژی های دیگرغیراز جنبشی نیزباشد . بعنوان مثال وقتیکه بافشرده کردن فنر بآن انرژی پتانسیل الاستیک U را اضافه میکنیم جرم آن از m_0 به $m_0 + U/c^2$ ترقی میکند ، وقتیکه‌ما انرژی داخلی باندازه U_{int} بیک جسم اضافه میکنیم جرم آن باندازه Δm اضافه میشود که

درآن Δm برابراست با U_{int}/C^2 معادله ۷-۱۹ رامیتوان طوری نوشت که شامل این نوع انرژی نیز باشد

$$K + U + U_{int} + \cdots = (m - m_0)C^2 \qquad (۷-۲۰)$$

که دراین‌جا مقدار m ازآنچه که ازمعادله ۷-۱۸ بدست میآید باندازه $(U+U_{int}+\cdots)/C^2$ بیشتراست .

دراینجامیتوان تصورکردکه درحال‌حاضر تعریف انرژی کل $(m - m_0)C^2$ میباشد . بطور کلاسیك دریك سیستم بسته (سیستمی که هیچ نیروی خارجی بآن وارد نمیشود وهیچگونه تغییری درجرم وانرژی آن موجود نباشد) . جمع انرژی های طرف چپ معادله ۷-۲۰ کهانرژی کلی میباشد درحقیقت مقدارثابتی‌است باتوجه به هم ارزی جرم وانرژی)اینشتین این امکان رادر نظرگرفت که جرم درحال‌سکون نیز میتواند بانواع دیگر انرژی تبدیل شود همانطوریکه انرژی - جنبشی وپتانسیل میتوانند بیکدیگر تبدیل شوند . اگر این حالت‌برقرار باشد کمیتی که حفظ میشود mC^2 میباشد که بنام انرژی کل خوانده میشود . درنتیجه خواهیم داشت

$$K + U + U_{int} + \cdots + m_0C^2 = mC^2 = E_{tot} \qquad (۷-۲۱)$$

این پیش‌بینی های تئوری نسبیت وقتیکه شکافتۀهسته بوسیله Lise-Meitner-Otto-Hahn درسال ۱۹۳۹ کشف گردیدبطور دقیقی اثبات شد واین موضوع باساختن بمب اتمی درسال ۱۹٤۵ دنبال شد .

دربمب اتمی اتم اورانیوم‌به قسمتهای مختلفی شکسته میشود . که مجموع جرمهای ایـــن قسمتها کمترازجرم اتم مادراست . وتفاوت جرم Δm که معادل انرژی $\mathcal{E}$ است بصورتهای مختلفی ظاهرمیشود . وانرژی کلی ثابت میماند بطوریکه ازمعادله ۷-۲۱ خواهیم داشت

$$\mathcal{E} + \Delta m_0C^2 = 0$$

$$\mathcal{E} = -\Delta m_0C^2 \qquad (۷-۲۲)$$

علامت منها نشان میدهد که برای بدست آوردن انرژی درسیستم جرم درحال‌سکون باید تقلیل یابد .

مثال ٦

یك مثال كمی درنظر میگیریم . درمقیاس اتمی واحد جرم تقریباً برابر $1/66 \times 10^{-27}\,Kg$ میباشد . دراین مقیاس جرم پروتون (هسته اتم هیدرژن) برابر ۱/۰۰۷۲۸ وجرم نوترون (یك ذره خنثی كه یكی ازاجزاء تشكیل دهنده هسته اتمها باستثنای هسته اتم هیدرژن است) برابر ۱/۰۰۸٦۷ میباشد . یك دیوترون (هسته هیدرژن سنگین) ازیك نوترون ویك پروتون تشكیل شده است ، جرم دیوترون برابر ۲/۰۱۳٦۰ بدست آمده است. جرم دیوترون ازمجموع جرمهای نوترون وپروتون باندازه ۰/۰۰۲۳۹ واحد جرم اتمی كمتراست . این اختلاف جرم معادل انرژی زیرمیباشد

$$E = \Delta m c^2 = (0/00239 \times 1/66 \times 10^{-27}\,Kg)(3/00 \times 10^{8}\,meters/sec)^2$$

$$= 3/58 \times 10^{-13}\,joules = 2/20 \times 10^{6}\,eV$$

وقتی یك نوترون ویك پروتون برای تشكیل دیوترون تركیب شوند دقیقاً این اندازه انرژی بشكل اشعه γ تشعشع میشود . بهمین ترتیب دیده میشودكه همین مقدارانرژی بایستی به دیوترون اضافه شود تابیك پروتون و یک نوترون تجزیه شود . بنابراین این انرژی ، انرژی پیوندی دیوترون نامیده میشود .

فصل هشتم

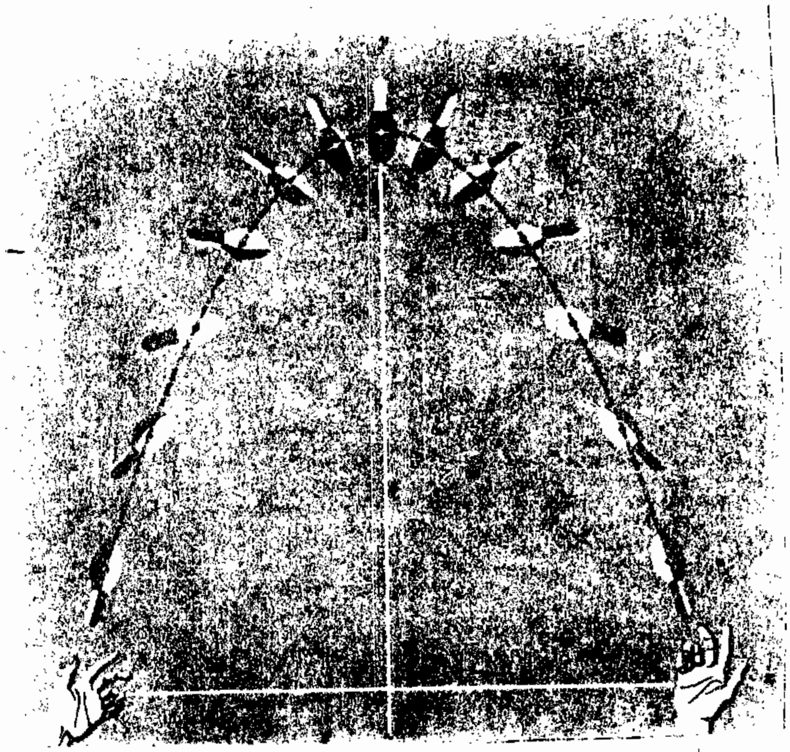
۱ - ۸ مرکز جرم

تا کنون اجسام رابصورت ذرات جرم دار بدون بعد درنظرگرفته ایم. در حرکت انتقالی تمام نقاط جسم یك نوع مسیر راطی میکنند بنابراین حرکت یك ذره نماینده حرکت کلی جسم میباشد. ولی حتی وقتیکه جسم درحین حرکت چرخیده ویاارتعاش میکند، در جسم نقطه ای وجود دارد - که مرکز جرم نامیده میشود وحرکت این نقطه مانند حرکت ذره ای است که تحت تاثیر همان نیروهای خارجی قرار دارد. شکل ۱-۸ حرکت سهمی شکل ساده مرکز جرم یك Indian-Club رانشان میدهد که ازدست یك بازیگر بطرف بازیگرد یگری پرتاب شده است، هیچ نقطه دیگری در این جسم باین طریق ساده حرکت نمیکند. توجه کنید که اگراین جسم دارای یك حرکت انتقالی ساده میبود، آنوقت هر نقطه آن تغییر مکانی مانند مرکز جرم درشکل ۱-۸ میداشت. باین - دلیل حرکت مرکز جرم جسم حرکت انتقالی جسم نامیده میشود.

وقتی جسم مورد بحث جسم سختی نباشد، بازهم یك مرکزجرم میتوان درنظر گرفت که حرکتش ساده است حتی اگر موقعیت نسبی ذرات تشکیل دهنده جسم تغییر کند. دراین قسمت مرکز جرم را تعریف نموده ونشان خواهیم داد که چگونه موقعیت آنرا میتوان محاسبه نمود. در قسمتبعد خواصی را مورد بحث قرارخواهیم داد که برای شرح چگونگی حرکت اجسام بزرگ یا سیستم ذرات مفید میباشد.

ابتدا حالت ساده سیستم دو ذره m_1 و m_2 راکه بترتیب درفواصل x_1 و x_2 ازیك مبداء O قرارگرفته اند مانند شکل ۲-۸ رادرنظرمیگیریم. نقطه C یعنی مرکز جرم سیستم را طوری تعریف میکنیم که فاصله x_{cm} از مبداء O بصورت زیر باشد

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (\text{۸-۱})$$



۱ - ۸ - یك میله چوبی ورزشی را یك نفر بطرف دیگری پرتاب میکند . اگرچه این میله بگرد محور خود دوران میکند ، باوجود این نقطه ای روی محور این جسم قرار دارد بنام مرکز جرم که یك مسیر سهمی ساده را طی میکند .

این نقطه (شکل ۲-۸) این خاصیت را دارد که حاصلضرب جرم کلی سیستم $(m_1+m_2=M)$ در فاصله این نقطه ازمبدا برابر جمع حاصلضربهای جرم هرذره در فاصله اش از مبدا میباشد یعنی :

$$M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

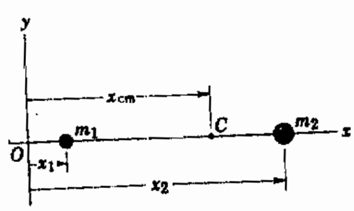
اگر تعریف رابرای سیستمهائی که ذرات بیشتری دارند تعمیم دهیم کافیست که حاصلضرب جرم در مکان رابرای ذرات دیگر به رابطه فوق اضافه کنیم . در مسائل مکانیکی که شامل جمله - حاصلضرب جرم در فاصله ازیك نقطه (مانند فاصله از محور دوران) می باشند مفهوم مرکز جرم بمقدار زیادی در عملیات ایجاد سهولت می نماید . درباره اینکه چرا چنین حاصلضربهائی در معادلات ظاهر میشوند بعدا بحث خواهیم کرد .

اگر n ذره m_1 و m_2 و .... و m_n درامتداد خط مستقیمی داشته باشیم بر حسب تعریف مرکز جرم این ذرات نسبت به یك مبدا غیر مشخص برابراست با

$$(\text{۸-۲}\,a) \qquad x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

که درآن x_1 و x_2 و .... و x_n عبارتند از فواصل جرمها از مبدائی که x_{cm} ازآن - اندازه گرفته میشود . علامت $\sum$ نمایش عمل جمع کردن است که دراین مورد روی n ذره میباشد . جمع $\sum m_i = M$ عبارت از جرم کل سیستم میباشد . میتوان معادله ۸-۲a رادوباره باین صورت نوشت :

$$M x_{cm} = \sum m_i x_i \qquad (\text{۸-۲}\,b)$$



۸ - ۲ - مرکز جرم دوجرم m_1 و m_2 درنقطه C روی خط واصل m_1 و m_2 و بفاصله x_{cm} از مبدا مختصات قرار داد .

برای تعداد زیادی ذره که در فضا توزیع شده باشند مرکز جرم در x_{cm} ، y_{cm} و z_{cm} است که در آن

$$x_{cm}=\frac{1}{M}\sum m_i x_i \quad , \quad y_{cm}=\frac{1}{M}\sum m_i y_i \quad , \quad z_{cm}=\frac{1}{M}\sum m_i z_i \qquad (۸-۳a)$$

حال از علائم برداری استفاده کرده هر ذره را بوسیله بردار مکان $\vec{r}_i$ ومرکز جرم را با بردار $\vec{r}_{cm}$ نشان میدهیم. این بردارها با x_i و y_i و z_i و x_{cm} و y_{cm} و z_{cm} و معادله ۸ - ۳a بوسیله روابط

$$\vec{r}_i=\vec{i}\,x_i+\vec{j}\,y_i+\vec{k}\,z_i$$
$$\vec{r}_{cm}=\vec{i}\,x_{cm}+\vec{j}\,y_{cm}+\vec{k}\,z_{cm}$$

مربوطند بنابراین سه معادله اسکالر ۸ - ۳a رامیتوان جایگزین معادله برداری

$$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i \qquad (۸-۳b)$$

نمود . دانشجویان میتوانند ثابت کنند که باقرار دادن روابط داده شده برای $\vec{r}_i$ و $\vec{r}_{cm}$ در معادله بالا معادله (۸ - ۳b) صادق میباشد . توجه کنید که چطور استفاده ازبردارها بیان رامختصرمیکند .

معادله ۸ - ۳b نشان میدهد که مبداء دستگاه مقایسه در مرکز جرم باشد (یعنی $\vec{r}_{cm}=0$ باشد) آنوقت برای سیستم $\sum m_i\vec{r}_i=0$ است .

معادلات ۸ - ۳ معرف کلی ترین حالت برای مجموعه ای از ذرات میباشد معادلات ۸ - ۱ و ۸ - ۲ حالات بخصوصی ازاین میباشند . محل مرکز جرم از دستگاه مقایسه ای که برای تعیین آن بکار رفته است مستقل میباشد . مرکز جرم یك سیستم ذرات فقط بجرم ذرات وموقعیت ذرات نسبت بهم بستگی دارد .

یك جسم سخت مانند یك خط کش را میتوان بعنوان یك سیستم ذرات که نزد یك هم قرار گرفته اند تصور نمود . بنابراین خط کش نیز یك مرکز جرم دارد . تعداد ذرات (مثلاً اتمها) در جسم آنقدر زیاد وفواصلشان آنقدر کوچك است که میتوان جسم را بصورت یك توزیع پیوسته جرم در نظر گرفت. برای بدست آوردن مرکز جرم یك جسم متصل شروع به تقسیم جز بـ

جسم به n جزء کوچك بجرم Δm_i میکنیم که تقریباً در نقاط x_i و y_i و z_i واقع شده اند .
پس مختصات مرکز جرم تقریباً توسط

$$x_{cm} \simeq \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} \quad , \quad y_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} \quad , \quad z_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}$$

داده میشود . حال فرض کنیم که جسم را به اجزاء بیشتری تقسیم کنیم بطوریکه تعداد اجزاء n بسمت بینهایت میل کند . نقاط x_i و y_i و z_i وقتی n زیاد میشود با دقت بیشتری موقعیت اجزاء جرم را مشخص میکنند و وقتی n بینهایت شود دقیقاً محل آنها را مشخص مینمایند . ــ بنا براین جسم پیوسته را بجرمهای بینهایت کوچك تقسیم مینمائیم . حال مختصات مرکز جـــرم دقیقاً توسط

$$x_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x\, dm$$

$$y_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y\, dm \qquad (\text{۸-۴}a)$$

$$z_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z\, dm$$

داده میشود . در این روابط dm عبارت است از جزء بینهایت کوچك جرم در نقطه x و y و z و $\int dm$ برابراست با M که در آن M جرم کلی جسم میباشد . برای یك جسم متصـــــل عمل جمع گیری معادله ۳ a ـ ۸ به عمل انتگرال گیری در معادله ٤ a ـ ۸ تبدیل میشود .
رابطه برداری که معادل سه رابطه اسکالر ٤ a ـ ۸ است عبارت است از

$$(\text{۸-٤}\,b) \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

مانند قبل عمل جمع گیری در رابطه (۳ b ـ ۸) به انتگرال گیری تبدیل شده است .

اغلب با اجسام یکنواختی سروکارداریم که دارای یك نقطه ویا صفحه تقارن میباشند .
در این حالتها مرکز جرم روی این نقطه ، خط یا صفحه تقارن واقع است . مثلاً مرکز جرم یـك

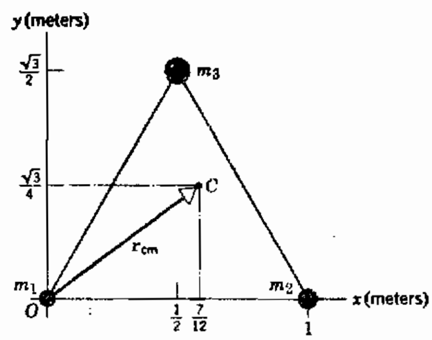
یك کره یکنواخت (که یك نقطه تقارن دارد) سرکز کره است و مرکز جرم یك مخروط (که یك خط تقارن دارد) روی محور مخروط واقع است وغیره . میتوان فهمید که علت این است که از روی تقارن اولین معان جرم ($\int \vec{r}\, dm$) درمرکز کره ویا در نقطه ای روی محور وغیره صفر میباشد . ازمعادله b ٤ - ۸ نتیجه میشود که برای این چنین نقاطی $\vec{r}_{cm} = 0$ است یعنی مرکز جرم در این نقاط واقع است.

■ مثال ۱ - سه ذره بجرمهای $m_1 = 1/0\ kg$ و $m_2 = 2/0\ kg$ و $m_3 = 3/0\ kg$ در رئوس یك مثلث متساوی الاضلاع که هر ضلع آن ۱/۰ متر است قرار دارند مرکز جرم را پیدا کنید . محور x را در امتداد یکی از اضلاع مثلث انتخاب میکنیم چنانچه در شکل ۳ - ۸ نشان داده شده است ، پس

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(1/0\ kg)(0) + (2/0\ kg)(1/0\ meters) + (3/0\ kg)(\frac{1}{2}\ meters)}{(1/0 + 2/0 + 3/0)\ kg} = \frac{7}{12}\ meters$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(1/0\ kg)(0) + (2/0\ kg)(0) + (3/0\ kg)(3/2\ meters)}{(1/0 + 2/0 + 3/0)\ kg} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ meters$$

مرکز جرم C در شکل نمایش داده شده است . چرا این نقطه مرکز هندسی مثلث نمیباشد ؟



۳ - ۸ مثال ۱ تعیین مرکز جرم c سه جرم غیر مساوی که تشکیل یك مثلث متساوی الاضلاع میدهند .

٤ - ۸ مثال ۲ - تعیین مرکز جرم c یك صفحه مثلثی .

مثال ۲ - مرکز جرم یك سطح مثلثی د رشکل ٤ - ۸ رابد ست آورید .

اگر جسم رابتوان با جزائی تقسیم نمود بطوریکه مرکز جرم هر جزء معلوم باشد ، مرکز جرم جسم رامعمولا " بآسانی میتوان پیدا نمود . صفحه مثلث شکل رامکن است به نوار های باریکی بموازات یکی از اضلاع تقسیم نمود . مرکز جرم هر نوار روی خطی است که وسط آن ضلع را به راس مقابلش وصل مینماید . ولی میتوان مثلث رابسه طریق مختلف تقسیم نمود . بنا براین مرکز جرم عبارت است از محل تلاقی سه خطی که وسط هر ضلع رابه راس مقابلش وصل میکند . این تنها نقطه ای است که د ر هر سه خط مشترك است .

۲ - ۸ حرکت مرکز جرم

حال اهمیت فیزیکی مفهوم مرکز جرم رامورد بحث قرار مید هیم . حرکت گروهی از ذ رات باجرمهای m_1 و m_2 و - - - - - و m_n وجرم کلی M راد رنظرمیگیریم . فعلا " فرض میکنیم که نه جرم به سیستم وارد شده ونه ازآن خارج میشود بطوریکه جرم کلی سیستم نسبت بزمان ثابت میماند . د ر قسمت ٦-۸ سیستمهائی راد رنظرخواهیم گرفت که د رآنها M ثابت نیست ، یک مثال آشنا عبارت است از راکت که د رآن وقتی سوخت میسوزد گازهای گرم خارج میشود ود رنتیجه جرمش کم میشود . از معادله b ۳ - ۸ برای سیستم ذ رات ثابت خود داریم

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots\cdots + m_n\vec{r}_n$$

که د رآن برد ار مکان $\vec{r}_{cm}$ نمایش د هنده محل مرکز جرم د ریك د ستگاه مقایسه بخصوص میباشد . پس از مشتق گرفتن از این معادله نسبت بزمان د اریم

$$M\vec{V}_{cm} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots\cdots + m_n\vec{V}_n \qquad (۸-۵)$$

که د رآن V_1 سرعت ذ ره اول است و غیره ، و $\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = (\vec{V}_{cm})$ سرعت مرکز جرم میباشد . پس از مشتق گرفتن از معادله ۵ - ۸ نسبت بزمان د اریم

$$M\frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots\cdots + m_n\vec{a}_n \qquad (۸-٦)$$

که د رآن $\vec{a}_1$ شتاب ذ ره اول است وغیره و $\frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} (= \vec{a}_n)$ شتاب مرکز جرم سیستم میباشد .

حال بنابرقانون دوم نیوتن ، نیروی $\vec{F_1}$ وارده به ذره اول عبارت است $\vec{F_1}=m_1\vec{a_1}$ بهمین ترتیب $\vec{F_2}=m_2\vec{a_2}$ وغیره . پس میتوان معادله ۶ - ۸ را بصورت

$$M\,\vec{a}_{cm}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots+\vec{F_n} \qquad (۸-۷)$$

نوشت . پس جرم کلی گروه ذرات ضربدر شتاب مرکز جرم مساوی جمع برداری تمامی نیروهای وارده به گروه ذرات میباشد .

در میان تمام این نیروها بعضی نیروهای داخلی هستند که توسط ذرات بیکدیگر وارد میشوند . ولی از قانون سوم نیوتن این نیروهای داخلی به جفت های مساوی ودر جهت مخالف ایجاد میشوند بطوریکه در مجموع سهمی ندارند پس نیروهای داخلی را میتوان از مساله حذف نمود ودر اینصورت طرف راست معادله ۷ -۸ فقط معرف مجموع نیروهای خارجی است که بتمام ذرات وارد میشوند .

معادله ۷ - ۸ رامیتوان بشکل

$$M\,\vec{a}_{cm}=\vec{F}_{ext} \qquad (۸-۸)$$

نوشت. این معادله بیان میکند که حرکت مرکز جرم یك سیستم ذرات مانند وقتی است که تمام جرم سیستم درمرکز جرم متمرکز شود وتمام نیروهای خارجی باین نقطه اثر کنند .

توجه کنید که ، این نتیجه رابدون مشخص کردن طبیعت سیستم ذرات بدست آوریم . سیستم میتواند جسم سختی باشد که درآن ذرات درمکانهای ثابتی نسبت بیکدیگر قرار دارند ، یا میتواند مجموعه ای از ذرات باشد که درآن ممکن است هر نوع حرکت داخلی وجود داشته باشد . ولی سیستم هر چه که باشد وتك تك قسمتهایش هرحرکتی که داشته باشند مرکز جرمش مطابق معادله ۸ - ۸ حرکت خواهد کرد .

پس بجای بررسی اجسام بعنوان ذرات تنها آنطورکه در فصول قبلی انجام دادیم میتوان آنها رابعنوان مجموعه ذرات مورد بررسی قرارداد . دراینصورت میتوان حرکت انتقالی جسم یعنی حرکت مرکز جرمش رابا فرض اینکه تمام جرم جسم درآن متمرکز است و تمام نیرو های خارجی باین نقطه اثر میکنند بدست آورد . وقتی نیروی خارجی نیروی ثقل باشد ، این نیرو بمرکز ثقل

جسم اثرمیکند . د ر تمام حالا تی که ما د ر نظر گرفته ایم مرکز ثقل برمرکز جرم که یك مفهوم کلی تر ی است منطبق میباشد . شرایطی که د ر آن این نقاط برای جسمی مختلف میباشند د ر فصل ۱۴ - مورد بحث قرار خواهد گرفت . این د ر واقع روشی است که ما تلویحا " د ر تمام د یاگرامهای نیرو و حل مسائل بکار برد ه ایم .

صرفنظرازتوجیه وتائید روشهای قبلی بوضع محکمتری ، حال د ریافته ایم که چگونه حرکت انتقالی یك سیستم ذ رات وهمچنین حرکت انتقالی یك سیستم ذ رات راکه د ارای چرخش نیز میباشند شرح د هیم . د راین فصل وفصل بعد ی این نتایج رابرای حرکت خطی یك سیستم ذ رات بکـــا ر خواهیم برد . د ر فصول بعد ی مشاهد ه خواهیم کرد که چگونه تحلیل حرکت چرخشی ســـــا د ه میشود .

مثـــال ۳ - سه ذ ره باجرمهای مختلف راد رنظرمیگیریم که بآنها نیروهای خارجی ،آنطــوریکه د رشکل ۵ - ۸ نشان د اد ه شد ه وارد میشوند . شتاب مرکز جرم سیستم راپید ا کنید . ابتد ا مختصات مرکز جرم راپید ا میکنیم . از معاد له a ۳ - ۸

$$x_{cm} = \frac{(۸/۰ \times ۴)+(۴/۰\times -۲)+(۴/۰ \times ۱)}{۱۶}\ meters = ۱/۸\ meters$$

$$y_{cm} = \frac{(۸/۰\times ۱)+(۴/۰\times ۲)+(۴/۰ \times -۳)}{۱۶}\ meters = ۰/۲۵\ meters$$

اینها بعنوان a د رشکل ۵ - ۸ نشان د اد ه شد ه اند .

برای بد ست آورد ن شتاب مرکز جرم ، ابتد ا منتجه نیروی خارجی وارد ه به سیستم راکه از ســه ذ ره تشکیل شد ه است معین میکنیم . مولفه x این نیرو برابراست بـا

$$F_x = ۱۴\ nt - ۶/۰\ nt = ۸/۰\ nt$$

ومولفه y برابراست با

$$F_y = ۱۶\ nt$$

پس نیروی منتجه خارجی دارای بزرگی

$$F=\sqrt{(۸/۰)^{۲}+(۱۶)^{۲}}\ nt = ۱۸\ nt$$

بوده وزاویه θ بامحور x میسازد . این زاویه برابراست با

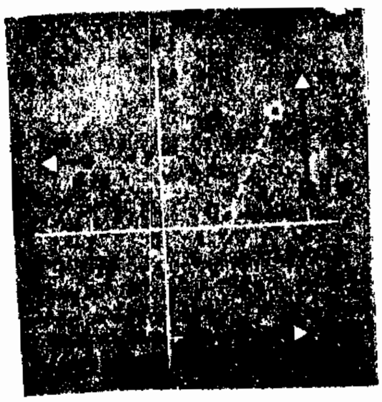
$$\tan\theta = \frac{۱۶/۰\ nt}{۸/۰\ nt} = ۲/۰ \qquad \text{یا} \qquad \theta = ۶۳^{\circ}$$

پس بنابرمعادله ۸-۸ شتاب مرکز جرم برابر است با

$$a_{cm} = \frac{F}{M} = \frac{۱۸\ nt}{۱۶\ Kg}\ ۱/۱\ \ meters/sec^{۲}$$

واین بردار زاویه ۶۳° بامحور x میسازد .

اگر چه باطی زمان موقعیت نسبی سه ذره تغییر میکند ،همانطور که نشان داده شده است مرکز جرم با این شتاب ثابت حرکت میکند .



۸-۵ مثال ۳ تعیین حرکت مرکز جرم سه جرم که هرکدام تحت تاثیر نیروهای مختلفی قراردارند . این نیروها همه درصفحه ایکه بوسیله سه جرم بوجود آمده اند قراردارند و فواصل مربوطه درامتداد محورها برحسب متراست .

۳ - ۸ اندازه حرکت خطی یك ذره

اندازه حرکت *momentum*) یك ذره تنها عبارت است از بردار $\vec{p}$ که بصورت حاصلضرب جرم m ذره در سرعت $\vec{V}$ آن تعریف میشود . یعنی

$$\vec{p} = m\vec{V} \qquad (۸-۹)$$

اندازه حرکت که حاصلضرب یك اسکالر یك بردار است خود یك بردار میباشد . چون اندازه حرکت بستگی به سرعت $\vec{V}$ دارد ، اندازه حرکت $\vec{p}$ یك ذره بخصوصی بستگی به دستگاه مقایسه ناظر داشته و همیشه بایستی این دستگاه رامشخص نمود .

نیوتن در اثر مشهورش *Principia* قانون دوم حرکت رابرحسب *momentum* (که او آنرا " مقدار حرکت " نامید) شرح میدهد . در زبان اصطلاحات جدید قانون دوم نیوتن چنین است : میزان تغییر اندازه حرکت هرجسم متناسب است با نیروی منتجه ای که بر جسم اثر میکند ودر امتداد آن نیرو میباشد . بطور رسمی اینرا میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۸-۱۰)$$

اگر سیستم مایك ذره واحد باجرم (ثابت) m باشد ، این فرمولاسیون قانون دوم معادل فرم $\vec{F} = m\vec{a}$ میباشد که تاکنون بکاربرده ایم .

یعنی اگر m ثابت باشد داریم

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$$

روابط $\vec{F} = m\vec{a}$ و $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ برای یك ذره واحد در مکانیك کلاسیك کاملاً معادل یکدیگر میباشند .

در تئوری نسبیت برای یك ذره تنها قانون دوم بشکل $\vec{F} = m\vec{a}$ صادق نیست . این قانون بشکل $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ هنوز قانون معتبری است در صورتیکه برای یك ذره اندازه حرکت $\vec{p}$ بصورت $m_0\vec{V}$ تعریف نشده بلکه بصورت

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{V}}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۸-۱۱)$$

تعریف شود . این نتیجه تعریف جدیدی رابرای جرم (معادلات ۹ - ۸ و ۱۱ - ۸ مقایسه کنید) بصورت

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

پیشنهاد میکند ، وابسته با این تعریف اندازه حرکت هنوز میتواند بصورت $\vec{p} = m\vec{v}$ نوشته شود (بخش ۹ - ۷ راملاحظه کنید) . در این معادله v سرعت ذره ، c سرعت نور و m_0 جرم درحال سکون جسم (یعنی جرمش وقتی $v = 0$ است) میباشد . از این تعریف باید انتظار داشته باشیم که جرم جسم با سرعتش زیاد شود . در سیستمهای اتمی وهسته ای ذرات میتوانند سرعت فوق العاده زیادی که قابل مقایسه باسرعت نور باشد بدست آورند . این مطلب رامیتوان در چنین سیستمهائی مستقیماً مورد آزمایش قرارداد زیراکه ازدیاد جرم از جرم در حال سکون برای این ذرات باندازه کافی بزرگ است که بتوان بطور دقیق اندازه گیری نمود . نتایج تمام این آزمایشها مبین این است که این پدیده صحیح بوده و دقیقاً توسط معادله بالا داده میشود . (مثلاً شکل ۸ - ۷ راملاحظه کنید) .

٤ - ۸ اندازه حرکت خطی یك سیستم ذرات

تصور کنید که بجای یك ذره واحد سیستمی از n ذره به جرمهای m_1 و m_2 وغیره داریم .

همانطورکه دربخش ۲ - ۸ فرض نمودیم ، باین فرض ادامه میدهیم که هیچ جرمی به سیستم وارد نشده ویا ازآن خارج نمیشود بطوریکه جرم $M (= \Sigma m_i)$ سیستم با زمان ثابت است . ذرات ممکن است برهم تاثیر متقابل داشته ویا نیروهای خارجی نیز ممکنست بآنها وارد شوند . هر ذره یك سرعت ویك اندازه حرکت خواهد داشت . مثلاً ذره (۱) بجرم m_1 و سرعت $\vec{v}_1$ دارای اندازه حرکت $\vec{P}_1 = m_1 \vec{v}_1$ خواهدبود . سیستم بطور کلی در یك دستگاه مقایسه بخصوصی دارای اندازه حرکت کلی $\vec{P}$ است که برحسب تعریف برابرجمع برداری اندازه - حرکتهای تك تك ذرات درهمان سیستم میباشد یا

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \cdots + \vec{P_n} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + \cdots + m_n\vec{v_n} \qquad (۸ - ۱۲)$$

اگر این رابطه را با معادله ۵ ـ ۸ مقایسه کنیم فوراً" دیده میشود که

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm} \qquad (۸ - ۱۳)$$

که تعریف معادلی است برای اندازه حرکت سیستم ذرات . معادله ۱۳ ـ ۸ بیان میکند که :
اندازه حرکت کلی یك سیستم ذرات برابر حاصلضرب جرم کلی سیستم در سرعت مرکز جرمش میباشد .

دیده ایم که (معادله ـ ۸ ـ ۸) قانون دوم نیوتن رابرای یك سیستم ذرات میتوان بشکل

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (۸-۸)$$

نوشت که درآن $\vec{F}_{ext}$ عبارت است ازجمع برداری نیرو های خارجی وارده به سیستم در اینجا یاد آور میشویم که نیروهای داخلی وارده بین ذرات بنا برقانون سوم نیوتن جفت جفت یکدیگر را خنثی میکنند . اگر از معادله ۱۳ ـ ۸ نسبت بزمان مشتق بگیریم ، با فرض ثابت بودن M بدست میآوریم

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \qquad (۸ - ۱۴)$$

مقایسه معادلات ۸ ـ ۸ و ۱۴ ـ ۸ بما اجازه میدهد که قانون دوم نیوتن رابرای یك سیستم ـ ذرات بشکل

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۸ - ۱۵)$$

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ بنویسیم . این معادله که برای یك سیستم ذرات صدق میکند تعمیمی است ازمعادله که برای یك ذره بدست آوریم (درحالتیکه جرمی بسیستم وارد ویا ازآن خارج نشود) .
معادله ۱۵ ـ ۸ در حالت خاصیکه یکذره داریم (یعنی نیرو های خارجی فقط به سیستم یك ذره ای وارد شوند) بمعادله ۱۰ ـ ۸ خلاصه میشود .

۵ ـ ۸ بقاء اندازه حرکت خطی

فرض کنیم مجموع نیروهای خارجی وارد بیك سیستم برابر صفر باشند . پس از معادله ۱۵ ـ ۸ داریم

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \text{یا} \qquad P = \text{مقدار ثابت}$$

وقتی منتجه نیروهای خارجی وارد بسیستم صفر باشد بردار اندازه حرکت کلی سیستم ثابت میماند . این نتیجه ساده ولی کاملاً کلی اصل بقاء اندازه حرکت خطی نامیده میشود . ملاحظه خواهیم کرد که این اصل قابل استفاده در بسیاری از موقعیت های مهم فیزیکی میباشد .

اصل بقاء اندازه حرکت خطی دومین اصل بقاء بزرگی است که تاکنون بآن برخورد کرده ایم . اولین اینها اصل بقاء انرژی بود . بعداً بچند اصل دیگر برخواهیم خورد که از آن جمله بقاء بارالکتریکی و اندازه حرکت زاویه‌ای میباشد . اصول بقاء در فیزیك دارای اهمیت نظری وعملی هستند زیراآنها ساده و جهانی میباشند . آنها همه باین شکل طرح میشوند که : وقتی سیستمی تغییر میکند ، یك عامل در سیستم وجود دارد که بدون تغییر باقی میماند ناظران مختلف ، هر کدام در دستگاه مقایسه خودش ، همه موافق خواهند بود که اگر همه آن سیستم متغیر را نظاره کند ، قوانین بقاء برای سیستم صادق است .

مثلاً برای بقاء اندازه حرکت خطی ، ناظرانی که در دستگاه مقایسه های مختلف قراردارند مقادیر مختلفی از $\vec{P}$ به اندازه حرکت خطی سیستم نسبت میدهند ولی همه ـ موافق این هستند که (با فرض $\vec{F}_{ext} = 0$ بودن) مقدار $\vec{P}$ در دستگاه خودشان درحین حرکت بدون تغییرمانده است).

اندازه حرکت کلی یك سیستم فقط بوسیله نیروهای خارجی وارد به سیستم میتواند تغییر کند . نیروهای داخلی که مساوی ودرخلاف جهت یکدیگر میباشند تغییرات مساوی ودر خلاف جهتی در اندازه حرکت ایجاد میکنندکه یکدیگر را خنثی مینمایند . برای یك سیستم ذرات

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n = \vec{P}$$

بنا براین وقتی اندازه حرکت کلی $\vec{P}$ ثابت است داریم :

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} + \cdots + \vec{P_n} = \text{مقدار ثابت} = \vec{P_0} \qquad (\text{۸-۱۶})$$

اندازه حرکت تك تك ذرات ممكن است تغییر كند ولی اگر نیروی خارجی منتجه ای وجود نداشته باشد مجموع آنها ثابت میمانند .

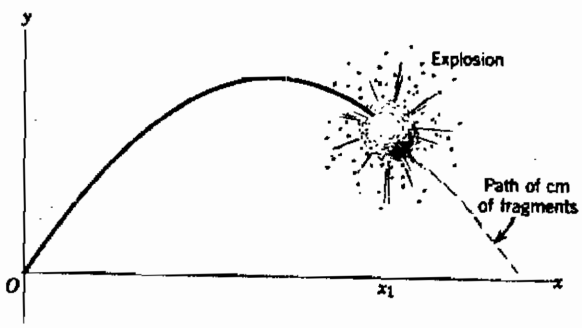
اندازه حرکت یك کمیت برداری است . بنابراین معادله ۱۶ - ۸ معادل سه معادله اسکالر است که هرکدام برای یك محورمختصات میباشد . پس بقاء اندازه حرکت خطی سه شرط برای حرکت سیستمی که برای آن بکار میرود در اختیارما میگذارد . از طرف دیگر بقاء انرژی ، چون انرژی اسکالر است فقط یك شرط برای حرکت سیستمی که برای آن بکار میرود در اختیار ما قرار میدهد . قانون بقاء اندازه حرکت خطی حتی برای فیزیك اتمی وهسته ای صادق است گرچه دراینمورد مکانیك نیوتنی صادق نیست . پس این قانون بقاء بایستی اساسی تراز اصول نیوتن باشد .

۶ - ۸ بعضی کاربرد های اصل اندازه حرکت

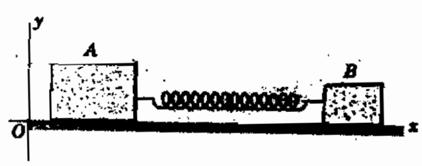
مثال ٤ ـ ابتدا مساله ای رادرنظرمیگیریم که درآن یك نیروی خارجی به سیستم ذرات وارد شود . بحث قبلی ماراجع بحرکتپرتابی (فصل ٤) رابیاد بیآورید . حال فرض میکنیم که جسم پرتاب شونده گلوله توپی باشد که وقتی در پرواز است منفجر میشود . مسیر گلوله در شکل ۶ ـ ۸ نشان داده شده است . فرض میکنیم که مقاومت هوا قابل صرفنظر کردن باشد . سیستم عبارت است از گلوله وزمین دستگاه مقایسه ما و نیروی خارجی نیروی جاذبه میباشد . درنقطه ۱۸ گلوله منفجر شده و اجزایش درهمه جهت پراکنده میشود . پس ازآن در مورد حرکت این سیستم چه میتوانیم بگوئیم

نیروهای انفجار همگی داخلیهستند ، یعنی نیروهائی هستند که بوسیله قسمتی از سیستم به قسمتهای دیگر سیستم وارد میشوند . این نیرو ها ممکن است اندازه حرکت هریك ازتکه هارا ازآنچه که قبلا" داشتند تغییردهد ولی این نیرو ها نمیتوانند بردار کلی اندازه حرکت سیستم را تغییر دهند . نیروی خارجی نیروی جاذبه میباشد . ازآنجاکه سیستم ذرات

مثل این حرکت میکند که تمام جرمش در مرکز جرم متمرکز بوده ونیروی خارجی بر آن اثر مینماید ، مرکز جرم ذرات بحرکتش در مسیر سهمی شکلی که گلوله منفجر نشده میبود ادامه میدهد . تغییر ناشی از جاذبه در اندازه حرکت کلی سیستم چه گلوله منفجر شود چه نشود یکی است . درمورد انرژی مکانیکی سیستم قبل و بعد ازانفجار چه میتوانید بگوئید ؟



۸-۶ مثال ٤ یك خمپاره (سلاحی است پرتاب کردنی) ، درحالیکه یك مسیر سهمی معمولی را طی‌میکند . درنقطه X_1 منفجر میشود . مرکز جرم قطعات روی همان سهمی بحرکت خود ادامه میدهد .



۸-۷ مثال ٥ . دومکعب A و B بوسیله یك فنر روی یك سطح بدون اصطکاك بهم متصل شده اند . اگرآنهاراازهم دورکرده رهاکنیم ، حاصل جمع اندازه حرکتهای آنهاصفرباقی میماند .

مثال ۵ ـ حال دوجسم فلزی یا چوبی A و B بجرمهای m_A و m_B راکه بوسیله فنری بهیکدیگر مربوط بوده ودرحال سکون روی میز افقی بدون اصطکاکی قرارد ارند در نظر میگیریم . فرض میکنیم که جسمها راازیکدیگرجدانموده وفنر رامثل شکل ۷ ـ ۸ بکشیم وسپس آنها را رهاکنیم . حرکت بعدی راشرح دهید .

اگر سیستم از دوجسم وفنر تشکیل شده باشد ، پس بعد از رها کردن جسمها نیروی منتجه خارجی که به سیستم اثرکند وجود ندارد . بنابراین میتوانیم بقاء اندازه حرکت خطی رابرای حرکت بکار بریم .

اندازه حرکت سیستم قبل از اینکه اجسام رها شوند در دستگاه مقایسه نشان داده شده وصل به میز صفر است ، بنابراین اندازه حرکت بعد ازآن نیز باید مساوی صفر بماند . اندازه حرکت ـ کلی حتی اگر اجسام حرکت کنند نیز میتواند مساوی صفر باشد زیرا اندازه حرکت یك کمیت برداری است . یك جسم دارای اندازه حرکت مثبت بوده (A درجهت $+X$ حرکت میکند) وجسم دیگر اندازه حرکت منفی خواهد داشت (B درجهت $-X$ حرکت میکند) ـ از بقاء اندازه حرکت داریم .

اندازه حرکت انتهائی = اندازه حرکت اولیه

$$0 = m_B\vec{V}_B + m_A\vec{V}_A$$

بنا براین

$$m_B\vec{V}_B = -m_A\vec{V}_A$$

پس

$$\vec{V}_A = -\frac{m_B}{m_A}\vec{V}_B$$

مثلاً اگر m_A مساوی ۲ slugs و m_B مساوی 1 slug باشد آنوقت $\vec{V}_A$ همیشه از نظر بزرگی برابر نصف $\vec{V}_B$ بوده و وقتی اجسام حرکت میکنند درخلاف جهت میباشند .

انرژی جنبشی جسم A برابراست با $\frac{1}{2}m_A V_A^2$ ومیتواند بصورت $(m_A V_A)^2/2m_A$

نوشته شود و انرژی جنبشی جسم B برابر $\frac{1}{2}m_B V_B^2$ بوده و میتوان آنرا بشکـــــل $(m_B V_B)^2/2m_B$ نوشت . ولی

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{2m_B(m_AV_A)^2}{2m_A(m_BV_B)^2}=\frac{m_B}{m_A}$$

که در آن بعلت بقاء اندازه حرکت m_AV_A مساوی m_BV_B میباشد . انرژی‌جنبشی دوجسم در هر لحظه متناسب باعکس جرمهای مربوط بآنها میباشد . چون انرژی مکانیکی نیز محفوظ میماند دوجرم بجلو و عقب نوسان خواهند کرد و درابنحال بخشی از انرژی جنبشی و-بخشی ازآن پتانسیل میباشد . حرکت مرکز جرم این سیستم چگونه است ؟

اگر انرژی مکانیکی محفوظ نماند (مثلا" درحالتیکه اصطکاك وجود دارد) با اتلاف انرژی حرکت مستهلك خواهد شد . آیا میتوان بقاء اندازه حرکت خطی رادراین مورد بکار-برد ؟ توضیح دهید .

مثال ٦ - بعنوان مثالی از عقب زدن پدیده رادیو اکتیویته‌رادرنظر میگیریم . یك ذره α (هسته اتم هلیوم) ازهسته اورانیوم ۲۳۸ که درابتدا ساکن است با سرعت 1.4×10^7 meters/sec و انرژی جنبشی $4.1\ MeV$ (میلیون الکترون ولت) تشعشع -میشود . سرعت عقب نشینی هسته باقیمانده (توریوم - ۲۳٤) راپیدا کنید .

سیستم (توریم + ذره α) درابتدا حالت مقید هسته اورانیوم راتشکیل میداده‌اند . سیستم بعدا" بدوقسمت تجزیه میشود . اندازه حرکت سیستم قبل ازجدا شدن صفر است . در غیاب نیروهای خارجی اندازه حرکت بعدازجدا شدن نیز صفراست . پس

اندازه حرکت اولیـه = اندازه حرکت انتهائی

$$0=M_\alpha\vec{V}_\alpha+M_{th}\vec{V}_{th}$$

$$\vec{V}_{th}=-\frac{M_\alpha}{M_{th}}\vec{V}_\alpha$$

نسبت جرم ذره α به جرم توریوم یعنی $\frac{M_\alpha}{M_{th}}$ برابراست با ٤/۲۳٤ و

میباشد . پس $V_\alpha = 1.4 \times 10^7\ meters/sec$

$$V_{Th} = -(4.234)(1.4\times10^7\ m/sec) = -2.4\times10^5\ m/sec$$

علامت منها مشخص میکند که هسته توریوم باقی مانده درست در جهت مخالف حرکت ذره α بعقب زده میشود بطوریکه بردار منتجه اندازه حرکت برابر صفر باشد .

چگونه میتوان انرژی جنبشی هسته عقب نشسته راپیدا کرد ؟ (مثال قبل راملاحظه کنید) انرژی تکه هاازکجامیآید ؟

مثال ۷ ـ با پرواز انسان به ماه یکی از مسائل جالب و پیچیده کاربرد اصل بقاء ممنتم برای مسئله موشك می باشد دینامیك موشك مسئله ای بسیار پیچیده و بغرنج است . ولی ما در اینجا یك مثال ساده راد رنظر میگیریم .

یك موشك باوزن ۳۰۰۰۰ پوند در فضای خارج از جاذبه زمین در یك خط مستقیم ـ حرکت می کند که ما در اینجا این مسیر را محور x یك دستگاه مقایسه اینرسی در نظر میگیریم . موشك رابرای مدت ۳۰ ثانیه آتش میشود ودرطی این مدت گاز بمیزان ۱۰ $slugs/sec$ وباسرعت ۵۰۰۰ ft/sec نسبت بموشك (سرعت پس زدن) پس زده میشود . فرض می کنیم که این دو کمیت در حین اشتعال ثابت میمانند . شتاب را بصورت تابعی از زمان در مدت اشتعال بیابید توجه کنید که در این مسئله نیروهای خارجی مانند جاذبه ومقاومت هوا وجود ندارند . این یك مثال برای پیدا کردن شتاب جسمی است که بخاطر خارج یاداخل شدن مقداری جرم با سرعت نسبی $\vec{V}_{rel}$ (نسبت بجسم) شتاب میگیرد .

اگر جسم وجرم Δm راکه در مدت Δt ازآن خارج یا داخل می شود بعنوان سیستم انتخاب کنیم میتوان مسئله راحل کرد . شکل a ۸ ـ ۸ موقعیت سیستم را در زمان t نشان میدهد . راکت و سوخت رویهم دارای جرم M میباشند و این مجموعه با سرعتی که در یك سیستم مقایسه بخصوصی برابر $\vec{V}$ است حرکت می کند . بعد از مدت زمان Δt موقعیت سیستم بصورت شکل b ۸ ـ ۸ در میآید . جرم ΔM ازموشك خارج میشود و مرکز جرم آن از نظر ناظر ما دارای سرعت $\vec{U}$ میباشد .

در اینصورت جرم موشک برابر $M-\Delta M$ خواهد بود وسرعت $\vec{V}$ مرکز جرم موشک بـــه $\vec{V}+\Delta\vec{V}$ تغییر میابد . ازآنجائیکه هیچ نیروی خارجی وجود ندارد $F_{ext}=0$ است وازمعادله ۱۵ - ۸ نتیجه میشود .

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=0$$

ویا برای مدت زمان Δt میتوان نوشت

$$0=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\frac{\vec{P}_f-\vec{P}_i}{\Delta t}$$

که در آن $\vec{P}_f$ ممنتوم نهائی سیستم درشکل b ۸ -۸ و $\vec{P}_i$ ممنتوم ابتدائی سیستم در شکل a ۸ - ۸ مـی باشند . اما باتوجه باینکه

$$\vec{P}_f=(M-\Delta M)(\vec{V}+\Delta\vec{V})+\Delta M\,\vec{U} \quad \text{و} \quad \vec{P}_i=M\vec{V}$$

داریم

$$0=\frac{[(M-\Delta M)(\vec{V}+\Delta\vec{V})+\Delta M\vec{U}]-[M\vec{V}]}{\Delta t} \qquad (8-17)$$

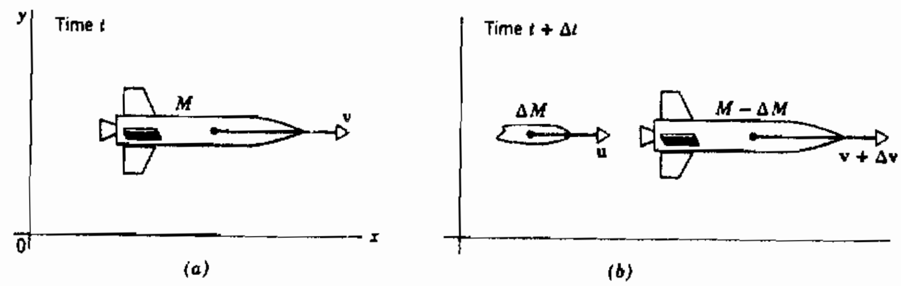
حال اگر Δt رابسمت صفر میل دهیم $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ بسمت $\frac{d\vec{V}}{dt}$ میل میکند که همان شتاب جسم می باشد . کمیت ΔM جرمی است که در مدت Δt ازموشک خارج شده است ،که باعث کـــم شدن جرم موشک باندازه ΔM شده است با توجه باین نکته که $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ (تغییر جرم موشک بـــا زمان) یك کمیت منفی می‌باشد . در حدگیری باید کمیت مثبت $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ را بـــا $-\frac{dM}{dt}$ جایگزین کرد .

کمیت $\vec{U}-(\vec{V}+\Delta\vec{V})$ در معادله ۱۷ - ۸ دقیقا" برابر $\vec{V}_{rel}$ (سرعت نسبی جـرم خارج شونده ،نسبت به موشك) می باشد . با این تغییرات معادله ۱۷ - ۸ را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(8-18a) \quad M\frac{d\vec{V}}{dt}=(\vec{U}-\vec{V})\frac{dM}{dt}$$

و یا

$$(8-18b) \quad M\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$$



شکل ۸ - ۸

جمله سمت راست معادله $18b$ - ۸ بستگی به مشخصات موشك دارد . ومانند قسمت چپ آن دارای ابعاد نیرو می باشد . این جمله را تراست $(thrust)$ می‌نامند و میتوان آن را نیروی عکس العملی درنظر گرفت که توسط جرم خارج شونده بر موشك وارد میشود . معمولاً سازندگان موشك سعی براین دارندکه تا آنجائیکه ممکن است $thrust$ مقدار بزرگی داشته باشد . برای اینکار باید موشکهائی ساخت کهمقدار بیشتری از سوخت را در واحد زمان ($\frac{dM}{dt}$ مقدار بزرگی داشته باشد) وبا سرعت نسبی بسیار زیاد (V_{rel} باید بزرگ باشد) ازخود خارج سازند .

معادله $18b$ - ۸ یك معادله کمی است وبرای اجسامی‌که جرم بآنها اضافه میشود نیز صادق می باشد . برای مثالی‌که ما درنظر گرفتیم داریم :

$$\frac{dM}{dt} = -10 \; slugs/sec$$
$$M = \left(\frac{30000}{32} - 10t\right) slugs$$

و

$$V_{rel} = -5000 \; ft/sec$$

که درآن t فاصله زمانی برحسب ثانیه است . در فاصله زمانی بین روشن کردن موشك و لحظه ای‌که میخواهیم شتاب را حساب کنیم معادله $18b$ - ۸ برای شتاب صادق است :

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{V_{rel}(dM/dt)}{M}=\frac{(-5000\ ft/sec)(-10\ slugs/sec)}{(940-10t)\ slugs}$$

$$=\frac{5000}{(94-t)}\ ft/sec^2$$

این جواب برای تمام مدت اشتعال صادق می باشد در زمان روشن شدن موشك ($t=0$)
بوشتاب برابر $a=53\ ft/sec^2$ خواهد بود ودر لحظه تمام شدن سوخت ($t=30$)
شتاب برابر $a=78\ ft/sec^2$ میباشد .

در تمام زمانهای قبل از روشن شدن و بعد ازپایان سوخت شتاب برابر $a=0$ خواهد بود .

thrust را میتوان از رابطه زیر حساب کنید

$$\text{تراست}=V_{rel}\left(\frac{dM}{dt}\right)=(-5000\ ft/sec)(-10\ slugs/sec)$$
$$=+50{,}000\ lb$$

و این تراست thrust در تمام مدت اشتعال در این مثال ثابت است .

فصل نهم

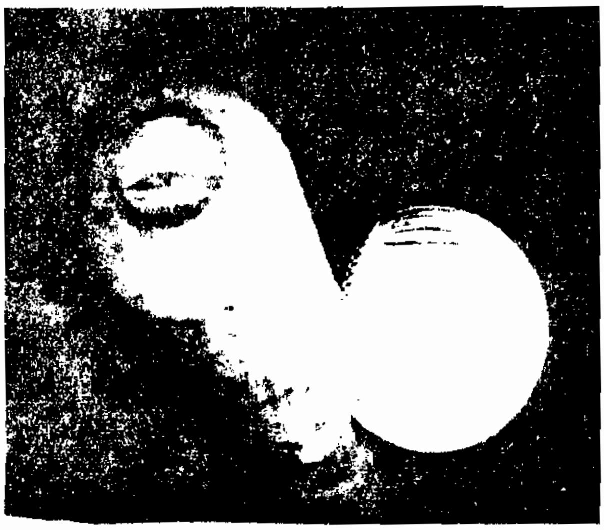
۱ - ۹ برخورد چیست ؟

اطلاعات زیادی راد رباره ذرات اتمی ، هسته ای و بنیادی میتوان بطور تجربی بامشاهده برخورد بین آنها بدست آورد . د ر مقیاس وسیعتر چیزهائی مثل خواص گازها را میتوان برحسب برخورد ذرات بوجه بهتری تفسیر نمود . د راین فصل اصول بقاء انرژی و بقاء اندازه حرکت را برای برخورد ذرات بکار میبریم .

د ر برخورد نیروی نسبتا" بزرگی بهرذره برخورد کننده د ر زمان نسبتا" کوتاهی اثر میکند . ایده اصلی د ر " برخورد " این است که حرکت ذرات برخورد کننده (یا اقلا" یکی ازآنها)تقریبا" بطور ناگهانی تغییر میکند ومیتوانیم بطور روشنی زمان " قبل از برخورد " و زمان " بعد از برخورد " راازهم جدا کنیم .

وقتی مثلا" یك چوب بیسبال بیك توپ بیسبال برخورد میکند ، شروع و انتهای برخورد را با دقت نسبتا" زیادی میتوان معین نمود . چون د ریك فاصله زمانی که کاملا" د رمقایسه با زمان مشاهده ما کوتاه است باتوپ د رتماس میباشد . د ر مدت برخورد چوب نیروی زیادی به توپ وارد میکند (شکل ۱ - ۹) . این نیرو بطور پیچیده ای با زمان تغییر میکند بطوریکه بسختی میتوان آنرا اندازه گیری نمود . هم چوب وهم توپ د ر حین برخورد تغییر شکل میدهند . نیروهائی که د ر زمانی کوتاه نسبت بزمان مشاهده عامل میکنند نیروهای ضربه ای نامیده میشوند .

وقتی یك ذره α (He^4) به هسته طلا (Au^{197}) برخورد میکند ، نیروهای وارده بین آنها ممکن است نیروهای مشهور دافعه الکترواستاتیك که مربوط ببار روی ذره ها است باشد ممکن است ذرات " تماس " نداشته باشند ، ولی باز ممکن است از " برخورد " صحبت کنیم زیرا یك نیروی نسبتا" قوی که د ر زمانی کوتاه نسبت به مشاهده ذره α اثر میکند اثر محسوسی د ر



شکل ۱ - ۹ : یک عکس برقی سریع از برخورد چوب بیسبال به توپ بیسبال . به تغییر شکل توپ توجه کنید که دلالت بمقدار خیلی زیاد نیروی ضربه ای در این لحظه دارد .

حرکت ذره α دارد .

وقتی یك پروتون (H^1 یا p) با انرژی مثلا " ۲۰ MeV باهسته یك ایزوتوپ نقره (شاید Ag^{107}) برخورد میکند ، ذرات ممکن است در واقع" تماس " پیدا کنند ، آنوقت نیروی عمده وارده بین آنها نیروی دافعه الکترواستاتیك نبوده بلکه یك نیروی جاذبه هسته ای قوی بابرد کوتاه است :

) پروتون ممکن است وارد هسته نقره شده و تشکیل یك ساختمان مرکب بدهد . زمان کوتاهی بعد - " فاصله بر خورد " ممکن است 10^{-18} ثانیه باشد این ساختمان ترکیبی ، ممکن است مطابق شمائی مثل

$$p + Ag^{107} \longrightarrow \alpha + Pd^{104}$$

بدو ذره مختلف تجزیه شود ، که در آن $\alpha \left(= He^4\right.$ عبارت است از یك ذره α .

بنا براین مفهوم ذره رامیتوان تعمیم داد تاشامل وقایعی (که معمولا " فعل انفعال نامیده میشوند) گردد که در آنها هویت ذرات اثر کننده روی یکدیگر تغییر میکند . اصول بقاء برای تمامی این مثالها قابل اجراء است .

اگر مایل باشیم ممکن است تعریف برخورد راحتی ازاین هم وسیعتر نمائیم تا شامل تلاشی خود بخود یك ذره واحد به دو یا چند ذره نیز میشود . یك مثال عبارت است ازتلاشی یك ذره بنیادی بنام ذره سیگما بدو ذره دیگر یعنی پیون ونوترون

یا

$$\Sigma^- \longrightarrow \pi^- + n$$

اگر چه دو جسم در این عمل تماس حاصل نمیکنند (مگر آنرا بطور عکس درنظر بگیریم) ، این عمل خواص مشترکی با ضربه دارد :(۱) اختلاف واضحی بین " قبل از وقوع " و "بعد از وقوع" وجود دارد (۲) (قوانین بقاء اندازه حرکت و انرژی بما اجازه میدهد که اطلاعات بیشتری درباره این گونه اعمال بوسیله مطالعه وضعیات " قبل " و " بعد " بدست آوریم)، حتی اگر اطلاع کمی از قوانین که در حین خود " واقعه " اعمال میشوند داشته باشیم .

در مطالعه برخورد در این فصل هدف ، این است : با معلوم بودن حرکات اولیه ذرات در حال برخورد میخواهیم از روی اصول بقاء اندازه حرکت و انرژی اطلاعاتی در باره حرکات انتهائی کسب کنیم بافرض اینکه چیزی در مورد نیروهای وارده حین برخورد نمیدانیم .

۲ - ۹ ضربه و اندازه حرکت

فرض کنیم که شکل ۲ - ۹ بزرگی نیروی وارده بر جسمی را حین یك برخورد نشان میدهد . فرض میکنیم که نیرو یك جهت ثابتی دارد . برخورد در زمان t_i شروع شده ودر زمان t_f خاتمه میپذیرد و نیرو قبل وبعد ازبرخورد صفر میباشد . از معادله ۱۰ - ۸ میتوان نوشت که تغییر در اندازه حرکت $d\vec{p}$ جسم در زمان dt که حین آن نیروی $\vec{F}$ روی آن اثر مینماید عبارت است از

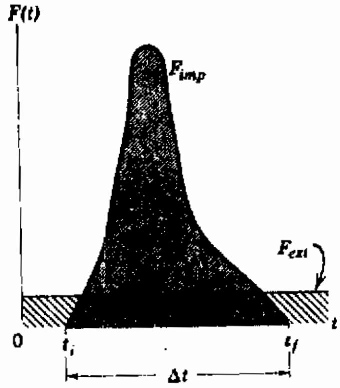
$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt \qquad (۹ - ۱)$$

میتوان تغییر در اندازه حرکت جسم را در حین برخورد بوسیله انتگرال گرفتن روی زمان برخورد بدست آورد یعنی

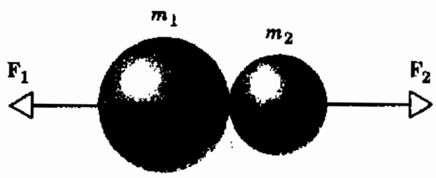
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt \qquad (۹-۲)$$

که در آن اندیس f (final) و i (initial) بترتیب مربوط است به زمان قبل و بعد از برخورد . انتگرال نیرو در فاصله زمانی که نیرو اثر میکند ضربه J نامیده میشود . بنا براین تغییر در اندازه حرکت جسمی که بآن نیروی ضربه ای وارد میشود برابر ضربه میباشد . ضربه و اندازه حرکت هر دو بردار بوده و دارای واحد وابعاد یکسانی میباشند .

نیروی ضربه ای که در شکل ۲ - ۹ نشان داده شده است دارای جهت ثابتی است ضربه این نیرو یعنی $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$ از نظر بزرگی توسط سطح زیرمنحنی نیرو - زمان نشان داده میشود . ضربه J که از روی معادله ۲ - ۹ تعریف میشود بطور بحرانی به مقادیر دقیق t_i و t_f بستگی ندارد درصورتیکه این زمانها بقدر کافی ازهم جدا باشند تا شامل



شکل ۲-۹ : چطوریك نیروی ضربه ای $F(t)$ ممکن است د ر مد ت زمان یك برخورد (که د ر لحظه t_i شروع ود رلحظه t_f ختم میشود .) نسبت بزمان تغییر کند .



شکل ۳ -۹ : د ربرخورد ، د و ذ ره بجرمهای m_1 و m_2 نیروهای مساوی و مختلف الجهـــت د رامتد اد خطی که مراکزشان رابهم وصل میکند بهم وارد میکنند ، بنابرقانون سوم نیوتـن

$$F_2(t) \equiv -F_1(t)$$

سطح هاشور زده شکل ۲-۹ بشود . بدلائلی که بعداً آشکار خواهد شد ، معمولاً t_i و t_f را با فاصله ای اختیار میکنیم که درست بقدر کافی بزرگ باشد بطوریکه بتوان تشخیص واضحی بین " ضربه " و " فواصل قبل و بعد " قائل شد .

۳ - ۹ بقاء اندازه حرکت در حین برخورد

حال برخورد بین دو ذره بجرمهای m_1 و m_2 را در نظر میگیریم (شکل ۳ - ۹) در فاصله کوتاه برخورد ، این ذرات نیروهای بزرگی بریك دیگر وارد میکنند . در هر لحظه $\vec{F}_1$ نیروی وارده بر ذره (۱) توسط ذره (۲) و $\vec{F}_2$ نیروی وارده بر ذره (۲) توسط ذره (۱) است از روی قانون سوم نیوتن این نیروها در هر لحظه از نظر بزرگی مساوی بوده ولی در خلاف جهت یکدیگر قرار دارند .

در اثر برخورد اندازه حرکت ذره (۱) باندازه زیر تغییر میکند

$$\Delta \vec{P}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1 \, dt = \overline{\vec{F}_1} \Delta t$$

که در آن $\overline{\vec{F}_1}$ عبارت است از مقدار متوسط نیروی $\vec{F}$ در فاصله زمانی $\Delta t = t_f - t_i$ برخورد . تغییر در اندازه حرکت ذره (۲) در نتیجه برخورد برابر است با :

$$\Delta \vec{P}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_2 \, dt = \overline{\vec{F}_2} \Delta t$$

که در آن $\overline{\vec{F}_2}$ مقدار متوسط نیروی $\vec{F}_2$ در فاصله زمانی $\Delta t = t_f - t_i$ برخورد است .

اگر نیروهای دیگری بر ذرات اثر نکنند آنوقت $\Delta \vec{P}_1$ و $\Delta \vec{P}_2$ تغییر کلی در اندازه حرکت هر ذره را میدهند . ولی دیده ایم که در هر لحظه $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ بطوریکه $\overline{\vec{F}_1} = -\overline{\vec{F}_2}$ وبنابراین $\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$

اگر د و ذ ره رابعنوان سیستم مجزائی د ر نظر بگیریم ، اند ازه حرکت کلی سیستم عبارت است ا ز

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$$

وتغییر کلی د ر اند ازه حرکت سیستم د ر اثر برخورد صفر است یعنی

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{P_1} + \Delta \vec{P_2} = 0$$

بنا براین اگر نیروهای خارجی وجود نداشته باشند اند ازه حرکت کلی سیستم حین برخورد تغییر نمیکند . نیروهای ضربه ای که حین برخورد اثر میکنند نیروهای داخلی هستند که اثری د ر اند ازه حرکت کلی سیستم ندارند .

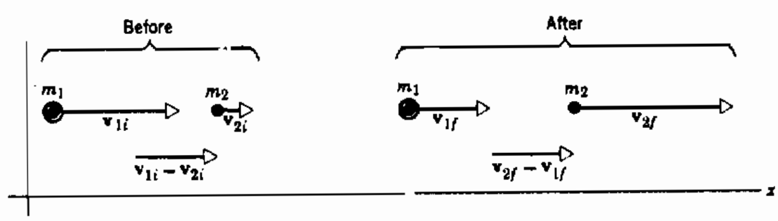
برخورد رابعنوان اند رکنشی تعریف کرده ایم که د ر زمان Δt که د ر مقایسه با زمانی که سیستم رامشاهده میکنیم قابل صرفنظر کرد ن میباشد اتفاق میافتد . همچنین میتوان یك برخورد رابعنوان واقعه ای که د ر آن نیروهای خارجی که ممکن است به سیستم اثر کنند د ر مقایسه بـــا نیروهای ضربه ای بر خورد قابل صرفنظر کرد ن باشد توصیف نمود . وقتی یك چوب بیسبال بیك توپ بیسبال ، یك چوب گلف به توپ گلف و یا یك توپ بیلیارد بتوپ د یگری میخورد نیروهای ـ خارجی بسیستم وارد میشوند مثلا ً جاذ به ویا اصطکاك نیروهائی براین اجسام وارد مینماینـــد این نیروهای خارجی ممکن است برای هر جسم برخورد کننده مقدار یکسانی نباشد وهمچنین آنها لزوما ً توسط نیروهای خارجی د یگر خنثی نمیشوند . حتی اگر اینطور باشد کاملا ً میتوان ازاین نیروهای خارجی د ر حین برخورد صرفنظر نمود وبقاء اند ازه حرکت را فرض کرد مشروط بـــا یـــن که نیروهای خارجی د ر مقایسه بانیروهای ضربه ای برخورد قابل صرفنظر کرد ن باشند د همانطور که تقریبا ً همیشه این موضوع صاد ق است . د ر نتیجه تغییر د راند ازه حرکت ذ ره حین برخور د د ر اثر یك نیروی خارجی د ر مقایسه باتغییر اند ازه حرکت ذ ره د راثر نیروی ضربه ای بر خور د قابل صر فنظر کرد ن میباشد (شکل ۲ - ۹)

مثلا ً وقتی چوب به توپ بیسبال میخورد ، بر خورد فقط کسر کوچکی از ثانیه طول میکشد . چون تغییر د راند ازه حرکت بزرگ بود ه و زمان بر خورد کوچك استاز رابطه

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t$$

نتیجه میشود که نیروی ضربه ای متوسط $\overrightarrow{\overline{F}}$ نسبتا "بزرگ است . در مقایسه با این نیرو نیروی خارجی ثقل قابل صرفنظرکردن است . در حین برخورد با اطمینان میتوان ازاین نیروی خارجی در تعیین تغییر حرکت توپ چشم پوشی نمود ، وهرچه زمان برخوردکوتاهتر باشد با احتمال بیشتری این موضوع صادق است .

بنا براین در عمل میتوان اصل بقاء اندازه حرکت رادرحین بر خورد اگر زمان بر خورد بقدر کافی کوچك باشد بکاربرد . آنوقت میتوان گفت که اندازه حرکت یك سیستم ذرات درست قبل ازبرخورد ذرات برابر اندازه حرکت سیستم درست بعد ازبرخورد ذرات میباشد .



شکل ٤ - ۹ : دوکره قبل وبعد ازبرخورد الاستیك . سرعت $\vec{V}_{1i} - \vec{V}_{2i}$ جرم m_1 نسبت بجرم m_2 قبل ازبرخورد مساوی سرعت $V_{2f} - V_{1f}$ جرم m_1 نسبت بجرم m_2 بعد ازبرخورد است .

٤ ـ ۹ برخورد دریك بعد

همواره میتوان حرکات اجسام رابعد ازبرخورد از روی حرکاتشان قبل از برخورد محاسبه نمود درصورتیکه نیروهای وارده حین برخورد رادانسته وبتوان معادلات حرکت را حل نمود . البته اصل بقاء اندازه حرکت باید حین برخورد صادق باشد . اصل بقاء انرژی کلی نیز صادق میباشد . اگرچه ممکن است جزئیات اندرکنش راندانیم ولی میتوان این اصول رادر موارد بسیاری برای پیش بینی نتایج برخورد بکار برد .

معمولا " برخورد برطبق اینکه آیا انرژی جنبشی حین برخورد محفوظ بماند یا نماند طبقه بندی میشود . وقتی انرژی جنبشی محفوظ بماند برخورد الاستیك نامیده میشود . درغیر اینصورت برخورد غیرالاستیك نامیده میشود . برخورد بین ذرات اتمی ، هسته ای و بنیادی گاهی الاستیك میباشند . اینها در واقع تنها برخوردهای الاستیك واقعی شناخته شده است . . برخورد بین اجسام بزرگ همواره تا حدی غیر الاستیك است . بهر حال اغلب این برخورد ها را میتوان الاستیك در نظر گرفت مثل برخورد بین توپهای عاجی یا شیشه ای . وقتی دو جسم پس از برخورد بیکدیگر بچسبند ، برخورد کاملا " غیر الاستیك نامیده میشود . مثلا " برخورد یك گلوله وهدف در صورتیکه گلوله در هدف فرو رود کاملا " غیر الاستیك میباشد . جمله کاملا " غیر الاستیك معنیش این نیست که تمام انرژی جنبشی اولیه از بین رفته است بلکه همانطور که خواهیم دید معنیش این است که انرژی از دست رفته دارای ماکزیمم مقداری است که بقاء اندازه حرکت اجازه میدهد . حتی اگر نیروهای برخورد معلوم نباشند میتوان حرکات ذرات بعد از برخورد را از روی حرکات قبل از برخورد پیدا نمود مشروط باینکه برخورد کاملا " غیرالاستیك بوده و یا اگر برخورد الاستیك است ، برخورد یك برخورد یك بعدی باشد . برای برخورد یك بعدی حرکت نسبی پس از برخورد در امتداد همان خط حرکت نسبی قبل از برخورد میباشد . فعلا " خود را محدود به حرکت یك بعدی مینمائیم .

ابتدا برخورد الاستیك یك بعدی را درنظر میگیریم . دو کره صاف بدون حرکت چرخشی راکه ابتدا درامتداد خط واصل بینشان حرکت میکنند مورد توجه قرار میدهیم . این دو کره

سپس برخورد نموده و پس از برخورد د راهتداد همان خط مستقیم و بدون چرخش حرکت میکنند .

شکل ٤ ـ ۹ راملاحظه نمائید)این اجسام د رحین برخورد نیروها ئی بیکدیگر وارد میکنند که د رامتداد خط اولیه حرکت است ،بنا براین حرکت انتهائی نیز د رامتداد همین خط میباشد .

جرم کرات برابر m_1 و m_2 ومولفه های (اسکالر) سرعت قبل از برخورد V_{1i} و V_{2i} وپس از برخورد V_{1f} و V_{2f} میباشند [علائم بکار رفته بآسانی قابل تعبیر بوده بخاطر سپرد نشان آسان است و اطلاعات زیادی رابفرم ساده متراکمی آشکار میکنند . اندیسهای عددی مانند ۱ و۲ ذره رامشخص میکنند واندیسهای حرفی یعنی i و f بترتیب مقدار اولیه (قبل از برخورد) و مقدار انتهائی (بعد از برخورد) رامشخص میکنند] .

جهت مثبت اندازه حرکت و سرعت رابطرف راست اختیار میکنیم . فرض میکنیم (ودرغیر اینصورت تصریح خواهیم کرد) که سرعت ذرات برخورد کننده بقدر کافی کم است بطوریکه لزومی نداشته باشد که روابط نسبیت برای اندازه حرکت و انرژی جنبشی رابکار ببریم . پس از بقاء اندازه ـ حرکت بدست میآوریم

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f}$$

چون برخورد الاستیك است ،انرژی جنبشی محفوظ مانده وداریم

$$\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2$$

از اینجا بسرعت میتوان دید که اگر جرمها و سرعتهای اولیه رابدانیم میتوان دو سرعتانتهائی V_{1f} و V_{2f} را از این دو معادله محاسبه نمود .

معادله اندازه حرکت رامیتوان بصورت

$$m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_{2i}) \qquad (۹-۳)$$

ومعادله انرژی را بصورت

$$m_1 (V_{1i}^2 - V_{1f}^2) = m_2 (V_{2f}^2 - V_{2i}^2) \qquad (۹-٤)$$

نوشت . باتقسیم معادله ٤ ـ ۹ بر ۳ ـ ۹ وفرض اینکه $V_{2f} \neq V_{2i}$ و $V_{1f} \neq V_{1i}$

است (سئوال ٥ راملاحظه کنید) ، بدست میآوریم

$$V_{1i} + V_{1f} = V_{2f} + V_{2i}$$

وپس از دوباره مرتبکردن

$$V_{1i} - V_{2i} = V_{2f} - V_{1f} \qquad (۹-٥)$$

این رابطه میگوید که در برخورد الاستیك یك بعدی سرعت نسبی نزدیك شدن قبل ازبرخورد مساوی سرعت نسبی جدائی پس از برخورد میباشد .

برای یافتن مولفه های سرعت V_{1f} و V_{2f} پس از برخورد از روی مولفه های سرعت V_{1i}و V_{2i} قبل از برخورد میتوان هر دو تا ازسه معادله نمره گذاری شده قبلی را بکار برد . پس ازمعادله ٥ - ۹ داریم

$$V_{2f} = V_{1i} + V_{1f} - V_{2i}$$

باقرار دادن این درمعادله ۳ - ۹ وحل آن نسبت به V_{1f} خواهیم داشت

$$V_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)V_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)V_{2i}$$

بهمین طریق باقرار دادن $V_{1f} = V_{2f} + V_{2i} - V_{1i}$ (ازمعادله ٥ - ۹) درمعادله ۳ - ۹ وحل آن نسبت به V_{2f} بدست میآوریم

$$V_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)V_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)V_{2i}$$

چند ین حالت خاص جالب وجود دارد . مثلاً وقتی ذرات برخورد کننده جرمهای یکسان دارند یعنی m_1 مساوی m_2 است . دو معادله قبلی تبدیل میشوند به

$$V_{1f} = V_{2i} \qquad و \qquad V_{2f} = V_{1i}$$

یعنی در برخورد الاستیك یك بعدی دو ذره باجرمهای مساوی ، سرعت ذرات حین برخورد معاوضه میشود .

حالت جالب دیگر حالتی است که ذره m_2 درابتدا درحال سکون باشد . آنوقت V_{2i} مساوی

صفربوده وداریم

$$V_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V_{1i} \quad , \quad V_{2f} = \left[\frac{(2m_1)}{m_1 + m_2}\right] V_{1i}$$

البته اگرهمچنین $m_1 = m_2$ باشدآنوقت همانطورکه انتظار داریم $V_{1f} = 0$ و $V_{2f} = V_{1i}$ میباشند .

ذره اول کاملاً متوقف شده و ذره دوم سرعتی راکه ذره اول درابتدا داشت بدست میآورد اگر m_2 خیلی بزرگتر از m_1 باشدبدست میآوریم

$$V_{1f} \cong -V_{1i} \qquad , \qquad V_{2f} \cong 0$$

یعنی وقتی یک ذره سبک با ذره درحال سکونی که جرمش خیلی بیشتراست برخورد کند ، سرعت ذره سبک تقریباً معکوس شده وذره سنگین تقریباً درحال سکون باقی میماند . مثلاً تصور کنید که توپی رابطورعمودی روی یک سطح افقی که متصل بزمین است رهاکنیم. این درواقع برخوردی بین توپ وزمین میباشد . اگر برخورد الاستیک باشد ، توپ باسرعت معکوس برگشته وبه ارتفاعی که از آن افتاده بودبرمیگردد . بالاخره اگر m_2 خیلی کوچکتراز m_1 باشد داریم

$$V_{1f} \cong V_{1i} \qquad V_{2f} \cong 2V_{1i}$$

یعنی سرعت ذره سنگین تابنده دربرخورد با ذره سبک ساکن تغییرنمیکند ولی ذره سبک با سرعتی که تقریباً دوبرابر سرعت ذره برخورد کننده است برمیگردد . حرکت یک توپ بولینگ دربرخورد بایک بادکنک بادکرده هم اندازه خیلی کم تغییر میکند ولی بادکنک بتندی ازجای خود دور میشود .

اگربرخورد غیرالاستیک باشد آنوقت برحسب تعریف انرژی جنبشی محفوظ نمیماند وانرژی جنبشی انتهائی ممکن است کمتراز مقداراولیه باشد ومثلاً اختلاف ، سرانجام تبدیل به انرژی داخلی یاانرژی پتانسیل دراثر تغییر شکل دراثر برخورد میگردد ، یاانرژی جنبشی انتهائی ممکن

است ازمقدار اولیه بیشتر باشد مانند وقتیکه انرژی پتانسیل در برخورد آزاد میشود . در هر حال همواره بقاء اندازه حرکت مانند بقاء انرژی کلی صادق میباشد .

بالاخره یك برخورد کاملاً غیرالاستیك را درنظر میگیریم. دو ذره پس از برخورد بیکدیگر می چسبند بطوریکه یك سرعت مشترك انتهائی $\vec{V}_f$ وجود خواهد داشت . لزومی ندارد که بحث رابه حرکت یك بعدی محدود کنیم . بابکاربردن اصل بقاء اندازه حرکت بتنهائی داریم

$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = (m_1+m_2)\vec{V}_f \tag{۹-۶}$$

وقتیکه $\vec{V}_{1i}$ و $\vec{V}_{2i}$ معلوم باشند $\vec{V}_f$ ازاین رابطه معین میشود .

مثال ۱

یك توپ بیسبال که وزنش ۰/۳۵ پوند است وقتیکه بطور افقی وباسرعت ۹۰ ft/sec حرکت میکند بیك چوب بیسبال برمیخورد . توپ پس ازجدا شدن ازچوب باسرعتی برابر ۱۱۰ ft/sec درجهت مخالف حرکت اولیه اش حرکت مینماید . ضربه برخورد را تعیین کنید.

ضربه رانمیتوان ازروی تعریف $\vec{J} = \int \vec{F}\,dt$ محاسبه نمود زیرا نیروی وارده روی توپ رابصورت تابعی اززمان نمیدانیم . بهرحال دیده ایم (معادله ۹-۲) که تغییر در اندازه حرکت یك ذره که بآن یك نیروی ضربه ای وارد میشود برابر ضربه میباشد پس

$$\vec{J} = \text{تغییر در اندازه حرکت} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$
$$= m\vec{V}_f - m\vec{V}_i = \left(\frac{W}{g}\right)(\vec{V}_f - \vec{V}_i)$$

بافرض اینکه بطور اختیاری جهت $\vec{V}_i$ مثبت میباشد آنوقت ضربه برابر است با

$$J = \left(\frac{0.35\ lb}{32\ ft/sec^2}\right)\left(-110\ ft/sec - 90\ ft/sec\right) = -2.2\ lb-sec$$

علامت منها نشان میدهد که جهت ضربه وارده برتوپ درخلاف جهت سرعت ابتدائی توپ میباشد . نیروی برخورد رانمیتوان ازاطلاعات داده شده تعیین نمود . درواقع هرنیروکه ضربه اش برابر ۲/۲ $lb-sec$ باشد همین تغییر دراندازه حرکت را ایجاد خواهد نمود . مثلاً اگر چوب وتوپ بمدت ۰/۰۰۱۰ sec درتماس باشند ، نیروی متوسط طی این زمان برابر

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-2.2\ lb\text{-}sec}{0.0010\ sec} = -2200\ lb$$

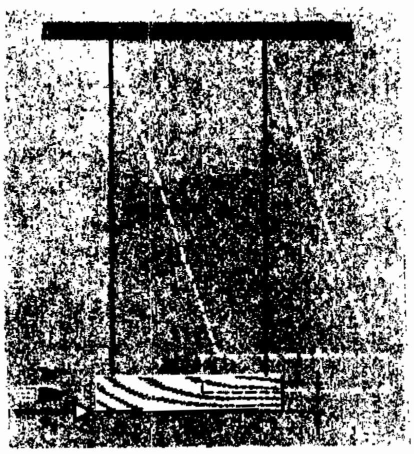
خواهد بود . برای زمان تماس کوتاهتر نیروی متوسط بزرگتر میباشد . نیروی واقعی ماکزیمم بزرگتر از این مقدار متوسط خواهد داشت . در مدت زمان برخورد جاذبه باعث چه مقدار سقوط برای توپ بیسبال میشود ؟

مثال ۲

(a) بچه نسبتی انرژی جنبشی یك نوترون (بجرم m_1) در برخورد الاستیك با یك هسته اتمی (بجرم m_2) که در ابتدا در حال سکون است کم میگردد ؟

انرژی جنبشی اولیه نوترون یعنی K_i برابر است با $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$. انرژی جنبشی انتهائی یعنی K_f برابر است با $\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2$. نسبت کاهش انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$



شکل ۵-۹ : مثال ۳- آونگ بالستیك مرکب از یك قطعه چوبی بزرگ بجرم M است که بوسیله دو نخ آویزان شده است. وقتی گلوله‌ای بجرم m وسرعت v_1 به آن برخورد کرده و در آن فرو برود ، قطعه چوبی تاب میخورد و ماکزیمم ارتفاعی که بالا میآید y است.

ولی برای این چنین برخوردی

$$V_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{1i}$$

بطوریکه

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(b) نسبت کاهش انرژی جنبشی یك نوترون راوقتیکه باین طریق با هسته سرب ، هسته کربن وهسته هیدرژن برخورد نماید بدست آورید .

نسبت جرم هسته بجرم نوترون (یعنی $\frac{m_2}{m_1}$) برای سرب ۲۰٦ وبرای کربن ۱۲ وبرای هیدرژن یك است.

برای سرب ،

$$m_2 = ۲۰٦ \, m_1$$

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{٤ \times ۲۰٦}{(۲۰۷)^۲} = ۰/۰۲ \quad \text{یا} \quad ٪۲$$

برای کربن ، $m_2 = ۱۲ \, m_1$

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{٤ \times ۱۲}{(۱۳)^۲} = ۰/۲۸ \quad \text{یا} \quad ٪۲۸$$

برای هیدرژن $m_2 = m_1$

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{٤ \times ۱}{(۲)^۲} = ۱ \quad \text{یا} \quad ٪۱۰۰$$

این نتایج نشان میدهد که چرا پارافین که ازنظر هیدرژن غنی است درآهسته کردن نوترونها بسیار موثر ترازسرب میباشد .

<u>مثال ۳</u>

آونگ بالیستیك ـ آونگ بالیستیك برای اندازه گیری سرعت گلوله هابکارمیرود دراینجا

آونگ یک قطعه چوبی بزرگی بجرم M میباشد که بطورعمودی توسط دو ریسمان آویزان شده است. گلوله ای بجرم m که بطورافقی باسرعت V_i حرکت میکند بپاندول خورده ودرآن باقی میماند (شکل ٥-٩) . اگرزمان برخورد (زمان لازم برای اینکه گلوله نسبت به قطعه چوب درحال سکون قرارگیرد) درمقایسه با زمان تاب خوردن پاندول خیلی کم باشد ، ریسمانهای نگاهدارنده درحین برخورد تقریباً قائم باقی میمانند . بنابراین درحین برخورد نیروی افقی خارجی برسیستم (گلوله + پاندول) وارد نمیشود ومولفه افقی اندازه حرکت محفوظ میماند . سرعت سیستم پس از برخورد یعنی V_f خیلی کمتر ازسرعت گلوله قبل ازبرخورد است . این سرعت انتهائی رامیتوان به آسانی تعیین نمود بنابراین سرعت اولیه گلوله رامیتوان ازبقاء اندازه حرکت محاسبه نمود .

اندازه حرکت اولیه سیستم همان اندازه حرکت اولیه گلوله یعنی mV_i است واندازه حرکت سیستم درست بعد از برخورد برابراست با $(m+M)V_f$ بطوریکه

$$mV_i = (M+m)V_f$$

پس ازاینکه برخورد تمام شد ، پاندول وگلوله بماکزیمم ارتفاع y بالا میروند ودرآنجا انرژی جنبشی باقی مانده پس ازبرخورد تبدیل به انرژی پتانسیل ثقلی میشود . پس بابکاربردن بقاء انـــرژی مکانیکی برای این قسمت ازحرکت بدست میآوریم

$$\frac{1}{2}(m+M)V_f^2 = (m+M)gy$$

باحل این دومعادله برای V_i خواهیم داشت

$$V_i = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gy}$$

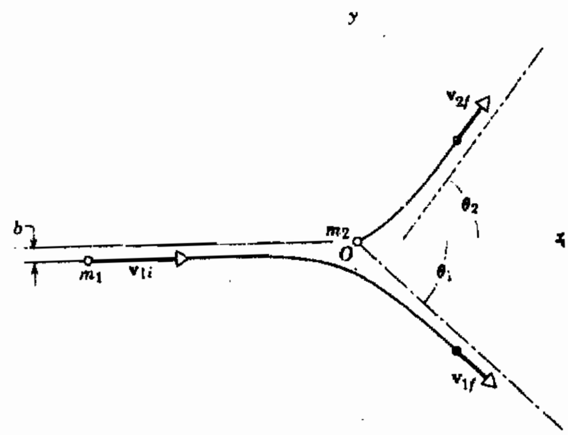
پس میتوان سرعت اولیه گلوله راباندازه گیری m، M و y پیدا نمود . انرژی جنبشی گلوله در ابتدا برابر $\frac{1}{2}mV_i^2$ وانرژی جنبشی سیستم (گلوله + پاندول) درست بعد ازبرخـــورد برابر $\frac{1}{2}(m+M)V_f^2$ میباشد . نسبت این دو انرژی برابراست با

$$\frac{\frac{1}{2}(m+M)V_f^2}{\frac{1}{2}(mV_i)^2} = \frac{m}{m+M}$$

مثلاً اگرجرم گلوله ٥ گرم وقطعه چوب بجرم $M = 200gr$ باشد فقط درحدود یك چهارم از ١٪ انرژی‌جنبشی اولیه باقی میماند وبیشتر از۹۹٪ تبدیل به انرژی داخلی که باعث بالا رفتنِ درجهٔ حرارت میشود .

٥-۹- برخورد در دو وسه بعد

در دو یا سه بعد (باستثنای برخورد کامل غیرالاستیك) قوانین بقاء بتنهائی نمیتوانند حرکت ذره پس ازبرخورد رابفرض معلوم بودن حرکت قبل ازبرخورد بمابدهند . مثلاً برای یك برخورد الاستیك دوبعدی ، که ساده ترین مورد است ، چهارمجهول داریم یعنی دو مولفه های سرعت برای هرکدام ازدو ذره پس ازبرخورد ، ولی فقط سه رابطه معلوم بین آنها داریم یکی برای بقاء انرژی جنبشی ویك رابطه بقاء اندازه حرکت برای‌هرکدام ازدو بعد بنابر این به اطلاعاتی بیشتر ازشرایط اولیه احتیاج داریم وقتی نیروهای واقعی اندرکنش‌راندانیم ، همانطورکه اغلب این طوراست ، اطلاعات اضافی بایستی ازتجربه بدست آید . ساده ترین راه این است که زاویه عقب نشینی یکی‌ازذرات برخورد کننده رامشخص‌کنیم . حال ببینیم وقتی یك ذره بسوی‌هدفی که درحال سکون است پرتاب شود چه اتفاق میافتد . این حالت‌آنچنانکه ممکن است‌بنظر برسد محدود نیست زیرا همواره میتوان دستگاه مقایسه را آن دستگاهی اختیارکرد که درآن ذره هدف قبل ازبرخورد درحال‌سکون باشد . دربسیاری ازکارهای تجربی فیزیك - هسته ای ذرات هسته‌ای بسوی هدفی که دردستگاه مقایسه آزمایشگاه ساکن است پرتاب میشوند . درچنین برخوردهائی بعلت‌بقاء اندازه حرکت ، حرکت درصفحه ای که توسط خطوط عقب نشینی ذرات‌برخوردکننده تعیین میشود قراردارد . لزومی ندارد‌که حرکت‌اولیه درامتداد خطی باشدکه مراکزدو ذره راببهم وصل میکند . نیروی اندرکنش‌ممکن است‌الکترومغناطیسی ثقلی یاهسته ای باشد . لزومی ندارد‌که ذرات "تماس" پیداکنند ، نیروهای قوی که درفواصل دوذره (وبنابراین برای زمان کوتاهی عمل میکنند) ذرات‌راازمسیرهای اولیه شان منحرف میکنند .



شکل ٦-٩ : دو ذره بجرمهای m_1 و m_2 درحال برخورد هستند . دایره های کوچک توخالی مکان آنها را قبل ازبرخورد ودایره های توپر مکان آنها راپس ازبرخورد نشان میدهند . درابتدا m_2 ساکن است . پارامتر برخوردعبارتست از فاصله یی که وجود آن موجب میشود دو گلوله باهم ازمقابل برخورد نکنند (این فاصله درشکل با b نشان داده شده است)

یک وضعیت نمونه در شکل ۹-۶ نشان داده شده است. فاصله بین خط حرکت اولیه و خطی موازی آن که از مرکز ذره هدف میگذرد پارامتر برخورد نامیده میشود . این معرف مستقیم برخورد میباشد $b = 0$ مربوط به برخورد روبرو است. جهت حرکت ذره پرتاب شده m_1 پس از برخورد زاویه θ_1 باجهت اولیه میسازد وهدف m_2 که ابتدا در حال سکون است پس از برخورد در جهتی حرکت میکند که زاویه θ_2 باجهت ذره پرتاب شده میسازد . بابکار بردن بقاء اندازه حرکت که یک رابطه برداری است دو معادله اسکالربدست میآوریم ، برای مولفه x حرکت داریم

$$m_1 V_{1i} = m_1 V_{1f} \cos\theta_1 + m_2 V_{2f} \cos\theta_2$$

وبرای مولفه y داریم

$$0 = m_1 V_{1f} \sin\theta_1 - m_2 V_{2f} \sin\theta_2$$

حال فرض میکنیم که برخورد الاستیک باشد . دراینجا بقاء انرژی جنبشی بکارمیرود ویک معادله سومی بدست میآوریم

$$\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2$$

اگر شرایط اولیه (m_1 ، m_2 و V_{1i}) رابدانیم چهارمجهول (V_{1f} ، V_{2f} ، θ_1 و θ_2) باقی میماند که بوسیله سه معادله بهم مربوطند . میتوان حرکت پس ازبرخورد را تعیین نمود درصورتیکه یکی ازاین کمیات مثلاً θ_1 رامشخص کنیم.

<u>مثال ٤</u>

یک مولکول گاز که دارای سرعت ۳۰۰ $meters/sec$ است بطورالاستیک بامولکول دیگری بهمان جرم که درابتدا درحال سکون است برخورد میکند . پس ازبرخورد مولکول اولی تحت زاویه ای برابر ۳۰° باجهت اولیه اش حرکت میکند . سرعت هرمولکول پس ازبرخورد وزاویه ای را که مولکول هدف عقب نشینی کننده باجهت پرتاب تشکیل میدهد پیدا کنید .

این مثال دقیقاً مربوط به وضعیتی است که اکنون بحث نمودیم ، با $m_1 = m_2$

۱

باقراردادن m_1 مساوی m_2 و $\theta_1 = ۳۰^\circ$ و $V_{1i} = ۳۰۰$ meters/sec

روابط زیر رابدست میآوریم

$$V_{1i} = V_{1f}\cos\theta_1 + V_{2f}\cos\theta_2$$

$$V_{1f}\sin\theta_1 = V_{2f}\sin\theta_2$$

و

$$V_{1i}^2 = V_{1f}^2 + V_{2f}^2$$

که بایستی برای V_{1f} و V_{2f} و θ_2 حل شود . برای اینکار معادله اول را مربع نموده (بانوشتن آن بصورت $V_{1i} - V_{1f}\cos\theta_1 = V_{2f}\cos\theta_2$) واین رابامربع معادله دوم جمع میکنیم (باتوجه باینکه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ است) خواهیم داشت .

$$V_{1i}^2 + V_{1f}^2 - 2V_{1i}V_{1f}\cos\theta_1 = V_{2f}^2$$

باترکیب این بامعادله سوم داریم

$$2V_{1f}^2 = 2V_{1i}V_{1f}\cos\theta_1$$

یا (چون $V_{1f} \neq 0$ است)

$$V_{1f} = V_{1i}\cos\theta_1 = (300 \text{ meters/sec})(\cos 30^\circ)$$

یا

$$V_{1f} = 260 \text{ meters/sec}$$

ازمعادله سوم

$$V_{2f}^2 = V_{1i}^2 - V_{1f}^2 = (300 \text{ meters/sec})^2 - (260 \text{ meters/sec})^2$$

یا

$$V_{2f} = 150 \text{ meters/sec}$$

بالاخره ازمعادله دوم

$$\sin\theta_2 = \left(\frac{V_{1f}}{V_{2f}}\right)\sin\theta_1$$

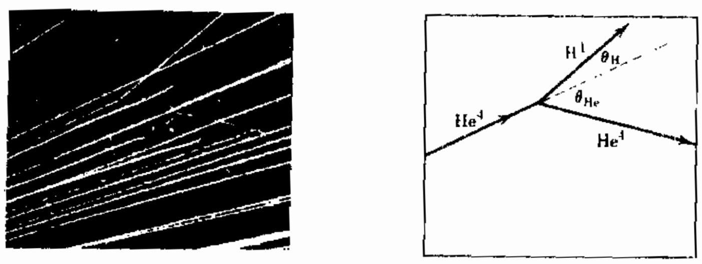
$$= (۲۶۰/۱۵۰)(\sin ۳۰^\circ) = ۰/۸۶۶$$

یا

$$\theta_2 = 60^\circ$$

د ومولکول بازاویه قائمه ازیکد یگر جد امیشوند (۹۰= $\theta_1+\theta_2$ درشکل ۶-۹)

دانشجویان بایدبتوانند نشان د هندکه دریك برخورد الاستیك بین ذراتی باجرم مساوی که یکی ازآنها درابتدا درحال‌سکون است ، ذرات برگشت کننده همیشه بطورعمــود بریکدیگر ازهم د ورمیشوند ، درشکل ۷-۹ عکسی از برخورد الاستیك هسته ای راکه دریك اطاق ابرویلسن اتفاق افتاده است نشان داده ایم . (در۱۹۲۷ C. T. R Wilson دانشمنــد انگلیسی جایزه نوبل رابرای اختراع اطاق ابر دریافت نمود ، بررسی های اوازدرراهی کاملاً مختلف شروع‌شدکه عبارت بود از کوشش برای‌تولید آزمایشگاهی یك پدیده جوی‌که درکوه Ben Dovis اسکاتلند مشاهده شده بود) . مسیرذرات توسط اثر قطرات باقی مانده ودرجایشان قابل مشاهده میشوند . دراین مورد ذره یك ذره $\alpha(He^4)$ است وهسته هدف قبل ازبرخورد درحال سکون میباشد . توجه کنیدکه وقتی جرم هدف زیاد میشود زاویه بین ذرات برخورد کننده زیاد میگردد .



شکل ۷-۹ :عکسهائی که ازمسیر ذراتی دریك اتاقك ابر (وسیله‌ئی که مسیرهارامرئی میسازد) درحال برخورد هستند . اتاقك محتوی بخار اب اشباع شده است. اگربخار کمی فشرده شود وبعد بسرعت منبسط شود بخار آب بصورت قطره های‌کوچکی درامتداد مسیرنمایان خواهند شد . ذره تابیده شده هسته اتم هلیوم (He^4 یا α) است .و هــدف هسته اتم هیدرژن (H^1 یا p) است .

۶–۹ مقطع برخورد

وقتیکه ذراتی با ابعاد اتمی و یا زیر اتمی سروکار داریم نمیتوان مسیر ذره تابنده یا موقعیت ذره هدف را با دقت کافی تعیین نمود. در عمل مانند وقتیکه یک ورق نازک هدف را با دوترونهای یک سیکلوترون بمباران میکنیم بایستی بیک طریق آماری از تعداد زیادی برخورد بین دوترونها و هسته های هدف بحث کنیم. وضعیت خیلی شبیه وقتی است که ما با یک مسلسل، و بدون ترتیب (مثلاً در تاریکی) بطرف یک اطاقک دور دست بسطح که در آن تعداد زیادی بشقابهای کوچک بسطح A بطور نامرتب آویزان شده است شلیک نمائیم. اگر تعداد بشقابها q و میزانی که گلوله ها به اطاقک اصابت میکنند R_0 باشد، میزان R که در آن بشقابها شکسته میگردند چقدر است؟ براساس نامرتب بودن وقایع داریم $[(9-Va)\ R=R_0(\sigma q/A)]$ که در آن σq سطح کلی تمام بشقابها میباشد در حقیقت میتوانیم این رابطه را برای اندازه گیری سطح یعنی سطح هندسی یک بشقاب بکاربریم، با حل برای σ نتیجه میشود $[(9-Vb)\ \sigma=RA/R_0q]$ که بما اجازه میدهد که σ را از روی مقادیر اندازه گیری شده R، A، R_0، q بدست آوریم σ را ممکن است مقطع برخورد برای این واقعه که عبارت از برخورد گلوله با بشقاب است نامید.

بهمین ترتیب در فیزیک هسته ای، اغلب هدفهائی را با ذرات هسته ای بمباران کرده، میزانی را که در آن نوع بخصوصی از وقایع میدهد اندازه گرفته و مقطع برخوردی بآن وقایع نسبت میدهیم. مثلاً فرض کنیم یک ورقه نازک طلا (Au^{197}) را با دوترونهائی (d یا H^2) که انرژی شان مثلاً $30\ MeV$ است بمباران کنیم. وقایع زیادی ممکن است رخ دهد فعل و انفعال هسته ای $d+Au^{197}\rightarrow P+Au^{198}$ و فعل انفعال هسته ای $d+Au^{197}\rightarrow n+Hg^{198}$ که در آن n نمایش نوترون میباشد. هرکدام از این وقایع (و خیلی دیگر که میتوان نوشت) مقطع σ_x خودش را دارد. فرض کنیم سطح ورقه ای که در معرض اشعه قرار گرفته A و ضخامت ورقه x باشد. اگر n ذره هدف در واحد حجم ورقه وجود داشته باشد تعداد کل ذرات هدف موجود برابر nAx میباشد. اگر سطح موثر (یعنی مقطع برخورد) برای واقعه ای که مورد نظر است σ_x باشد سطح موثر کل تمام هسته ها $nAx\sigma_x$ میباشد. اگر R_0 عبارت از میزان برخورد ذرات با هدف و R_x میزانی باشد که در آن وقایعی که مورد نظر است اتفاق میافتند، بعلت نامرتبی این وقایع (معادله ۹–۷ a را ملاحظه کنید) داریم.

$$\frac{R_x}{R_o} = \frac{(nAx\sigma_x)}{A}$$

یا

$$R_x = R_o n x \sigma_x \qquad (۹-۸)$$

بنابراین با اندازه گیری R_x ، R_o ، n و x وقرار دادن آنها درمعادله ۸-۹ میتوان σ_x رابرای آن واقعه بدست آورد . مقاطع برخورد رامعمولا " برحسب Barn یا اجزاء آن بیان میکنند

$$1\ Barn = 10^{-28}\ meters^2$$

مقاطع برخورد تقریبا " همیشه بستگی به انرژی ذره تابنده دارند واغلب وقتی انرژی تغییر کند ماکزیمم های تیزی رانمایش میدهند . این نشان میدهد که درانرژی های ویژه بخصوصی احتمال وقوع فعل وانفعال مورد نظر بیشتر ازبقیه انرژیها است .

۷-۹- فعل وانفعالات و اعمال تلاشی

دربخش ۱-۹ بیان کردیم که فعل انفعالات واعمال تلاشی رادیو اکتیو برای اتمها وهسته ها و ذرات بنیادی رامیتوان بامتدهائی که درمطالعات مربوط به برخورد بکارمیرود مورد بحث قرارداد ، یعنی میتوان اصول بقاء اندازه حرکت خطی وانرژی رابرای دوره های معین " قبل از واقعه " و " بعد از واقعه " بکار برد . برای این اعمال میبایستی بقاء انرژی کلی رابکار بریم زیراانرژی جنبشی محفوظ نمیباشد . دراین بخش فقط مثالهائی رادرنظر میگیریم که درآنها سرعت ذرات نسبت به سرعت نورقابل اغماض میباشد . باین معنی که لزومی ندارد روابط نسبیت را بکارببریم ومیتوان روابط کلاسیك برای اندازه حرکت وانرژی رامورد استفاده قرارداد .

مثال ٥

فعل وانفعالات هسته ای . یك لایه نازك را که یکی ازترکیبات فلور (F^{19}) است توسط شعاعی ازپروتونها (p) که بوسیله شتاب دهنده واندوگراف دارای انرژی $1/85\ MeV$ شده اند بمباران میکنیم ($1\ MeV = 1/60 \times 10^{-13}$ ژول) . بعضی ازپروتونها دراثر اندرکنش با هسته فلور فعل انفعال هسته ای زیر راایجاد میکنند .

$$F^{19}+p \rightarrow O^{16}+\alpha$$

شکل ۸-۹ : فعل وانفعال هسته ای $p+F^{19}\rightarrow O^{16}+\alpha$ حالتهای قبل وبعد از حادثه دردستگاه مختصات آزمایشگاه نشان داده شده اند .

مشاهده میشودکه آن دسته از ذرات α (هسته اتم هلیوم) که بطورعمود نسبت به شعاع پروتون تابیده خارج میشوند (شکل ۸-۹ راملاحظه کنید) دارای سرعتی برابر Meter/sec $۱/۹۵\times۱۰^{۷}$ میباشند با بکاربردن قوانین بقاء اندازه حرکت وانرژی کلی درمورداین فعل انفعال چه نتیجه ای میگیرید . جرمهای وارد درفعل وانفعال بادقتی که بقدرکافی برای ما خوب است عبارتنداز

$$m_p = ۱/۰۱\ amu \qquad m_O = ۱۶/۰\ amu$$

$$m_F = ۱۹/۰\ amu \qquad m_\alpha = ۴/۰۰\ amu$$

که درآن amu(atomic-mass-unit) $۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}$ Kg است . مولفه های x و y اندازه حرکت خطی محفوظ میمانند یعنی اینهادارای مقادیر یکسانی قبل وبعد از

فعل انفعال میباشند پس در دستگاه مقایسه آزمایشگاه (در شکل ۸-۹) داریم

$$m_p V_p = m_0 V_0 \cos\theta \qquad (9\text{-}9)$$

(مولفه x)

$$0 = m_0 V_0 \sin\theta - m_\alpha V_\alpha \qquad (9\text{-}10)$$

و (مولفه y)

برای بقاء انرژی کلی میتوان نوشت

$$Q + \frac{1}{2} m_p V_p^2 = \frac{1}{2} m_0 V_0^2 + \frac{1}{2} m_\alpha V_\alpha^2 \qquad (9\text{-}11)$$

که نشان میدهد که Q مقدار ازدیاد انرژی جنبشی سیستم پس ازفعل انفعال نسبت به انرژی جنبشی سیستم قبل از فعل انفعال میباشد . توجه کنید که مافرض کرده ایم که سرعت ذرات به اندازه کافی کم است بطوریکه برای انرژی بجای رابطه نسبی ($m_0 c^2 [(1-\frac{V^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} - 1]$) میتوان رابطه کلاسیك ($\frac{1}{2} m V^2$) رابرای انرژی جنبشی بکاربرد . اگر Q مثبت باشد انرژی جنبشی بایستی بوسیله فعل انفعال تولید شود . انرژی نمایش داده شده با Q فقط میتواند ازاختلاف انرژی های درحال سکون ذرات قبل وبعد از فعل وانفعال مطابق رابطه مشهوراینشتین یعنی $E = \Delta m c^2$ ناشی شده باشد (بخش ۹-۸ راملاحظه کنید) پس(اگر Q مثبت باشد) انتظارداریم که جرم درحال سکون سیستم پس ازفعل انفعال بمقدار جزئی ازجرم درحال سکون قبل ازفعل انفعال کمتر باشد ودرواقع Q توسط رابطه انیشتین داده میشود .

$$Q = \Delta m c^2$$

$$= [(m_p + m_F) - (m_\alpha + m_0)]c^2 \qquad (9\text{-}12)$$

توجه کنید که معادلات ۹-۱۱ و ۹-۱۲ روابط مستقلی برای Q هستند که توسط رابطه جرم انرژی انیشتین بهم مربوطند .

سه معادله بقاء درست شامل سه مجهول V_0 ، θ و Q میباشند برای یافتن Q ازاین معادلات ابتدا θ رابین دومعادله اول حذف میکنیم ،بدین ترتیب که این دو معادله اول

حذف میکنیم ، بدین ترتیب که این دو معادله رامجذور کرده سپس با هم جمع میکنیم (با درنظرگرفتن اینکه $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ است) بدینطریق بدست میآوریم

$$m_p^2 v_p^2 + m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_0^2 v_0^2$$

حال میتوان V_0 رابین این رابطه ومعادله ۹-۱۱ حذف نمود . دانشجویان میتوانند نشان دهند که بعدازقدری جابجاکردن داریم

$$Q = K_\alpha\left(1 + m_\alpha/m_0\right) - K_p\left(1 - m_p/m_0\right) \qquad (۹-۱۳)$$

$$K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \text{ و } \qquad K_p\left(= \tfrac{1}{2} m_p v_p^2\right) = 1.85 \text{ MeV}$$

ازاطلاعات داده شده میدانیم که

$$K_\alpha = \tfrac{1}{2}\left(4.00 \text{ amu} \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/amu}\right)\left(1.95 \times 10^{7} \text{ meters/sec}\right)^2$$

$$= \left(1.26 \times 10^{-12} \text{ joules}\right)\left(1 \text{ MeV}/1.60 \times 10^{-13} \text{ Joule}\right)$$

$$= 7.88 \text{ MeV}$$

حال میتوان Q رااز معادله ۹-۱۳ بشکل

$$Q = (7.88 \text{ MeV})(1 + 4.00/16.0) - (1.85 \text{ MeV})(1 - 1.01/16.0)$$
$$= 8.13 \text{ MeV}$$

محاسبه نمود . بنابراین توسط بکاربردن اصول بقاء اندازه حرکت خطی وانرژی کلی میتوان Q را برای یک فعل انفعال بدون هیچگونه مشاهده ای روی هسته های O^{16} پس زده شده محاسبه نمود .

اگربخواهیم V_0 و θ رابرای این هسته بدانیم ، براحتی میتوانیم آنهاراازمعادلات ۹-۹ و ۹-۱۰ محاسبه کنیم.

نتیجه $Q = ۸/۱۳$ MeV اطلاع مهمی درباره فعل انفعال است. ازمعادله ۹-۱۲ که رابطه ای برای Q ومستقل ازمعادله ۹-۱۳ است میتوان کاهش جرم درحال سکون دراین

فعل انفعال را محاسبه نمود .

$$\Delta m = Q/c^2$$

$$= (۸/۱۳ \ \text{MeV} \times ۱/۶۰ \times ۱۰^{-۱۳} \ \text{Joule/MeV})(۳/۰۰ \times ۱۰^{۸} \ \text{meters/sec})^{۲}$$

$$= (۱/۴۴ \times ۱۰^{-۲۹} \ \text{kg})(۱ \ \text{amu} / ۱/۶۶ \times ۱۰^{-۲۷} \ \text{kg})$$

$$= ۰/۰۰۸۷۳ \ \text{amu}$$

این نتیجه را با محاسبه $\Delta m = [(m_p + m_F) - (m_\alpha + m_O)]$ ازروی اندازه‌گیریهای خیلی دقیق چهار جرم مجزا دریک اسپکترومترجرمی میتوان تحقیق نمود . مطابقت بسیار خوبی که بدست آمده یک بار دیگر اعتبار اصولی رابطه جرم ـ انرژی انیشتین رانشان میدهد .

سینماتیک دورانی

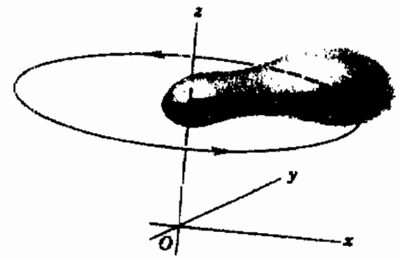
فصل دهـــم

۱۰-۱ حرکت دورانی

تاکنون مابیشتر راجع به حرکت انتقالی یك ذره واحد یااجسام سخت یعنی اجسامیکـه تمام قسمهایشان نسبت ثابتی بایکدیگر دارند بحث نموده ایم. هیچ جسم حقیقی کاملا" سخت نمیباشد ولی خیلی اجسام مانند مولکولها ، نورد فولادی وسیارات بقدر کافی سخت میباشند ، بطوریکه دربسیاری ازمسائل ازاین حقیقت که آنها پیچیده ، خمیده ویادرحال ارتعاش میباشند میتوان صرفنظر نمود . یك جسم سخت درحال حرکت انتقالی محض است اگردریك فاصله زمانی معین جابجائی تمام ذرات جسم یکسان باشد .

دراین فصل علاقمند به دوران میباشیم . فعلا" درباره خودرامحدود بیك ذره واحد و اجسام سخت میکنیم ، بدین معنی که حرکات دورانی سیستمهائی نظیرمنظومه شمسی ویا آب دریك ظرف دوار را درنظر نمیگیریم. ونیز مافقط بادورانهائی سروکارخواهیم داشت که درآنها محوردوران نسبت بدستگاه مختصاتی که ازآن دوران رانظاره میکنیم ثابت است .

شکل ۱۰-۱ حرکت دورانی جسم سختی راحول یك محور ثابت که دراین مورد محور Z دستگاه مقایسه است نشان میدهد . فرض کنیم P نمایش یك نقطه اختیاری ازجسم سخت بوده و توسط بردار مکان $\vec{r}$ مشخص شود . آنوقت میتوان گفت : یك جسم سخت دارای حرکت دورانـــی محض است اگرهرنقطه جسم (مانند P درشکل ۱۰-۱) روی دایره ای حرکت کند ومراکز ایـــن دایره هاروی خط مستقیمی باشد . این خط مستقیم محوردوران نامیده میشود (محور Z درشکل ۱۰-۱) . اگرعمودی ازهرنقطه جسم براین محور وارد کنیم ، این چنین خطی درهرفاصله زمانی همان زاویه راجاروب میکند که سایر خطوط نظیرآن جاروب میکند . بنابراین حرکت دورانی محض یك جسم سخت رامیتوان بادرنظرگرفتن حرکت یك ذره تشکیل دهنده آن (مثلا P) توضیـــح داد . (البته بایستی ذرات روی محور دوران رامستثنی کنیم ، چرا ؟)



شکل ۱۰-۱ - جسم صلبی درحال چرخش حول محور z ، هرنقطه جسم ، مثلا P ، دایره بحول این محور طی میکند .

حرکت عمومی یك جسم سخت بجای یك دوران محض ترکیبی ازانتقال ودوران میباشد همانطور که درفصل ۸ دیدیم حرکت انتقالی هرسیستم ذرات (چه سخت باشند وچه غیر سخت ، چه جسم درحال دوران باشد وچه نباشد) مثل آن است که تمام جرم M درمرکز جسرم متمرکزبوده وبرآیند نیروهای خارجی $(\vec{F}_{ext})$ بآن وارد شود . آنوقت شتاب مرکزجرم توسط معادله ۸-۸ یا $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$ داده میشود . این که میتوانیم حرکت انتقالی یك جسم سخت رابا حرکت یك نقطه واحد - مرکزجرمش - نشان دهیم بسیارکمك کننده است ، چیزی که باقی میماند تعیین حرکت دورانی جسم میباشد . این چنین ترکیبی ازحرکات انتقالی ودورانی رادرفصل بعد موردبحث قرارمیدهیم . این موضوع پس ازمطالعه حرکت دورانی محض حول یك محور ثابت ساده ترخواهد شد .

بنابراین حال بحرکت دورانی محض یك جسم سخت حول یك محورثابت (شکل ۱۰-۱) برمیگردیم ابتدا باید حرکت دورانی راتوضیح دهیم . این توصیف راسینماتیك دورانی مینامیم ، مابايد متغیرهای حرکت زاویه ای راتعریف نموده وآنهارا بهیکدیگر ارتباط دهیم ، همانطورکه

که درسینماتیک ذره متغیرهای حرکت انتقالی راتعریف کرده وآنهارابهم مربوط نمودیم . قسمت بعدی برنامه ماعبارت است ازمربوط نمودن حرکت دورانی یك جسم باخواص جسم ومحیط اطراف آن . دراین فصل سینماتیك دوران را مطالعه میکنیم . درفصل بعد دینامیك دوران راتوسعه میدهیم .

۲-۱- سینماتیك دورانی - متغیرها

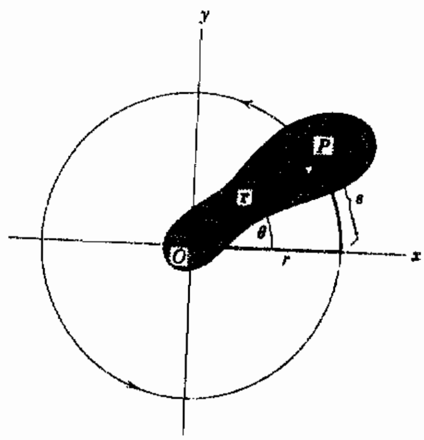
فرض کنیم درشکل ۱-۱ صفحه ای از P عمود برمحور دوران عبور دهیم . این صفحه که جسم را درحال دوران راقطع میکند شامل دایره ای که ذره P روی آن حرکت میکند میباشد . شکل ۲-۱ این صفحه راآنطور که آنرا از بالا بطرف پائین (درامتداد محور Z درشکل ۱-۱) می بینیم نشان میدهد .

بدقت میتوان محل تمامی جسم درحال دوران رادر دستگاه مقایسه تعیین نمود درصورتیکه وضعیت یك نقطه واحد ازجسم (P) دراین دستگاه معلوم باشد . بنابراین برای سینماتیك این مساله فقط کافی است حرکت (دوبعدی) یك ذره روی یك دایره رادرنظر بگیریم .

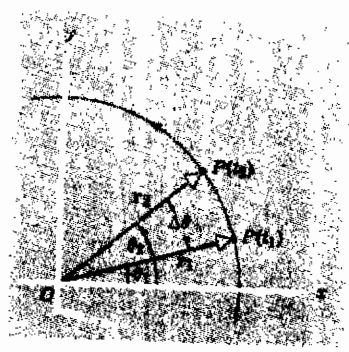
درشکل ۲-۱ زاویه θ عبارت است ازمکان زاویه ای ذره P نسبت به وضعیت مورد مراجعه بطور دلخواه جهت مثبت دوران درشکل ۲-۱ رامخالف جهت حرکت عقربه های ساعت اختیار میکنیم بطوری که θ برای دوران مخالف جهت حرکت عقربه های ساعت زیاد شده وبرای دوران موافق جهت عقربه های ساعت کم گردد . راحت تراست که θ برای درجه برحسب رادیان اندازه گیری شود رادیان عدد خالصی است که چون نسبت دو طول است بعد فیزیکی ندارد . چون محیط یك دایره باشعاع r برابر $2\pi r$ است ، 2π رادیان دریك دایره کامل وجود دارد یعنی $2\pi = \frac{2\pi r}{r} = \theta$. بنابراین $57/3 = 1$رادیان و $180 = \pi$ رادیان و $360 = 2\pi$ رادیان است . برحسب تعریف θ رادیان بوسیله رابطه

$$\theta = s/r$$

داده میشود که درآن s طول قوس نشان داده شده درشکل ۲-۱ میباشد .



شکل ۲-۱۰ ـ نقطه P وبردار $\vec{r}$ درمقطع جسم صلب شکل ۱-۱۰. نقطه P ثابت است حول مرکز بردایره ای بشعاع r درخلاف جهت حرکت عقربه ساعت دوران میکند.



شکل ۳-۱۰ ـ خط مرجع r $(= OP)$ که دراشکال ۱-۱۰ و ۲-۱۰ ثابت است، درمدت Δt $(= t_2 - t_1)$ باندازه زاویه $\Delta\theta$ $(= \theta_2 - \theta_1)$ جابجاشده است.

فرض کنیم که جسم شکل ۲-۱۰ درخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت دوران کنــد . درزمان t_1 مکان زاویه ای P برابر θ_1 ودرزمان t_2 بعد مکان زاویه اش θ_2 میباشد . این درشکل ۳-۱۰ نشان داده شده که مکانهای P وبردارمکان $\vec{r}$ رادراین زمانها میدهد ، طرح خود جسم برای سهولت در این شکل حذف شده است. جابجائی زاویه ای P در فاصله زمانی $t_2 - t_1 = \Delta t$ برابر $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ میباشد . سرعت زاویه ای متوسط ω ذره P دراین فاصله زمانی بصورت

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

تعریف میشود . سرعت زاویه ای لحظه ای ω برابرحدی است که این نسبت وقتیکه Δt بسمت صفرمیل کند اختیار مینماید ،

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (۱۰-۱)$$

برای یك جسم سخت تمام خطوط شعاعی که عمود برمحور دوران میباشند دریك زمان معیــن باندازه زاویه یکسانی دوران میکنند بطوریکه سرعت زاویه ای ω حول این محوربرای ذرات یکسان است . بنابراین ω بطورکلی یك خصوصیت جسم میباشد . سرعت زاویه ای ابعــاد عکس زمان (T^{-1}) رادارد ،واحدهایش معمولاً " بصورت رادیان یا ثانیه / رادیان یا ثانیه / دور اختیارمیشود . اگرسرعت زاویه ای P ثابت نباشدآنوقت ذره دارای شتاب زاویه ای است . فرض کنیم ω_1 و ω_2 به ترتیب سرعتهای زاویه ای لحظه ای درزمانهای t_1 و t_2 باشند ،آنوقت شتاب متوسط زاویه ای ذره بصورت

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

تعریف میشود .

شتاب زاویه ای لحظه ای برابراست باحداین نسبتوقتیکه Δt بسمت صفرمیل مینماید ،

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۰-۲)$$

چون ω برای ذرات یك جسم یكسان است ، از معادله ۲-۱ نتیجه میشود كه α بایستی برای تمام ذرات یكسان باشد ، بنابراین α نیز مانند ω یكی از خصوصیات عمومی جسم میباشد . شتاب زاویه ای دارای ابعاد عكس مربع زمان (T^{-2}) وواحد هایش معمولا" بصورت رادیان / ۲ثانیه یا دور / ۲ثانیه اختیار میشود .

دوران یك ذره (یا یك جسم سخت) حول یك محور ثابت یك رابطه ظاهری با حركت انتقالی یك ذره (یا یك جسم سخت) در امتداد یك جهت ثابت دارد . در مورد اول متغیرهای سینماتیكی عبارت از θ ، ω و α ودر مورد دوم عبارت از x ، V و a میباشند . این كمیات دو بدو بهم مربوطند ؟ θ به x ، ω به V و α به a . توجه كنید كه از نظر ابعاد كمیات زاویه ای باكمیات مربوطه خطی در یك عامل طول اختلاف دارند . همچنین توجه كنید كه تمام شش كمیت را در این مورد خاص میتوان بصورت اسكالر درنظر گرفت . مثلا" یك ذره میتواند در امتداد خط مستقیم ، بسته باینكه V یك مقدار مثبت یا منفی باشد ، در یكی از دو جهت حركت كند ، بهمین ترتیب یك ذره درهرلحظه بسته به مقدار مثبت یا منفی برای ω میتواند دریكی از دو جهت حول محور ثابتی دوران نماید .

۳-۱۰ - دوران باشتاب زاویه ای ثابت

درحركت انتقالی یك ذره یا یك جسم سخت درامتداد جهت ثابتی مانند محور x دیدهایم (در فصل ۳) كه ساده ترین نوع حركت ، حركتی است كه در آن شتاب a صفر باشد . بعد از این حالت ساده ترین حالت مربوط است به وقتیكه a مقدارش ثابت است (غیراز صفر) . برای این حركت معادلات جدول ۳-۱ رابدست میآوریم كه متغیرهای سینماتیكی x ، V ، a و t را درتمام تركیبات ممكنه بهم مربوط میكرد .

برای حركت دورانی یك ذره یا یك جسم سخت حول یك محور ساده ترین نوع حركت آن است كه درآن شتاب زاویه ای α صفرباشد (مانند حركت دایره ای یكنواخت) . بعد از آن ساده ترین حالت وقتی است كه α برابر مقدار ثابتی (غیراز صفر) باشد واین مربوط است به

حرکت خطی با مقدار ثابت $a=$ (غیرازصفر) . مانند قبل میتوان چهارمعادله که چهار متغیرسینماتیکی θ ، ω ، α و t رادر تمام ترکیبات ممکنه بهم مربوط میکنند بدست آورد . دانشجویان میتوانند یااین معادلات زاویه ای راتوسط روشهای بکاربرده شده برای بدست آوردن معادلات خطی بدست آورند ویافورا" این معادلات راباجایگزین نمودن ترکیبات زاویه‌ای بجای کمیات خطی مربوط بنویسند .

مادودستگاه معادلات رادرجدول (۱۰-۱) نوشته ایم ، دراین معادلات برای سهولت $x_0=0$ و $\theta_0=0$ اختیارشده اند . دراینجا ω_0 سرعت زاویه ای درزمان $t=0$ میباشد . دانشجویان بایستی این معادلات راقبل ازاثبات ازنظرابعاد تحقیق نمایند . هر دودستگاه نه فقط برای ذرات بلکه برای اجسام سخت نیزصادق میباشند .

جدول (۱۰-۱)

حرکت باشتاب ثابت خطی یازاویه ای

حرکت دورانی (محورثابت)		حرکت انتقالی (جهت ثابت)	
(۱۰-۳)	$\omega=\omega_0+\alpha t$	$v=v_0+at$	(۲-۱۲)
(۱۰-٤)	$\theta=\dfrac{\omega_0+\omega}{2}t$	$x=\dfrac{v_0+v}{2}t$	(۲-۱٤)
(۱۰-۵)	$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	$x=v_0 t+\frac{1}{2}at^2$	(۲-۱۵)
(۱۰-٦)	$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$	$v^2=v_0^2+2ax.$	(۲-۱٦)

برای کمیات زاویه ای بطورد لخواه ازدوجهت ممکن دوران حول محورثابت جهتی راانتخاب کرده ایم که درآن θ زیادمیگردد . ازمعادله (۱۰-۱) ($\omega=d\theta/dt$) ملاحظه میکنیم کـــه

اگر θ با زمان زیاد شود ω مثبت میباشد . بهمین ترتیب ازمعادله ۲-۰۱ $(\alpha = d\omega/dt)$ ملاحظه میکنیم که اگر ω با زمان زیاد شود α مثبت میباشد . برای کمیات خطی قراردادهائی نظیر اینها وجود دارد .

<u>مثال ۱</u>

یك سنگ چاقو تیزکن دارای شتاب زاویه ای ثابت برابر $۳/۰\ \text{radians}/\text{sec}^2$ میباشد درشروع ازحال سکون خطی مانند OP درشکل ۱-۰۱ افقی میباشد . (a) جابجائی زاویه ای خط OP (ودرنتیجه سنگ چاقو تیزکن) رابدست آورید . (b) سرعت زاویه ای سنگ راپس از ۲/۰ ثانیه تعیین کنید .

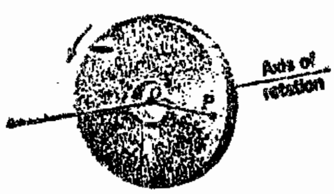
(a) α و t داده شده اند ومیخواهیم θ راپیدا کنیم . پس معادله ۵-۰۱ رابکار میبریم

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

درزمان $t=0$ داریم $\omega = \omega_0 = 0$ و $\alpha = ۳/۰\ \text{rad}/\text{sec}^2$. بنابراین پس از دو ثانیه

$$\theta = (۰)(۲/۰\ \text{sec}) + \frac{1}{۲}(۳/۰\ \text{rad}/\text{sec}^2)(۲/۰\ \text{sec})^۲$$

$$= ۶/۰\ \text{rad} = ۰/۹۶\ \text{دور}$$



شکل ۱-۰۱ - مثال ۱ - خط OP به سنگ آسیابی متصل است که حول محوریکه از O میگذرد ودرد ستگاه ناظرثابت است ، می چرخد .

b) α و t داده شده ومیخواهیم ω راپیدا کنیم پس معادله ۳-۱۰ رابکارمیبریم

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = ۰ + (۲/۰\ \ rad/sec^2)\ (۳/۰\ sec) = ۶/۰\ \ rad/sec$$

برای امتحان معادله ۶-۱۰ رابکارمیبریم ، داریم

$$\omega^2 = \omega_0^2 + ۲\alpha\theta$$

$$\omega^2 = ۰ + (۲)\ (۳/۰\ \ rad/sec^2)\ (۶/۰\ \ rad) = ۳۶\ \ rad^2/sec^2$$

$$\omega = ۶/۰\ \ rad/sec$$

۶-۱۰ رابطه بین سینماتیک خطی وزاویه ای برای یک ذره درحرکت دایره ای

دربخش ٤-٤ سرعت وشتاب خطی ذره ای راکه روی یک دایره حرکت میکند مورد بحث قرارداده ایم . وقتی جسم سختی حول محورثابتی دوران مینماید ، هرذره جسم روی یک دایره حرکت میکند . بنابراین حرکت چنین ذره ای رامیتوان باتغییرهای خطی یاباتغییرهای زاویه ای توضیح داد . رابطه بین متغیرهای خطی وزاویه ای بسیارمفید بوده ومارا قادر میسازد که از یک نحوه توضیح بنحوه توضیح دیگر برویم .

دریک جسم سخت یک ذره P رادرنظر میگیریم که درفاصله r ازمحور O قرارداردد . این ذره درشکل (a ۵-۱۰) نشان داده شده ووقتی جسم دوران کند روی دایره ای بشعاع r حرکت میکند . وضعیت مراجعه OX میباشد . وقتیکه جسم باندازه زاویه θ دوران کند ذره روی کمانی ازآن دایره فاصله S راطی میکند بطوریکه

$$S = \theta r \qquad (۷-۱۰)$$

که درآن θ برحسب رادیان میباشد .

پس ازمشتق گیری نسبت بزمان ازدوطرف این معادله وتوجه باینکه r ثابت است داریم

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\, r$$

ولی $\frac{ds}{dt}$ سرعت خطی ذره P بوده و $\frac{d\theta}{dt}$ سرعت زاویه ای جسم درحال دوران است پس

$$v = \omega r \qquad (۱۰-۸)$$

این رابطه ای است بین بزرگی های سرعت خطی وسرعت زاویه ای . سرعت خطی یك ذره در حرکت دایره ای برابراست باحاصلضرب سرعت زاویه ای درفاصله r ذره ازمحور دوران .

پس ازمشتق گیری ازمعادله ۸-۱۰ نسبت بزمان داریم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

ولی $\frac{dv}{dt}$ بزرگی مولفه مماسی شتاب ذره است و $\frac{d\omega}{dt}$ بزرگی شتاب جسم درحال دوران میباشد پس

$$a_T = \alpha r \qquad (۱۰-۹)$$

بنابراین بزرگی مولفه مماسی شتاب خطی ذره درحرکت دایره ای حاصلضرب بزرگی شتاب زاویه ای و فاصله r ذره ازمحور دوران میباشد .

دیده ایم که مولفه شعاعی شتاب برای ذره ای که روی یك دایره حرکت میکند برابر $\frac{v^2}{r}$ میباشد . این رامیتوان بابکاربردن معادله ۸-۱۰ برحسب سرعت زاویه ای شرح داد . داریم

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (۱۰-۱۰)$$

شتاب منتجه نقطه P درشکل b ۵-۱۰ نشان داده شده است .

معادلات ۷-۱۰ تا ۱۰-۱۰ ماراقادرمیسازد که حرکت یك نقطه ازیك جسم سخت راکه حول محورثابتی درحال دوران است بامتغیرهای زاویه ای ویابامتغیرهای خطی شرح دهیم . ممکن است سوال شود که چون ماازقبل بامتغیرهای خطی آشنائی داریم چه لزومی دارد که از متغیرهای زاویه ای معادل آنهااستفاده کنیم . جواب اینست که وقتی ماباید نقاط مختلف راروی یك جسم درحال دوران درنظر بگیریم ، بیان مطلب برحسب متغیرهای زاویه ای مزیت آشکاری بربیان برحسب متغیرهای خطی دارد . نقاط مختلف یك جسم درحال دوران دارای یك جابجائی ، سرعت یاشتاب خطی نمیباشند ولی تمام نقاط یك جسم سخت درحال دوران

بدوریك محور ثابت دریك لحظه دارای یك جابجائی ، سرعت یاشتاب زاویه ای میباشند . بابكار بردن متغیرهای زاویه ای میتوان حركت تمام جسم رابطریق ساده ای توضیح داد .

مثال ۲

اگرشعاع سنگ چاقو تیزكن درمثال (برابر ۰/۵۰ متر باشد ، (a) سرعت خطی یسا مماس یك ذره واقع روی محیط آنرا حساب كنید . (b) شتاب مماس یك ذره واقع روی محیط رابدست آورید . (c) شتاب بطرف مركز یك ذره روی محیط رادرآخر ۲/۰ ثانیه تعیین كنید .

داریم پس ازدوثانیه $\alpha = ۳/۰ \ rad/sec$ و $\omega = ۶/۰ \ rad/sec$ و $r = ۰/۵۰$

پس

$$(a) \qquad v = \omega r$$

$$(۶/۰ \ rad/sec)(۰/۵۰ \ meter)$$

$$= ۳/۰ \ meters/sec$$ (سرعت خطی)

$$(b) \qquad a_T = \alpha r$$

$$= (۳/۰ \ rad/sec)(۰/۵۰ \ meter)$$

$$= ۱/۵ \ meters/sec^2$$ (شتاب مماسی)

$$(c) \qquad a_R = v^2/r = \omega^2 r$$

$$= (۶/۰ \ rad/sec)^2(۰/۵۰ \ meter)$$

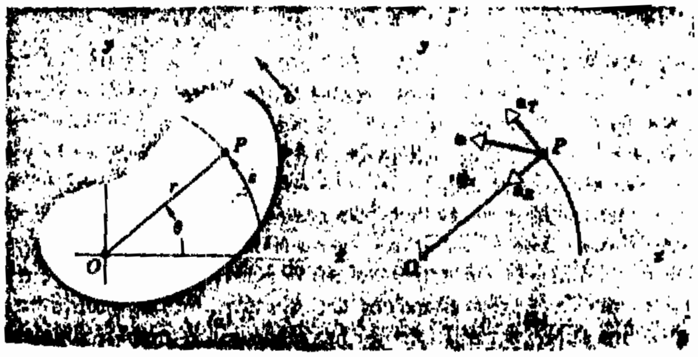
$$= ۱۸ \ meters/sec^2$$ (شتاب مركزی)

(d) آیابرای ذره ای كه درفاصله مساوی‌ازمركز ومحیط (یعنی در $۰/۲۵ = r$ متر) قــــرار گرفته این نتایج معتبراست ؟ متغیرهای زاویه ای برای این نقطه نیز مانند نقطه واقع روی محیط است یعنی یك باردیگر ،

$$\alpha = ۳/۰ \ rad/sec^2 \qquad \omega = ۶/۰ \ rad/sec$$

ولی اكنون $۰/۲۵ = r$ متر است بنابراین‌برای این ذره

$v = ۱/۵ \ m/sec$ و $a_T = ۰/۷۵ \ m/sec^2$ و $a_R = ۹/۰ \ m/sec^2$



شکل ۵-۱۰-۱- (a) - جسم صلبی حول محورثابتی که از O میگذرد وبرصفحه عمود است دوران میکند. نقطه P کمان S راکه زاویه ای برابر θ دربردار د طی میکند.
(b) - شتاب $\vec{a}$ برای نقطه P دارای مولفه $\vec{a}_T$ (مماسی) که $a_T = \alpha r$ و $\vec{a}_R$ (شعاعی)، که $a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ (ω = سرعت زاویه ای).

دینامیک دورانی

فصل یازدهم

۱۱-۱ مقدمه

درفصل ۱۰ سینماتیک دورانی در نظر گرفتیم . در این فصل درتعقیب روش خود راجع به حرکت انتقالی ، علل دوران را مورد مطالعه قرار میدهیم ، موضوعی که دینامیک دورانی نام دارد . سیستمهای درحال دوران از ذرات تشکیل شده اند وما اکنون یاد گرفته ایم که چگونه قوانین مکانیک کلاسیک رابرای حرکت ذرات بکاربریم. باین دلیل دینامیک دورانی شامل خواصی که اصولا" تازه باشد نیست . بهمین ترتیب سینماتیک دورانی شامل خواص تازه واصولی نبود و پارامترهای θ ، ω و α بپارامترهای انتقالی نظیرشان x ، v و a برای ذرات تشکیل دهنده سیستم درحال دوران مربوط بودند . بهرحال مانند فصل ۱۰ بسیارمفید است که مفاهیم حرکت انتقالی رابفرم جدیدی که مناسب برای حرکت دورانی باشد بیان کنیم.

درفصل ۱۰ مطالعات سینماتیکی خودرابه حالت خصوصی مهمی محدود کردیم یعنی دوران یک جسم سخت راحول محوری که نسبت بدستگاه اندازه گیری ما ثابت است درنظر گرفتیم . درمطالعه دینامیک دورانی ازیک دیدگاه اساسی تر شروع میکنیم ، یعنی مشاهده یک ذره واحد در یک دستگاه مقایسه ماندی. بعدا" مطلب را به سیستمهائی که ازتعداد زیادی ذره تشکیل شده اند تعمیم خواهیم داد وازجمله حرکت دورانی یک جسم سخت بدور یک محور ثابت را مورد بررسی قرارخواهیم داد .

بالاخره سیستمی رادرنظرمیگیریم که هیچ گشتاور خارجی به آن وارد نمیشود وباتوجه باین امر اصل مهم بقاء" ممنتوم زاویه ای رامعرفی خواهیم کرد .

۱۱-۲ گشتاوروارده بریک ذره

درحرکت انتقالی نیرو رابه شتاب خطی جسم مربوط میکنیم . درحرکت دورانی چه کمیتی به شتاب زاویه ای جسم مربوط میشود ؟ این کمیت نمیتواند نیرو باشد ، زیرا تجربه بایست

درچرخان سنگین بما میآموزد که یك نیروی داده شده (بردار) میتواند شتابهای زاویه ای مختلفی را ایجاد نماید بسته باین که نیرو بکجا وارد شده وجهتش چه باشد ، نیروی وارده به لولای در نمیتواند هیچ شتاب زاویه ای ایجاد نماید درحالی که یك نیرو با بزرگی معین که بطور عمود برلبه خارجی درووارد شود ماکزیمم شتاب را ایجاد میکند .

درمورد دوران کمیت نظیر نیرو گشتاور نامیده میشود وما اکنون آنرا برای حالت خاص ذره واحدی که ازیك دستگاه مقایسه ماندی دیده میشود تعریف مینمائیم. سپس مفهوم گشتاور را به سیستم ذرات (که شامل اجسام سخت نیزمیباشد) تعمیم داده ونشان خواهیم داد که گشتاور بطور تفکیك ناپذیری مربوط به شتاب زاویه ای میباشد .

اگریك نیروی $\vec{F}$ بذره واحدی درنقطه P که مکانش نسبت به مبداء O دستگاه ماندی توسط بردار مکان $\vec{r}$ داده شده است اثر کند (شکل ۱-۱۱) ، گشتاور $\vec{\tau}$ وارده به ذره نسبت بمبداء O بر حسب تعریف عبارتست از

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (11-1)$$

گشتاور یك کمیت برداری میباشد . بزرگیش توسط

$$\tau = rF\sin\theta \qquad (11-2a)$$

داده میشود که درآن θ عبارت است از زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{F}$ وجهتش عمود برصفحه تشکیل شده از $\vec{r}$ و $\vec{F}$ میباشد . جهت آن توسط قاعده دست راست برای ضرب برداری دو بردار داده میشود ، یعنی اگر $\vec{r}$ رابطرف $\vec{F}$ باندازه زاویه کوچکتربین آنها باانگشتان خمیده دست راست بچرخانیم ، آنوقت جهت شست بازشده جهت $\vec{\tau}$ رامشخص میکند .

گشتاور دارای ابعاد نیرو ضرب درفاصله میباشد ، یابرحسب ابعاد اساسی فرض شده ما ، M ، L و T دارای ابعاد ML^2T^{-2} میباشد . اینها همان ابعاد کار میباشند . ولی البته گشتاور وکارکمیات فیزیکی کاملاً مختلفی میباشند . مثلاً گشتاور بردار بوده وکار اسکالر میباشد . واحد گشتاور ممکن است $lb\text{-}ft$ ، $nt\text{-}meter$ ویانظیر اینها باشد .

توجه کنید (معادله ۱-۱۱) که گشتاور ایجاد شده توسط یک نیرو نه فقط به بزرگی و جهت نیرو بستگی دارد بلکه همچنین به نقطه کاربرد نیرو نسبت به مبداء یعنی بردار $\vec{r}$ وابسته میباشد. بخصوص وقتی ذره p درمبداء باشد بطوریکه امتداد نیروی $\vec{F}$ ازمبداء بگذرد ، $\vec{r}$ برابر صفر بوده وگشتاور $\vec{\tau}$ حول مبداء صفرمیباشد .

بزرگی $\vec{\tau}$ (معادله ۱۱-۲a) راهمچنین میتوان بصورت

$$(11\text{-}2b) \qquad \tau = (r\sin\theta)F = Fr_\perp$$

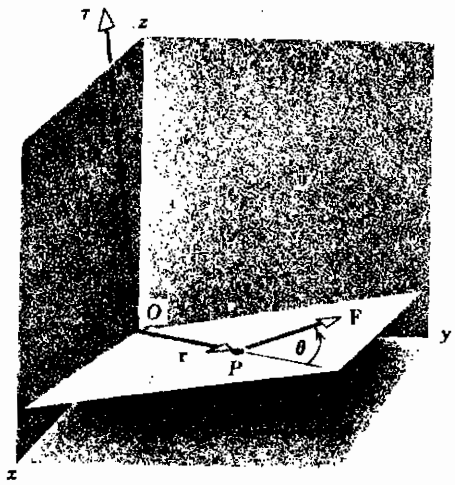
ویا

$$(11\text{-}2c) \qquad \tau = r(F\sin\theta) = rF_\perp$$

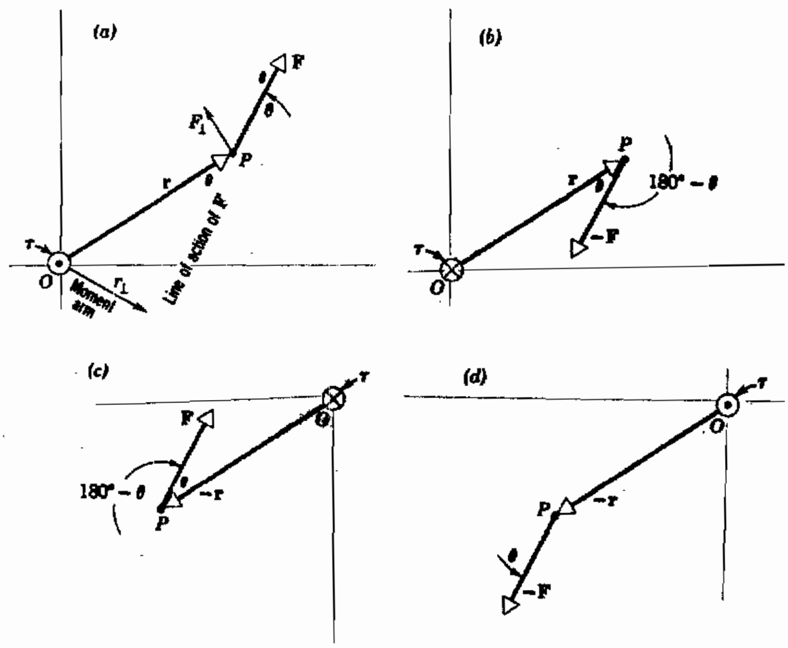
نوشت که درآن که شکل ۱۱-۲ نشان میدهد $r_\perp(=r\sin\theta)$ عبارت است ازمولفه $\vec{r}$ در امتداد عمود به خط اثر نیروی $\vec{F}$ و $F_\perp(=F\sin\theta)$ عبارت است ازمولفه $\vec{F}$ درامتداد عمود بر $\vec{r}$. گشتاور اغلب ممان نیرو نامیده شده و $r_\perp$ درمعادله ۱۱-۲b بازوی ممان نامیده میشود . معادله ۱۱-۲c نشان میدهد که فقط مولفه $\vec{F}$ که عمودبر $r_\perp$ است درگشتاور دخالت دارد . بخصوص وقتی که θ مساوی صفر یا ۱۸۰ باشد مولفه عمودی وجود ندارد $(F_\perp = F\sin\theta = 0)$ ، دراین حالت خط اثرنیروازمبداء گذشته وبازوی ممان $r_\perp$ حول محور نیز صفرمیباشد . دراین مورد هردو معادلات ۱۱-۲b و ۱۱-۲a نشان میدهند که گشتاور صفر است .

اگرجهت $\vec{F}$ راعوض کنیم (شکل ۱۱-۲b) بزرگی $\vec{\tau}$ تغییرنمیکند ولی جهت $\vec{\tau}$ عوض میشود . بهمین ترتیب اگرجهت $\vec{r}$ راعوض کنیم (شکل ۱۱-۲a) ودرنتیجه نقطه اثر $\vec{F}$ راعوض کنیم ، بزرگی $\vec{\tau}$ تغییرنمیکند ولی جهت $\vec{\tau}$ دوباره عوض میشود .

اگرمانند شکل ۱۱-۲d جهت هردو $\vec{r}$ و $\vec{F}$ راعوض کنیم آنوقت مقدار وجهت $\vec{\tau}$ ثابت میماند . این نتایج بطور رسمی ازاین حقایق نتیجه میشودکه : (۱) $\sin(180°-\theta) = \sin\theta$ و بنابراین معادله ۱۱-۲a برای بزرگی $\vec{\tau}$ بدون تغییرمیماند ، (۲) تعویض جهت یک بردار درضرب برداری ($\vec{F}$ یا $\vec{r}$) جهت حاصلضرب راعوض میکند و (۳) تعویض جهت هر دو



شکل ۱-۱۱- نیروی $\vec{F}$ برروی نقطه P که بردار مکانی $\vec{r}$ میباشد وارد میآید . بردار نیرو زاویه θ را با بردار مکان $\vec{r}$ میسازد . گشتاور بگرد نقطه O یعنی $\vec{\tau}$ نشان داده شده است . امتداد این گشتاور عمود است بر صفحه متشکل از دو بردار $\vec{F}$ و $\vec{r}$ وجهت آن از قانون دست راست تبعیت میکند .



شکل ۲-۱۱ - صفحه نشان داده شده ، صفحه متشکل از دو بردار $\vec{F}$ و $\vec{r}$ در شکل ۱-۱۱ میباشد .

(a) مقدار $\vec{\tau}$ هست $F r_\perp$ (معادله ۳b-۱۱) یا $r F_\perp$ (معادله ۳a-۱۱) . (b) معکوس کردن $\vec{F}$ جهت $\vec{\tau}$ را معکوس میکند . (c) معکوس کردن $\vec{r}$ جهت $\vec{\tau}$ را معکوس میکند . (d) معکوس کردن هم $\vec{F}$ وهم $\vec{r}$ جهت $\vec{\tau}$ را تغییر نمیدهد . جهات $\vec{\tau}$ نشان داده شده است بوسیله ⊙ (یعنی عمود برو در جهت خارج از صفحه ، علامتی که نوک یک پیکان را نمایش میدهد) وبوسیله ⊗ (یعنی عمود برو بطرف داخل صفحه ، علامتی که انتهای یک پیکان را نمایش میدهد) .

بردار درضرب برداری (هردو $\vec{r}$ و $\vec{F}$) جهت حاصلضرب رابدون تغییرنگه میدارد .
دانشجویان بایستی صحت جهات نشان داده شده $\vec{\tau}$ درشکل ۲-۱۱ رابابکار بردن قانون دست راست تحقیق کنند .

۳-۱۱ اندازه حرکت زاویه ای یک ذره

قبلاً دریافتیم که اندازه حرکت خطی درهنگام بحث درحرکت انتقالی یک ذره ویا سیستم ذرات (همچنین اجسام سخت) مفید میباشد . مثلا اندازه حرکت خطی دربرخوردها محفوظ میماند . برای یک ذره اندازه حرکت خطی عبارت است از $\vec{p} = m\vec{v}$ (معادله ۱-۸) وبرای یک سیستم ذرات عبارت است از $\vec{P} = M\vec{V}_{cm}$ (معادله ۳-۸) که درآن M جرم کلی سیستم و $\vec{V}_{cM}$ سرعت مرکزجرم آن میباشد . درحرکت دورانی چه چیزی قابل قیاس با اندازه حرکت خطی است ؟ مااین کمیت رااندازه حرکت زاویه ای نامیده ودرزیر آنرابرای حالت خاص یک ذره واحد تعریف میکنیم . سپس تعریف راوسیع تر مینمائیم تاشامل سیستم ذرات بشود ونشان خواهیم داد که اندازه حرکت زاویه ای آنطورکه آنرا تعریف کرده ایم ، همانقدر مفهوم مفیدی در حرکت دورانی است که اندازه حرکت خطی در حرکت انتقالی میباشد .

ذره ای بجرم m وباندازه حرکت خطی $\vec{p}$ رادرمکان $\vec{r}$ نسبت به مبداء O دریک دستگاه مقایسه ماندی (شکل ۳-۱۱) درنظر میگیریم. اندازه حرکت زاویه ای $\vec{l}$ ذره را نسبت به مبداء O بصورت

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (۱۱-۳)$$

تعریف میکنیم. اندازه حرکت زاویه ای یک بردار است وبزرگیش توسط

$$l = r\,p \sin\theta \qquad (۱۱-۴a)$$

داده میشود که درآن θ زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{p}$ وجهتش عمود برصفحه تشکیل شده توسط $\vec{r}$ و $\vec{p}$ میباشد . جهت آن توسط قانون دست راست داده میشود یعنی اگرشخصی باانگشتان خمیده دست راستش $\vec{r}$ رابطرف $\vec{p}$ (درجهت زاویه کوچکتر بین آنها) ببرد آنوقت شست بازشده راستش

متوجه جهت $\vec{l}$ میباشد .

همچنین میتوان بزرگی $\vec{l}$ رابصورت

$$(11\text{-}4b) \quad l=(r\sin\theta)p=pr_{\perp}$$

ویا

$$(11\text{-}4c) \quad l=r(p\sin\theta)=rp_{\perp}$$

نوشت که درآن $r_{\perp}(=r\sin\theta)$ عبارت است ازمولفه $\vec{r}$ عمود برخط اثر $\vec{p}$ و $p_{\perp}(=p\sin\theta)$ عبارت است ازمولفه $\vec{p}$ عمود بر $\vec{r}$. اندازه حرکت زاویه ای اغلب ممان اندازه حرکت (خطی) نامیده میشود و $r_{\perp}$ درمعادله b ۴-۱۱ اغلب بازوی ممان خوانده میشود . معادله ۴-۱۱ نشان میدهد که فقط مولفه ای از $\vec{p}$ که عمود بر $\vec{r}$ است در اندازه حرکت زاویه ای دخالت دارد . وقتی زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{p}$ برابر صفر یا ۱۸۰ باشد ، هیچ مولفه عمودی وجود نداشته است $p_{\perp}(=p\sin\theta=0)$ وآنوقت خط اثر $\vec{p}$ از مبداء میگذرد و $r_{\perp}$ نیزصفر میباشد . دراین مورد معادلات b ۴-۱۱ و c ۴-۱۱ هردونشان میدهند که اندازه حرکت زاویه ای l صفراست .

حال رابطه مهمی بین گشتاور واندازه حرکت زاویه ای رابدست میآوریم . دیده ایم که برای یک ذره $\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$. ازضرب برداری $\vec{r}$ بادو طرف این معادله نتیجه میشود

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

ولی $\vec{r}\times\vec{F}$ عبارت است ازگشتاور ، یاممان یک نیروحول O ، پس میتوان نوشت

$$(11\text{-}5) \quad \vec{\tau}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

سپس ازمعادله ۳-۱۱ مشتق میگیریم، بدین طریق داریم

$$\frac{d\vec{l}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$

حال مشتق یک ضرب برداری بهمان صورت ضرب معمولی گرفته میشود بااین فرق که نبایستی ترتیب جملات راعوض کنیم ، داریم

$$\frac{d\vec{l}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

ولی $d\vec{r}$ بردار جابجائی ذره درزمان t ها است بطوریکه $\frac{d\vec{r}}{dt}$ سرعت لحظه ای $\vec{V}$ ذره میباشد . همچنین $\vec{p}$ برابراست با $m\vec{V}$ بطوریکه معادله را میتوان باین شکل نوشت

$$\frac{d\vec{l}}{dt}=(\vec{V}\times m\vec{V})+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt})$$

حال $\vec{V}\times m\vec{V}=0$ است زیراضرب برداری دو بردار موازی صفرمیباشد . بنابراین

$$\frac{d\vec{l}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (11\text{-}6)$$

دقت درمعادلات ۵-۱۱ و ٦-۱۱ نشان میدهد که

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{l}}{dt} \qquad (11\text{-}7)$$

که بیان میکندکه میزان تغییرزمانی اندازه حرکت زاویه ای یك ذره برابر گشتاور واردبآن میباشد .

این نتیجه معادل دورانی معادله ۱-۸ است که بیان میکندکه میزان تغییرزمانی اندازه حرکت خطی یك ذره مساوی نیروی وارده بآن است یعنی $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$.

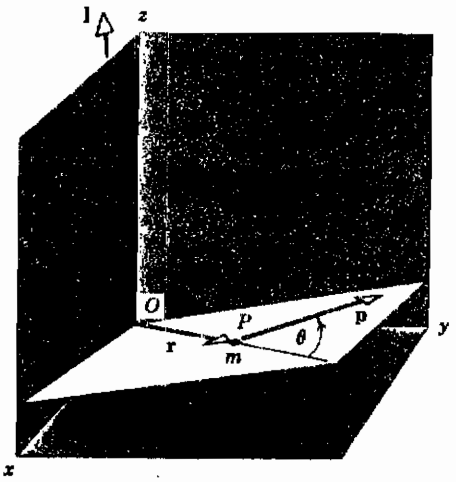
معادله ۷-۱۱ مثل هرمعادله برداری معادل سه معادله اسکالر میباشد یعنی

$$\tau_x=\left(\frac{dl}{dt}\right)_x \ , \ \tau_y=\left(\frac{dl}{dt}\right)_y \ , \ \tau_z=\left(\frac{dl}{dt}\right)_z \qquad (11\text{-}8)$$

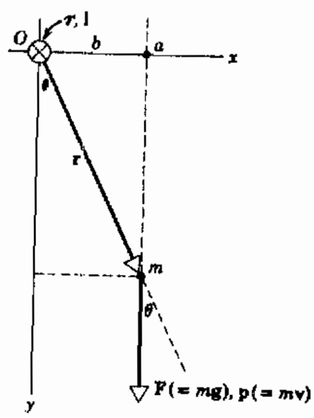
بنابراین مولفه x گشتاور وارده توسط مولفه x تغییراندازه حرکت زاویه ای درواحد زمان داده میشود نتایج شبیه این برای جهات x و y صادق میباشد .

<u>مثال ۱</u>

ذره ای بجرم m ازحال سکون درنقطه a ازشکل ٤-۱۱ رها میشود ، وبه موازات محور y (قائم) سقوط مینماید . (a) گشتاور وارده بـه m رادرهرلحظه t نسبت به مبداء O بدست آورید . (b) اندازه حرکت زاویه ای m رادرهرزمان t نسبت بهمین مبداء بدست آورید . (c) نشان دهیدکه رابطه $\vec{\tau}=\frac{d\vec{l}}{dt}$ (معادله ۷-۱۱) وقتی برای این مساله آشنا



شکل ٣-١١ ـ ذره‌ای بجرم m بابردار مکان $\vec{r}$ درنقطه P واقع بوده ودارای ممنتوم خطی $\vec{p}$ میباشد . بردار $\vec{p}$ زاویه θ را بابردار $\vec{r}$ میسازد . ممنتوم زاویه ای $\vec{l}$ نسبت به نقطه O نشان داده شده است . امتداد این بردارعمود است برصفحه متشکل از دوبردار $\vec{r}$ و $\vec{p}$ وجهت آن ازقانون دست راست تبعیت میکند .



شکل ٤-١١ ـ ذره ای بجرم m ازنقطه a سقوط میکند . گشتاور ممنتوم زاویه ای هردو عمود بر صفحه شکل بوده وجهات آنها همانطوریکه بوسیله علامت ⊗ نشان داده شده اند بطرف داخل صفحه شکل میباشند .

بکار رود نتیجه صحیحی میدهد . (a) گشتاور توسعه معادله ۱-۱۱ داده میشود یعنی $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ وبزرگیش عبارت است از

$$|\vec{\tau}|=rF\sin\theta$$

دراین مثال $r\sin=b$ و $F=mg$ بطوریکه

$$\tau=mgb=\text{مقدارثابت}$$

توجه کنید که گشتاور برابر ضرب نیرو (mg) دربازوی ممان (b) میباشد . قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{\tau}$ عمود برشکل بوده ومتوجه بداخل آن میباشد . (b) اندازه حرکت زاویه ای توسط معادله ۳-۱۱ داده میشود یعنی $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$ وبزرگیش برابر است با

$$l=rp\sin\theta$$

دراین مثال $r\sin\theta=b$ و $p=mv=m(gt)$ بطوریکه

$$l=mgbt$$

قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{l}$ عمود به شکل بوده ومتوجه بداخل آن میباشد . یعنی $\vec{l}$ و $\vec{\tau}$ بردارهای موازی میباشند . بردار $\vec{l}$ فقط بزرگیش بازمان تغییرمیکند وجهتش همواره دراین مورد یکسان باقی میماند .

(c) چون $d\vec{l}$ یعنی تغییر در $\vec{l}$ و $\vec{\tau}$ موازی هستند میتوان رابطه اسکالر

$$\tau=\frac{dl}{dt}$$

راجایگزین رابطه برداری $\vec{\tau}=\frac{d\vec{l}}{dt}$ نمود . بابکاربردن مقادیر τ و l از (a) و (b) بالا داریم

$$mgb=\frac{d}{dt}(mgbt)=mgb$$

که یك اتحاد است . بنابراین رابطه $\vec{\tau}=\frac{d\vec{l}}{dt}$ نتایج صحیحی دراین مورد ساده میدهد . در واقع اگر مقدار ثابت b را از دوجمله اول رابطه بالا حذف کنیم وبجای gt کمیت معادلش v را قرار دهیم داریم

$$mg=\frac{d}{dt}(mv)$$

چون $mv = p$ و $mg = F$ این همان نتیجه آشنای $F = \frac{dp}{dt}$ میباشد . بنابراین همانطور که قبلا " تصریح کردیم روابطی مثل $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ اگرچه اغلب بسیار مفید ند ولی فرضهای اساسی جدیدی در مکانیك کلاسیك نمیباشند بلکه قوانین نیوتن برای حرکت دورانی رابصورت جدیدی بیان میکنند . توجه کنید که مقادیر $\vec{\tau}$ و l بستگی به مبداء اختیار شده یعنی b دارند . بخصوص اگر $b = 0$ باشد آنوقت داریم

$$\vec{\tau} = 0 \quad , \vec{l} = 0$$

٤-۱۱ سیستمهای ذرات

تاکنون فقط از ذرات واحد صحبت نمودیم. حال سیستمی از ذرات را درنظر میگیریم. برای محاسبه اندازه حرکت زاویه ای کلی سیستم ذرات ($\vec{L}$) حول یك نقطه معین بایستی اندازه حرکتهای زاویه ای تك تك ذرات سیستم حول این نقطه رابایکدیگر جمع برداری نمائیم . بـــرای سیستمی که شامل n ذره باشد داریم

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i$$

که درآن جمع (برداری) رویتمام ذرات سیستم انجام میشود .

بامرورزمان اندازه حرکت زاویه ای کلی $\vec{L}$ سیستم حول نقطه ثابت مورد مراجعه (کـــه در تعریف اصلی $\vec{l}$ درمعادله ۳-۱۱ طوری اختیار شده که مبداء دستگاه مقایسه ماندی باشـــد) ممکن است تغییر کند . این تغییر $\frac{d\vec{L}}{dt}$ از دومنبع ممکن است ناشیشود :(۱) گشتاورهای وارده برذرات سیستمتوسط نیروهای داخلی بین ذرات و (۲) گشتاورهای وارده برذرات سیستم توسط نیروهای خارجیاگرقانون سوم نیوتن درشکل باصطلاح قوی خود صادق باشدیعنی اگـــر نیروهای بین هردو ذره نه فقط مساوی وخلاف جهت یکدیگر باشندبلکه همچنین روی خط واصـل بین دوذره باشندآنوقت گشتاور کلی داخلی صفرمیباشد زیراگشتاور حاصله ازهرجفت نیروی عمـل وعکس العمل داخلی صفراست .

بنابراین منبع اول هیچ دخالتی ندارد . پس برای نقطه مورد مراجعه مافقط منبع دوم باقی

میماند ومیتوان نوشت

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۱-۹)$$

که درآن $\vec{\tau}_{ext}$ معرف مجموع تمام گشتاورهای خارجی وارده به سیستم میباشد . میتوان گفت میزان تغییر زمانی اندازه حرکت زاویه ای کلی یك سیستم ذرات حول مبداء دستگاه مقایسه ماندنی برابرمجموع گشتاورهای خارجی واردبه سیستم میباشد . بعد درمواردیکه احتمال بوجودآمدن اشتباه نباشدبرای سهولت اندیس را در $\vec{\tau}_{ext}$ حذف میکنیم.

معادله ۹-۱۱ تعمیم معادله ۷-۱۱ برای تعدادی ذره میباشد . وقتی فقط یك ذره داشته باشیم ، نیروها ویاگشتاورهای داخلی وجود ندارند . این رابطه (معادله ۹-۱۱) هم درحالتی که ذرات تشکیل دهنده سیستم نسبت بهم درحرکت هستند وهم درموردی که رابطه مکانی ثابتی دارند (مثل یك جسم سخت) صادق است .

معادله ۹-۱۱ برای حرکت دورانی شبیه معادله ۱۵-۸ برای حرکت انتقالی است

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۸-۱۵)$$

که بما میگوید برای یك سیستم ذرات (جسم یاغیرسخت) ، نیروی منتجه خارجی واردبه سیستم مساوی میزان تغییر زمانی اندازه حرکت خطی سیستم میباشد .

معادله ۹-۱۱ که باین طریق بدست آورده ایم وقتی صادق است که $\vec{\tau}$ و $\vec{L}$ نسبت به مبداء دستگاه مقایسه ماندنی اندازه گرفته شوند . ممکن است پرسیده شود که آیا این رابطه وقتی که این دوبردار نسبت بیك نقطه دلخواه (مثلاً ذره بخصوصی) درسیستم درحال حرکت درنظرگرفته شوند بازهم صادق است یانه ؟ بطورکلی این چنین نقطه ای وقتیکه جسم یاسیستم ذرات انتقال پیداکرده ،غلتیده ویاترکیبش تغییرمیکند بطرزپیچیده ای حرکت میکند ورابطه ۹-۱۱ برای چنین مورد مراجعه ای بکارنمیرود . ولی البته اگر نقطه مورد مراجعه رامرکزجرم سیستم انتخاب کنیم ،حتی اگر این نقطه دردستگاه مقایسه ما ثابت نباشدبازهم معادله ۹-۱۱ صادق است. این خاصیت قابل ملاحظه ای دیگری ازمرکز جرم میباشد . بنابراین میتوان حرکت کلی یك سیستم ذرات رابه

حرکت انتقالی مرکزجرمش (معادله ۵-۱۱) وحرکت دورانی حول مرکزجرمش (معادله ۹-۱۱) تفکیك نمود .

۵-۱۱ انرژی جنبشی دوران واینرسی دورانی

حال توجه خود را معطوف به حالت خاص مهمی ازسیستم ذرات یعنی یك جسم سخت مینمائیم . دریك جسم سخت ذرات سیستم همیشه مکانهای ثابتی رانسبت به یکدیگر حفظ مینمایند . برای مطالعه دوران یك جسم سخت ابتدا حالت خاصی راکه اغلب با آن مواجه میشویم درنظر میگیریم . این مورد حالتی است که محوردوران نسبت بیك دستگاه مقایسه ماندی ثابت است .

حال فرض میکنیم که جسم سختی باسرعت زاویه ای ω حول محوریکه نسبت بیك دستگاه ماندی بخصوصی ثابت است دوران کند (مثل شکل ۱-۱۵) . هرذره این جسم درحال دوران مقدارمعینی انرژی جنبشی دارد . هرذره بجرم m که درفاصله r ازمحور دوران قراردارد ، برروی دایره ای بشعاع r باسرعت زاویه ای ω حول این محورحرکت میکندودارای سرعت خطی $v=r\omega$ میباشد . بنابراین انرژی جنبشی اش برابر $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ میباشد . انرژی جنبشی کلی جسم برابرمجموع انرژی جنبشی های ذراتش میباشد .

اگرجسم همانطورکه دراین بخش فرض کردیم سخت باشد ، ω برای تمام ذرات یکی است ولی شعاع r ممکن است برای ذرات مختلف متفاوت باشد بنابراین انرژی جنبشی کلی K جسم درحال دوران رامیتوان بصورت

$$K=\frac{1}{2}\left(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2$$

نوشت . جمله $\sum m_ir_i^2$ عبارت است ازمجموع حاصلضربهای جرم ذرات درمجذور فاصله نسبی شان از محوردوران . اگراین کمیت را با I نشان دهیم آنوقت

$$I=\sum m_ir_i^2 \qquad (11\text{-}10)$$

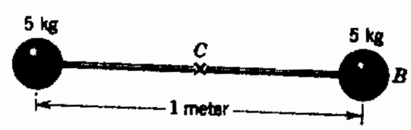
اینرسی دورانی یاممان اینرسی جسم نسبت بمحور دوران‌بخصوص نامیده‌میشود . توجه کنید که اینرسی دورانی یك جسم به محوردوران ، شکل ونحوه توزیع جرم جسم بستگی دارد . اینرسی دورانی دارای‌ابعاد ML^2 بوده ومعمولا به $kg-m^2$ یا $slug-ft^2$ بیان میشود .

درحال انرژی جنبشی یك جسم سخت درحال دوران رامیتوان برحسب اینرسی دورانی بشکل

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (۱۱-۱۱)$$

نوشت . این شبیه عبارت $K = \frac{1}{2}MV^2$ برای‌انرژی جنبشی انتقالی یك جسم میباشد . قبلا" دیده ایم که سرعت زاویه ای ω قابل قیاس‌باسرعت خطی V میباشد . حال ملاحظه میکنیم که اینرسی دورانی I شبیه جرم ویااینرسی انتقالی M میباشد . اگر چه جرم یك جسم بستگی به مکانش ندارد ولی اینرسی دورانی یك جسم بستگی دارد بمحوری که حول آن دوران مینماید .

بایستی توجه کنیم‌که انرژی جنبشی دورانی که توسط معادله ۱۱-۱۱ داده میشود درحقیقت مجموع انرژی های جنبشی تمام اجزاء جسم بوده ونوع جدیدی ازانرژی نیست. انرژی جنبشی دورانی درحقیقت‌راه مناسبی است‌برای بیان انرژی جنبشی یك جسم سخت درحال دوران .



شکل ۱۱-۵ ـ مثال ۲ . محاسبه ممان اینرسی یك دمبل .

مثال ۲

جسمی را درنظر میگیریم که از دو جرم کروی تشکیل شده است . جرم هریک ازاین کـــرات $5/0\ kg$ بوده واین دو کره بوسیله میله سختی بطول ۱/۰ متربهم متصل میباشنـــــد (شکل ۵-۱۱) . اینرسی دورانی (یاممان اینرسی) جسم رادرحالات زیرپیدا کنید . (a) حول محوری عمود برآن که ازمرکز G میگذرد ، (b) حول محوری عمود برآن که ازمرکزیکی ازکـــرات میگذرد .

(a) اگرمحورعمود برصفحه کاغذ بوده واز G بگذرد داریم

$$I_G = \sum m_i r_i^2 = m_a r_a^2 + m_b r_b^2$$

$$=(5/0\ kg)(0/50\ meter)^2 + (5/0\ kg)(0/50\ meter)^2 = 2/5\ kg-m^2$$

(b) اگرمحورعمود برصفحه کاغذ بوده از A یا B بگذرد داریم .

$$I_A = m_a r_a^2 + m_b r_b^2$$

$$I_A = (5/0\ kg)(0\ meter)^2 + (5/0\ kg)(1/0\ meter)^2 = 5/0\ kg-m^2$$

$$I_B = m_a r_a^2 + m_b r_b^2$$

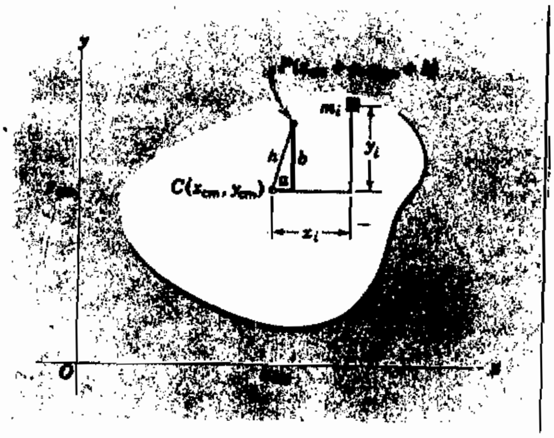
$$=(5/0\ kg)(1/0\ meter)^2 + (5/0\ kg)(0\ meter)^2 = 5/0\ kg-m^2$$

بنابراین اینرسی دورانی این مدل دمبل مانند سخت حول محوری که ازیك انتهایش گذشته باشد دو برابرممان اینرسی حول محوری است که ازمرکزش گذشته باشد .

برای جسمی که ازجرم های نقطه ای تشکیل نشده وتوزیع ماده آن پیوسته است جمع کردن در $I = \sum m_i r_i^2$ به انتگرال گیری تبدیل میشود . جسمی را درنظر میگیریم که بـــه اجزاء بینهایت کوچکی ، هرکدام بجرم dm تقسیم شده باشد . فرض کنیم که r فاصله این عنصر جرم ازمحوردوران باشد . آنوقت اینرسی دورانی ازرابطه

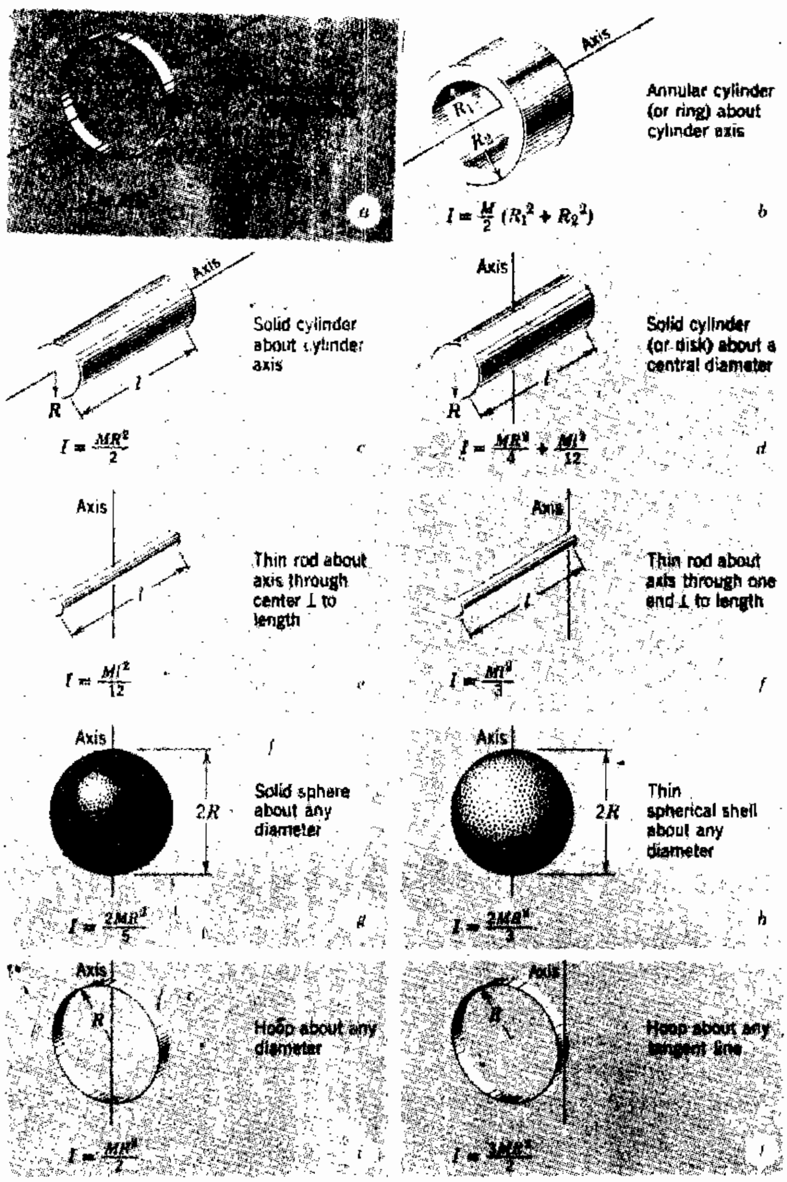
$$I = \int r^2\, dm \qquad (11\text{-}12)$$

بدست میآید که درآن انتگرال روی تمام جسم گرفته شده است. طریقه ای که بوسیله آن عمل جمع کردن $\sum$ برای توزیع انفصالی به انتگرال $\int$ برای توزیع اتصالی تبدیل میشود همان است که درمورد مرکزجرم در بخش ۱-۸ مورد بحث قرارداده ایم.



شکل ۶-۱۱ - اثبات قضیه محورهای موازی . اگر ممان اینرسی راحول محوری که ازنقطه C میگذرد بدانیم میتوانیم ممان اینرسی را به گرد محوردیگری که باآن موازیست محاسبه کنیم.

جدول ١-١١


a
Axis
R_1
R_2
Annular cylinder (or ring) about cylinder axis
$I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
b
Axis
R
l
Solid cylinder about cylinder axis
$I = \frac{MR^2}{2}$
c
Axis
R
l
Solid cylinder (or disk) about a central diameter
$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$
d
Axis
l
Thin rod about axis through center ⊥ to length
$I = \frac{Ml^2}{12}$
e
Axis
l
Thin rod about axis through one end ⊥ to length
$I = \frac{Ml^2}{3}$
f
Axis
$2R$
Solid sphere about any diameter
$I = \frac{2MR^2}{5}$
g
Axis
$2R$
Thin spherical shell about any diameter
$I = \frac{2MR^2}{3}$
h
Axis
R
Hoop about any diameter
$I = \frac{MR^2}{2}$
i
Axis
R
Hoop about any tangent line
$I = \frac{3MR^2}{2}$
j

برای اجسامی با شکل غیرمشخص محاسبه انتگرال ممکن است بسیار مشکل باشد . برای اجسامی که شکل هندسی ساده ای دارند محاسبه اگر محور دوران محورتقارن جسم انتخاب شود محاسبه انتگرال نسبتاً ساده خواهد بود .

اینرسی های دورانی چند جسم جامد حول محورهای بخصوصی با وزن مخصوص یکنواخت در جدول ۱-۱۱ خلاصه شده است . هرکدام ازاین نتایج را میتوان بوسیله انتگرال گیری بدست آورد . جرم کلی هرجسم در هرمعادله با M مشخص شده است . یک رابطه ساده وبسیار مفیدی بین اینرسی دورانی I یک جسم حول یک محور اینرسی دورانی اش I_{cm} نسبت به محوری که ازمرکز جرم میگذرد وجود دارد . اگر M جرم کلی جسم و h فاصله بین دومحورباشد ، این رابطه عبارت است از

$$I = I_{cm} + Mh^2 \qquad (۱۱-۱۳)$$

اثبات این رابطه (قضیه محورهای موازی) بطرین زیراست. فرض کنیم C مرکزجرم یک جسم به شکل غیرمشخص باشد که مقطعش درشکل ۱۱-٦ نشان داده شده است. مرکزجرم دارای مختصات x_{cm} و y_{cm} میباشد . صفحه $x-y$ راطوری اختیارمیکنیم که شامل C باشد وبنابراین z_{cm} مساوی صفرمیباشد . محوری رادرنظر میگیریم که از C گذشته وعمود به صفحه کاغذ باشد ومحور دیگری راموازی باآن درنظر میگیریم که ازنقطه P واقع در $(x_{cm}+a)$ و $(y_{cm}+b)$ بگذرد . فاصله بین محورها برابر $h=\sqrt{a^2+b^2}$ میباشد . آنوقت مربع فاصله یک ذره ازمحور گذرنده از C برابراست با $(x_i^2+y_i^2)$ که درآن x_i و y_i مقدارمختصات جزء جرم m_i نسبت به محورگذرنده از C میباشد . مربع فاصله این ذره ازمحوری که از P گذشته است برابر $(x_i-a)^2+(y_i-b)^2$ میباشد . پس اینرسی دورانی حول محوری که از P گذشته است برابراست با

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i\left[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2\right] \\ &= \sum m_i(x_i^2+y_i^2) - 2a\sum m_i x_i - 2b\sum m_i y_i \\ &\quad + \sum (a^2+b^2) m_i \end{aligned}$$

ازروی تعریف مرکزجرم داریم :

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$$

بنابراین دو جمله وسطی صفرمیباشند . جمله اول عبارت است ازاینرسی دورانی حول محوریکه از مرکز جرم گذشته است یعنی I_{cm} وجمله آخر برابر Mh^2 میباشد . پس نتیجه میشود که

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

باکمک این فرمول چند نتیجه جدول ۱-۱۱ رامیتوان از نتایج قبلی بدست آورد . مثلاً باکمک ۲-۱۱ (f) از (e) و (j) از (k) نتیجه میشود .

۶-۱۱ دینامیک دورانی جسم سخت

دراین قسمت حالت خاصی رامطالعه میکنیم که درآن جسم سخت محدود بدوران حول یک محور ثابت دریک دستگاه ماند یاست . ابتدامفهوم گشتاور وارد به چنین جسم سختی رامرورنموده وسپس نشان خواهیم داد که چگونه گشتاور به شتاب زاویه ای جسم حول این محور مربوط است.

فرض کنیم یک گشتاور $\vec{\tau}$ بیکی ازذرات جسم سخت واردکنیم . چون تمام ذرات یک جسم واقعاً سخت وضعیت مکانی ثابتی رانسبت به ذرات دیگرسازنده جسم حفظ میکنند میتوان گفت که گشتاور به کل جسم سخت اثر میکند . بطورکلی بردار $\vec{\tau}$ درامتداد محوریکه جسم آزادانه میتواند حول آن دوران کند نمیباشد . دراین قسمت گشتاورهای وارده بجسم مورد نظر نیستند . بلکه فقط مولفه های این گشتاورهاکه درامتداد محورقراردارند مورد نظر میباشند . فقط این مولفه هـا میتوانند باعث دوران جسم حول این محور گردند . مولفه های گشتاور که عمود برمحورهستند مایلند که محور را ازمکان ثابتش بچرخانند . ولی مابخصوص فرض کرده ایم که محورجهت ثابتی راحفظ کند . مثلاً ممکن است جسم به میله ای متصل باشدکه بوسیله یاتاقانهائی که دردوانتهایش قراردارند در وضع ثابتی است . اگرگشتاور وارده مولفه ای عمود به میله داشته باشدکه مایل به چرخاندن آن است ، یاتاقانها بطور اتوماتیک گشتاوری مساوی ودرخلاف جهت به میله وارد میکنند واثراین مولفه

راخنثی مینمایند .

درشکل ۷-۱۱ (باشکل ۲-۱۱ مقایسه کنید) مقطعی ازیك جسم سخت رانشان داده ایم که میتواند آزادانه حول محور z دریك دستگاه مقایسه ماندی دوران کند . یك نیروی $\vec{F}$ که برای سهولت در (یاموازی با) صفحه $x-y$ مقطع اختیارمیشود ، برذره ای واقع درنقطه p از جسم اثر میکند وضعیت نسبت به محوردوران (محور z) بابردار $\vec{r}$ تعریف شده است. میتوان گفت که گشتاور وارده برذره واقع در p برتمام جسم وارد میشود وتوسط معادله ۱-۱۱ داده میشود .

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

چون $\vec{r}$ و $\vec{F}$ طوری انتخاب شده اند که درصفحه موازی صفحه $x-y$ باشند ، گشتاور $\vec{\tau}$ درامتداد محور z میباشد . قانون دست راست نشان میدهد که گشتاور بطرف خارج وعمودبر صفحه شکل ۷-۱۱ است . اگر $\vec{r}$ و $\vec{F}$ درصفحه شکل قرارنداشته باشند ، $\vec{\tau}$ به موازات محور z نبوده ودراینجا فقط مولفه ای از $\vec{\tau}$ رادرنظرمیگیریم که درامتداد این محورباشد . بزرگی $\vec{\tau}$ توسط معادله ۲-۱۱ داده میشود یعنی

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

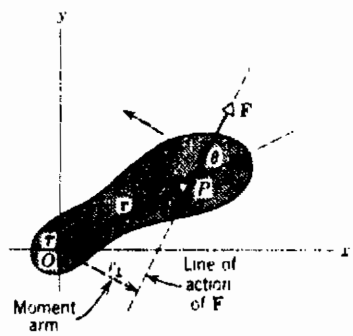
که همانطورکه دیده ایم میتواند بصورت $\tau = rF_{\perp}$ یا $\tau = r_{\perp}F$ نیزنوشته شود .

<u>مثال ۳</u>

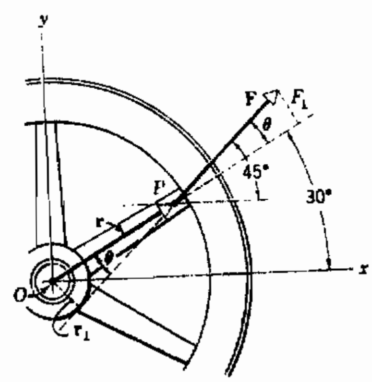
یك چرخ واگن آزاد است که حول یك محورافقی که از O میگذرد دوران کند . یك نیروی ۱۰ پوندی به پره چرخ درنقطه P واقع درفاصله ۰/۱ فوتی ازمرکزوارد میشود . OP زاویه ۳۰° باافق (محور x) میسازد ونیرو درصفحه چرخ بوده زاویه ۴۵° باافق (محور x) میسازد . گشتاور وارده بچرخ چقدراست ؟

زاویه بین بردار جابجائی $\vec{r}$ از O تا P ونیروی $\vec{F}$ (شکل ۸-۱۱) برابر θ است . که درآن

$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$



شکل ۷-۱۱ ـ نیروی $\vec{F}$ برروی ذره P واقع در یک جسم صلب وارد آمده وبگرد محوری که ازنقطه O گذشته وبرصفحه شکل عمود است گشتاور $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ رابرجسم صلب وارد میآورد . فاصله $r_\perp$ وگشتاور $\vec{\tau}$ که جهت آن خارج ازصفحه شکل است نیز نشان داده شده اند .



شکل ۸-۱۱ ـ مثال ۳ .

پس بزرگی گشتاور برابراست با

$$\tau = r.F\sin\theta$$

$$= (1/0\ ft)(10\ lb)(\sin 15^\circ) = 2/6\ ft\text{-}lb$$

واضح است که میتوان همین نتیجه را از روی $\tau = rF_{\perp}$ یا $\tau = Fr_{\perp}$ بدست آورد (معادلات ۲-۱۱ را ملاحظه کنید) گشتاور $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ برداری است درامتداد محوری که از O میگذرد . این بردار متوجه بطرف خارج بوده و دارای بزرگی $1/6\ ft\text{-}lb$ میباشد .

حال رابطه بین گشتاور وارد به جسم سخت شکل ۷-۱۱ و شتاب زاویه ای جسم را مورد بررسی قرار میدهیم . فرض کنیم که جسم سخت را در زمان بینهایت کوچک dt که درحین آن جسم باندازه زاویه بینهایت کوچک $d\theta$ دوران میکند مشاهده کنیم . قبلاً دیده ایم که میتوان دوران یک جسم سخت حول یک محورثابت رابوسیله حرکت نقطه واحد وثابتی درجسم (مانند نقطه P در شکل ۷-۱۱) شرح داد . برای سهولت ازخود جسم درشکل ۶-۱۱ صرفنظر نمود موتوجه خود را معطوف به نقطه برگزیده شده P وبردار $\vec{r}$ که موقعیت نقطه P رانسبت به محور دوران مشخص میکند مینمائیم . درطی زمان dt که جسم باندازه زاویه بینهایت کوچک $d\theta$ دوران میکند . نقطه P فاصله بینهایت کوچک ds رادرروی دایره ای بشعاع r طی میکند بطوریکه درآن

$$ds = r\,d\theta$$

کار dW انجام شده توسط این نیرو درحین این دوران کوچک برابراست با

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (|\vec{F}|\cos\varphi)ds = (F\cos\varphi)(r\,d\theta)$$

که درآن $F\cos\varphi$ مولفه $\vec{F}$ درجهت $d\vec{s}$ است .

جمله $r\,(F\cos\varphi)$ عبارت است ازبزرگی گشتاور لحظه ای وارده توسط $\vec{F}$ روی جسم سخت حول محورعمود به کاغذ که از O گذشته است بنابراین میتوان نوشت

$$dW = \tau\,d\theta \qquad (11\text{-}14)$$

این رابطه دیفرانسیل برای کارانجام شده درد وران (حول محورثابتی) معادل رابطه $dW = F\,dx$ برای کارانجام شده درانتقال (درامتداد خط مستقیم) میباشد .

برای بدست آوردن میزانی که کار در حرکت دورانی حول محور ثابتی انجام میشود دو طرف معادله ٤ ۱-۱ ۱ را به فاصله زمانی بینهایت کوچک dt که حین آن جسم باندازه $d\theta$ جابجا شده است تقسیم میکنیم. بدینطریق خواهیم داشت

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

یا

$$P = \tau \omega$$

که توان لحظه ای P را میدهد . این عبارت آخر معادل دورانی $P = FV$ برای حرکت انتقالی درامتداد خط مستقیم میباشد .

حال اگر تعدادی نیروی $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ وغیره به جسمی در صفحه عمود برمحور دورانش وارد شوند کار انجام شده توسط این نیروها روی جسم در دوران کوچک $d\theta$ مساوی خواهد بود با

$$dW = (F_1 \cos\varphi_1) r_1 d\theta + (F_2 \cos\varphi_2) r_2 d\theta + \cdots$$
$$= (\tau_1 + \tau_2 + \cdots) d\theta = \tau d\theta$$

که درآن $r_1 d\theta$ مساوی dS_1 یعنی جابجائی نقطه ای که برآن نیروی $\vec{F_1}$ وارد میشود ، φ_1 زاویه بین $\vec{F_1}$ و $\vec{dS_1}$ میباشد وغیره و τ بزرگی مولفه گشتاور منتجه درامتداد محور گذرنده از O است . درمحاسبه این مجموع هرگشتاور مثبت یا منفی است بسته باینکه گشتاور بتنهائی درچه جهتی راحول محورش بدوران وادارد . میتوان بطوراختیاری گشتاور مربوط بیک نیرو را مثبت خواند درصورتیکه اثراین نیروبتنهائی ایجاد یك دوران درخلاف جهت عقربه های ساعت بنماید وگشتاور رامنفی خواند درصورتیکه ایجاد یك دوران درجهت حرکت عقربه های ساعت نماید .

درداخل یك جسم حقیقتا" سخت حرکت داخلی ذرات وجود ندارد . ذرات همواره وضعیت ثابتی رانسبت بیکدیگر حفظ میکنند وتنها حرکتشان حرکت کلی جسم است . ازاین رونمیتواند درداخل یك جسم حقیقتا" سخت اتلاف انرژی وجود داشته باشد . بنابراین میتوان میزان کاری راکه روی جسم انجام میشود معادل میزان ازدیاد انرژی جنبشی آن قرارداد . میزانی که کارروی جسم سخت انجام

میشود برابراست با

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega \qquad (11-10)$$

میزانی که انرژی جنبشی جسم سخت اضافه میگرد دبرابراست با

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$$

ولی I مقدار ثابتی است زیراجسم سخت بوده ومحورثابت میباشد پس

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}(\omega^2) = I \omega \frac{d\omega}{dt} = I \omega \alpha \qquad (11-16)$$

بامساوی قراردادن جملات طرف راست معادلات ۱۱-۱۰ و۱۱-۱٦ خواهیم داشت

$$\tau \omega = I \alpha \omega$$

ویا

$$\tau = I \alpha \qquad (11-17)$$

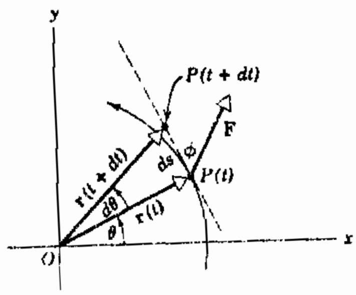
دربدست آوردن معادله ۱۱-۱۷ $\tau = I\alpha$ ، فرم اسکالر قانون دوم نیوتن $F = Ma$ راکه برای حرکت مستقیم الخط معتبر است بفرم مناسب برای حرکت دورانی درآورده ایم. ایـــن نشان میدهد که همانطورکه نیرو راباشتاب خطی جسم مربوط میکنیم میتوانیم گشتاور راباشتاب زاویه ای جسم (حول محورمعینی) ربط دهیم. اینرسی دورانی I عبارت است ازاندازه مقاومتی که جسم رامقابل تغییرحرکت دورانیش توسط گشتاور معینی نشان میدهد ، درست همانطور که اینرســـی انتقالی یاجرم M عبارت است ازاندازه مقاومتی که جسم در مقابل تغییرحرکت انتقالیش توسط یك نیرو نشان میدهد .

درجدول ۱۱-۲ حرکت انتقالی یك جسم سخت درامتداد خط مستقیم راباحرکت دورانـی جسم سختی حول یك محورثابت مقایسه کرده ایم .

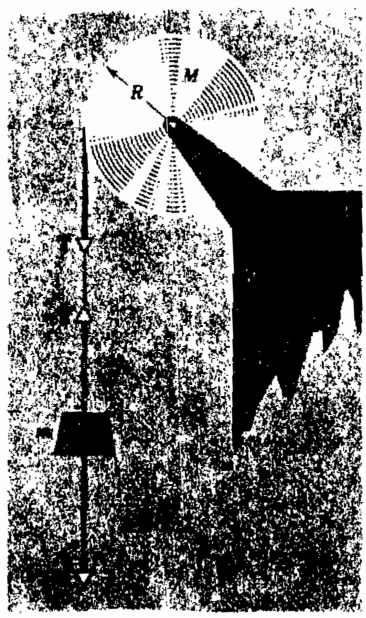
جدول ۲-۱۱

حرکت مستقیم‌الخط		دوران حول محور ثابت	
جابجائی	x	جابجائی زاویه‌ای	θ
سرعت	$V=\frac{dx}{dt}$	سرعت زاویه‌ای	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
شتاب	$a=\frac{dV}{dt}$	شتاب زاویه‌ای	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$
جسم	M	اینرسی دورانی	I
نیرو	$F=Ma$	گشتاور	$\tau=I\alpha$
کار	$W=\int F\,dx$	کار	$W=\int \tau\,d\theta$
انرژی جنبشی	$\frac{1}{2}MV^2$	انرژی جنبشی	$\frac{1}{2}I\omega^2$
توان	$P=FV$	توان	$P=\tau\omega$
اندازه حرکت خطی	MV	اندازه حرکت زاویه‌ای	$I\omega$

دوران یک جسم سخت حول یک محور ثابت (که برای آن $\tau=I\alpha$ صادق است) کلی ترین نوع حرکت دورانی نیست زیرا ممکن است جسم سخت نبوده ویا محوردریک دستگاه ماندی ثابت نباشد . دراین حالت کلی معادله ۹-۱۱ یا $\vec{\tau}_{ext}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ صادق میباشد . همانطورکه قبلاً خاطرنشان کرده ایم این رابطه معادل قانون دوم نیوتن برای حرکت کلی انتقالی یک سیستم ذرات یعنی معادله ۱۰-۸ یا $\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ میباشد . دربقیه این فصل خودرامحدودبه دوران جسم سخت حول محورثابت مینمائیم.



شکل ۹-۱۱ - درمدت زمان dt نقطه p واقع درجسم صلب شکل ۷-۱۱ باندازه فاصله ds درامتداد قوسی بشعاع r حرکت میکند . دراین مدت جسم صلب (که نشان داده نشده) وبردارمکان نقطه p یعنی $\vec{dr}$ باندازه زاویه $d\theta$ دوران میکنند .



شکل ۱۰-۱۱ - مثال ۴ . نیروی $\vec{T}$ بطرف پائین دوران دیسک رابوجود میآورد .

مثال ۵- دراینجاعامل نیروی $\vec{T}$ وزنه ای بجرم m است .

مثال ٤

یك دیسك متشابه بشعاع R وجرم M رویمحوری نصب شده است که روی یاتاقانهای بدون اصطکاکی قرار دارد (شکل ۱۰-۱۱) . یك ریسمان سبك دور کناره چرخ پیچیده شده ونیك کشش یکنواخت $\vec{T}$ بطرف پائین بریسمان وارد میشود . شتاب زاویه ای چرخ وشتاب مماسی یك نقطه کناره راپیدا کنید .

گشتاور حول محور مرکزی برابر است با $\tau = TR$ واینرسی دورانی دیسك حول محور مرکزیش برابر $I = \frac{1}{2}MR^2$ میباشد از

$$\tau = I\alpha$$

داریم

$$TR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha$$

یا

$$\alpha = \frac{2T}{MR}$$

اگرجرم دیسك برابر $M = ۰/۲۰\ slug$ وشعاعش $R = ۰/۵۰\ ft$ ونیروی $T = ۱/۰\ lb$ اختیار شودآنوقت

$$\frac{(۲)(۱/۰\ lb)}{(۰/۲۰\ slug)(۰/۵۰\ ft)} = ۲۰\ rad/sec^2$$

شتاب مماسی یك نقطه کناره توسط

$$r\alpha = a = (۲۰\ rad/sec^2) \times (۰/۵۰\ ft) = ۱۰\ ft/sec$$

داده میشود .

مثال ه

فرض کنیم د رساله قبلی جسمی بجرم m رااز ریسمان آویخته ایم. شتاب زاویه‌ای دیسك وشتاب مماسی یك نقطه کناره . راد راین مورد پید اکنید .

حال فرض کنیم $\vec{T}$ کشش ریسمان باشد . چون جسم معلق بطرف پائین شتاب خواهـــد داشت ،بزرگی نیروی بطرف پائین ثقل یعنی mg بایستی ازبزرگی کشش بطرف بالا ی ریسمـان یعنی $\vec{T}$ بزرگتر باشد . شتاب a جسم معلق همان شتاب مماسی یك نقطه از کناره دیســك میباشد . ازقانون دوم نیوتن

$$mg - T = ma$$

گشتاور منتجه که برد یسك اثرمیکند برابر TR وپانرسی دورانی آن برابر $\frac{1}{2}MR^2$ است بطوریکه از

$$\tau = I\alpha$$

بدست میآوریم

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

بابکاربردن رابطه $a = R\alpha$ میتوان این معادله آخر رابشکل

$$2T = Ma$$

نوشت. باحل همزمان معادلات اول وآخر داریم

$$a = \left(\frac{2m}{M+2m}\right)g$$

و

$$T = \left(\frac{Mm}{M+2m}\right)g$$

اگرمانند قبل جرم $M = 0/20\ slug$ وشعاع $R = 0/50\ ft$ فرض شود ووزن جسم معلق برابر $1/0\ lb$ قرارد هیم خواهیم داشت

$$a = \frac{2\,mg}{M + 2m} = \frac{(2)(1.0\ lb)}{(0.20\ slug) + (+2)(1/32\ slug)} = 7.6\ ft/sec^2$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{(7.6\ ft/sec^2)}{0.50\ ft} = 15\ rad/sec^2$$

توجه کنید که شتابهابرای جسم معلق یك پوند ی کمترازشتابها برای یك کشش یکنواخت یك پوند ی برریسمان است(مثال ٤) . این مربوط باین حقیقت است که گشتاور ناشی ازکشش ریسمان حالا کمتر از $1/0\ lb$ میباشد یعنی

$$T' = \frac{M\,mg}{M + 2m} = \frac{(0.20\ slug)(1.0\ lb)}{(0.20 + 20/32)\ slug} = 0.76\ lb$$

اگرقرار باشد که جسم بطرف پائین شتاب یابدبایستی کشش درریسمان کمتراز وزن جسم معلق باشد

<u>مثال ٦</u>

رابطه $L = I\omega$ نشان داده شده درجدول ۲-۱۱ رابرای اندازه حرکت زاویه ای یك جسم سخت که محدود به دوران حول محور ثابتی میباشدبدست آورید .

باشروع ازرابطه اسکالر $\tau = I\alpha$ وتعریف $\alpha \left(= \frac{d\omega}{dt}\right)$ میتوان نوشت

$$\tau = I\alpha = I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

قسمت آخراین رابطه ازاینجاناشی شده که I برای یك جسم سخت معین ومحوردوران مشخص (ثابت) مقدار ثابتی است.

بعد رابطه برداری $\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (معادله ۹-۱۱) رابکارمیبریم . معادله مربوط به مولفه های اسکالر بردارهای $\vec{\tau}_{ext}$ و $\vec{L}$ درامتداد محوردوران (یعنی τ و L)عبارت است از

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

با مقایسه دورابطه بالا بسهولت رابطه مورد نظر رابدست میآوریم یعنی

$$L = I\omega \qquad (11-18)$$

این رابطه نیز شبیه معادله ۱۷-۱۱ ($\tau = I\alpha$) یك رابطه اسکالر است که برای دوران یك جسم سخت حول یك محور ثابت صادق است . L مولفه بردار اندازه حرکت زاویه ای $\vec{L}$ جسم سخت در امتداد محور دوران است والبته I نیز باید نسبت بهمان محورمحاسبه شود .

معادله ۱۸-۱۱ مشابه دورانی رابطه $P = MV$ برای اندازه حرکت خطی جسم سختی بجرم M درحرکت انتقالی محض باسرعت خطی V است . برای یك جسم که دارای اینرسی دورانی I وسرعت زاویه ای ω حول یك محورثابت است این رابطه لنداز ه حرکت زاویهای حول این محورراميدهد .

۷-۱۱ - بقاء اندازه حرکت زاویه ای

دربخش ٤-۱۱ بدست آوردیم که میزان تغییر زمانی اندازه حرکت زاویه ای کل یك سیستم ذرات حول نقطه ثابتی دریك دستگاه مقایسه ماندی (یا حول مرکز جرم) برابر مجموع گشتاورهای خارجی وارده به سیستم است یعنی

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (11-9)$$

حال فرض میکنیم که $\vec{\tau}_{ext} = 0$ باشد آنوقت $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ است وبنا براین $\vec{L}$ مساوی مقدار ثابتی است .

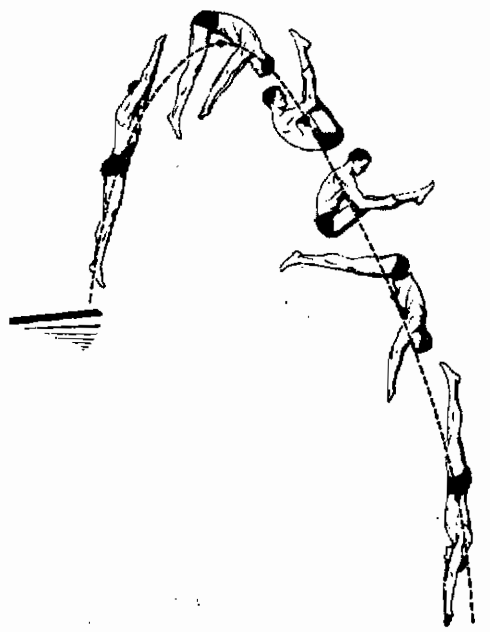
وقتی که گشتاور منتجه خارجی وارده به سیستم صفر باشد ، بردار اندازه حرکت زاویه ای سیستم ثابت میماند . این اصل بقاء اندازه حرکت زاویه ای است .

برای یك سیستم n ذره ای ، اندازه حرکت زاویه ای کل $\vec{L}$ حول یك نقطه برابراست با

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_n$$

وقتی گشتاور منتجه خارجی وارد به سیستم صفراست داریم

$$\vec{L} = \text{یک مقدار ثابت} = \vec{L}_o \qquad (۱۱-۱۹)$$



شکل ۱۱-۱۱ ـ شناگری د ایوراد رحالیکه دستها وپاهایش کشیده است باسرعت زاویه ای اولیـــه ترک میکند . چون گشتاوری حول مرکز جرمش وارد نمیشود ($\vec{L} = I\omega$) درمدتی که شناگر درهواست ثابت است. وقتی دستها وپاهایش راجمع میکند I کاهش می یابد و (ω) زیاد میشود . موقعیکه دوباره دستها وپاهایش راباز میکند سرعت زاویه ای بمقدار اولیه کاهش می یابد . به مسیر سهمی مرکزجرم همان مسیرمتعارفی حرکت د وبعد ی تحت اثرنیروی جاذبه توجه کنید .

که در آن $\vec{L}_o$ برابر بردار ثابت اندازه حرکت زاویه ای کل میباشد . اندازه حرکتهـــای زاویه ای تك تك ذرات ممکن است تغییر کند ولی درغیاب گشتاور خارجی منتجه جمع برداری $\vec{L}_o$ آنها ثابت میماند .

اندازه حرکت زاویه ای یك کمیت برداری است وبنابراین معادله ۱۹-۱۱ معادل ســه معادله اسکالر است که هرکدام از آنها مربوط بیکی ازمحورهای مختصاتی است که ازنقطه مورد نظر میگذرد . بنابراین بقاء اندازه حرکت زاویه ای سه شرط روی حرکت سیستم مورد بحث میگذارد .

برای سیستمی که ازیك جسم سخت درحال دوران حول محوری (مثلاً محور z) که در یك دستگاه مقایسه ماندی ثابت است تشکیل شده ، داریم

$$\vec{L}_z = I\,\vec{\omega} \qquad (۱۱-۲۰)$$

که در آن $\vec{L}_z$ عبارت است ازمولفه اندازه حرکت زاویه ای درامتداد محوردوران و I عبارت است ازاینرسی دورانی برای همین محور . ممکن است اینرسی دورانی I یك جسم درحال دوران بعلت ترتیب مجدد اجزایش تغییرکند . اگرهیچ گشتاور خارجی منتجه ای اثرنکند ، آنوقت $\vec{L}_z$ میبایستی ثابت بماند واگر I تغییرکند میبایستی تغییر جبران کننده ای در ω وجود داشته باشد . اصل بقاء اندازه حرکت زاویه ای دراین مورد به ترتیب زیربیان میشود .

$$I\,\omega = I_o\omega_o = \text{یك مقدارثابت} \qquad (۱۱-۲۱)$$

معادله ۲۱-۱۱ نه فقط برای دوران حول یك محورثابت صادق است بلکه همچنین برای محوری کــه ازمرکزجرم سیستم میگذرد ودرضمن حرکت موازی خود میماند صادق میباشد .

بندبازان ، شیرجه روندگان ،رقاصان بالت ، یخ بازان وسایرین اغلب این اصل را بکار میبرند . چون I بستگی به مجذور فاصله اجزاء جسم از محور دوران دارد ، تغییرات وسیعــی بوسیله بازکردن وباکشیدن دست وپاامکان پذیراست، شیرجه رونده درشکل ۱۱-۱۱ رادرنظــر میگیریم . فرض کنیم وقتیکه اوتخته شیرجه راترك میکند دارای سرعت زاویه ای مشخص ω_o حول یك محور افقی که ازمرکزجرمش میگذرد باشد ، بطوریکه اوباندازه نیم دور قبل ازبرخورد ش با آب دوران

کند . اگر اوبخواهد درهمان زمان بجای آن یك دورونیم معلق بزند ، اوبایستی سرعت زاویه‌ای اش راسه برابرکند . مثال‌هیچ نیروی خارجی باستثنای ثقل براووارد نمیشود وثقل گشتاوری حول مرکز جرمش ایجاد نمیکند . بنابراین اندازه حرکت زاویه ای اوثابت میماند و $I\omega = I_0 \omega_0$ چون $\omega = 3\omega_0$ است شخص‌شیرجه رونده بایستی اینرسی دورانی اش‌راحول‌محور افقی که ازمرکزجرمش میگذرد ازمقداراولیه I_0 به مقدار I تغییر دهد بطوریکه مساوی $\frac{1}{3} I_0$ باشد . اواین عمل راباکشیدن بازوان وپاهایش‌بطرف مرکز بدنش‌انجام میدهد . هرچه سرعت زاویه ای اولیه اش بزرگتر باشد وهرچه بیشتراوبتواند اینرسی دورانی اش‌راکم نماید تعداد دورهای بیشتری‌را میتواند درزمان معینی بزند .

باید توجه داشته باشیم که انرژی جنبشی دورانی شخص‌شیرجه رونده ثابت نیست . درواقع درمثال ماچون

$$I\omega = I_0 \omega_0$$
$$I < I_0$$

است ، نتیجه میشود

$$\frac{1}{2} \frac{(I\omega)^2}{I} = \frac{1}{2} I\omega^2 > \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

وانرژی جنبشی دورانی شخص‌شیرجه رونده زیاد میشود . این ازدیادانرژی توسط شخص‌شیرجه رونده تامین میشود بدین معنی که اووقتی‌اجزاء بدنش‌رابهم میکشدکارانجام میدهد . بهمین ترتیب یك یخ بازیابالرین میتواند سرعت زاویه ای چرخش حول‌محور قائم رازیاد یاکم بنماید .

مثال ۷

یك جسم کوچك بجرم m بیك ریسمان سبك که ازوسط یك میله توخالی میگذرد متصل است. میله دریك دست وریسمان‌در دست دیگرنگه داشته شده است . جسم راروی دایره ای بشعاع r_1 باسرعت V_1 بدوران درمیآوریم . سپس‌ریسمان راپائین میکشیم تاشعاع دوران‌به r_2 تقلیل یابد (شکل ۱۲-۱۱) . سرعت خطی جدید V_2 وسرعت زاویه ای جدید ω_2 جسم را

بر حسب مقادیر اولیه V_1 و ω_1 ودو شعاع بدست آورید .

کشش بطرف پائین ریسمان بشکل یك نیروی شعاعی بجسم منتقل میشود . این چنین نیروئی یك گشتاور صفر بر جسم حول مرکز دورانش وارد میکند . چون هیچ گشتاوری به جسم حول محور دورانش وارد نمیشود ، اندازه حرکت زاویه ای در آن جهت ثابت است . بنابر این اندازه حرکت زاویه ای ابتدایی مساوی اندازه حرکت زاویه ای انتهائی است .

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

چون $r_1 > r_2$ است ، با کشیده شدن جسم بطرف داخل سرعت جسم افزایش میبابد بر حسب سرعت زاویه ای چون v_1 برابر $\omega_1 r_1$ و v_2 برابر $\omega_2 r_2$ است .

$$m r_1^2 \omega_1 = m r_2 \omega_2^2$$

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1$$

بنابر این برای سرعت زاویه ای حتی افزایش بیشتری نسبت به مقدار اولیه اش وجود دارد (مساله ۳۱ را ملاحظه کنید) . نیروی ثقل (وزن جسم) چه اثری در این تجزیه وتحلیل دارد ؟

مثال ۸

یك دانشجو روی یك چهارپایه که میتواند حول محور قائم آزادانه بچرخد نشسته است ، او بازوان خود را بطورافقی دراز میکند درحالیکه درهردستش وزن ۰/۸ پوندی قرار دارد . مربی باسرعت زاویه ای ۰/۵۰ دور درثانیه اورابدوران درمیآورد . فرض کنید که اصطکاك قابل اغماض بوده وگشتاوری حول محور قائم ایجاد ننماید ونیز فرض کنید که اینرسی دورانی دانشجووقتی که او دستهایش را به کنارش میکشد درمقدار $slug\text{-}ft^2$ ۰/٤ ثابت بماند وتغییراینرسی دورانی فقط ناشی از کشیدن وزنه هابداخل باشد . فاصله اصلی وزنه ها ازمحور دوران را ft ۳/۰ وفاصله انتهائی آنهارا ft ۰/۵۰ درنظر میگیریم . سرعت زاویه ای انتهائی دانشجو را پیدا کنید .

تنها نیروی خارجی ثقل است که به مرکز جرم اثرمیکند وهیچ گشتاوری حول محور دوران

ایجاد نمینماید بنابراین اندازه حرکت زاویه ای حول این محورمحفوظ میماند واندازه حرکت زاویهای انتهائی = اندازه حرکت زاویه ای ابتدائی .

$$I_0 \omega_0 = I \omega$$

داریم

$$I = I_{\text{دانشجو}} + I_{\text{وزنه ها}}$$

$$I_0 = ٤/٠ + ٢\left(\frac{٨/٠}{٣٢}\right)(٣/٠)^٢ = ٨/٥ \ slug\text{-}ft^2$$

$$I = ٤/٠ + ٢\left(\frac{٨/٠}{٣٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = ٤/١ \ slugs\text{-}ft^2$$

$$\omega_0 = ٠/٥٠ \ \text{دور}/\text{ثانیه} = \pi \ rad/sec$$

بنابراین

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{٨/٥}{٤/١}\pi \ rad/sec = ٢/١\pi \ rad/sec \cong ١/٠ \ \text{دور}/\text{ثانیه}$$

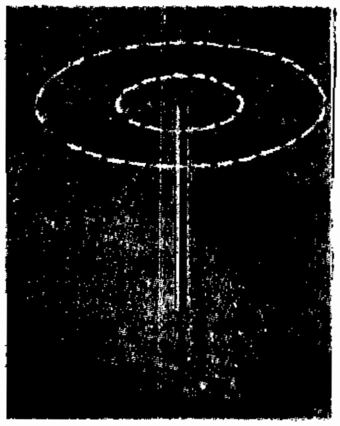
سرعت زاویه ای انتهائی تقریباً دوبرابر شده است.

اگرکم شدن I بعلت کشیدن بازوها بداخل رادرنظرگرفته بودیم سرعت زاویه ای انتهائی به مراتب بزرگتر میشد .

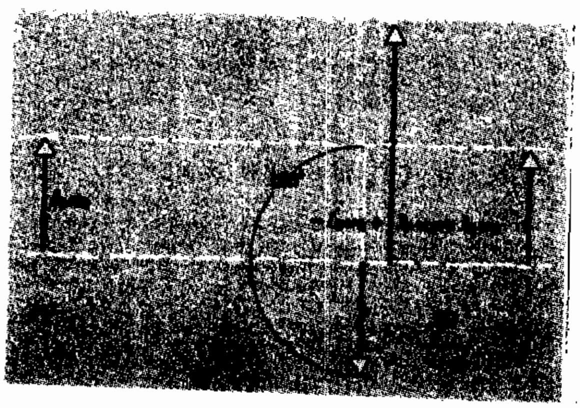
اصطکاک چه تغییری راسبب میشود ؟ آیاوقتیکه دانشجوبازوانش رابداخل میکشد وسپس دوباره آنهارابازمیکند ، بافرض اینکه اصطکاکی وجودندارد انرژی جنبشی محفوظ میماند ؟ شرح دهید .

مثال ۹

ارزنده است که یک تجربه نمایشی درکلاس راکه طبیعت برداری قانون بقاء اندازه حرکت زاویه ای رانشان میدهد درنظربگیریم.



شکل ۱۲-۱۱-۱- مثال ۷ . جرمی درانتهای یك ریسمان دریك مسیردایره ای بشعاع r باتندی زاویه ای ω حرکت میکند . ریسمان ازمیان یك لوله میگذرد . $\vec{F}$ نیروی جانب مرکزرا تامین میکند .



شکل ۱۳-۱۱-۱- مثال ۹ . (a) ممنتوم زاویه ای ابتدائی سیستم نشان داده شده است . (b) چرخ ۱۸۰ کج شده است کمبود اندازه حرکت زاویه ای $I_0\omega_0$ ۲ است که بوسیله شاگرد صفحه دوار ایجاد میشود .

یك دانشجو روی سکوئی که میتواند فقط حول محورقائم دوران کند می ایستد . او در دستش محوریك چرخ دوچرخه رابطوریکه این محور قائم باشد نگه میدارد . چرخ حول این محور قائم با سرعت زاویه ای ω_o میچرخد ولی دانشجووسکو درحال سکون میباشند . دانشجوسعی میکندکه جهت دوران چرخ را تغییردهد . چه اتفاقی می افتد ؟

مجموعه دانشجو ، سکووچرخ رابعنوان سیستم انتخاب میکنیم. اندازه حرکت کلی اولیه این سیستم $I_o\,\omega_o$ است که از دوران چرخ ناشی میشود ، I_o اینرسی دورانی چرخ حول محورش و $\vec{\omega}_o$ قائما" بطرف بالا میباشد شکل ۱۳-۱۱ وضع اولیه رانشان میدهد .

دانشجوسپس محورچرخ را باندازه 180° ازوضعیت قائم میچرخاند . برای انجام این کار اوبایستی گشتاوری واردکند . (ولی البته این گشتاور آنطور که آنراتعریف کرده ایم برای سیستم یك گشتاور داخلی حساب میشود) چون هیچ مولفه گشتاور خارجی حول محور قائم وجود ندارد . مولفه قائم اندازه حرکت زاویه ای سیستم میبایستی محفوظ بماند . دراین حالت اندازه حرکت زاویه ای چرخ حول محور قائم برابر $-I_o\,\omega_o$ میباشد . بنابراین دانشجو وسکو بایستی اندازه حرکت زاویه ای اضافی (نسبت به این محور) راایجادکنند ودرنتیجه هردو شروع بدوران میکنند . وقتی اندازه حرکت زاویه ای اضافی $I_p\,\omega_p$ به $-I_o\,\omega_o$ اضافه شود میبایستی مساوی اندازه حرکت زاویه ای اولیه سیستم یعنی $I_o\,\omega_o$ شود یعنی

$$-I_o\omega_o + I_p\omega_p = I_o\omega_o$$

در این شکل b ۳-۱۱ نشان داده شده است ، I_p عبارت است از اینرسی دورانی دانشجو وسکو نسبت به محور قائم و ω_p سرعت زاویه ای آنها نسبت باین محوراست . وقتیکه دانشجو چرخ راباندازه $\theta = 180^\circ$ می چرخاند دانشجو وسکویك اندازه حرکت زاویه ای قائم برابر $2\,I_o\,\omega_o$ بدست می آورند . اندازه حرکت زاویه ای قائم کلی سیستم بازهم درمقداراولیه $I_o\,\omega_o$ محفوظ میمانــد .

۸-۱۱ - دینامیك دورانی - یك مرور

موضوع حرکات دورانی ذرات واجسام سخت انصافا" بقدری پیچیده است که بررسی کامل وعمومی آن دراینجا خارج ازحدود ماست . بنابراین عقلائی بنظر میرسد که دریك جا تمامی معادلات مربوط به دینامیك دورانی راجمع کرده وراجع به شرایطی که تحت آن شرایط آنهارا میتوان بکار برد توضیح دهیم. این کاردرجدول ۳-۱۱ انجام شده است .

جدول ۳-۱۱

خلاصه معادلات برای حرکت دورانی

شماره معادله	معادلـــــه	ملاحظـــــات
	I- معادلات تعریف کننده	
۱۱-۱	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	گشتاور وارده بیك ذره حول نقطه O در اثر نیـــروی منتجه $\vec{F}$ که در فاصله $\vec{r}$ وارد میشود
	$\vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{\tau}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$	گشتاور منتجه خارجی وارده بیك سیستم ذرات حول نقطه O
۱۱-۳	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$	اندازه حرکت زاویه ای یك ذره حول یك نقطه O
	$\vec{L} = \sum l_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$	منتجه اندازه حرکت زاویه ای یك سیستم ذرات حول نقطه O
	II- روابط کلی	
۱۱-۷	$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$	قانون حرکت برای یك ذره واحد در اثر یك گشتاور . این رابطه شبیه دورانی $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (معادله ۱۰-۸) است. معادله ۱۱-۷ فقط وقتی صادق است که $\vec{\tau}$ و $\vec{l}$ نسبت بیك نقطه ثابت O در یك دستگاه ماندی اندازه گرفته شوند .
۱۱-۹	$\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	قانون حرکت برای یك سیستم ذرات در اثر گشتاور منتجه خارجی $\vec{\tau}_{ext}$ این شبیه دورانی $\vec{F} = d\vec{p}/dt$

(معادله ٥(-٨) است . معادله ۹-۱۱ فقط وقتی صادق است که $\vec{\tau}_{ext}$ و $\vec{L}$ نسبت به (a) یک نقطه ثابت O در یک دستگاه مقایسه ماندی یا (b) مرکز جرم سیستم اندازه گرفته شوند .

III - حالت خاص دوران یک جسم سخت حول محوری که در یک دستگاه مقایسه ماندی ثابت است.

۱۱-۱۷ $$\tau = I\alpha$$

I نسبت بیک محور ثابت است و τ بایستی مولفه اسکالر $\vec{\tau}_{ext}$ ودر امتداد همین محور باشد . این شبیه دورانی $F=Ma$ برای حرکت مستقیم الخط است .

۱۱-۱۸ $$L = I\omega$$

I نسبت بیک محور ثابت است و L بایستی مولفه اسکالر اندازه حرکت زاویه ای کل درامتداد این محور باشد . اگر محور دوران تقارن بخصوصی داشته باشد این شبیه دورانی رابطه $p=MV$ برای حرکت مستقیم الخط میباشد .

فصـــل ۱۲

تعادل اجسام سخــــت

۱ - ۱۲ تعادل اجسام سخت

پایه های نگاهدارنده یك پل معلق میبایستی بقدر کافی محکم باشند بطوریکه در اثــر وزن پل و بار وسائط نقلیه فرو نریزند ، وسائل بزمین نشستن یك هواپیما نبایستی اگر خلبان بـد بنشیند فرو بریزند ، دندانه های یك چنگال نبایستی در اثر بریدن یك گوشت پخته سفت خم گردند در تمام این چنین مسائلی مهندس متوجه این نکته است که این ساختمانهاکه سخت فرض شده اند واقعاً تحت اثر نیروها ی وارده وگشتاورهای همراه با آنها سخت باقی میمانند .

در این چنین مسائلی مهندس میبایستی دو سئوال رابپرسد (۱) چه نیروها و گشتاورهائی بر جسمی که سختفرض شده اثر میکنند ؟ (۲) با درنظر گرفتن طرح و مواد بکار رفته آیا جسم تحت اثر این نیرو ها وگشتاورها سخت باقی میماند یانه ؟ در این فصل ما فقط علاقه مند بسئوال اولی هستیم ، دانشجویان مهندسی در درسهای بعدی بتفصیل باسؤال دوم سروکار خواهنـد داشت .

می بینیم که اجسام ظاهراً سختیکه در بالا ازآنها سخن راندیم (یعنی پایه های پـل ، وسائل بزمین نشستن هواپیما وچنگال) در تعادل مکانیکی هستند . یك جسم سخت در تعادل مکانیکی است اگر وقتی ازیك دستگاه مقایسه ماندی مشاهده شود (۱) شتاب خطـــی $\vec{a}_m$ مرکز جرمش صفر بوده و (۲) شتاب زاویه ای $\vec{\alpha}$ آن حول هر محور ثابتی دراین دستگاه مقایسـه صفر باشد . این تعریف لازمه اش این نیست که جسم نسبت بناظر در حال سکون باشد بلکــه فقط لازم است که شتاب نداشته باشد . مثلاً ممکن است مرکز جرمش باسرعت ثابت $\vec{V}_{cm}$ در حال حرکت بوده ویاجسم حول محور ثابتی باسرعت زاویه ای ثابت $\vec{\omega}$ درحال دوران باشد . اگــر جسم واقعاً درحال سکون باشد (بطوریکه $\vec{V}_{cm}=0$ و $\vec{\omega}=0$) گوئیم جسم درحال تعــادل استاتیك است . ولی البته همانطوریکه خواهیم دید محدودیتهای اعمال شده روی نیروهـا

و گشتاورها چه تعادل استاتیک باشد و چه نباشد یکسان است . بعلاوه هر حالت تعادل (غیر استاتیک) رابا انتخاب دستگاه مقایسه مناسبی میتوان بتعادل استاتیک تبدیل نمود .

حرکت انتقالی یک جسم سخت بجرم M بوسیله معادله ۱۰ - ۸ داده میشود :

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{c.m}$$

که در آن $\vec{F}_{ext}$ عبارت است از جمع برداری نیروهای خارجی وارده بجسم . چون برای تعادل $\vec{a}_{cm}$ باید صفر باشد اولین شرط تعادل (استاتیک یانوع دیگر) اینستکه جمع برداری تمام نیروهای خارجی وارده بجسم درحال تعادل باید صفر باشد .

میتوان شرط (۱) رابصورت

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = 0 \qquad (۱۲-۱)$$

نوشت ، که در آن برای سهولت اند یس را از $\vec{F}_{ext}$ حذف کرده ایم . این معادله برداری بسه معادله اسکالر منجر میشود

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots = 0$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots = 0 \qquad (۱۲-۲)$$
$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \cdots = 0$$

که بیان میکند که جمع مولفه های نیروها در امتداد هر کدام از سه محور مختصات قائم الزاویه صفر است . دومین شرط لازم برای تعادل این است که برای هر محوری $\vec{\alpha} = 0$ باشد چون شتاب زاویه ای هر جسم سخت همراه با یک گشتاور است (بادرنظر گرفتن اینکه برای یک محور ثابت $\tau = I\alpha$ است) میتوان شرط دوم برای تعادل (استاتیک یانوع دیگر) را اینطور بیان نمود : جمع برداری تمام گشتاورهای خارجی وارده بجسم در حال تعادل باید مساوی صفر باشد .

شرط (۲) رامیتوان بصورت

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots = 0 \qquad (۱۲-۳)$$

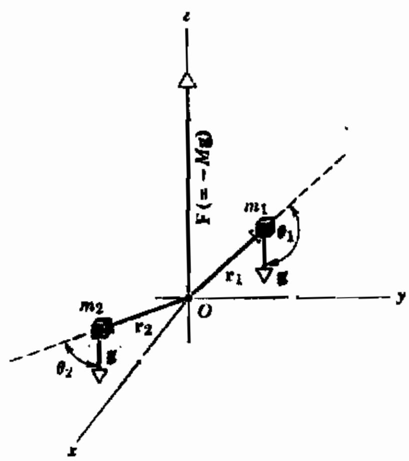
نوشت . این معادله برداری بسه معادله اسکالر منجر میشود .

$$\tau_x = \tau_{1x} + \tau_{2x} + \cdots = 0$$
$$\tau_y = \tau_{1y} + \tau_{2y} + \cdots = 0 \qquad (۱۲-۴)$$
$$\tau_z = \tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = 0$$

که بیان میکندکه در حال تعادل جمع مولفه های گشتاورهای وارده بجسم در امتداد هرکدام از سه محور مختصات قائم الزاویه صفر است .

گشتاور منتجه $\vec{\tau}$ در معادله ۳ - ۱۲ که میبایستی برای تعادل مکانیکی صفر باشد نسبت به مبدأ O بخصوصی تعریف میشود . کمیات τ_x ، τ_y و τ_z در معادله ۴ - ۱۲ مولفه های اسکالر $\vec{\tau}$ نسبت بیك دستگاه مختصات قائم الزاویه که مبدا ش در O است میباشند والبته طرز قرار گرفتن این محورها در فضا اهمیتی ندارد . این از اینجا ناشی میشود که اگر یك بردار صفر باشد مولفه های اسکالرش صرفنظر از این که چگونه محورهای دستگاه مقایسه را قرار دهیم برابر صفر میباشند . دانشجویان ممکن است تردید کنند که آیا انتخاب یك مبدأ ضروری است یا خیر. جواب این سئوال همانطورکه در زیر نشان خواهیم داد این است که انتخاب مبدأ ضروری نیست زیرا برای یك جسم در حال تعادل انتقالی اگر $\vec{\tau}$ نسبت بیك مبدأ صفر باشد نسبت بهر نقطه دیگر آن سیستم مختصات صفر خواهد بود . پس اساس این پاراگراف این است که شرط (۲) برای یك جسم در حال تعادل انتقالی صادق است اگر بتوانیم نشان دهیم که (a) $\vec{\tau}$ نسبت بهر نقطه مساوی صفر است (معادله ۳ - ۱۲) یا اینکه (b) - مولفه های گشتاور حول هرکدام از سه محور دو بدو متعامد برابر صفر میباشند (معادله - ۴ - ۱۲) . بنا براین برای اینکه جسمی در حال تعادل باشد شش شرط مستقل ازهم برای نیروها داریم .) این شرایط عبارتند از شش رابطه جبری معادلات ۲ - ۱۲ و ۴ - ۱۲ . این شش شرط عبارتند از شرایطی برای هر درجه آزادی جسم سخت ، سه انتقالی و سه دورانی .

اغلب با مسائلی مواجه هستیم که در آنها تمامی نیروها در یك صفحه قرار دارند . در این مواقع فقط سه شرط برای نیروها داریم : مجموع مولفه های آنها در امتداد هر دو جهت متعامد



شکل ۱ - ۱۲ - یك جسم غیر منظم که به n عنصر حجم تقسیم شده است برای نمونه دو عنصر m_1 و m_2 نشان داده شده است . در درس ثابت میکنیم که جسم در تحت اثر یك نیروی واحد $\vec{F}(=-M\vec{g})$ که در جهت بالا بمرکز جرم آن وارد میشود میتواند در تعادل انتقالی و دورانی باشد .

در صفحه و مجموع گشتاورهای آنها حول هر محوری عمود بر صفحه بایستی برابر صفر باشد .
این شرایط مربوطند بسه درجه آزادی برای حرکت دریک سطح ، دو انتقالی و یک دورانی .
ما از این ببعد برای ساده شدن محاسبات خودرا اغلب محدود به مسائل دو بعدی (در یک صفحه) مینمائیم . این مطلب هیچگونه محدودیت اساسی در اصول کلی بما تحمیل نمیکند . همچنین برای سهولت فقط حالت تعادل استاتیک را که در آن اجسام واقعاً در حال سکونند درنظر میگیریم .

۲ - ۱۲ مرکزثقـــل

یکی از نیروهای وارده در حرکت جسم سخت نیروی ثقل میباشد . در واقع برای یک جسم گسترش دار این نیرو فقط یک نیرو نیست بلکه منتجه تعداد زیادی نیرو میباشد . هر ذره جسم تحت اثریک نیروی ثقل قرار میگیرد . اگر تصور کنیم که جرم M به تعداد زیادی ذره مثلاً n ذره تقسیم گردد ، نیروی ثقل وارد از طرف زمین بر ذره i ام بجرم m_i برابر $m_i\vec{g}$ میباشد . این نیرو درجهت پائین وبطرف مرکز زمین میباشد اگر شتاب ثقل $\vec{g}$ در یک منطقه یکسان باشد ، میگوئیم که در آنجا میدان جاذبه یکنواختی وجود دارد یعنی $\vec{g}$ در هر کجای آن منطقه بزرگی وجهت یکسانی دارد . برای یک جسم سخت که در میدان جاذبه یکنواختی واقع است میبایستی $\vec{g}$ برای هر ذره جسم یکسان بوده و نیروهای وزن وارده بذرات موازی یکدیگر باشند . اگر فرض کنیم که میدان جاذبه زمین یکنواخت است میتوان نشان داد که میتوان بجای تمام نیروهای وزن جداگانه وارده بجسم نیروی واحد $M\vec{g}$ وارد بمرکز جرم جسم و بطرف پائین راقرار داد . این مطلب معادل این است که نشان داده شود که تک تک نیروهای وزن وارده بطرف پائین را میتوان از نظر اثرات شتاب با یک نیروی واحد بطرف بالا $\vec{F}(=-M\vec{g})$ خنثی نمود مشروط باینکه این نیروی $\vec{F}$ بمرکز جرم جسم وارد شود . شکل ۱ - ۱۲ دو نمونه جرم یا اجزاء جرم m_1 و m_2 رانشان میدهد که از میان n از این چنین اجزائی که جسم سخت بآنها تقسیم شده است انتخاب شده . یک نیروی بطرف بالای $\vec{F}(=-M\vec{g})$

بیك نقطه معین O وارد میشود . باقی میماند نشان دهیم که تنها در صورتی جسم در حال تعادل مکانیکی است که نقطه O مرکز جرم باشد . شرط (۱) برای تعادل (معادله ۱-۱۲) با انتخاب فوق الذکر برای بزرگی وجهت $\vec{F}$ صادق میباشد . یعنی

$$\vec{F}+m_1\vec{g}+m_2\vec{g}+\cdots+m_n\vec{g}=0$$

ویا

$$\vec{F}=-(m_1+m_2+\cdots+m_n)\vec{g}=-M\vec{g}$$

که مربوط بفرض ما میباشد . باقی میماند ثابت کنیم که برای هر نقطه جسم مثل (O) O $\vec{\tau}=0$ است . این دومین شرط تعادل میباشد . با انتخاب O بعنوان مبدأ مطمئن هستیم کـــه گشتاور $\vec{F}$ حول این نقطه صفر است زیرا بازوی ممان $\vec{F}$ برای این نقطه صفر است . گشتاورحول نقطه O بعلت کشش جاذبه بر اجزاء جرم عبارت است از

$$\vec{\tau}=\vec{r}_1\times m_1\vec{g}+\vec{r}_2\times m_2\vec{g}+\cdots+\vec{r}_n\times m_n\vec{g}$$

که (چون m_1 و m_2 و .... وغیره اسکالر هستند) میتوان آنرا بشکل

$$\vec{\tau}=m_1\vec{r}_1\times\vec{g}+m_2\vec{r}_2\times\vec{g}_2+\cdots+m_n\vec{r}_n\times\vec{g}$$

نوشت . چون $\vec{g}$ در تمام جملات یکسان است با فاکتور گرفتن از آن بدست میآوریم ،

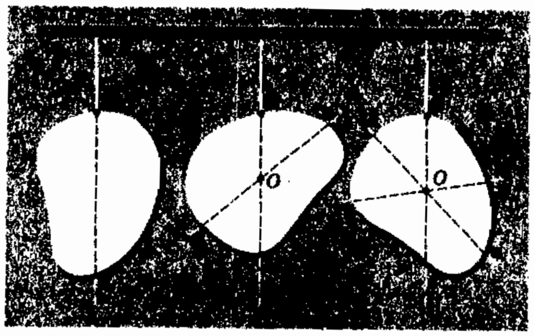
$$\vec{\tau}=(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots-m_2\vec{r}_n)\times\vec{g}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i\right)\times\vec{g}$$

این جمع‌روی تمام اجزاء متشکله جرم جسم است .

حال اگر O مرکز جرم جسم باشد جمع بالا صفر است . این آرزوی تعریف مرکز جرم (معادله ۳۱ - ۸ وبحث دنباله آنرا ملاحظه کنید) نتیجه میشود ، پس ما نتیجه گرفتیم کـــه تنها درصورتی که نقطه O مرکز جرم باشد آنوقت $\vec{\tau}=0$ بوده وشرط دوم برای تعادل مکانیکـــی برقرار است .

بنابراین اثرات انتقالی و دورانی نیروهای جاذبه وارده بتك تك اجزاء جرم تشکـــــل

دهنده جسم معادل است با یک نیروی تنها برابر $M\vec{g}$ یعنی وزن کلی جسم که بمرکز جرم اثر کند . همین نتیجه را اگر ساختمان جسم پیوسته بوده وبه بینهایت ذره تقسیم شود میتوان - بدست آورد . دانشجویان بایستی بتوانند این کار را با استفاده از روش محاسبات انتگرالی انجام دهند (بخش ۱ - ۸ را ملاحظه کنید) . نقطه اثر جاذبه" منتجه" معادل اغلب مرکز ثقل نامیده میشود .



شکل ۲ - ۱۲ - چون مرکز جرم O همیشه درست زیر نقطه تعلیق است آویزان کردن یک صفحه از دو نقطه مختلف ، O رامعین میکند .

چون در اغلب مسائل مکانیک با اجسامی مواجه هستیم که ابعاد آنها در مقایسه بـا فواصلی که طی آنها $\vec{g}$ بطور قابـل ملاحظه ای تغییر میکند کوچک میباشد میتوان فرض کرد که $\vec{g}$ در نقاط مختلف جسم یکنواخت است . در این موارد مرکز جرم ومرکز ثقل را میتوان - منطبق برهم فرض نمود . در واقع از این انطباق میتوان برای تعیین تجربی مرکز جرم در اجسامی که شکلشان نامنظم است استفاده کرد . مثلاً" فرض کنیم که میخواهیم مرکز جرم یک صفحه نـازک بشکل نامنظم مثل شکل ۲ - ۱۲ راتعیین کنیم . جسم را توسط ریسمانی از یک نقطه غیر مشخص A واقع در لبه اش آویزان میکنیم . وقتیکه جسم در حال سکون است مرکز ثقل میبایستی مستقیماً" زیر نقطه آویزش ودر محلی روی خط Aa واقع باشد زیرا فقط در اینصورت است که مجـــموع

گشتاور های ناشی از ریسمان و وزن صفر میباشند . سپس جسم را از نقطه دیگری روی لبه اش آویزان میکنیم دوباره مرکز ثقل میبایستی در نقطه ای روی خط Bb باشد . تنها نقطه مشترک خطوط Aa و Bb نقطه برخورد O است ، بنابراین این نقطه بایستی مرکز ثقل باشد . حال اگر جسم را از نقطه دیگری از لبه اش مثل C آویزان کنیم خط قائم Cc از O خواهد گذشت . چون یک میدان یکنواخت در نظر گرفته ایم مرکز جرم بامرکز ثقل منطبق بوده و بنا براین در نقطه O واقع است .

۳ - ۱۲ مثالهائی از تعادل

در بکاربردن شرایط تعادل (صفر بودن نیروی منتجه و صفر بودن گشتاور حول هرمحور) میتوان نحوه عمل رابطرق مختلف واضح تروساده تر نمود .

اول یک مرز حول سیستم مورد نظر رسم میکنیم . بدینوسیله بطور واضح می بینیم که جسم یا سیستم اجسامی که ما برای آنها قوانین تعادل رابکارمیبریم دقیقاً چیست . این عمل مجزا کردن سیستم نامیده میشود .

دوم بردارهائی رسم میکنیم که نشان دهنده بزرگی ، جهت و نقطه اثر تمامی نیروهای خارجی است . نیروی خارجی نیروئی است که از خارج از مرزی که قبلاکشیده ایم اثر میکند . نمونه هائی از نیروهای خارجی که اغلب با آنها مواجه هستیم عبارتند از نیروهای جاذبه و نیروهائی که بوسیله ریسمانها ، سیمها ، میله هاوتیرها منتقل میگردند . اغلب سؤالی در مورد جهت یک نیرو مطرح میشود . دراین مورد بطور فرضی عامل منتقل کننده نیرو در نقطه ای که مرز مفروض راقطع میکند جدا میکنیم . اگر دو انتهای این مقطع مایل بجدا شدن از یکدیگر باشند جهت نیرو بطرف خارج است . اگر مشکوک هستید جهتی را باختیار انتخاب کنید . در جواب مساله مقدار منفی برای یک نیرو معنیش این است که نیرو در جهتی خلاف جهت فرض شده وارد میشود .توجه داشته باشید که فقط لازم است که نیروهای خارجی در نظر گرفته شوند زیرا تمامی نیروهای داخلی دوبدو اثریکدیگرا خنثی میکنند . سوم دستگاه مقایسه مناسبی

اختیار میکنیم که در امتداد محورهایش نیروهای خارجی را قبل از بکاربردن شرط اول تعادل (معادله ۲ - ۱۲) تجزیه مینمائیم. هدف در اینجا این است که محاسبات را ساده کنیم. اغلب دستگاه مقایسه مناسب واضح میباشند .

چهارم دستگاه مقایسه مناسبی اختیارمیکنیم ودر امتداد محورهایش قبل از بکار بردن دومین شرط تعادل (٤ - ۱۲) گشتاورهای خارجی را تجزیه مینمائیم . دوباره هدف این است که محاسبات ساده شود ودرصورتیکه مناسب تشخیص داده شود ممکن است دستگاههای مقایسه مختلفی رابرای بکاربردن دو شرط تعادل استاتیک بکاربرد . فرض کنیم که محوری از نقطه ای که درآن دونیرو یکدیگر راقطع میکنند گذشته وبرصفحه تشکیل شده از این نیروها عمود باشد . این نیروها بطور اتوماتیک مولفه گشتاوری در امتداد (یا حول) این محور نخواهند داشت برای تعادل مولفه های گشتاور ناشی از تمام نیروهای خارجی حول هر محوری بایستی صفر باشد . گشتاورهای داخلی دوبدو یکدیگر راخنثی نموده و لزومی ندارد که در نظر گرفته شوند .

مثال ۱ - دو انتهای یک میله فلزی یکنواخت بوزن ٤ پوند و طول یکمتر بر روی دو ترازو قرار گرفته اند . یک وزنه ٦ پوندی در فاصله ۲۵ سانتیمتری از یک انتهای میله روی آن قرار داده شده است . درجائی که ترازو ها نشان میدهند پیدا کنید .

در اینجاسیستم ما متشکل از میله و وزنه میباشد . نیروهائی که بمیله وارد میشوند عبارتند از W و ω که توسط نیروی جاذبه بمرکز جرمهای میله و وزنه وارد میشوند . وهمچنین F_1 و F_2 نیروهائی که ازجانب ترازو ها به دو انتهای میله بطرف بالا وارد میشوند . این نیروها در شکل ۳ - ۱۲ نشان داده شده اند .

بنا بر قانون سوم نیوتن . نیروئی که توسط ترازو به میله وارد میشود برابر و مخالف جهت نیروئی است که میله به ترازو وارد میکند . بنا براین برای اینکه نشان دهیم ترازوها چه درجائی رانشان میدهند بایستی F_1 و F_2 رامعین کنیم.

شرط تعادل انتقالی (معادله ۱ - ۱۲) عبارت است از

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{W} + \vec{\omega} = 0$$

ازآنجائیکه تمام نیروها عمودی‌هستند . اگر محور y راد رامتداد عمود انتخاب کنیم . بسه محور دیگری نیاز نخواهیم داشت . در نتیجه معادله اسکالر زیر راخواهیم داشت

$$F_1 + F_2 - W - \omega = 0$$

برای تعادل دورانی بایستی مؤلفه‌گشتاور منتجه وارد بر میله در امتداد هر محوردلخواهی صفر باشد . دیده ایم که کافی است نشان دهیم که مولفه‌های گشتاور در امتداد محور های یك دستگاه مختصات متعامد صفر می باشند . مطمئنا " این مؤلفه ها برای هر دو محور عمود برعم که در صفحه شکل ۳ - ۱۲ واقع‌باشند صفر میباشند (چرا ؟) باقی‌می‌ماند معین شودکه گشتا ور نتیجه حول هر محوری‌که عمود برصفحه شکل باشد صفر است .

محوری راکه ازمرکز ثقل عبور میکند درنظر میگیریم ، حال اگر دوران در جهت عقربه های ساعت را مثبت ودوران در خلاف جهت عقربه های ساعت رامنفی بگیریم شرط تعادل دورانی (معادله ٤ - ۱۲) عبارت است از

$$F_1\left(\frac{l}{2}\right) - F_2\left(\frac{l}{2}\right) + W(0) - \omega\left(\frac{l}{4}\right) = 0$$

ویا

$$F_1 - F_2 - \frac{\omega}{2} = 0$$

با اضافه کردن این معادله به معادله ای که برای تعادل انتقالی بدست آمد میتوان F_1 و F_2 رابدست آورد .

خواهیم داشت

$$F_1 = \frac{W}{2} + \frac{3}{4}\omega = 6.5\ lb$$

و

$$F_2 = F_1 - \frac{\omega}{2} = 3.5\ lb$$

توجه کنیدکه اگر $\omega = 0$ باشد خواهیم داشت

$$F_1 = F_2 = \frac{W}{2} = 2.0\ lb$$

اگر ما محور را طوری انتخاب میکردیم که از یك انتهای میله میگذشت بازهم همین جوابهـا رابدست می‌آوردیم .

مثال ۲ - (a) یك نردبان ٦۰ فوتی بوزن ۱۰۰ پوند در نقطه ای بفاصله ٤۰ فوت از سطح زمین بدیوار تکیه دارد . مرکز ثقل نردبان دریك سوم طول آن از سطح زمین قراردارد

یك مرد ۱٦۰ پوندی تانیمه ازنردبان بالا میرود بفرض بدون اصطکاك بودن دیوار نیروهای وارده بزمین ودیوار توسط سیستم راپیدا کنید . نیروهای وارده بنردبان درشکل ٤ - ۱۲ نشان داده شده اند . $\vec{W}$ برابراست با وزن مردی که روی نردبان ایستاده و $\vec{\omega}$ وزن خود نردبان میباشد . نیروی $\vec{F_1}$ توسط زمین برنردبان وارد میشود . $\vec{F}_{1v}$ مولفه قائم $\vec{F}_{1h}$ مولفه افقی (بعلت اصطکاك) این نیرو است . دیوار که بدون اصطکاك میباشد فقط میتواند یك نیرو عمود برسطحش که $\vec{F_2}$ نامیده میشود وارد نماید . مفروضات زیر در دست است :

$$W = 160\,lb \qquad \omega = 100\,lb$$

$$a = 48\,ft \qquad c = 60\,ft$$

از روی هندسه نتیجه میگیریم که $b = 36\,ft$ خط اثر $\vec{W}$ زمین رادر فاصله $b/2$ از دیوار و خط اثر $\vec{\omega}$ زمین رادرفاصله $2b/3$ از دیوار قطع میکنند .

محور x رادرامتداد زمین و محور y رادرامتداد دیوار اختیارمیکنیم . آنوقت شرایط نیروها برای تعادل انتقالی (معادله ۲ - ۱۲) عبارتند از

$$F_2 - F_{1h} = 0$$

$$F_{1v} - W - \omega = 0$$

برای تعادل دورانی (معادله ٤ - ۱۲) محوری راکه از نقطه تماس بازمین گذشته است در نظر میگیریم وبدست میآوریم

$$F_2(a) - W\left(\frac{b}{2}\right) - \omega\left(\frac{b}{3}\right) = 0$$

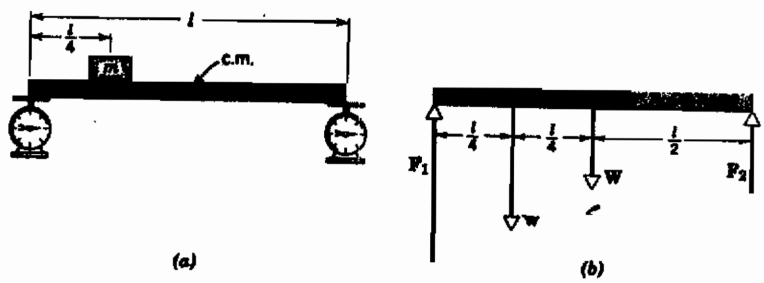
بابکاربردن مفروضات داده شده بدست میآوریم

$$F_2(48\,ft) - (160\,lb)(18\,ft) - (100\,lb)(12\,ft) = 0$$

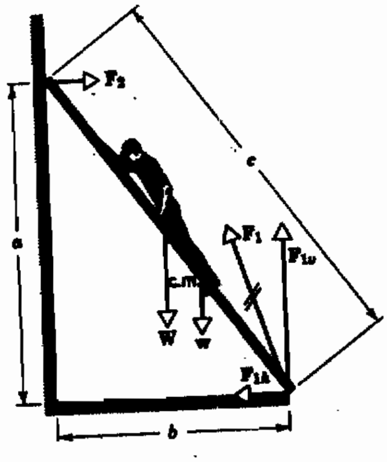
$$F_2 = 85\,lb$$

$$F_{1h} = F_2 = 85\,lb$$

$$F_{1v} = 160\,lb + 100\,lb = 260\,lb$$



شکل ۳ - ۱۲ -مثال ۱ - (a) در فاصله یک چهارم از انتهای یک میله یکنواخت که روی د ترازو قرار گرفته است یک وزنه قرار داده شده است . (b) دیاگرام نیرو



شکل ٤ - ۱۲ -مثال ۲

بنا برقانون سوم نیوتن نیروهای وارده توسط زمین ودیوار بنردبان بترتیب برابر ومخالف نیروهای وارده توسط نردبان بر زمین ودیوار میباشند . بنا براین نیروی قائم وارد بدیوار برابر lb ۸۵ بوده و نیروی وارده بر زمین دارای موله های ۲۶۰ پوند بطرف پائین و ۸۵ پوند بطرف راست میباشد .

(b) اگر ضریب اصطکاک استاتیک بین زمین و نردبان ۰/۴۰ = μ_s باشد قبل از اینکه لغزش شروع شود شخصی چه ارتفاعی میتواند از نردبان بالا رود .

فرض کنیم x کسری از طول کلی نردبان باشد که قبل از شروع لغزش شخص میتواند بالا رود . آنوقت شرایط تعادل ، عبارت خواهد بود از :

$$F_2 - F_{1h} = 0$$
$$F_{1v} - W - w = 0$$

و

$$F_2 a - Wbx - w\left(\frac{b}{3}\right) = 0$$

حال بدست میآوریم

$$F_2(48 ft) = (160 lb)(36 ft)x + (100 lb)(12 ft)$$
$$F_2 = (120x + 25) lb$$

بنا براین

$$F_{1h} = (120x + 25) lb$$

ومانند قبل

$$F_{1v} = 260 lb$$

ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیک توسط

$$F_{1h} = \mu_s F_{1v} = (0.40)(260 lb) = 104 lb$$

داده میشود . بنابراین

$$F_{1h} = (120x + 25) lb = 104 lb$$

و $x = \frac{79}{120}$

بنابراین شخص مزبور میتواند باندازه

$$60 \times \frac{79}{120}\,ft = 39.5\,ft$$

بالا رود قبل ازآنکه لغـزش نردبان شروع شود .

در این مثال نردبان مانند یک جسم یک بعدی فقط با یک نقطه تماس روی دیوار و زمین در نظر گرفته شده است . دانشجویان باید درباره محدودیتی که این روی حالت طبیعی تر دو نقطه اتکاء (در هر انتهای نردبان) میگذارد بیندیشند .

دلیل اینکه دیوار بدون اصطکاک فرض شده است بعداً توضیح داده خواهد شد . آیـــا میتوانید این دلیل را حدس بزنید ؟

در مثالهای قبل مواظب بودیم که تعداد نیروهای مجهول را بتعداد معادلات مستقلی که این نیروها رامربوط میکنند محدود نمائیم . وقتی تمامی نیرو ها دریک صفحه اثر کنند مـــا میتوانیم فقط سه معادله مستقل برای تعادل داشته باشیم ، یکی برای تعادل دورانی حـول هر محور عمود برصفحه ودوتای دیگر برای تعادل انتقالی در داخل صفحه . ولی البته اغلـب بیش ازسه نیروی مجهول داریم . مثلاً در مساله نردبان در مثال $2a$ اگر فرض ساختگـی بدون اصطکاک بودن دیوار را حذف کنیم چهار کمیت اسکالر مجهول داریم ، یعنی مولفه های افقی وقائم نیروی وارده بنردبان از طرف دیوار و مولفه های افقی و قائم نیروی وارده بنردبان از طرف زمین . چون ما فقط سه معادله اسکالر داریم این نیروها رانمیتوان تعیین نمود . بازاء هر مقداری که بیک نیروی مجهول نسبت داده شود میتوان سه نیروی دیگر را تعییـــن نمود . ولی اگر ما ماخذی برای نسبت دادن مقدار مشخصی بیک نیروی مجهول نداشته باشیم

از نظر ریاضی تعداد بینهایت جواب امکان پذیر است . پس اگر ما بخواهیم مساله را بطور منحصر بفرد حل کنیم بایستی یك رابطه مستقل دیگر بین نیروهای مجهول بدست آوریم .مساله ساده دیگر از این قبیل اتومبیل است . در این مورد میخواهیم نیروهای وارده توسط زمین بر هر کدام ازچهار چرخ را وقتی که ماشین روی یك سطح افقی در حال سکون است تعیین کنیم . اگر فرض کنیم که این نیروها بر زمین عمود میباشند چهار کمیت اسکالر مجهول خواهیم داشت . تمام نیروهای دیگر مانند وزن ماشین و مسافرین عمود بر زمین اثر میکنند . بنا براین ما فقط سه معادله مستقل ازهم داریم که شرایط تعادل را میدهند ،یکی برای تعادل انتقالی دریك جهت واحد برای تمام نیروها ودوتابرای تعادل دورانی حول دومحور عمود بر هم واقع دریك سطح افقی دیباره حل مسائل از نظر ریاضی نامعین است . یك مثال مشابه دیگرعبارت است از یك میز چهارپایه دارکه تمام پایه هایش با کف اطاق درتماس است . البته چون در واقع برای هر مساله فیزیکی حقیقی یك حل واحد وجود دارد میبایستی یك ماخذ فیزیکی پیدا کنیم که یك رابطه مستقل اضافی بین نیرو ها بما بدهد وبالنتیجه مارابحل مساله قادر سازد . وقتی توجه نمائیم که اجزاء جسم هرگز آنطورکه تابحال بطور ضمنی فرض کرده ایم کاملا" سخت نیستند مشکل برطرف میشود . در واقع اجزاء تا حدی تغییر شکل میبابند . مثلا" چرخهای اتومبیل و زمین وهمینطور نردبان ودیوار قدری تغییر شکل مییابند . قوانین جهمندی و خواص الاستیك اجزاء ،طبیعت تغییر شکل رامعین کرده ورابطه اضافی لازم بین چهار نیرورا بدست میدهد . بنابراین تجزیه وتحلیل کامل نه فقط بقوانین مکانیك جسم سخت بلکه همچنین به قوانین جهمندی نیزمحتاج است . در رشته های مهندسی راه و ساختمان ومکانیك بسیار از این نوع مسائل پیش میآید وبهمین طریق تجزیه وتحلیل میگردد . در اینجا بیش از این به بسط این مطلب نخواهیم پرداخت .

فصل سیزدهـــم

۱۳-۱ ـ نوسانهـــا

هرحرکتی که درفاصله های زمانی متساوی تکرارشود حرکت تناوبی نامیده میشود . چنانکه خواهیم دید تغییر مکان ذره ای درحرکت تناوبی رامیتوان همیشه برحسب سینوس وکسینوس بیان نمود . چون واژه هارمونیك بعبارتهای حاوی این تابعها اطلاق میگردد ، اغلب حرکت تناوبی ، " حرکت هارمونیك " نامیده میشود .

اگرذره ای درحرکت تناوبی روی گذرگاه واحدی رفت وبرگشت کند ، حرکت رانوسانی (oscillatory) یاارتعاشی (vibratory) مینامیم . جهان پرازحرکتهای نوسانی است . بعنوان مثال ، میتوان نوسانهای چرخ لنگر ساعت ، جرم بسته بفنر ، اتمهای درون ملکول ها یااتمهای شبکه جامد ، وملکولهای هوابهنگام گذشتن موج صوتی را ، نام برد .

بسیاری از جسمهای نوسان کننده میان حدهای دقیقاً ثابتی رفت وبرگشت نمیکنند زیرا نیروهای اصطکاکی انرژی حرکت آنهارابهدر میدهند . بنابراین سیم ویولن ازارتعاش ، وآونگ ازتاب خوردن بزودی باز میایستند . چنین حرکتهائی راحرکتهای هارمونیك میـــــرا (damped) مینامیم . اگرچه نمیتوانیم اصطکاك راازحرکت تناوبی جسمهای بزرگ حذف نمائیم ، ولی اغلب میتوانیم اثر میرائی اصطکاك رابادادن انرژی دردستگاه نوسان کننـــده ، برای جبران انرژی بهدر رفته توسط اصطکاك ، خنثی کنیم . شاه فنر ساعت ووزنه ساعت آونگـــی ازاین راه انرژی خارجی راتامین میکنند ، چنانکه دستگاه نوسان کننده ، یعنی چرخ لنگریاآونگ ، چنان حرکت میکنند که گوئی حرکتشان نامیراست .

فقط دستگاههای مکانیکی نیستند که نوسان میکنند . موج رادیو ، موج میکرونی (micro wave) ونورمرئی ، وبردارهای نوسان کننده میدان کاهنهائی هستند . بنابراین ، مداررادیو (کهبرای طول موج معینی تنظیم شده باشد) وحفره فلزی بسته ای که درآن انرژی موج میکرونی وارد شده

باشد ، میتوانند نوسانهای کاهنرپائی بنمایند . همانندی بسیاراست ، واین همانندی مبتنی بر این واقعیت است که نوسانهای مکانیکی وکاهنرپائی بکمك معادله های ریاضی بنیادی واحدی توصیف میشوند . درفصلهای آینده ازاین همانندی بنحواکمل بهره برداری خواهیم نمود .

دوره تناوب حرکتی هارمونیك ، T ، عبارت از زمان لازم برای انجام یك رفت وبرگشت یعنی یك نوسان کامل یاچرخه (cycle) است . بسامد (Frequency) حرکت ، ν ، شماره نوسانها (یاچرخه ها) درواحد زمان است. بنابراین بسامد ، معکوس دوره تناوب است ، یا

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (۱۳-۱)$$

واحد MKS بسامد ، چرخه درثانیه است . وضعی که درآن نیروی خالص برذره نوسان کننده اعمال نگردد وضع تعادل ذره نامیده میشود . تغییرمکان (خطی یازاویه ای) ، فاصله (خطی یازاویه ای) ذره نوسان کننده ازوضع تعادلش درهرلحظه میباشد .

ذره نوسان کننده ای رادرنظر میگیریم که درامتداد خط راستی ، میان دوحد ثابتی ، رفت و برگشت نماید ، قدر مطلق وجهت تغییرمکان آن ، $\vec{X}$ ، بتناوب تغییرمیکنند . قدر مطلق وجهت سرعت وشتاب ذره ، به ترتیب $\vec{V}$ و $\vec{a}$ ، نیز بتناوب تغییرمینمایند ، وبادرنظر گرفتن بستگی $\vec{F} = m\vec{a}$ ، نیروی $\vec{F}$ نیزبهمان ترتیب تغییر مینماید .

بادرنظرگرفتن انرژی ، میتوانیم بگوئیم که ذره ای درحرکت نوسانی ، ازنقطه ای (وضع تعادلش) ، که درآن انرژی پتانسیل ذره مینیمم باشد ، رفت وبرگشت مینماید . آونگی درحال تاب خوردن ، مثال خوبی است . انرژی پتانسیل آن درپائین ترین نقطه تاب مینیمم است ، یعنی این نقطه ، وضع تعادل آونگ میباشد . شکل ۱۳-۱a ذره ای رانشان میدهدکه میان دونقطه حدی x_1 و x_2 نوسان میکند و O وضع تعادل آن . شکل ۱۳-۱-b منحنی انرژی پتانسیل وابسته رانشان میدهدکه درنقطهٔ O مینیمم است. نیروی واردبرذره درهروضع رامیتوان ازتابع انرژیپتانسیل بدست آورد . این نیرو ازمعادله ۷-۷ بدست میآید :

$$F = -\frac{dU}{dx} \qquad (۷-۲)$$

این نیرو در شکل a ۲-۱۳ نمود ه شد ه است . این نیرو در وضع تعادل ، نقطه O ، صفر است ، هنگامیکه ذره در طرف چپ O قرار داشته باشد ، متوجه راست است (یعنی مثبت است) وهنگامیکه ذره در طرف راست O قرار داشته باشد ، متوجه چپ است (یعنی منفی است) . این نیرو بازگرداننده (Restoring) است ، زیرا همیشه اثرآن ، شتاب دادن بذره درجهت وضع تعادل آن میباشد . بنابراین درحرکت هامونیك ، وضع تعادل همیشه وضع تعادل پایدار است .

انرژی مکانیکی کل ذره نوسان کننده ، E ، حاصل جمع انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل ان است ، یا

$$E = K + U \qquad (۲-۱۳)$$

که درآن ، E ، اگر نیروهای غیرکنسرواتیوی ، مانند نیروی اصطکاك ، اثرنکنند ، ثابت میماند . شکل ۲-۱۳ ، E رابرای حرکت شکل ۱-۱۳ نشان میدهد . دقت کنید که چگونه معادله ۲-۱۳ برای این ذره در وضع نوعی نشان داده شده در شکل ۲-۱۳ صادق است . این ذره نمیتواند ازحدهای x_1 و x_2 بگذرد ، زیرا ، درخارج این حدّها ، U بر E فزونی دارد . همانگونه معادله ۲-۱۳ نشان میدهد ، لازم میآید که درچنین نقطه هائی انرژی جنبشی منفی باشد واین محال است .

برای محیط معینی ، یعنی ، برای تابع $U(x)$ معینی ، ذره نوسان کننده میتواند انرژی های کل مختلفی را داراباشد ، بسته بآن که ذره درآغاز چگونه بحرکت درآمده باشد . بنابراین انرژی کل میتواند بجای E ، E' باشد ، ودراین موردحدهای نوسان بجای x_1 و x_2 به ترتیب x'_1 و x'_2 خواهند بود ، هماهنگونه که شکل ۲-۱۳ نشان میدهد .

۲-۳-۱- نوسانگر هارمونیک ساده Simple harmonic oscillator

ذره نوسان کننده ای را درنظر میگیریم (شکل ۳-۵ a) ، که تحت تاثیر پتانسیل

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۳-۳)$$

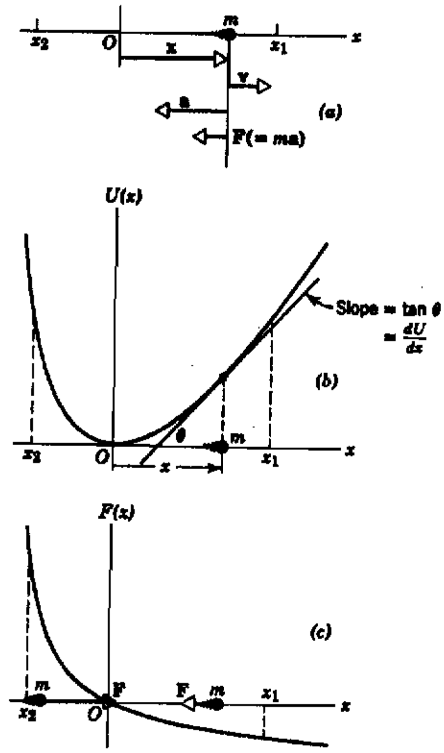
بگرد وضع تعادلش رفت وبرگشت نماید . دراین معادله k عددی است ثابت ، بشکل ۱۳-۳ b مراجعه کنید . نیروی وارده برذره ، توسط معادله ۷-۷ یامعادله زیرداده میشود :

$$F(x)=-\frac{dU}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=-kx \qquad (۱۳-۴)$$

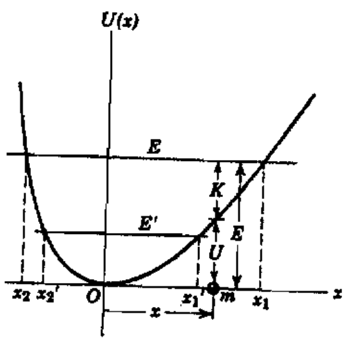
بشکل ۱۳-۳ c مراجعه کنید . چنین ذره نوسان کننده ای ، نوسانگر هارمونیک ساده ،وحرکت آن ،حرکت هارمونیک ساده نامیده میشود . درچنین حرکتی ، همانگونه که معادله ۱۳-۳ نشان میدهد ، منحنی انرژی پتانسیل بسان مربع تغییرمکان ، تغییرمیکند ،وهمانگونه که معادلـــه ۱۳-۴ نشان میدهد ، نیروی وارده برذره متناسب باتغییرمکان ودرجهت مخالف آن است . در حرکت هارمونیک ساده حدهای نوسان بیک اندازه ازوضع تعادل فاصلة دارند . این برای حرکت عمومی ترشکل ۱۳-۱ درست نیست . هرچند که این حرکت هارمونیک است ولی هارمونیک ساده نیست . قدرمطلق تغییرمکان ماکزیمم ، یعنی کمیت x_1 درشکل ۱۳-۲ ،که همیشه مثبت گرفتـــه میشود ، دامنه (amplitude) حرکت هارمونیک ساده نامیده میشود .

دانشجومعادله ۱۳-۳ $\left[U(x)=\frac{1}{2}kx^2\right]$ رابعنوان عبارت انرژی پتانسیل فنر "ایده آلی" که بفاصله x فشرده یاکشیده شده باشدبازخواهد شناخت . ببخش ۷-۴ مراجعه کنید . درهمین بخش، فنر ایده آل ، فنری تعریف شده است که دراثر کشیده شدن یا فشرده شدن ، نیروئی برابر $F(x)=-kx$ واردکند (بمعادله ۷-۴ مراجعه کنیــــد) ، k ثابت نیرو (force constant) نامیده میشود .

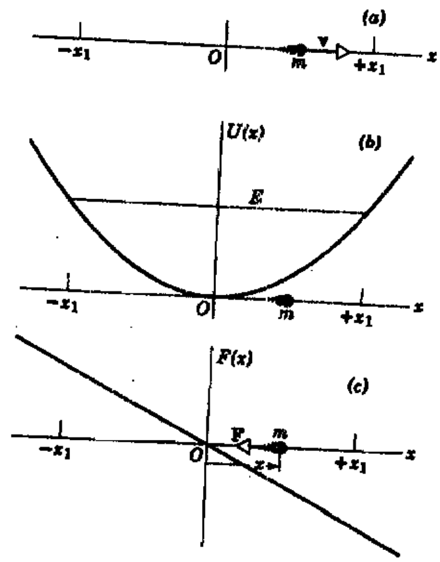
بنابراین ،جسمی بجرم m ،بسته به فنری ایده آل ، باثابت نیروی k ، که بتوانــد آزادانه برروی سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت کند ، مثالی ازنوسانگرهارمونیک ســاده اســت (بشکل ۱۳-۴ نگاه کنید) . دقت کنید که دراینجاوضعی وجود دارد (وضع تعادل ، بشکل ۱۳-۴ b نگاه کنید) که درآن فنر نیروئی برجسم وارد نمیکند . اگرجسم بطرف راست جابجاشود



شکل ۱۳-۱



شکل ۱۳-۲



شکل ۱۳-۳

(مانند شکل a ۱۳-۴) ، نیروی وارد برجسم توسط فنر بطرف چپ متوجه ، ومقدار آن برابـــر $F = -Kx$ خواهد بود . اگرجسم بطرف چپ جابجا شود (مانند شکل c ۱۳-۴) ، نیـرو بطرف راست متوجه ، ومقدار آن برابر $F = -Kx$ خواهد بود · درهر دو مورد نیرو ، نیروئی است بازگرداننده ، حرکت این جرم نوسان‌کننده ، حرکت هارمونیك ساده است .

اینك قانون دوم نیوتن $F = ma$ را درحرکت شکل ۱۳-۴ بکارمیبریم . بجای F ، $-Kx$ (ازمعادله ۱۳-۴) ، وبجای شتاب a ، $\frac{d^2x}{dt^2}\left(=\frac{dV}{dt}\right)$ رامیگذاریم . بدست میآید .

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

یا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad (13\text{-}5)$$

این معادله مشتق دوم x رادربردارد ، وبنابراین معادله دیفرانسیل نامیده میشود . حل این معادله عبارت است ازتعیین اینکه تغییرمکان ذره ، x ، چگونه بزمان t بستگی داشته‌باشد تا درآن معادله صدق نماید . اگرچگونگی بستگی x بزمان رابدانیم ، حرکت ذره راشناخته ایم . بنابراین معادله ۱۳-۵ ، معادله حرکت نوسانگرهارمونیك ساده نامیده میشود . این معادلـــه رادربخش‌آینده حل ، وحرکت وابسته راجزء بجزء توصیف خواهیم نمود .

مساله نوسانگرهارمونیك ساده بدودلیل اهمیت دارد . نخست‌آنکه ، اغلب مساله هـــای مربوط بارتعاشهای مکانیکی ، درمورد ارتعاشهای کم دامنه ، به مساله ارتعاشهای نوسانگـــر هارمونیك ساده ، یاترکیبی ازچنین ارتعاشهائی ، تبدیل میشوند . این بدان معناست‌کـــه پاره کوچکی ازمنحنی نیروی بازگرداننده ، شکل c ۱۳-۱ درنزدیکی مبدا ، بپاره خط راستی میماند . اگرپاره منحنی راباندازه کافی کوچك بگیریم ، میتوانیم این همانندی راتاهراندازه دلخواهی فزونی بخشیم . همانگونه که شکل c ۱۳-۲ نشان میدهد ، چنین پاره خط راستی ، مشخص‌کننده حرکت هارمونیك ساده است . بعبارت دیگر ، منحنی انرژی پتانسیل ، شکل b ۱۳-۱

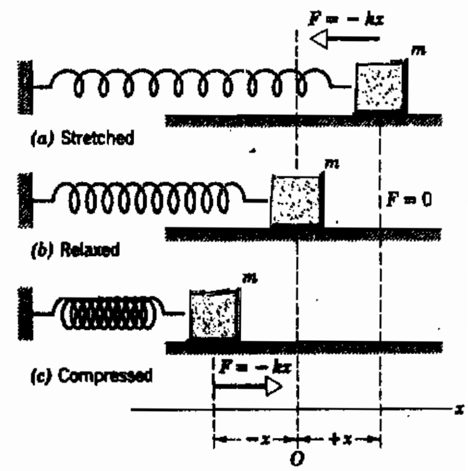
وابسته بحرکت نوسانی عمومی ، هنگامی که دامنه ارتعاش بگرد وضع تعادل ، O ، باندازه کافی کوچك باشد ، تبدیل بمنحنی شکل ۳-۳ b ۱۳ ، وابسته بنوسان هارمونیك ساده میگردد .

دلیل دیگرآنکه ، همانگونه که یادآورشویم ، معادله هائی مانند معادله ۵-۱۳ دربسیاری از مساله های فیزیکی درصوت ، اپتیك ، مکانیك ، مدارهای الکتریکی وحتی درفیزیك اتمی پیش میآیند . نوسانگرهارمونیك ساده ویژگیهای مشترکی بابسیاری ازدستگاههای فیزیکی نشان میدهد .

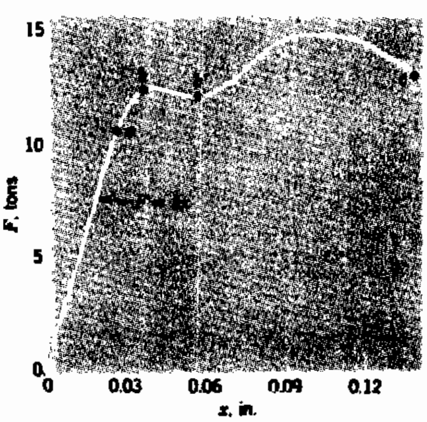
معادله ٤-۱۳ ($F = -Kx$) بستگی تجربی است ، معروف بقانون Hooke این قانون حالت ویژه ای ازبستگی کلی تری درباره تغییر شکل جسمهای الاستیك کــــه توسط Robert - Hooke (1635-1703) کشف شده است . فنر ها وجسمهای الاستیك دیگربشرط آنکه تغییر شکل آنها بسیار بزرگ نباشد ازاین قانون پیروی میکنند . اگرجامدی بیش ازمیزانی که حدالاستیك نامیده میشود تغییر شکل یابد ، پس ازحذف نیروبشکل نخستین خــود بازگشت نمیکند (شکل ۵-۱۳) . تجربه نشان میدهد که قانون هوك تافاصله بسیارکمی ازحــد الاستیك برای بسیاری ازمواد معمولی صادق است. قلمرو نیروهای وارد ، که درآن قلمرو ، قانون هوك معتبر باشد " منطقه تناسب " نامیده میشود . آنسوی حدالاستیك ، نیرو رادیگرنمیتــوان بکمك تابع انرژی پتانسیل تصریح نمود ، زیرادرآنجا نیرو بستگی بعاملهای بسیاری دارد ، از آن میان سرعت تغییر شکل وتاریخ گذشته جامد .

توجه کنید که نیروی بازگرداننده وتابع انرژی پتانسیل نوسانگرهارمونیك ساده همان کمیت های متناظر جامدی هستند که دریك بعد ودرمنطقه تناسب تغییر شکل یافته باشد . اگرجامد تغییر شکل یافته رهاشود ، جامد درست مانند نوسانگرهارمونیك ساده ارتعاش خواهد کرد . بنابراین ، تاهنگامی که دامنه ارتعاش باندازه کافی کوچك باشد ، یعنی ، تاهنگامی که تغییر شکل درمنطقه تناسب باقی بماند ، ارتعاشهای مکانیکی درست مانند نوسانهای هارمونیك ساده انجام میگیرند . این بحث رامیتوان به آسانی تعمیم بخشید ونشان داد که هرمساله ای درباره نوسانهای مکانیکــی کم دامنه سه بعدی رامیتوان به ترکیبی ازنوسانهای هارمونیك ساده تبدیل نمود .

تاریاپرده نوسان کننده ، ارتعاشهای صوتی ، ارتعاشهای اتمها درجامدها ، ارتعاشهای



شکل ۴-۱۳



شکل ۵-۱۴

الکتریکی یاصوتی درحفره ایزامیتوان ، بصورتی که ازنظر ریاضی اینهمان (identical with) دستگاهی ازنوسانگرهای‌هارمونیك باشد ، توصیف نمود . این همانندی ماراقادرمیسازد که مساله هائی رادربخشی ازفیزیك بابکاربردن روشهای که دربخشهای دیگر گسترش یافته اند حل نمائیم .

۱۲-۳ حرکت هارمونیك ساده

اکنون معادله حرکت نوسانگرهارمونیك ساده راحل میکنیم ،

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=0 \qquad (12\text{-}6)$$

یادآورمیشویم که هردستگاهی بجرم m که برآن نیروئی مانند $F=-Kx$ اثرکند ، ازاین معادله پیروی خواهد نمود . درمورد فنر ، ثابت تناسب ، K ، ثابت نیروی آن است ، که توسط خشکی فنرتعیین میشود (stiffness) . دردستگاههای نوسان کننده دیگرثابت تناسب K ، چنانکه درآینده خواهیم دید ، ممکن است بستگی به ویژگیهای فیزیکی دیگر دستگاه داشته باشد . مامیتوانیم فنرنوسان کننده رابعنوان نمونه بکار بریم .

معادله ۱۲-۶ ، معادله ای دیفرانسیل است. این معادله بستگی میان تابعی از زمان ، $x(t)$ ، ومشتق دوم آن نسبت بزمان ، d^2x/dt^2 ، رابدست میدهد . برای یافتن وضع ذره بعنوان تابعی اززمان ، باید تابع $x(t)$ راکه دراین بستگی صدق کند پیدا نمائیم .

معادله ۱۲-۶ رامیتوانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{K}{m}x \qquad (12\text{-}7)$$

لازم میآید که درمعادله ۱۲-۷ ، $x(t)$ تابعی باشد که مشتق دوم آن (ضریب ثابت $\frac{K}{m}$ بکنار) خود تابع باعلامت منفی باشد . ازآنچه که درریاضیات دیده ایم میدانیم ، که تابع

سینوس و تابع کسینوس چنین خاصیتی دارند . بعنوان مثال

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \;,\; \frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\frac{d}{dt}\sin t = -\cos t$$

اگر تابع کسینوس را در ثابتی مانند A ضرب کنیم ، این خاصیت تغییر نمیکند . از آنجائیکه تابع سینوس نیز همان خاصیت را دارد ، میتوانیم موقتا حل معادله ۷-۱۳ را ترکیبی از این دو تابع اختیار کنیم ، و آنرا با ضرب کردن در مقدار ثابتی (با توجه بضریب $\frac{K}{m}$ در معادله ۷-۱۳) بصورت زیر بنویسیم :

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (۸-۱۳)$$

در اینجا چون برابری

$$\cos(\omega t+\delta) = \cos\delta\cos\omega t - \sin\delta\sin\omega t = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

برقرار است ، ثابت δ هر نوع ترکیبی از تابعهای سینوس و کسینوس را امکان پذیر میسازد . باین ترتیب ، عمومی ترین حل معادله ۷-۱۳ را بر حسب ثابتهای مجهول A ، ω و δ نوشته ایم . برای اینکه این ثابتها را بقسمی تعیین کنیم که معادله ۸-۱۳ در واقع جواب معادله ۷-۱۳ باشد ، دوبار از معادله ۸-۱۳ نسبت بزمان مشتق میگیریم :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\delta)$$

و

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)$$

با جایگزین ساختن این بستگی در معادله ۷-۱۳ بدست میآوریم :

$$-\omega^2 A\cos(\omega t+\delta) = -\frac{k}{m}A\cos(\omega t+\delta)$$

بنابراین ، اگر ثابت ω را چنان اختیار کنیم که

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \qquad (۹-۱۳)$$

گردد ، $x = A\cos(\omega t+\delta)$ در واقع ، حل معادله نوسانگرها رمونیک ساده خواهد بود . ثابتهای A و δ هنوز نامعیین ، و بنابراین ، هنوز کاملا اختیاری میباشند . این بد ان معناست که هر انتخابی از A و δ برای ω در معادله ۷-۱۳ صدق خواهد کرد ، چنانکه حرکتهای گوناگون

بسیاری برای نوسانگر ممکن میگردد . در واقع ، این صفت مشخص‌کننده معادله دیفرانسیل حرکت است ، زیرا چنین معادله ای نه فقط حرکتی واحد ، بلکه گروه یا خانواده ای از حرکتهای ممکن را ، که در برخی از خاصیتها مشترك و در برخی دیگر متفاوت میباشند ، توصیف مینماید . در این مورد ω برای همه حرکتهای ممکن مشترك است ، ولی A و δ ممکن است از حرکتی بحرکت دیگــــر تغییرکنند . پس از این خواهیم دید که چگونگی آغاز حرکت هارمونیك خاص ، ثابت های A و δ را برای آن حرکت تعیین میکند .

اینك معنای فیزیکی ثابت ω را می جوئیم . اگر در معادله ۸-۱۳ زمان t را باندازه $\frac{2\pi}{\omega}$ افزایش دهیم ، تابع بصورت زیر درمیآید .

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\delta\right] \\
&= A\cos(\omega t+2\pi+\delta) \\
&= A\cos(\omega t+\delta)
\end{aligned}
$$

یعنی ، این تابع پس ازگذشت زمانی برابر $\frac{2\pi}{\omega}$ ، صرفاً تکرار میشود . بنابراین ، $\frac{2\pi}{\omega}$ دوره تناوب حرکت ، T ، میباشد . چون $\omega^2=\frac{K}{m}$ است ، پس

$$
T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (13\text{-}10)
$$

بنابراین ، همه حرکتهای داده شده توسط معادله ۱۳-۷ دوره تناوب یکسانی دارند . این دوره تناوب فقط توسط جرم ذره ارتعاش‌کننده ، m ، وثابت نیرو ، K ، تعیین میشود . بسامد نوسانگر ، ν ، شماره نوسانهای کامل در واحد زمان است ، ومعادله زیرآنرا بدست میدهد .

$$
\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (13\text{-}11)
$$

بنابراین

$$
\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T} \qquad (13\text{-}12)
$$

کمیت ω بسامد زاویه ای خوانده میشود، واز بسامد ν با ضریب 2π متمایز میگردد. بعد آن معکوس زمان (مانند سرعت زاویه ای)، و واحد آن rad/sec است. در بخش ۱۳-٦، معنائی هندسی برای بسامد زاویه ای بدست خواهیم داد.

ثابت A معنای فیزیکی ساده ای دارد. تابع کسینوس مقدارهای از ۱- تا ۱ را بخود میگیرد. بنابراین، تغییرمکان x ازوضع تعادل، $x = o$، مقدار ماکزیمم A را دارد. باین ترتیب، $A(= x_{Max})$ دامنه حرکت است. ازآنجائی که معادله دیفرانسیل، A رامشخص نمیکند، حرکتهائی بادامنه های مختلف ممکن میباشند، اما این حرکتها بسامد و دوره تناوب یکسانی دارند. بسامد حرکت هارمونیك ساده مستقل ازدامنه حرکت است.

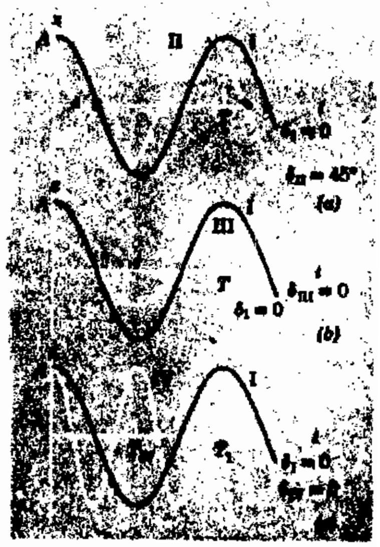
کمیت $(\omega t + \delta)$ فاز (phase) حرکت خوانده میشود. ثابت δ، ثابت فاز خوانده میشود. ممکن است دوحرکت دارای دامنه وبسامد یکسان ولی فاز مختلفی باشند. مثلاً اگر $\delta = -\frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t - 90^\circ) = A\sin\omega t$$

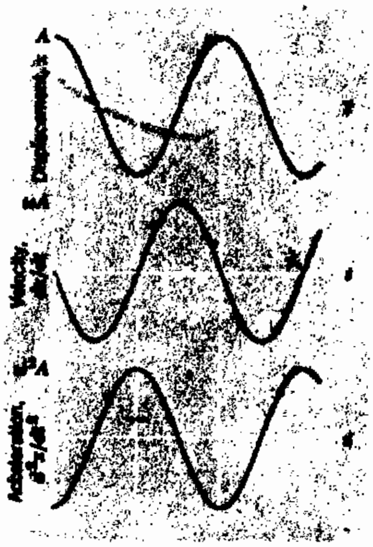
چنانکه تغییرمکان درزمان $t = o$ برابر صفرگردد. هنگامیکه $\delta = o$ باشد، تغییر مکان $x = A\cos\omega t$ درزمان $t = o$ ماکزیمم خواهدبود. تغییرمکانهای آغازی (initial) دیگر، وابسته به ثابتهای فازدیگری میباشند.

دامنه A وثابت فاز δ، توسط وضع وسرعت آغازی ذره تعیین میگردند. این دو شرط آغازی دقیقاً A و δ راتصریح مینمایند باین همه، همینکه حرکت آغاز شود ذره با دامنه ثابت وفاز ثابتی، وبابسامدی معین، بنوسان خودادامه خواهدداد، مگرآنکه نیروهای دیگری دستگاه رامختل نمایند.

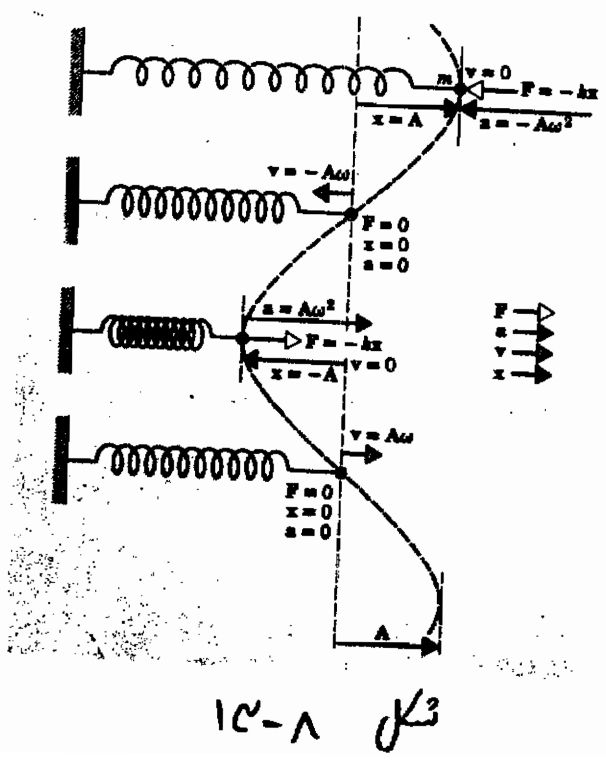
درشکل ۱۳-٦، تغییرمکان x برحسب زمان t رابرای چند حرکت هارمونیك ساده رسم نموده ایم. سه نوسان راباهم مقایسه کرده ایم. درشکل ۱۳-٦ a، I و II دامنه وبسامدی یکسان، واختلاف فازی برابر $\delta = \frac{\pi}{4}$ یا 45° دارند. درشکل ۱۳-٦ b، I و III



شکل ۱۳-۶



شکل ۱۳-۷



شکل ۱۳-۸

بسامد وفازی یکسان دارند ، اما دامنه یکی دوبرابر دیگری است . درشکل 13-6C ، I و IV دامنه وفازی یکسان دارند وبسامد یکی دوبرابر دیگری، یادوره تناوب این ، دوبرابر دوره تناوب آن است. دانشجو باید این منحنی هارابدقت بررسی نماید تاباواژه های متداول در حرکت هارمونیك ساده آشناگردد .

صفت برجسته حرکت ها رمونیك ساده ، بستگی میان تغییرمکان ، سرعت وشتاب ذره نوسان کننده میباشد . اینك این کمیتها رابرای منحنی نوعی I درشکل ۱۳-٦ مقایسه میکنیم . درشکل ۱۳-۷ ، منحنی تغییرمکان x برحسب زمان t ، سرعت $V=\frac{dx}{dt}$ برحسب زمان وشتاب $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ برحسب زمان راجدا ازیکدیگر رسم نموده ایم. معادله های منحنی هاعبارتند از

$$x = A\cos(\omega t+\delta)$$

$$V=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\delta) \qquad (۱۳-۱۳)$$

$$a=\frac{dV}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)$$

درحرکت رسم شده ، δ رابرابر صفر انتخاب کرده ایم. واحدهاومقیاسهای تغییرمکان ، سرعت وشتاب رابرای آسانی مقایسه حذف کرده ایم . توجه کنید که تغییرمکان ماکزیمم ، A ، سرعت ماکزیمم ، ωA ، وشتاب ماکزیمم ، $\omega^2 A$ ، میباشند .

هنگامی که تغییرمکان دریکی از دوجهت ماکزیمم باشد ، قدرمطلق سرعت برابر صفرخواهد بود ، زیراسرعت باید دراین لحظه تغییرجهت دهد . دراین لحظه شتاب ، مانند نیروی بازگرداننده ، ماکزیمم ودرجهت مخالف تغییرمکان میباشد . هنگامی که تغییرمکان برابر صفر باشد ، سرعت ذره ماکزیمم وشتاب آن صفر خواهد بود ، متناظر بانیروی بازگرداننده ای برابر صفر . سرعت ، هنگامی که ذره بسوی وضع تعادل درحرکت باشد ، افزایش می یابد ، وسپس هنگامی که بطرف تغییرمکان ماکزیمم برود ، کاهش می یابد ، درست مانند گلوله آونگ .

درشکل ۱۳-۸ ، اندازه های لحظه ای $\vec{x}$ ، $\vec{V}$ و $\vec{a}$ رادرچهار لحظه

مختلف برای حرکت ذره ای که درانتهای فنری نوسان‌کند نشان داده ایم .

۴-۱۳- ملاحظات انرژی در حرکت هارمونیک ساده

معادله ۲-۱۳ میگوید که درحرکت هارمونیک ، واز آن میان حرکت هارمونیک ساده ، که درآن نیروهای بهدر دهنده انرژی وارد نشوند ، انرژی مکانیکی کل $E(=K+U)$ ثابت خواهد بود . اینک میتوانیم این نتیجه رابرای حالت ویژه حرکت هارمونیک ساده باتفصیل بیشتری بررسی نمائیم . دراین حرکت ، تغییرمکان ، توسط معادله زیرداده میشود

$$x = A\cos(\omega t+\delta) \tag{۱۳-۸}$$

انرژی پتانسیل U درهرلحظه چنین است

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta) \tag{۱۳-۱۴}$$

انرژی پتانسیل مقدار ماکزیممی دارد برابر $\frac{1}{2}kA^2$. درطول حرکت انرژی پتانسیل میان صفر واین ماکزیمم تغییر میکند ، همانگونه که منحنی های شکلهای ۱۳-۹a و ۱۳-۹b نشان میدهند .

انرژی جنبشی K درهرلحظه برابر $\frac{1}{2}mv^2$ است. بابکاربردن بستگیهای

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\delta)$$

و

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

بدست میآید

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\delta)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta) \tag{۱۳-۱۵}$$

بنابراین ، انرژی جنبشی مقدارماکزیممی برابر $\frac{1}{2}kA^2$ یا $\frac{1}{2}m(\omega A)^2$ دارد ، یعنی ،

برابرمقداری‌که ازسرعت ماکزیمم ωA ، که پیش‌ازاین آمد ، انتظارمیرود . درطول حرکت ، انرژی جنبشی میان صفروابن ماکزیمم تغییرمیکند ، همانگونه که منحنی های شکلهای a۹-۱۳ و b۹-۱۳ نشان میدهند .

انرژی مکانیکی کل ، مجموع انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل میباشد . بابکاربردن معادله های ۱۴-۱۳ و ۱۵-۱۳ بدست میآوریم :

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (۱۳-۱۶)$$

دیده میشود که انرژی مکانیکی کل ، همانگونه که انتظار میرود ، ثابت است ومقدارآن $\frac{1}{2}kA^2$ میباشد . درنقطه ای که تغییرمکان ماکزیمم باشد ، انرژی جنبشی برابر صفرخواهدبود . ولـــی انرژی پتانسیل مقدار $\frac{1}{2}kA^2$ راخواهدداشت. دروضع تعادل انرژی پتانسیل برابرصفر است ، ولی انرژی جنبشی مقدار $\frac{1}{2}kA^2$ رادارااست . درنقطه های دیگر ، انرژیهـــای جنبشی وپتانسیل هریک مقدارهائی رادارندکه مجموعشان همواره برابر $\frac{1}{2}kA^2$ میباشد . این انرژی کل ثابت درشکلهای a۹-۱۳ و b۹-۱۳ نشان داده شده است. انرژی کل ذره ای که حرکت هارمونیک ساده انجام دهد ، متناسب بامربع دامنه نوسان میباشد . ازشکل a ۹-۱۳ بروشنی برمیآیدکه میانگین انرژی جنبشی حرکت درطول یک دوره تناوب ، درست برابر میانگیـن انرژی پتانسیل میباشد ، وهردو میانگین برابر $\frac{1}{4}kA^2$ میباشند .

معادله ۱۶-۱۳ رامیتوان بصورت کاملا عمومی زیرنوشت :

$$K+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \qquad (۱۳-۱۷)$$

ازاین بستگی بدست میآوریم :

$$v^2=\left(\frac{k}{m}\right)\left(A^2-x^2\right)$$

یا :

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2-x^2)} \qquad (۱۳-۱۸)$$

این بستگی بروشنی نشان میدهد که سرعت در وضع تعادل ، $x=0$ ، ماکزیمم ، ودر نقطه ماکزیمم تغییرمکان ، $x=A$ ، برابر صفراست . درواقع ، میتوانیم ازاصل پایائی انرژی ، معادله ۱۷-۱۳ ، (که درآن $\frac{1}{2}kA^2=E$ میباشد) ، شروع کنیم ویکمک انتگرالگیری ازمعادله ۱۸-۱۳ تغییرمکان رابعنوان تابعی از زمان بدست آوریم . این نتیجه بامعادله ۸-۱۳ ، که ماآنرا از معادله دیفرانسیل حرکت ، معادله ۶-۱۳ ، استنتاج کردیم ، یکسان میباشد . (به مساله ۲۲ مراجعه کنید .)

مثال ۱

فنرافقی شکل ۴-۱۳ ، هنگامی که نیروئی برابر $0.75\ lb$ برآن وارد شود ، باندازه $3.0\ in$ ازوضع تعادلش کشیده میشود . سپس جسمی بوزن $1.5\ lb$ راباانتهای فنر میبندیم ، وآنرا باندازه $4.0\ in$ روی میزافقی بدون اصطکاکی ازوضع تعادلش دورمیکنیم . آنگاه جسم رارها میکنیم تا حرکت هارمونیك ساده انجام دهد .

(a) ثابت نیروی فنر چیست ؟

نیروئی برابر $0.75\ lb$ واردبرفنر ، تغییرمکانی برابر $0.25\ ft$ راسبب میشود . بنابراین

$$k=\frac{F}{x}=\frac{0.75\ lb}{0.25\ ft}=3.0\ lb/ft$$

چرامادراینجابستگی $k=-\frac{F}{x}$ رابکار نبردیم ؟

(b) نیروی وارد برجسم بوزن $1.5\ lb$ ، درست پس ازرهاشدن چه اندازهاست ؟ فنر باندازه $4.0\ in$ یا $1/3\ ft$ کشیده شده است. بنابراین ، نیروی اعمال شده توسط فنر برابراست با

$$F=-kx=-(3.0\ lb/ft)(1/3\ ft)=-1.0\ lb$$

علامت منفی بالا نشان میدهد که نیرودرجهت مخالف تغییرمکان وارد میشود .

(c) دوره تناوب نوسان پس ازرهاشدن چیست ؟

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.5}{32 \times 3.0}}\,sec = \frac{\pi}{4}\,sec = 0.79\,sec$$

این همارز (equivalent) بسامدی $\nu = \frac{1}{T'}$ برابر $1.3\ cycles/sec$ ، وسرعتی زاویه ای $\omega(= 2\pi\nu)$ برابر $8.0\ rad/sec$ میباشد .

(d) دامنه نوسان چیست ؟

مقدار ماکزیمم تغییرمکان ، متناظر با انرژی جنبش برابر صفر ، و انرژی پتانسیل ماکزیمم میباشد . این ، شرط آغازی هنگام رهاشدن است ، ودامنه حرکت برابر تغییرمکان آغازی (برابر $4.0\ in$) میباشد . بنابراین ، $A = 1/3\ ft$.

(e) ماکزیمم سرعت جسم ارتعاش کننده چیست ؟

ازمعادله ۱۳-۱۳ ، $V_{max} = \omega A = \left(\frac{2\pi}{T'}\right) A$ ، نتیجه میشود

$$V_{max} = \left(\frac{2\pi}{\pi/4}\,sec^{-1}\right)\left(1/3\,ft\right) = 2.7\ ft/sec$$

سرعت ماکزیمم در وضع تعادل ، $x = 0$ ، واقع میشود . سرعت درهر دوره تناوب دو بار باین مقدار ماکزیمم میرسد . نخستین بار پس از رهاشدن ، هنگامیکه جسم از نقطه $x = 0$ میگذرد ، سرعت برابر $-2.7\ ft/sec$ ، ودربرگشت هنگام گذشتن ازهمین نقطه ، سرعت برابر $+2.7\ ft/sec$ میگردد .

(f) شتاب ماکزیمم جسم چیست ؟

ازمعادله ۱۳-۱۳ داریم

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{K}{m} A$$

$$a_{max} = \left(\frac{3.0}{1.5/32}\right)\left(\frac{1}{3}\right) ft/sec^2 = 21\ ft/sec^2$$

شتاب ماکزیمم درنقطه های انتهائی گذرگاه ، $x = \pm A$ ، و $V = 0$ ، واقع میگردد . بنابراین ، شتاب $a = -21\ ft/sec^2$ درنقطه $x = A$ و $a = +21\ ft/sec^2$

درنقطه $x = -A$ میباشد . شتاب وتغییرمکان دردوجهت مخالف میباشند .

(g) سرعت ، شتاب ، انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل جسم راهنگامی که نیمی ازفاصله میان نقطه آغاز حرکت ومرکزحرکت راپیموده باشد ، حساب کنید .

دراین نقطه ، $x = \frac{A}{2} = \frac{1}{6}\ ft$ ، وازمعادله ۱۸-۱۳ داریم

$$V = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= -\frac{2\pi}{\pi/4}\sqrt{(1/3)^2 - (\tfrac{1}{6})^2}\ ft/sec = \frac{-4}{\sqrt{3}}\ ft/sec = -2.3\ ft/sec$$

$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{3.0}{1.5/32}\left(\frac{1}{6}\right) ft/sec^2 = -11\ ft/sec^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1.5}{32}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 ft\text{-}lb = \frac{1}{8}\ ft\text{-}lb$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(3\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 ft\text{-}lb = \frac{1}{24}\ ft\text{-}lb$$

(h) انرژی کل دستگاه نوسان کننده راحساب کنید .

ازآنجائیکه انرژی کل ثابت است ، میتوانیم آنرا درهرمرحله ای ازحرکت حساب کنیم . بابکاربردن نتیجه های قبلی بدست میآوریم

$$E = K + U = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}\ ft\text{-}lb \quad (x = \frac{A}{2} \text{ ذره در})$$

$$E = U_{Max} = \frac{1}{2}kx^2_{Max} = \left(\tfrac{1}{2}\right)(3)\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}\ ft\text{-}lb \quad (x = A \text{ ذره در})$$

$$E = K_{Max} = \frac{1}{2}MV^2_{Max} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1.5}{32}\right)\left(\tfrac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}\ ft\text{-}lb \quad (x = 0 \text{ ذره در})$$

(i) تغییرمکان جسم بعنوان تابعی اززمان چیست ؟

بطورکلی داریم

$$x = A\cos(\omega t+\delta)$$

چنانکه درپیش آمد ، $A = \frac{1}{3}ft$. اکنون باید ω و δ راتعیین کنیم .

بدست میآوریم

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8\ rad/sec$$

پس برحسب واحد ای بالا داریم

$$x = \frac{1}{3}\cos(\omega t+\delta)$$

درزمان $t=0$ ، $x=\frac{1}{3}ft$ ، پس دراین لحظه

$$x = \frac{1}{3}\cos\delta = \frac{1}{3}$$

یا

$$\delta = 0\ rad$$

بنابراین ، بابکاربردن $A=\frac{1}{3}ft$ ، $\omega = 8\ rad/sec$ ، $\delta = 0\ rad$

بدست میآوریم

$$x = \frac{1}{3}\cos 8t$$

این معادله حرکت جسم راتوصیف مینماید ، ودرآن x برحسب پا یا $(foot)$ ، t برحسب ثانیه وزاویه $8t$ برحسب رادیان میباشند .

۵-۱۳ کاربردهای حرکت هارمونیك ساده

اینك چند دستگاه فیزیکی راکه دارای حرکت هارمونیك ساده میباشند درنظر میگیریم . دستگاههای دیگری ازاین قبیل رادراین متن موردبحث قرارخواهیم داد .

آونگ ساده

آونگ ساده دستگاهی است ایده آلی ومرکب ازجرمی نقطه ای آویخته بنخی سبك که طول آن افزایش ناپذیراست . اگرآونگ راازوضع تعادلش دوروسپس رهانمائیم ،آونگ تحت تاثیر

نیروی گرانی درصفحه قائم تاب خواهد خورد . این حرکت تناوبی ونوسانی است. میخواهیم دوره تناوب این حرکت راتعیین کنیم.

شکل ۱۳-۱۰ آونگی رابطول l وجرم m ، که زاویه ای برابر θ باخط قائم میسازد ، نشان میدهد . نیروهای وارد بر m عبارتند از $m\vec{g}$ ، نیروی گرانی ، و $\vec{T}$ ،کشش نخ . دومحور ، یکی مماس بردائره حرکت ودیگری درامتداد نخ ، انتخاب میکنیم . نیروی $m\vec{g}$ رابه دومولفه ، یکی درامتداد نخ وباندازه $mg\cos\theta$ ،ودیگری درامتداد مماس برگذرگاه وباندازه $mg\sin\theta$ تجزیه میکنیم. مولفه های نیروها درامتداد نخ ، نیروی لازم برای بوجودآوردن شتاب متوجه به مرکزراتامین میکنند تاذره رابرروی کمانی ازدایره گذرگاه درحال حرکت نگاه دارند . مولفه مماس بر گذرگاه همان نیروی بازگرداننده ای است که بر m وارد میگردد ، واثر آن بازگرداندن ذره بوضع تعادل میباشد . بنابراین ، نیروی بازگرداننده عبارت است از

$$F = -mg\sin\theta$$

توجه کنید که نیروی باز گرداننده باتغییرمکان زاویه ای θ متناسب نیست ، بلکه با $\sin\theta$ متناسب است . بنابراین ، حرکت حاصل ، حرکت ساده هارمونیك نیست. باوجود این ، اگر زاویه θ کوچك باشد ، $\sin\theta$ باتقریب بسیارخوبی با θ (برحسب رادیان) برابر خواهدبود .

تغییرمکان درطول کمان گذرگاه برابر با $x = l\theta$ واگر θ کوچك باشد ، حرکت تقریبا درامتداد خطی راست خواهدبود . بنابراین بافرض $\sin\theta \cong \theta$ بدست میآوریم

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

بنابراین ، اگرتغییرمکان کوچك باشد ، نیروی بازگرداننده متناسب باتغییر مکان ودرجهت مخالف آن خواهدبود . این دقیقا" شرط لازم برای حرکت هارمونیك ساده میباشد . ثابت $\frac{mg}{l}$ نماینده ثابت K در $F=-Kx$ میباشد . درستی بعدهای K و $\frac{mg}{l}$ راتحقیق

کنید . دوره تناوب آونگ ساده هنگامی که دامنه آن کوچك باشد برابرخواهد بود با

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}}$$

یا

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۱۳-۱۹)$$

توجه کنید که دوره تناوب بجرم ذره آویخته بستگی ندارد .

آونگ پیچشی Torsional-pendulum

درشکل (۱۳-۱۱) ، دیسك آویخته بسیمی رانشان داده ایم. این سیم به مرکز جرم دیسك بسته شده است. درروضع تعادل دیسك ، پرتوی ازمرکزدیسك به نقطه P ، همانگونه که درشکل نشان داده شده است ، رسم نموده ایم . اگردیسك رادرصفحه ای افقی ازوضع P تاوضع Q بچرخانیم ، سیم آونگ پیچیده خواهدشد . این سیم پیچیده گشتاور نیروئی بر دیسك وارد میکندکه اثر آن بازگرداندن دیسك بوضع P میباشد . این گشتاور نیرو ، گشتاوری بازگرداننده است . اگرپیچش کوچك باشد ، دیده میشودکه گشتاور نیروی بازگرداننده بامقدار پیچش ، یا باتغییر مکان زاویه ای ، متناسب است (قانون هوك) ، چنانکه

$$\tau = \mathcal{K}\theta \qquad (۱۳-۲۰)$$

دراینجا ، $\mathcal{K}$ ثابتی است که بخواص سیم بستگی دارد وثابت پیچش خوانده میشود . علامت منفی نشان میدهد که گشتاور نیرودرجهت مخالف تغییرمکان زاویه ای میباشد . معادله ۱۳-۲۰ شرط لازم برای حرکت هارمونیك ساده زاویه ای است.

معادله حرکت چنین دستگاهی این است :

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

چنانکه ، بابکاربردن معادله ۱۳-۲۰ بدست میآوریم

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad (۱۳-۲۱)$$

بهمانندی میان معادله (۱۳-۲۱) ، برای حرکت هارمونیك ساده زاویه ای ، ومعادله ۱۳-۷ برای حرکت هارمونیك ساده خطی ، توجه کنید . درواقع، این دومعادله ازنظر ریاضی یکی هستند . دراینجا صرفاً تغییرمکان زاویه ای θ رابجای x ، وگشتاور ماند I رابجای m وثابت تابش κ رابجای ثابت نیروی K قرارداده ایم . بنابراین ، جواب معادله ۱۳-۲۱ ، حرکت هارمونیك ساده ای برحسب مختصه θ میباشد ، یعنی

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t+\delta) \qquad (۱۳-۲۲)$$

دراینجا θ_m تغییرمکان زاویه ای ماکزیمم ، یعنی ، دامنه نوسان زاویه ای ، میباشد . درشکل (۱۳-۱) دیسك بگرد وضع تعادلی ، $\theta = 0$ خط (OP) ، نوسان میکند وبرد زاویه ای کل (از OQ تا OR برابر $2\theta_m$ میباشد .

درهمانندی این معادله بامعادله (۱۳-۱۷) ، دوره تناوب نوسان نتیجه میشود :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad (۱۳-۲۳)$$

اگر κ رابدانیم و T راندازه بگیریم ، میتوانیم گشتاور ماند هرجسم نوسان کننده صلبی ، I ، رابگرد محور دوران تعیین کنیم . اگر I رابدانیم و T راندازه بگیریم ، میتوانیم ثابت پیچش هرتکه سیمی ، κ ، راتعیین نمائیم .

دربسیاری ازدستگاههای آزمایشگاهی ، ازآن میان گالوانومتر Galvanometer نوسانهای پیچشی بکاررفته اند . ترازوی کوندیش Cavendish balance آونگی پیچشی است (فصل ۱۶) رقاصك balance wheel ساعت مچی مثال دیگری ازحرکت هارمونیك

زاویه ای میباشد ونیروی بازگرداننده بکمک فنر رقاصك تامین میگردد .

مثال ۲

میله نازکی بجرم $0.10\ kg$ وبه درازای $0.10\ m$ ،بسیمی که ازمرکز میلـــه میگذرد وبرآن عمود میباشد ،آویخته شده است ، سیم رامی تابانیم تامیله به نوسان درآید . دیده میشود که دوره تناوب $2.0\ sec$ است. هنگامی که جسمی تخت ، بشکل مثلث متساوی الاضلاعی ، رابهمان ترتیب بالا ، بسیمی که از مرکز جرمش میگذرد ،بیاویزیم ، دیده میشودکه دوره تناوب $6.0\ sec$ میباشد . گشتاور ماند مثلث رابگرد این محور پیداکنید .

گشتاور ماند میله برابراست با $Ml^2/12$ (جدول ۱-۱۲ رانگاه کنید) . بنا براین ،

$$I_{rod} = \frac{(0.10kg)(0.10m)^2}{12} = 8.3\times10^{-5}\ kg\text{-}m^2$$

ازمعادله (۲۳-۱۳) داریم

$$\frac{T_{\text{میله}}}{T_{\text{مثلث}}} = \left(\frac{I_{\text{میله}}}{I_{\text{مثلث}}}\right)^{1/2}$$

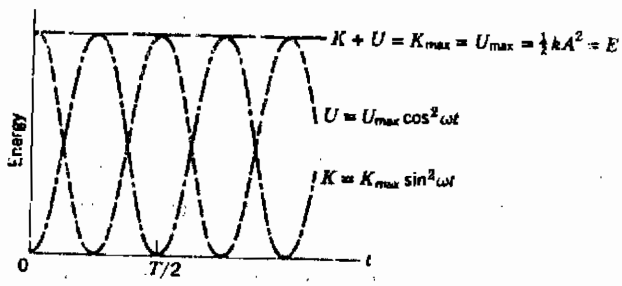
یا

$$I_{\text{مثلث}} = I_{\text{میله}}\left(\frac{T_{\text{مثلث}}}{T_{\text{میله}}}\right)^2$$

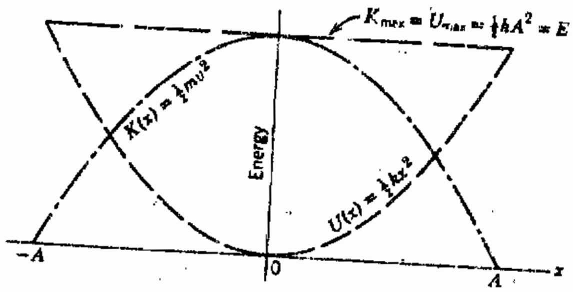
باین ترتیب

$$I_{\text{مثلث}} = (8.3\times10^{-5}\ kg\text{-}m^2)\left(\frac{6.0\ sec}{2.0\ sec}\right)^2 = 7.5\times10^{-4}\ kg\text{-}m^2$$

آیا،درمورد های بالا ، دامنه نوسان اثری بردوره تناوب دارد ؟

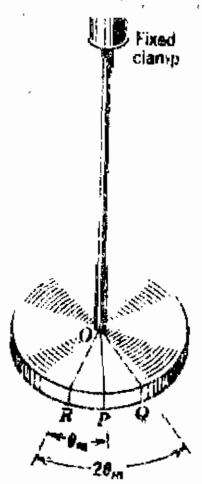


شکل ۱۲-۹(a)



شکل ۱۲-۹(b)

شکل ۱۲-۱۰



شکل ۱۲-۱۱

۱۲-۶ بستگی میان حرکت هارمونیک ساده و حرکت دایره ای یکنواخت

اینک ،بستگی میان حرکت هارمونیک ساده ، در طول خطی راست حرکت دایره ای یکنواخت رابررسی میکنیم . این بستگی میان حرکت هارمونیک ساده سودمند است.

این بستگی ،همچنین ،معنای هندسی ساده ای بسامد زاویه ای ω ثابت فاز کی میدهد .

حرکت دایره ای یکنواخت مثالی از ترکیب حرکتهای هارمونیک ساده نیز میباشد ،و این پدیده ای استکه در حرکت موجی اغلب با آن سروکار داریم .

در شکل ۱۲-۱۲ ، Q نقطه ای است که دایره ای بشعاع A را باسرعت زاویه ای ثابت ω ،که مثلا برحسب rad/sec بیان شده است،میپیماید . P تصویر قائم

Q برقطر افقی ، در امتداد محور x است . Q رانقطه مقایسه ، ودائره ای راکه نقطه بر آن حرکت میکند ، دائره مقایسه مینامیم . هنگامیکه نقطه مقایسه دوران کند ، تصویرآن ، P ، درامتداد افقی رفت وبرگشت خواهد نمود . مولفه x تغییرمکان Q همیشه باتغییرمکان P ومولفه x سرعت Q همیشه باسرعت P ومولفه x شتاب Q همیشه باشتاب P برابرخواهند بود .

زاویه میان پرتو OQ ومحور x را ، درلحظه $t = 0$ ، δ مینامیم . ازآنجائی که نقطه Q باسرعت زاویه ای ثابتی حرکت میکند ، زاویه میان OQ ومحور x ، درهرلحظه بعدی t ، برابر $\omega t + \delta$ است. بنابراین ، طول نقطه Q برمحور x درهرلحظه ای برابر است با

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \tag{۱۳-۲٤}$$

باین‌ترتیب ،نقطه تصویر ، P ، باحرکت هارمونیك ساده ای درامتداد محور x حرکت میکند . بنابراین ، حرکت هارمونیك ساده رامیتوان ، تصویر حرکت دائره ای یکنواخت بریکی ازقطرهای آن دانست .

بسامد زاویه ای حرکت هارمونیك ساده ، ω ، همان سرعت زاویه ای نقطه مقایسه است . بسامد حرکت هارمونیك ساده ، همان شماره دورانهای نقطه مقایسه درواحد زمان است . بنابراین ، $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ یا $\omega = 2\pi\nu$ است . زمان لازم برای یك دوران کامل نقطه مقایسه ، همان دوره تناوب حرکت هارمونیك ساده است. بنابراین ، $T = \frac{2\pi}{\omega}$ یا $\omega = \frac{2\pi}{T}$ است. فازحرکت هارمونیك ساده ، $\omega t + \delta$ ، درهرلحظه t ، زاویه ای است که OQ بامحور x میسازد (شکل ۱۳-۱۲ b) . زاویه‌ای‌که OQ در لحظه $t = 0$ بامحور x میسازد (شکل ۱۳-۱۲ a) ، برابر δ ، ثابت فاز یافاز آغازی حرکت ، میباشد . دامنه نوسان حرکت هارمونیك ساده ، همان شعاع دایره مقایسه میباشد .

قدرمطلق سرعت مماسی نقطه مقایسه Q برابر ωA میباشد . بنابراین ، مولفه x این

سرعت (شکل ۱۲-۱۳ a) برابراست با

$$V_x = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

این بستگی ، هنگامی که Q و P بطرف چپ حرکت میکند ، V_x منفی ، وهنگامی که بطـرف راست حرکت میکند ، V_x مثبت بدست میدهد . توجه کنید که ، V_x درنقطه های حـدی حرکت هارمونیک ساده ،که درآن نقطه ها $(\omega t + \delta)$ برابر صفر و π میباشد ، چنانکه باید ، برابر صفراست .

شتاب نقطه Q ، درحرکت دائره ای یکنواخت ، متوجه بمرکز ، وقدرمطلق آن برابر $\omega^2 A$ است. شتاب نقطه تصویر ، P ، مولفه x شتاب نقطه مقایسه Q میباشد (شکل ۱۲-۱۳ c) بنابراین ،

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

شتاب نقطه ای راکه حرکت هارمونیك ساده انجام دهد ، بدست میدهد . توجه کنید که a_x ، در نقطه‌های میانی حرکت هارمونیك ساده ، صفراست ، یعنی درنقطه هائی که $\omega t + \delta =$ برابـــر $\pi/2$ یا $3\pi/2$ باشد ، چنانکه باید .

این نتیجه هاهمه بانتیجه های متناظر حرکت هارمونیك ساده ، درطول محور x ، یکسانند به معادله های ۳-۱۳ مراجعه کنید .

اگرتصویرقائم مقایسه رابرمحور y درنظر گرفته بودیم ، درعوض ، برای حرکت این نقطه تصویر ، معادله

$$y = A \sin(\omega t + \delta) \qquad (۱۳-۲۵)$$

رابدست میآوریم . این هم حرکت هارمونیك ساده است . تنها اختلاف آن بامعادله ۲۸-۱۳ ، درثابت فاز میباشد ، چون ، اگر درجمله $\cos(\omega t + \delta)$ بجای δ ، $\delta - \frac{\pi}{2}$ راقراردهیم ، این جمله به $\sin(\omega t + \delta)$ تبدیل میشود . روشن است که تصویـــر حرکت دائره ای یکنواخت بر هرقطری ، حرکت هارمونیك ساده ای است .

بعکس ، حرکت دائره ای یکنواخت رامیتوان بعنوان ترکیبی ازدوحرکت هارمونیك ســاده

درطول دوخط عمود برهم است ، که دامنه وبسامدی یکسان ،واختلاف فازی برابر 90° ، دارند . هنگامی که یکی ازاین مولفه دروضع‌تغییرمکان ماکزیمم باشد ، مولفه دیگر دروضع‌تعـادل خواهد بود . اگراین دومولفه راترکیب کنیم (معادله های ۵ ۲-۳ ۱و ۲ ٤ ۲-۳ ۱) ، بید رنگ بستگی

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = A$$

رابدست میآوریم . بانوشتن بستگیهای مربوط برای V_y و a_y (دانشجوبایداین کار را انجام دهد) وترکیب کمیت های متناظر ، بستگیهای

$$V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \omega A$$

$$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = \omega^2 A$$

رابدست میآوریم . این بستگیها به ترتیب متناظرند باقدرمطلق های تغییرمکان ، سرعت ، و شتاب حرکت دائره ای یکنواخت .

مامیتوانیم بسیاری‌ازحرکتهای پیچیده را ، بعنوان ترکیبهائی ازحرکتهای هارمونیک ساده منفردی ، تحلیل نمائیم . حرکت دائره ای ، ترکیبی بویژه ساده است . دربخش‌آیندۀ ترکیبهای دیگری از حرکتهای هارمونیک ساده رادرنظر خواهیم گرفت .

مثال ۳ـ درمثال ۱ ، جسمی راکه حرکت هارمونیک ساده افقی انجام میداد درنظـــر گرفتیم . معادله آن حرکت (واحدها ؟) چنین بود :

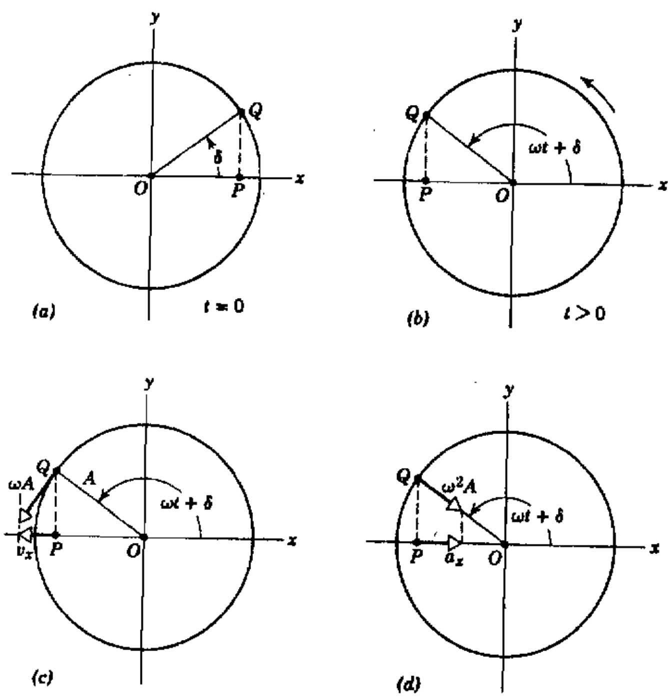
$$x = \frac{1}{3}\cos(8.0t)$$

این حرکت رامیتوان بعنوان تصویر حرکت دائره ای یکنواختی برقطر افقی نیز نمایش داد .

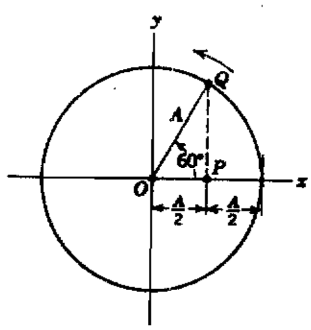
a) : مشخصات حرکت دائره ای یکنواخت متناظر رابیان کنید .

مولفه x حرکت دائره ای چنین است :

$$x = A\cos(\omega t+\delta)$$



شکل ۱۴-۱۲



شکل ۱۴-۱۳

بنابراین ، دائره مقایسه باید شعاعی برابر $A=\frac{1}{3}ft$ داشته باشد ، فاز آغازی یا ثابت فاز باید برابر $\delta = 0$ باشد ، وسرعت زاویه ای باید $\omega = 8.0\ rad/sec$ باشد تا معادله $x=\frac{1}{3}\cos(8.0t)$ رابرای تصویر افقی حرکت بدست آوریم .

بکمك حرکت نقطه مقایسه ، زمان لازم برای حرکت جسم را ، ازنقطه آغازی اش تانیمی از فاصله این نقطه ازمرکزجهت ، تخمین کنید .

هنگامی که جسم نیمی ازفاصله بالا راپیموده باشد ، نقطه مقایسه ، زاویه ای برابر $\omega t = 60^\circ$ راپیموده است (شکل ۱۲-۱۳) . سرعت زاویه ای ثابت وبرابر $8.0\ rad/sec$ میباشد ، چنانکه زمان لازم برای پیمودن 60° برابر است با

$$t=\frac{60^\circ}{\omega}=\frac{\pi/3\ rad}{8.0\ rad/sec}=\frac{\pi}{24}\sec = 0.13 \sec$$

زمان لازم را نیز میتوان مستقیما ازمعادله حرکت محاسبه کرد . بنابراین ،

$$x=\frac{1}{3}\cos(8.0t) \quad \text{و} \quad x=\frac{A}{2}=\frac{1}{6}$$

باین ترتیب

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cos 8.0t$$

یا

$$8.0t=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

بنابراین

$$t=\frac{\pi}{24}\sec = 0.13 \sec$$

۱۳-۷ ترکیب حرکتهای هارمونیك

اغلب دوحرکت هارمونیك ساده ، دررواستاد عمود برهم ، باهم ترکیب میشوند . حرکت حاصل ، برآیند دونوسان مستقل میباشد . نخست حالتی رادرنظر میگیریم که درآن بسامدهای ارتعاشهای یکسان باشند ، مانند

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta)$$
$$y = A_y \cos(\omega t + \alpha) \qquad (۱۳-۲۶)$$

حرکتهای x و y دامنه وثابت فاز مختلفی دارند .

اگرثابتهای فاز برابر باشند ، چنانکه $\delta = \alpha$ ، حرکت حاصل درامتداد خط راست خواهد بود . این نتیجه رامیتوان باروش تحلیلی نشان داد . زیرا اگر t راد رد ومعادله

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta)$$
$$y = A_y \cos(\omega t + \delta)$$

حذف کنیم ، خواهیم داشت

$$y = \frac{A_y}{A_x} x$$

این معادله خط راستی است که شیب آن برابر $\frac{A_y}{A_x}$ باشد . درشکل(b و a ۱۳-۱٤)، حرکت حاصل راد ردو مورد $\frac{A_y}{A_x} = 1$ و $\frac{A_y}{A_x} = 2$ نشان داده ایم . دراین دو مورد ، تغییرمکانها ی x و y ، دریك لحظه به مقدارماکزیمم وریك لحظه به مقدارمنیمم خود میرسند . یعنی آنها همفاز هستند .

اگرثابتهای فازمختلف باشند ، حرکت حاصل درامتداد خط راستی نخواهد بود . مثلاً اگرتفاضل ثابتهای فازبرابر $\frac{\pi}{2}$ باشد . تغییرمکان ماکزیمم x زمانی واقع میگردد که تغییر مکان y صفر باشد ، وبعکس . هنگامی که دامنه هابرابر باشند ، حرکت حاصل دائره ای خواهد بود . هنگامی که دامنه هابرابر نباشند ، حرکت حاصل بشکل بیضی خواهد بود . درمورد $\frac{A_y}{A_x} = 1$ و $\frac{A_y}{A_x} = 2$ راد رشکلهای (d و c ۱۳-۱٤)، درحالتی که $\delta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ باشد ، نشان داده ایم . حالتهای $\frac{A_y}{A_x} = 1$ و $\frac{A_y}{A_x} = 2$ برای $\delta = \alpha - \frac{\pi}{4}$ درشکلهای(e و f ۱۳-۱٤)نشان داده شده اند .

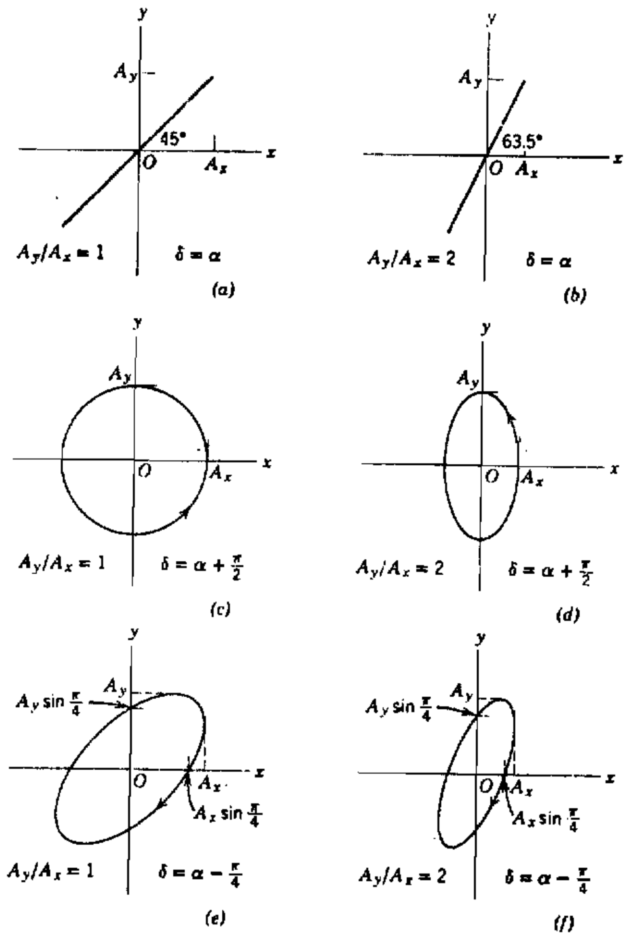
همه ترکیبهای ممکن از دو حرکت هارمونیك ساده عمود برهم ، که بسامدی یکسان داشته باشند ، متناظر ند باگذرگاههای بیضی شکل . دائره وخط راست حالتهای ویژه ای از بیضی

میباشند . این نتیجه رامیتوان باروش تحلیلی ، بکمك ترکیب معادله های ۱۳-۲٦ وحذف زمان دراین معادله ها ، نشان داد . دانشجومیتواند نشان دهدکه معادله حاصل ، معادلــــه بیضی میباشد . شکل این بیضی فقط به نسبت دامنه ها ، $\frac{A_y}{A_x}$ ، واختلاف فازمیان دو نوسان ، $\delta - \alpha$ ، بستگی دارد . حرکتی که واقع میشود ، میتواند درجهت حرکت عقربه‌های ساعت ویا درخلاف این جهت ، باشد ، واین بستگی‌بآن داردکه فازکدام مولفه جلوتر باشد .

یکی ازراههای ساده برای بوجودآوردن چنین ترکیبهائی استفاده ازاسیلوسکوپ - (oscilloscope) میباشد . دراین راه ، شماره ای ازالکترونها تحت تاثیر دومیدان الکتریکی عمود برهم ، ازگذرگاه خود منحصرف میشوند . شدت این میدانها ، بابسامدی یکسان ، بطــــور سینوسی تغییرمیکنند ، ولی دامنه وفازهای آنهارامیتوان به دلخواه تغییرداد . بدین ترتیب ، میتوان الکترونها رابرسم ترکیبهای مختلفی که دربالا مورد بحث قرارگرفتند ، برروی صفحـــــه فلورسنت (fluorescent) واداشت . همچنین میتوانیم این ترکیبها رابطورمکانیکی ، بکمك آونگی که بادامنه کوچك نوسان کند ، ونوسان آن ، صفحه قائمی محدود نباشد ، بوجــــود آوریم . چنین ترکیبهائی ازدوحرکت هارمونیك ساده عمود برهم که بسامدی یکسان داشتـــــه باشند ، دربررسی نور قطبی‌شده (polarized) ومدارهای جریان متناوب ، اهمیـــــت ویژه ای دارند .

ترکیبهائی ازحرکتهای هارمونیك ساده ، بابسامدی یکسان ودرامتدادی یکسان امابا دامنه وفاز مختلف ، دربررسی پراش (diffraction) وتداخل نور ، صوت ، وتشعشع کاهنربائی ، اهمیت ویژه ای دارند . این رادرآینده دراین متن مورد بحث قرارخواهیم داد .

اگردونوسان بابسامدهای مختلف وعمود برهم راترکیب نمائیم ، حرکت حاصل پیچیده‌تر خواهد بود . دراین صورت ، حرکت حتی تناوبی نیزنمیباشد ، مگرآنکه نسبت بســــه سامدهای دومولفه حرکت ، ω_1 و ω_2 برابرنسبت دوعدد صحیح باشد (به مساله ۳۱ مراجعه کنید) . نوسانهای بابسامدهای‌مختلف ، امادرامتدادی یکسان ، رانیز میتوان ترکیب نمود . بررسی‌این حرکت درمورد ارتعاشهای صوتی‌اهمیت ویژه ای‌دارد ، وماآنرادرفصل ۱۷مورد بحث قرارخواهیم داد .



y
x
A_y
A_x
O
45°
$A_y/A_x = 1$
$\delta = \alpha$
(a)
63.5°
$A_y/A_x = 2$
$\delta = \alpha$
(b)
$A_y/A_x = 1$
$\delta = \alpha + \frac{\pi}{2}$
(c)
$A_y/A_x = 2$
$\delta = \alpha + \frac{\pi}{2}$
(d)
$A_y \sin \frac{\pi}{4}$
$A_x \sin \frac{\pi}{4}$
$A_y/A_x = 1$
$\delta = \alpha - \frac{\pi}{4}$
(e)
$A_y/A_x = 2$
$\delta = \alpha - \frac{\pi}{4}$
(f)

شکل ۱۲-۱۴

دمـــــا

فصل هیجدهــــم

۱۸-۱ - توصیفات ماکرو سکوپیك ومیکروسکوپیك

در تجزیه وتحلیل حالات فیزیکی ماغالب توجه خود را روی بعضی ازقسمت های ســاده که در فکر آن راازقسمتهای دیگرجدا میکنیم ، معطوف مینمائیم . مایك چنین قسمتی را سیستم مینامیم . هرچیزی که درخارج سیستم است وبطورمستقیم روی رفتارسیستم تاثیردارد ، محیـــط خوانده می شود . بنابراین بایافتن اینکه چگونه سیستم بامحیط اندرکنش دارد درصدد خواهیم بودکه رفتارسیستم راتعیین کنیم . برای مثال توپی میتواند سیستم باشد وزمین وهوا محیـــط باشند . درسقوط آزاد ما درصدد برمیآئیم که بدانیم چگونه زمین وهوابرحرکت توپ تاثیـــــر می گذارند . همچنین گازی دریك محفظه میتواند سیستم باشد ویك پیستون قابل تحرك ویـــك چراغ بانسون میتوانند محیط باشند . مادرصدد برمیائیم بدانیم که چگونه پیستون وچراغ بــر رفتار گازتاثیر مینمایند . درتمام این موارد ما باید پارامترهای قابل مشاهده مناسبی برای تشریح رفتارسیستم انتخاب کنیم . پارامترهائی راکه ازخواص کل سیستم اند وباعملکرد وسایل آزمایشگاهی اندازه گرفته میشوند دردسته پارامترهای ماکروسکپی قرارمیدهیم . برای روند هائی که شامـــل حرارتند قوانین ربط دهنده پارامترهای ماکروسکپی مناسب (مثلا این پارامترهامیتوانند فشار ، حجم ، دما ، انرژی داخلی وآنتروپی سیستم باشند) پایه علم ترمودینامیك راتشکیل میدهند . خیلی ازپارامترهای ماکروسکپی (برای مثال فشار ، حجم ، دما) بطور مستقیم توسط قوه درك ما احساس میشوند . ماهمچنین میتوانیم نقطه نظر میکروسکوپیك رابپذیریم . دراین جاماپارامترهائی رادرنظر میگیریم که اتمها وملکول های سازنده سیستم راتوصیف میکنند وازاین پارامترهامیتـــوان سرعت ، انرژی ، جرم ، مومنتوم زاویه ای ورفتارشان درموقع برخورد و . . . . . رادرنظر گرفت . این پارامترهاویافرمول هائی ریاضی که برروی این پارامترهابناشده ، اساس علم مکانیك آمــــاری راتشکیل میدهند . خواص میکروسکپی بطورمستقیم برای ماقابل احساس نیستند .

برای هرسیستم پارامترهای ماکروسکپی ومیکروسکپی باید باهم وابستگی داشته باشند ، چون آنها بطورساده دوراه مختلف برای توصیف یك موقعیت خاص سیستم اند . مخصوصاً" ما باید بتوانیم مقادیر ماکروسکپی رابرحسب مقادیر میکروسکپی بیان کنیم . فشار یك گازکه ماکروسکپی به نظر میرسد . بطورعملی بااستفاده ازیك فشارسنج اندازه گرفته میشود (شکل ۹-۵ ا) . ازلحاظ میکروسکپی فشار به میزان متوسط انتقال مومنتوم ملکولهای گاز به واحد سطح ظرف شامل گاز مربوط میشود . دربخش ٤-۲ ما این تعریف میکروسکپی فشاررابطورکمی بیان خواهیم کرد . بطورمشابه دمای یك گاز ممکن است به انرژی جنبشی متوسط ملکول های منتقل شونده بستگی داشته باشد (بخش ۵-۲ راببینید) .

اگرپارامترهای ماکروسکپی بتوانند ازپارامترهای میکروسکپی نتیجه شوند ، ماقادرخواهیم بود که قوانین ترمودینامیك رابه زبان مکانیك آماری بیان کنیم . ماحقیقتاً" میتوانیم این کار را انجام دهیم . از ار-سی-تولمن R . C . Tolman نقل میکنیم :

" توصیف کامل علم ترمودینامیك بوسیلهٔ علم اساسی ترمکانیك آماری یکی ازکارهای بزرگ فیزیك است علاوه برآن بررسی های اساسی مکانیك آماری این امکان رابوجود میآورند که اصول معمولی ترمودینامیك تاحد زیادی بسط داده شوند . "

مابررسی پدیدهٔ حرارت رادراین بخش باماالعه دماشروع خواهیم کرد . درحین پیشرفت سعی خواهیم نمود تااین پدیده هارا ، بطورعمیقتری درك نمائیم . درنظرگرفتن توصیفات ماکروسکپی ومیکروسکوپی (یعنی ترمودینامیك ومکانیك آماری) ، مقایسه وبکاربردن نقطه نظرهای ماکروسکپی ومیکروسکپی ازمشخصات فیزیك جدید میباشد .

۲-۸ ا تعادل حرارتی - قانون صفرم ترمودینامیك

حس لامسه ساده ترین رابرای تشخیص اجسام گرم ازسرد است . بالمس نمودن میتوانیم اجسام رابرحسب گرمتر بودن نشان مرتب کرد ، بدین معنی که A از B گرمتر ، B از C

گرمتر والی آخر . . . . مااز این روش به عنوان حس د ماسنجی یاد میکنیم . این روش یك روش ذهنی برای تعیین د مای اجسام است ومطمئنا برای مقاصد علمی زیاد مفید نیست . یکی آزمایش ساده توسط جان لك John Locke د رسال ۱۶۹۰ پیشنهاد شدکه بی اعتبار بود ن ایـن متد رانشان میدهد . اگرشخصی یك د ست خود راد رآب گرم ود یگری راد رآب سرد فروکند وسپس هرد ود ست خود راد رآبی ولرم قرارد هد ، مشاهده خواهد کرد که این آب باد ست اولش سرد تـر احساس میشود د رحالیکه باد ست د یگرش گرمتر احساس می گرد د . د راین صورت قضاوت ما د رباره د ماگمراه کننده خواهد بود . د رثانی این حس د ماسنجی مامحدود میباشد . پس ما یك متد عینی وعددی برای د ماسنجی لازم د اریم .

برای شروع ما باید سعی کنیم معنی د ما رابفهمیم . جسمی مثل A راکه د ست ماآن راسرد احساس میکند باجسمی د یگرمثل B که توسط د ست ما گرم احساس میشود د رتماس قرار میدهیم . بعد اززمانی نسبتاً طولانی اجسام A و B احساس یکسان گرم بود ن راد رد ست ما برمی انگیزند . د راین صورت گوئیم که A و B د رتعادل حرارتی بایکد یگرند . ما این بیان راکه " د وجسم د رتعادل حرارتی اند " میتوانیم عمومیت د هیم واین طور بگوئیم که د وجسم د روضعیتی قرارد ارند که اگرما آنها رابه هم تماس د هیم سیستم کلاً د رتعادل حرارتی خواهد بود . یك تست منطقی وعملی برای تعادل حرارتی استفاده ازیك جسم سوم یاتست کننده مانند ترمومتر میباشد . ایـن عمل د ریك اصل مسلم که بنام قانون صفرم ترمود ینامیك خوانده میشود ، خلاصه شده است : اگر د وجسم A و B د رتعادل حرارتی باجسم سومی مانند C (ترمومتر) باشند ، د ر آن صورت A و B د رتعادل حرارتی بایکد یگر خواهند بود .

این بحث این عقیده راشرح میدهد که د مای یك سیستم خاصیتی است که برای چند سیستم وقتی که تماماً باهمد یگر د رتماس باشند ، عاقبت یکی خواهد شد . این موضوع باایده ٔ روزانه ٔ ما د رباره د ماکه اندازه گیری گرمی یاسرد ی سیستمی است توافق د ارد زیراتاآنجاکه میتوان به حـس د ماسنجی اطمینان کرد ، گرمی تمام اشیائی که برای مدت طولانی د رتماس باهمد یگرند ، یکسـان میگرد د . عقیده ای که قانون صفرم راشامل است گرچه ساده میباشد ولی واضح نیست . برای مثال

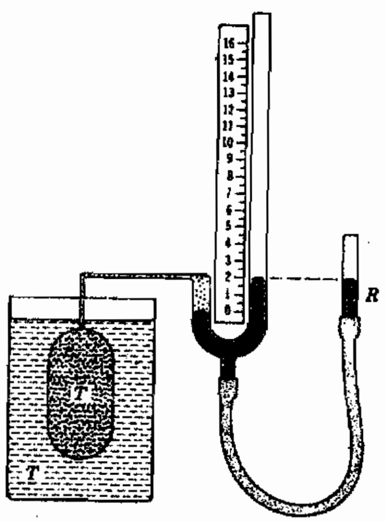
محمد وعلی هرد و اصغر رامش شناسند ولی آن هاممکن است همد یگر رابشناسند یانشناسند ، و مثال د یگر: د وقطعه آهن آهنربائی راجذ ب میکنند ، اما آنهاممکن است همد یگر را جذ ب بکنند یانکنند .

۲-۸ ا د ماسنجی

خواص فیزیکی خیلی زیاد ی هست که نظیر حس فیزیولوژیکی مابتغییرات د ما تغییرمیکنند . ازبین اینهامیتوان ازحجم یك مایع ، طول یك میله ، مقاومت الکتریکی یك سیم ، فشار یك گاز که د رحجم ثابت نگهد اشته شد ، حجم یك گاز که د رفشار ثابت نگهد اشته شده وبالا خره رنگ فیلامان یك لا مپ نام برد . هرکد ام ازاین خواص رامیتوان د رساختن یك ترمومتر یعنی بوجو د آورد ن یك اشل د مای بخصوص بکاربرد . یك چنین اشل د مائی باانتخاب یك ماد ه ترمومتریك بخصوص وخاصیت ترمومتریك آن بوجود خواهد آمد . سپس مااشل د ماراتوسط رابطهٔ یکنواخت وپیوسته مفروض بین خاصیت ترمومتر یك ماد ه سازند ه ترمومتر ود مای آن تعیین میکنیم . برای مثال ماد ه ترمومتریك رامیتوان مایعی د ریك لوله موئین شیشه ای د انست وخاصیت ترمومتریك را طول ستون مایع آن فرض کرد یاماد ه ترمومتریك رامیتوان گازی باحجم ثابت د ریك محفظه د انست وخاصیت ترمومتریك رافشارگاز فرض کرد والی آخر . . . . ماباید متوجه باشیم که انتخاب هر ماد ه وخاصیت ترمومتریك ، همراه بارابطه فرض شد ه بین خاصیت ود ما ، یك اشل د ماسنجی بخصوص رابد ست خواهد د اد . ولی اند ازه گیری های آن الزاماً با اند ازه گیری های یك اشل د ماسنجی د یگرتوافق نخواهد د اشت . این بی نظمی ظاهری د رتعیین د ما . با یك توافق جهانی د رمحافل علمی ، باتعیین یك ماد ه ترمومتریك بخصوص ، یك خاصیت ترمومتریك بخصوص ورابطهٔ تابعی بخصوصی بین اند ازه گیری د ماازطریق آن خاصیت ترمومتریك واشل جهانی د ما برطرف شد . هراشل د ماسنجی که بطریق د یگرتعیین شد ه باشد همیشه مخالف بااشل جهانی د ماخواهد شد . ماد ربخش ۴-۸ ا اشل جهانی راشرح خواهیم د اد .

ترمومتر گازی با حجم ثابت تکنیکی رانشان میدهد که توسط آن میتوان اشل ثابتـــی برای دماتعریف کرد . اگرحجم گازی ثابت نگهداشته شود ، فشارش به دمابستگی خواهد داشت ویاافزایش دماهمواره افزایش خواهد یافت . ترمومتر گازی با حجم ثابت ، فشار رادر حجم ثابت ، به عنوان خاصیت ترمومتریک بکارمی برد .

دیاگرام ترمومتر در شکل ۱-۸-۱ نشان داده شده است. ترمومتر شامل حبابی است که بسته به میزان دمائی که باید اندازه گیری شود ممکن است ازجنس شیشه ، چینی ،کوارتز ،پلاتین یاپلاتین ـ ایریدیوم باشد . این حباب بوسیله یك لوله موئین به فشار سنج جیوه ای وصــــل گردیده است . حباب شامل گاز در داخل ظرفی پرآب یا محیطی که میخواهیم دمایش رااندازه بگیریم قرارداده میشود . با بالا یاپائین بردن مخزن جیوه میتوان جیوه رادرشاخه سمت چپ لوله U شکل به مقابل علامت اولیه مرجع آورد که درآن صورت حجم گاز داخل حباب ثابت خواهـــد ماند . سپس ارتفاع جیوه درشاخه سمت راست لوله U شکل خوانده می شود . درآن صورت فشارگاز داخل حباب برابر اختلاف ارتفاع ستون جیوه (ضربدر ρg) باضافه فشار اتمسفرکـه توسط فشارسنج نشان داده میشود ، خواهد بود . درعمل این دستگاه خیلی پیچیده درست شده ومابايد تصحيحات زيادی رابكارببريم. برای مثال الف : تصحيحی بايد برای انقباض يـــا انبساط جزئی خود حباب كه باعث تغيير كوچكی درحجم ميگردد و ب : تصحيحی برای موقعی كه تمامی گاز (مثلا گاز داخل لوله موئين) درظرف آب فروبرده نشده باشد درنظرگرفت .



شکل ۱-۸-۱ ـ نمایشی ازترمومترگازی باحجم ثابت تاموقعیکه سطح جیوه درلوله سمت چپ مقابل علامت صفرباقی بماند حجم گاز تغییری نخواهد کرد . باابالا یاپائین بردن مخزن R میتوان سطح جیوه رادرشاخه سمت چپ مقابل علامت صفر قرارداد .

فرض کنیم تمام تصحیحات انجام گرفته و P مقدار تصحیح شده فشار گاز در دمای آب داخل ظرف باشد . دما را میتوان به صورت ساده ای توسط رابطه ای خطی به فشار مربوط کرد یعنی :

$$T = aP$$

که a مقدار ثابتی است ومیتوان به صورت دلخواه تعریف کرد .

برای تعیین ثابت a درجه بندی کردن ترمومتر ما یك نقطه ثابت استاندارد معین میکنیم که در آن نقطه تمامی ترمومترها باید مقدار یکسانی برای دمای T بدهند . این نقطه ثابت میتوان نقطه سه گانه آب اختیار نمود که در آن نقطه یخ وآب مایع و بخار آب در حال تعادل هستند . این حالت در یك فشار بخصوصی قابل حصول و بنا بر این یگانه است . فشار بخار آب در نقطه ، سه گانه ۴/۵۸ میلی متر جیوه است . دما در این نقطه استاندارد بطور دلخواه برابر ۲۷۳/۱۶ درجه کلوین که به صورت ۲۷۳/۱۶ $°K$ نوشته میشود اختیار شده است . هر درجه کلوین برای اختلاف دمای واحد است.

ما مقادیر P و T را در نقطه سه‌گانه با P_{tr} و T_{tr} نشان میدهیم حال میتوانیم ترمومتر را درجه بندی کنیم (یعنی مقدار a را تعیین نمائیم) برای این کار باید فشار P_{tr} را در دمای نقطه سه گانه آب $T_{tr} = ۲۷۳/۱۶ °K$ اندازه بگیریم . با قرار دادن این مقدار در معادله ۱-۱۸ داریم.

$$T_{tr} = aP_{tr} \Longrightarrow a = \frac{T_{tr}}{P_{tr}} = \frac{273.16°K}{P_{tr}}$$

دما موقتا در فشار اندازه گرفته شده P به صورت زیر تعریف میگردد :

$$T(P) = 273.16°K \frac{P}{P_{tr}} \qquad \text{(در حجم ثابت)} \qquad (۱۸-۲)$$

ترمو متر گازی با حجم ثابت مطابق آنچه شرح داده شد ، ترمومتری است که اصل دمای جهانی امروز که مورد قبول محافل علمی است ، بر اساس آن بنیان گذاری شده است.

۴-۸ ۱ اشل دمای گاز ایده آل

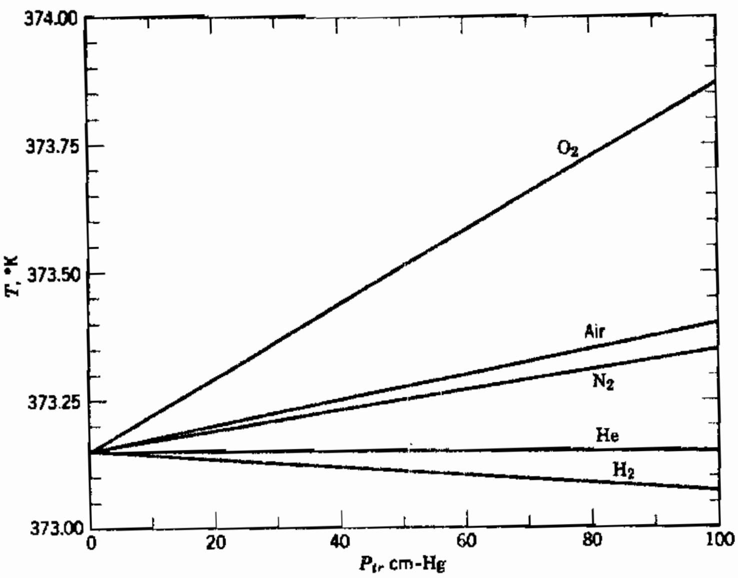
مقدار مشخص گاز را داخل حباب ترمومتر گازی با حجم ثابت می‌کنیم و این عمل در حالی انجام می گیرد که حباب ترمومتر توسط آبی که در نقطه سه گانه اش است . احاطه گردیده است . فشار P_{tr} برابر مقدار معینی مثلا $80\ cm\text{-}Hg$ است . حال حباب را داخل بخار به فشار یک اتمسفر میکنیم و در حالیکه حجم گاز ثابت نگهداشته شده ، فشار آن P_S راکه فشار در نقطه بخار است اندازه گرفته و با P_{S80} نشان میدهیم . موقتاً دما را توسط رابطه

$$T(P_{S80}) = 273.16^{\circ}K\left(\frac{P_{S80}}{80\ cm\text{-}Hg}\right)$$

محاسبه میکنیم . حال مقداری از گاز داخل حباب را خارج میکنیم تا فشار P_{tr} کمتری مثلا $40\ cm\text{-}Hg$ داشته باشد . حال P_S جدید را اندازه میگیریم و دمای موقت دیگری یعنی $T(P_{S40})$ را محاسبه میکنیم :

$$T(P_{S40}) = 273.16^{\circ}K\left(\frac{P_{S40}}{40\ cm\text{-}Hg}\right)$$

این عمل را دوباره باکمتر کردن مقدار گاز داخل حباب (در نتیجه کاهش P_{tr}) و محاسبه $T(P_S)$ ادامه میدهیم . حال اگر $T(P_S)$ را برحسب (P_{tr}) بکشیم و داده های کافی داشته باشیم ، میتوانیم منحنی کشیده شده را تا محور T که در آن جا $P_{tr}=0$ است ادامه دهیم و با محور فوق قطع دهیم . در شکل ۲-۸ ۱ ما چند منحنی که بطریق گفته شده توسط ترمومترهای گازی با حجم ثابت و دارای گازهای مختلف بدست آمده ، کشیده ایم . این منحنی ها نشان میدهند که دمای خوانده شده توسط ترمومتر گازی با حجم ثابت در فشارهای اولیه با مقادیر معمولی P_{tr} بستگی به نوع گاز بکار رفته دارند . در هرصورت وقتی که فشار اولیه کاهش یابد دماهای خوانده شده توسط تمامی ترمومترهای گازی (در حجم ثابت) حتی با گازهای مختلف به مقادیر یکسانی میل مینمایند .



شکل ۲-۱۸

مقادیری که توسط ترمومتر گازی با حجم ثابت و با گازی مختلف برای دمای بخار منقبض شده یعنی T بر حسب P_{tr} بدست آمده ، در این شکل رسم شده اند . وقتی که مقدار گاز ترمومتر کم می گردد فشار گاز در نقطه سه گانه آب کاهش می یابد . توجه کنید که در یک P_{tr} بخصوص مقادیر T که توسط ترمومتر هائی با گازهای مختلف بدست آمده ، با هم فرق میکنند . اختلاف ناچیز ولی قابل اندازه گیری است و در حدود ۲ / . درصد در منتها درجه" نشان داده شده در شکل است (O_2 و H_2 در $100\ cm-Hg$) . هلیوم در تمام نشارها تقریبا T یکسانی بدست میدهد (منحنی اش تقریبا" خط افقی است) . به این خاطر این گاز در دامنه نشان داده شده در شکل (در فشارهای صفر تا ۱۰۰ $cm-Hg$) نظیر یک گاز ایده آل رفتار میکند .

بنابراین مقدار دمای بدست آمده از قطع منحنی با محور T ، فقط به خواص عمومی گازها بستگی دارد و به یک گاز مخصوص وابسته نیست. بنابراین ما اشل دمای گاز ایده آل را با رابطه

$$T = \text{۲۷۳/۱۶}^\circ K \lim_{P_{tr}} \left(\frac{P}{P_{tr}}\right) \qquad (\text{۱۸-۳})$$

(در حجم ثابت)

تعریف می کنیم .

د رنتیجه ترمومتر استاند ارد ما ترمومتر گازی با حجم ثابت خواهد بود که اشل د مای تعریف شده توسط رابطه ۳-۸ (را بکار میبرد .

اگرچه این اشل د ما مستقل ازخواص هرنوع گاز بخصوص است ولی د رحالت عمومی به خواص گازها (یعنی خواص گاز ایده آل) بستگی دارد . بنابراین برای اندازه گیری د ما باید گازی د رآن د مابکاربرده شود . پائین ترین د مائی که توسط ترمومتر گازی میتوان اندازه گرفت 1^oK است . برای بد ست آورد ن این د ما مابابد هلیوم با فشار کم رابکار بریم چون هلیوم د رد مای پائین د یرتر از سا یرگازها مایع میگرد د . بنابراین برای د ماهای پائین تراز 1^oK بوسیله ترمومتر گازی ازنظر عملی نمیتوان معنی داد .

ما مایل هستیم که اشل د مائی تعریف کنیم که مستقل از خواص هرنوع ماده بخصوص باشد اشل د مای مطلق ترمود ینامیکی که اشل کلوین نامیده میشود ، یک چنین اشلی است. می توان نشان د اد که اشل گاز ایده آل واشل کلوین د رحد ی که ترمومتر گازی کارمیکند بایکد یگر معاد لند . به این د لیل ما بعد ازد مای گاز ایده آل میتوانیم ^oK بنویسیم هم چنانکه قبلا " این کار را کرده ایم . همچنین میتوان نشان د اد که اشل کلوین یک صفرمطلق 0^oK دارد که د مای پائین ترازآن وجود ندارد . د مای صفر مطلق تمام کوشش های عملی د ررسید ن به آن رامحال ساخته اگرچه بطور د لخواه امکان دارد که به آن نزد یک تر شد . موجود یت صفر مطلق بوسیله امتداد دادن منحنی های نتایج تجربی به اثبات رسیده است. شمانباید صفرمطلق رابه عنوان انرژی صفر یابی حرکتی پند ارید . تصوراینکه د رصفر مطلق تمام ملکول ها از حرکت بازخواهند ایستاد صحیح نیست . با این تصور فرض میشود که مفهوم ماکروسکپی خالص د ماشدید ا " به مفهوم میکروسکوپی حرکت ملکولی وابسته است. وقتی که ماسعی میکنیم یک چنین وابستگی بوجود آوریم د ر می یابیم که د رحقیقت وقتی به صفر مطلق میل میکنیم انرژی جنبشی ملکول ها به مقد ارمحد ود ی میل میکند واین مقد ارمحد ود انرژی نقطه صفرخوانده می شود . انرژی ملکولی یک مقد ارمی نیهم است ولی د رصفر مطلق صفر نیست . د رجد ول (۸-۱) لیست د ماهائی د ر اشل کلوین برای اجسام وروند های مختلفی د رج گردیده است.

جدول ۱-۱۸ : بعضی از دماهای مشخص برحسب درجه کلوین

فعل وانفعال حرارتی هسته ای کربن	۵×۱۰^{۸}
فعل وانفعال حرارتی هسته ای هلیوم	$۱۰^{۸}$
دمای داخل خورشید	$۱۰^{۷}$
دمای هاله‌ٔ خورشید	$۱۰^{٦}$
امواج شوک در هوا در ۲۰ ماخ	$۲/۵\times ۱۰^{٤}$
سحاب درخشنده	$۱۰^{٤}$
دمای سطح خورشید	٦×۱۰^{۳}
نقطهٔ ذوب تنگستن	$۳/٦\times ۱۰^{۳}$
« « سرب	٦×۱۰^{۲}
نقطه یخ بستن آب	$۲/۷\times ۱۰^{۲}$
نقطه جوش اکسیژن (در یک اتمسفر)	۹×۱۰^{۱}
نقطه جوش هیدرژن (در یک اتمسفر)	۲×۱۰^{۱}
نقطه جوش هلیوم (He^4) در یک اتمسفر	٤/۲
نقطه جوش He^3 در فشارهای پائین قابل دسترس	۳×۱۰^{-۱}
آهنربا زدائی نمک های پارامغناطیس بطور آدیاباتیک	$۱۰^{-۳}$
« هسته بطور آدیاباتیک	$۱۰^{-٦}$

۱۸-۵ ـ اشل های سلسیوس وفارنهایت

دو اشل دماکه مورد استفاده مداومند اشل های سلسیوس (که سابقاً سانتیگراد نامیده میشود) وفارنهایت هستند . این اشل هابرحسب اشل کلوین که اشل اساسی دمادرعلوم‌است، تعریف شده اند . اشل دمای سلسیوس درجه ای (واحد دما) بکارمی برد که ازلحاظ مقدارهمان

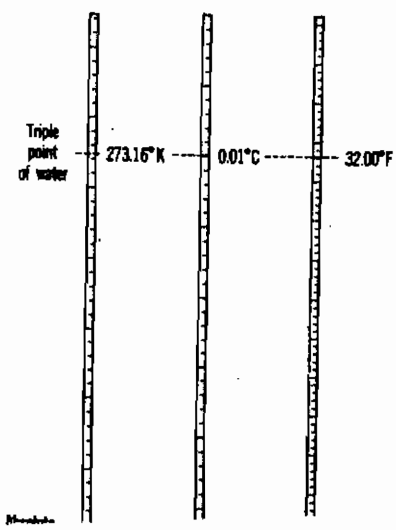
درجه‌ٔ اشل کلوین است . اگر T_C دمای سلسیوس رانشان دهد ، درآن صورت :

$$T_C = T - 273.15^\circ \qquad (۱۸-٤)$$

خواهد بود . این معادله رابطه موجود بین درجه حرارت سلسیوس ($^\circ C$) T ودرجه حرارت کلوین T ($^\circ K$) رانشان میدهد . مشاهده میکنیم که نقطه‌ٔ سه گانه‌ٔ آب (برحسب تعریف $273.16^\circ K$) با $0.01^\circ C$ مطابق است. بوسیله آزمایش ثابت می شود دمائی که در آن یخ وآب باهوای اشباع شده در فشار یك آتمسفر درحالت تعادلند (که نقطه‌ٔ یخ نامیده می شود) برابر $0.00^\circ C$ می باشد ودمائی که در آن آب مایع وبخارآب درحالت تعادلند (که نقطه‌ٔ بخار نامیده می شود) برابر $100.00^\circ C$ میباشد . اشل فارنهایت که درممالك انگلیسی زبان (بجزخود انگلستان که اشل سلسیوس رابرای کارهای تجارتی و کشوری درسال ۱۹٦٤ قبول کرد) بکارمی رود ، درکار های علمی مورد استفاده ندارد . رابطه‌ٔ بین اشل های فارنهایت وسلسیوس به طریق زیراست :

$$T_F = 32^\circ F + \frac{9}{5} T_C$$

ازاین رابطه نتیجه میگیریم که نقطه‌ٔ یخ ($0.00^\circ C$) برابر $32.0^\circ F$ ونقطه‌ٔ بخار $100.00^\circ C$ برابر $212^\circ F$ میباشند وهردرجه فارنهایت دقیقاً $\frac{5}{9}$ هر درجه سلسیوس است. درشکل ۳-۱۸ اشل های کلوین ، فارنهایت وسلسیوس راباهم مقایسه کرده ایم .



شکل ۳-۱۸

اشل های کلوین ـ فارنهایت وسلسیوس

۱۸-۶ اشل عملی بین المللی برای دما

حال اجازه بدهید نظریاتی راکه در بخش های قبل داده شد خلاصه کنیم . نقطه‌ٔ ثابت استاندارد در ترمومتری ، نقطه سه گانه آب است که بطور دلخواه مقدار $273.16°K$ برای آن اختیار شده است . ترمومتر استاندارد ترمومتر گازی باحجم ثابت است . ادامه دادن منحنی های تجربی (بخش ۱۸-۴) این امکان رابرای ما داد که دمای گاز ایده آل راطبق رابطه‌ٔ حدی زیر تعریف کنیم .

$$T = 273.16°K \lim_{P_{tr} \to 0} \left(\frac{P}{P_{tr}} \right)$$

این اشل بااشل کلوین (ترمودینامیك مطلق) در دامنه ایکه ترمومتر گازی قادر به کارکردن است معادل میباشد . بابکاربردن ترمومتر استاندارد بطور تجربی میتوانیم نقاط مرجع دیگری (که نقاط ثابت خوانده میشوند) برای اندازه گیری های دما تعیین کنیم . چند نقطهٔ اساسی که بـــرای نقاط ثابت عملی قبول شده اند در جدول ۱۸-۲ آورده ایم . دماها رامیتوان برحسب اشـــل سلسیوس بیان کرد وبااستفاده ازرابطهٔ ۱۸-۴ میتوان آنهارا بااشل کلوین نشان داد .

جدول ۱۸-۲ :نقاط ثابت روی اشل عملی بین‌المللی برای دما

ماده	نقاط مشخص	دما °C	دما °K
اکسیژن	نقطهٔ جوش نرمال	۱۸۲/۹۷-	۹۰/۱۸
آب	نقطهٔ سه گانه	۰/۰۱	۲۷۳/۱۶
آب	نقطهٔ جوش نرمال	۱۰۰/۰۰	۳۷۳/۱۵
گوگرد	" " "	۴۴۴/۶	۷۱۷/۷۵
نقره	" ذوب "	۹۶۰/۸۰	۱۲۳۳/۹۵
طلا	" " "	۱۰۶۳/۰۰	۱۳۳۶/۱۵

تعیین دما باترموو متر گازی باگاز ایده آل کاربرزحمتی است . به این خاطر برای هرکاری نمی‌توان ازاین روش برای تعیین دما استفاده نمود . یك اشل علمی بین المللی برای دما (IPTS) درسال ۱۹۲۷ مورد قبول واقع شد (درسال ۱۹۴۸ ودوباره درسالهای ۱۹۵۴و۱۹۶۰ در آن تجدید نظر گردید) تااشلی تهیه گردد که برای مقاصد عملی (مثلاً درجه بندی وسایل علمی و صنعتی) به آسانی قابلیت کاربردی داشته باشد . این اشل دارای یکدسته دستورالعمل هائی است تادرعمل بهترین تقریب های ممکن به اشل کلوین زده شود . مجموعه ای از نقاط ثابت (نقاط اساسی درجدول ۲-۱۸) مورد قبول واقع شده ومجموعه ای ازوسایل مشخص گردیده که بایستی برای پیداکردن دما درفواصل بین این نقاط ثابت و همچنین برای ادامه دادن منحنی به بالاتر ازبالاترین نقطهٔ ثابت ، بکار گرفته شوند . فرمول هائی مشخص گردیده تادماهای اساسی ، مطابق بامقدارخوانده شده توسط فشار سنج گازی ، تصحیح شوند . اشل (IPTS) (اشل علمی بین المللی برای دما) دردماهای بین نقاط ثابت ازاشل کلوین منحرف می شود ، امااین انحراف قابل صرفنظرکردن است . اشل (IPTS) تقریباً درتمام کشورها ستاندارد قانونی شناخته شده است .

۷-۱۸ انبساط دراثر ازدیاد دما

اثرات معمولی‌که ازتغییر دماناشی میگردند عبارتند ازتغییر اندازه وحالت مواد . اول اجازه دهید که تغییر دراندازه را که بدون تغییر حالت اتفاق می‌افتد درنظر بگیریم . یك مدل ساده کریستالی جامد رادرنظر بگیرید . اتم ها درردیف های مرتبی بوسیلهٔ نیروهائی‌که منشأ الکتریکی دارند به هم بسته شده اند . نیروهای بین اتم هانظیر نیروهائی خواهند بودکه اگراتم هارابا فنر به هم می بستیم به اتم ها وارد می شدند ،بنابراین می‌توان جسم صلب رامثل یك تختخواب فنری تصور کرد (شکل ۴-۱۸) . این فنرها نسبتاً سفتند ودرهرسانتی‌مترمکعب جسم حدوداً 10^{22} تا ازاین فنرها موجوداست . درهردمائی اتم های جسم صلب درنوسانند . دامنهٔ این

نوسان در حدود $10^{-4}\,cm$ وفرکانس اش در حدود $10^{-13}/sec$ است. وقتی که دما بالا می رود فاصله متوسط بین اتم ها افزایش پیدا میکند . بالا رفتن دما باعث انبساط کلی جسم صلب میگردد . هرگونه تغییر در بعد خطی جسم مثل انبساط طول ، عرض وضخامت انبساط خطی نامیده می شود . اگرطول این بعد خطی در وحله اول l باشد ، تغییرآن در اثرتغییردما باندازه ΔT ، برابر Δl خواهد بود . بطور تجربی در می یابیم که اگر ΔT بقدرکافی کوچک باشد ، تغییر در طول یعنی Δl متناسب باتغییر دماوطول اولیه l خواهد بود . پس میتوان نوشت :

$$\Delta l = \alpha l \Delta T \qquad (۱۸-۵)$$

که α ضریب انبساط را خطی نامیده می شود وبرای مواد مختلف مقادیر مختلفی را داراست . معادله بالا رابه صورت زیرمی نویسیم

$$\alpha = \frac{1}{l}\,\frac{\Delta l}{\Delta T}$$

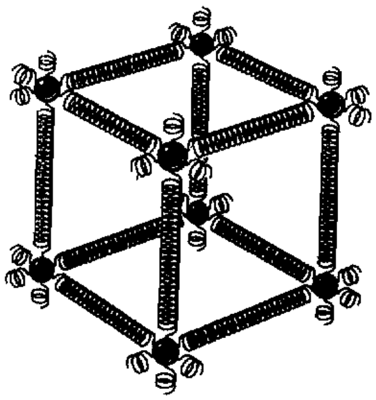
پس معنی α عبارتست از تغییر نسبی در طول در اثر یك درجه تغییردما .

اگربخواهیم دقیق تر بگوئیم باید گفت که مقدار α به دما وهمچنین دمای اولیه ای که برای محاسبه l بکار رفته بستگی دارد . ولی در مقایسه با دقتی که برای اندازه گیری های مهندسی لازم است ، تغییرات α معمولا " قابل صرفنظرکردن است. مابااطمینان می‌توانیم مقدار α را برای یك ماده بخصوص ثابت ومستقل ازدمابگیریم . درجدول ۳-۱۸ مقادیرعملی ضریب انبساط خطی متوسط رابرای چند جامد معمولی نوشته ایم . برای تمام موادی که درجدول نوشته شده ازدیاد دما انبساط جسم رافراهم آورده که بدان جهت $\bar{\alpha}$ مثبت است . * درجه مقدارانبساط حدود یك میلی متر برمتر برای ۱۰۰ درجه سلسیوس ازدیاد دما می باشد . **

---

* منظوراز $\bar{\alpha}$ مقدارمتوسط α میباشد .

** یك درجه سلسیوس ($1^{\circ}C$) اختلاف دمائی برابرواحد است که روی‌اشل سلسیوس‌اندازه گرفته می شود دمای یك درجه سلسیوس ($1^{\circ}C$) مقداریك دمای‌خاص خوانده شده روی اشل سلسیوس است .



شکل ۴-۱۸ - از بسیاری جهات جامدات نظیر تختخواب فنری میکروسکوپی ، که آن ملکول ها توسط نیروهای الاستیک به هم پیوسته اند ، رفتار میکنند .

جدول ۳-۱۸ : مقدار $\bar{\alpha}$ برای چند ماده مختلف†

ماده	$\bar{\alpha}$ (بر $^\circ C$)	ماده	$\bar{\alpha}$ (بر درجه سانتی گراد)
آلومینیوم	۲۳×۱۰^{-۶}	لاستیک سخت	۸۰×۱۰^{-۶}
برنج	۱۹×۱۰^{-۶}	یخ	۵۱×۱۰^{-۶}
مس	۱۷×۱۰^{-۶}	اینوار	$۰/۷\times۱۰^{-۶}$
شیشه معمولی	۹×۱۰^{-۶}	سرب	۲۹×۱۰^{-۶}
شیشه پیرکس	$۳/۲\times۱۰^{-۶}$	فولاد	۱۱×۱۰^{-۶}

† ، این مقادیر برای دماهای بین $0^\circ C$ تا $100^\circ C$ میباشند بجز برای یخ که در دماهای بین $-10^\circ C$ تا $100^\circ C$ میباشد .

مثال ۱

یک متر فولادی رامی‌خواهیم درج کنیم بطوریکه دقت آن برای یک میلی‌متر در حدود ۵×۱۰^{-۵} میلی‌متر در یک دمای معلوم باشد . ماکزیمم تغییرات مجاز دما ضمن مدرج نمودن چه مقدار باید

باشد ؟

ازمعادله ۵-۱۸ داریم :

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

پس :

$$5 \times 10^{-5}\,mm = (11 \times 10^{-6}/C)(1.0\ mm)\Delta T$$

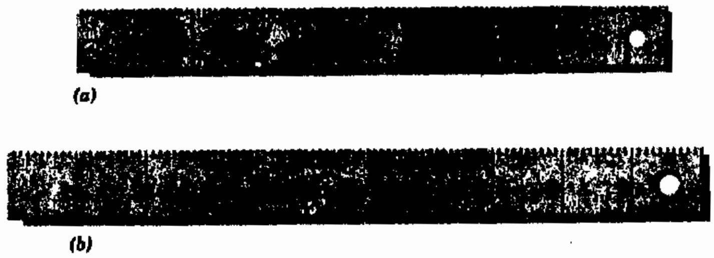
که در آن $\bar{\alpha}$ برای فولاد ازجدول ۳-۱۸ بکاربرده ایم . ازاین رابطه $\Delta T \approx 5^{\circ}C$ میباشد پس باید درموقع اندازه گیری بااین‌متر دماها بستی همان دمای اولیه ویاتفاوت آن بادمای اولیه بین حدود $5^{\circ}C$ باشد .

توجه کنید که :اگربه جای فولاد از آلیاژ اینوار Invar استفاده شود در آن صورت برای داشتن همان تولرانس $5 \times 10^{-5}\,mm$ (tolerance) تغییرات دما $75^{\circ}C$ خواهد بود یابرای همان میزان تغییرات دما $(\Delta T = 5^{\circ}C)$ تولرانسی‌که قابل حصول است خیلی بهتر ازمیزان مقداری است که قبلا داشتیم .

برای بیشتر جامدات که ایزوتروپیک نامیده می شوند در یک دمای بخصوص درصد تغییر درطول برای تمام ابعاد جامد یکی‌است وانبساط آن هادرست شبیه بزرگ کردن یك عکس است بجزموقعی که جسم سه بعدی باشد . لذا اگریك صفحه مسطح داشته باشیم که سوراخی داشته باشد دریك ΔT بخصوص مقدار $\frac{\Delta l}{l} (= \alpha \Delta T)$ برای طول ، عرض ، قطر سطح قطرخود جسم وقطر سوراخ یکی‌است . هرخطی چه مستقیم باشد وچه انحنا داشته باشد به میزان α بردرجه حرارت بطور نسبی درازمی شود . اگرشما اسمتان راروی صفحه ای بکنید خطی که اسم شمارانشان میدهد همان $\frac{\Delta l}{l}$ راداراست که هرخط دیگردارد . شباهت انبساط یك سطح بابزرگ‌کردن یك عکس درشکل ۵-۱۸ نشان داده شده است .

باداستن این مطالب شماقادر خواهید بود (مسئله ۹ و۲۰) نشان دهید که بادقت زیادی نسبت تغییرات سطح (ΔA) به خود سطح A به هردرجه تغییردما برای یك جسم جامد ایزوتروپ برابر 2α خواهد بود یعنی

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T$$



شکل ۵- ۱۸- یک خط کش فولادی در دماهای مختلف .

در انبساط تمام ابعاد به یک نسبت بزرگ می شوند . اشل ، اعداد ، سوراخ وضخامت در این خط کش به یک نسبت افزایش یافته اند . (انبساطی که در شکل از a به b نشان داده شده بطور وضوح اغراق آمیز است چون این انبساط افزایش دمائی موهومی برابر $100,000\,^{\circ}C$ را لازم دارد)

ونسبت تغییرات حجم (ΔV) به خود حجم (V) برهردرجه ، تغییر دما برای یک جسم جامد ایزوتروپ 3α خواهد بود یعنی :

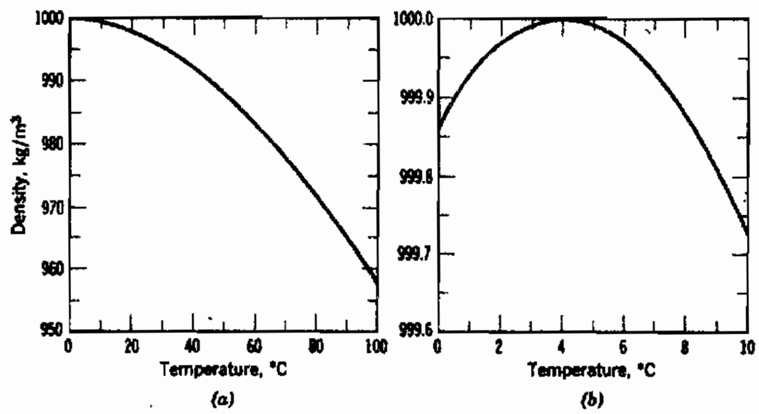
$$\Delta V = 3\alpha V \Delta T$$

چون شکل یک سیال مشخص نیست ، فقط تغییرحجم مایع با تغییر دما مهم خواهد بود . گازها در مقابل تغییرات دما و یا فشار حساسترند ، درصورتیکه تغییرحجم مایع در اثر تغییر فشار یا دما در مقایسه با گازها خیلی کوچک است اگر β ضریب انبساط حجمی مایع را نشان دهد داریم :

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}$$

دیده می شود که β نسبتاً مستقل از دماست . مایعات با افزایش دما منبسط میگردند وانبساط حجمی آن ها حدود ده برابر بزرگتر از انبساط حجمی جامدات میباشد . در هرصورت معمولی‌ترین مایع که آب است نظیر سایر مایعات رفتار نمی‌کند . در شکل ۶-۱۸ منحنی انبساط آب نشان داده شده است. توجه کنید که بالاتر از $4\,^{\circ}C$ با افزایش دما آب انبساط پیدا میکند اگرچه خطی

نیست. وقتی‌که دما از $4.0\,^\circ C$ به $0.0\,^\circ C$ کم می‌گردد آب به عوض آنکه منقبض شود، منبسط می‌گردد. یک چنین انبساطی در اثر کاهش دما در هیچ مایع عادی دیگری مشاهده نشده است. این پدیده فقط در مورد بعضی مواد لاستیک ـ مانند وبعضی شبکه های جامد کریستالی فی‌مابین دماهای بخصوصی مشاهده شده است. دانسیتهٔ آب در $4.0\,^\circ C$ ماگزیمم مقدار خود را دارا است که مقدارش $1.000\ gr/cm^3$ یا $1000\ Kg/m^3$ است. در سایر دماها مقدارش کمتر است. به علت این رفتار بخصوص آب است که سطح دریاچه ها قبل از قسمت های دیگر آن در زمستان یخ می‌زند.



شکل ۶-۱۸ - a) تغییرات دانسیتهٔ آب برحسب تغییرات دما در فشار یک اتمسفر

b) تغییرات دانسیتهٔ آب بین $0\,^\circ C$ و $10\,^\circ C$ باتفصیل بیشتر

فصـــــل ۱۹

حرارت وقانون اول ترمود ینامیـــــك

۱-۱۹ - حرارت نوعی انرژی است

وقتی د و سیستم که د ماهای متفاوت د ارند پهلوی هم قرارد اد ه شوند ، د مای نهائـــی مقد اری فی مابین د ود مای اولیه آن هاست . این یك مشاهد ه عادی است وانسانها ازخیلی وقت پیش د رصد د بود ه اند که این پد ید ه را عمیق تر کنند . تاشروع قرن نوزد هم این پد ید ه را بافرض اینکه سیالی به اسم "کالریك" د رتمام اجسام است ، شرح می د اد ند وعقید ه د اشتنـــد جسمی که د مای بالاتری د ارد د ارای کالریك بیشتری نسبت به جسمی است که د مایش پائین تـر است . وقتی د وجسم پهلوی هم قرارد اد ه می شوند آنکه کالریك بیشتری د ارد مقد اری ازآن رابه جسم د یگر می د هد واین عمل انتقال کالریك تاوقتی اد امه می یابد که د مای د وجسم برابر شود . تئوری کالریك باغالب مشاهد ات وفق می د هد مثلا " هد ایت حرارتی د راجسام یامخلوط نمـود ن مواد د رکالریمتر بطوررضایت بخش بااین تئوری توافق د ارند . به هرحال مفهوم حرارت به عنوا ن یك سیال که مقد ارش د ریك روند ثابت می ماند نتوانست نتایج آزمایشهای د یگرراتـوجیه نماید . معهذ ا ماتغییرات د مارا به علت انتقال " چیزی " ازجسمی باد مای بالا به جسم د یگر باد مـای پائین خواهیم د اشت وآن " چیز " را حرارت می نامیم . یك تعـریف مفید ولی غیرعملی برای حرارت می تواند چنین باشد . حرارت چیزی است که فقط د راثر اختلاف د مابین یك سیستم ومحیط احاطه کنند ه اش رد وبد ل می شود .

بالاخره د ریافتند که حرارت سیال نیست بلکه نوعی انرژی است . اولین کسی که باقطعیـت انرژی بود ن حرارت رابیان کرد یك نفرآمریکائی به اسم بنیامین تامسون *B. Tompson* 1753-1814 بود (که بعد ها به لقب کنت رامفورد نهاوا ریاشناخته شد) .

رامفورد این موضوع راهنگام نظارت برسوراخ کرد ن لوله توپ برای ارتش باواریاکشف کرد . او مشاهد ه کرد که برای آنکه ازازد یاد حرارت جلوگیری بعمل آید سوراخ توپ هارابراز آب می کرد ند .

در حین عمل مته کردن آب بجوش می‌آمد وانتظار میرفت که آب داخل لوله برای جوشیدن بایستی ازتوپ کالریك کسب نماید . تولید پیوسته ٔ کالریك درتوپها اینطور تعبیرمیشد که وقتی به فرض ماده ای به قطعات زیادی تقسیم میشود (هم چنانکه درموقع سوراخ کردن اتفاق می افتد) قابلیت نگاهداشتن کالریك اجزاء کمتر میگردد وکالریکی که بدین طریق آزاد میشود باعث جوشیدن آب میگردد . ولی رامفورد مشاهده کرد که حتی‌وقتی مته بکلی کند میشود ونمیتواند ماده راببرد وبه قطعات زیادترتقسیم کند ، بازهم آب به جوش میآید . بدین ترتیب او باآزمایش‌تو انست نظیریه ٔ کالریك راردکند واین طورنتیجه گیری نماید که حرکت مکانیکی مته درروند سوراخ کردن همان اثری راروی آب میگذارد (بالا رفتن دمای آب وجوشیدن آن) که وقتی‌آب رابروی شعله بگیریم .

پس می‌توان گفت که انجام کارمکانیکی برروی یك سیستم (مثلاً یك ظرف آب) ویاحرارت دادن‌سیستم توسط یك منبع خارجی میتوانند اثرات یکسان برروی آن داشته باشند ونتیجه گرفت که کار وحرارت نوعی انرژی اند .

اگرچه مفهوم انرژی وبقاء آن امروزه ازبدیهات است ولی درسالهای ۱۸۵۰ عقیده ای تازه وعجیب شمرده میشد وحتی‌مردانی‌چون گالیله ونیوتن نیزآن رانادیده گرفته بودند . در تحولات بعدی علم فیزیك این عقیده بقاء انرژی باعث کشفیات تازه ای گردید . تاریخ فعلی این عقیده ازبسیاری جهات قابل ملاحظه است . اندیشمندان چندی برای اولین بار تقریباً دریك زمان به این عقیده دست یافتند واغلب آنها یابااستقبال سردی‌مؤاجه شدند ویاعقیده ٔ شان نادیده گرفته شد . چندتن ازآنها بطورمستقل اصل بقاء انرژی رابیان کردند که ازاینان میتوان ازژولیوس فون مایرآلمانی Julius-Von-Mayer (1814 - 78) جیمز ژول انگلیسی James Joule (1818-89) ، هرمن فون‌هلمو هلتز Herman-Von-Helmhotz (1815 - 88) ، ال . ا . کلونیگ دانمارکی L.A. Colding (1821 - 94) وسعدی کارنو فرانسوی Sadi-Carnot (1796-1832) نام برد .

ژول بوسیله آزمایش نشان داد که مقدار معینی کارمکانیکی داده شده به یك سیستم از لحاظ مقدار معادل مقدار معینی حرارت است که میتواند ازیك منبع خارجی با دمای بالاتر به سیستم منتقل شود . بدین ترتیب معادل بودن کارمکانیکی وحرارت (به عنوان دو نوع انرژی) بطور قطعی محرز شد .

هلمهتلز اولین کسی بود که بطور روشن این عقیده را بیان کرد که نه تنها حرارت وانرژی مکانیکی بلکه تمامی انواع انرژی معادلند وهرگاه مقداری ازیك نوع انرژی ناپدید شود همان مقدار انرژی به نوعی دیگر ظاهر میگردد .

۲-۹-۱ - مقدار حرارت وحرارت ویژه

واحد حرارت Q بطورکلی ازروی تغییری معین که در روندی معین در جسم ظاهرمیشود تعریف میگردد . بنابراین اگر دمای یك کیلوگرم آب بوسیله حرارت دادن از $14/5^\circ C$ به $15/5^\circ C$ برسد گوئیم یك کیلو کالری حرارت به سیستم منتقل شده است. کالری $(=10^{-3}\ Kcal)$ هم به عنوان واحد حرارت بکار میرود . (ضمناً منظوراز کلمه "کالری" که در اندازه گیری انرژی موجود در غذاها بکارمی رود ، همان کیلو کالری است) . در سیستم مهندسی واحد حرارت B,t,u (British-Thermal-Unit) میباشد که مقدارحرارت لازم برای ازدیاد دمای یك پوند آب از $63^\circ F$ به $64^\circ F$ میباشد . علت انتخاب این دماهای مشخص این است که در دمای اطاق ، حرارت لازم برای یك درجه افزایش دمای آب ، به مقدارخیلی جزئی با مقدار واقعی میتواند اختلاف پیدا کند . ما برای مقاصد عملی ازاین تغییرجزئی صرفنظرخواهیم کرد . واحد های حرارت توسط رابطه زیر به هم وابسته اند .

$$1\ Kcal = 1000\ Cal = 3.968\ B,t,u$$

مقدارحرارت لازم برای افزایش یك مقدار مخصوص دما برای اجسام مختلف با جرم های یکسان متفاوت است. اگربرای افزایش دمای ΔT مقدار ΔQ حرارت لازم باشد نسبت $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$ را ظرفیت

حرارتی می‌نامند وبا C نشان میدهند یعنی :

$$C = \text{ظرفیت حرارتی} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

کلمه "ظرفیت" ممکن است گمراه کننده باشد چون این کلمه اساساً عبارت بی معنی "مقدار حرارتی که جسم میتواند نگهدارد" رابه مخیله راه میدهد . درصورتیکه مفهوم این کلمه مقدار حرارت لازم برای هردرجه افزایش دما ، میباشد .

ظرفیت حرارتی واحد جرم جسم ظرفیت حرارتی ویژه نامیده میشود ومشخصه ماده ایاست که جسم از آن ساخته شده است .

$$c = \frac{\text{ظرفیت حرارتی}}{\text{جرم جسم}} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \qquad (۱۹-۱)$$

مثلاً ما ازیك طرف ازظرفیت حرارتی یك سکه مسی حرف میزنیم وازطرف دیگرازظرفیت حرارتی ویژه مس یاد میکنیم .

ظرفیت حرارتی وظرفیت حرارتی ویژه اجسام ثابت نیستند بلکه باتغییر دمامقدارشان تغییر میکند . درهرصورت درحدود یعنی ازدماهای معمولی میتوان فرض کرد که ظرفیت حرارتی ویژه اجسام ثابت است . مثلاً فی‌مابین دماهای صفروصد درجه سانتیگراد ظرفیت حرارتی ویژه آب کمتر ازیك درصد ازمقدار متوسط $1\ cal/gr\text{-}^\circ C$ منحرف میشود .

ظرفیت حرارتی ویژه‌ای که توسط معادله ۱-۱۹ تعریف شد تك مقدارنیست وماباید شرائطی راکه تحت آن شرایط حرارت ΔQ به جسم داده شده درنظر بگیریم . مثلا میتوان جسم رادرفشار ثابت آتمسفر نگاه داشت وبه آن حرارتداد . شرایط دیگری‌نیز امکان پذیراست وبادر نظرگرفتن هریك ازاین شرایط مقادیرمختلفی برای ظرفیت حرارتی‌ویژه c بدست می‌آید . برای آنکه c تك مقدار باشد باید شرایط فوق الذکر رادرنظر گرفت مثلا ظرفیت حرارتی ویژه در فشار ثابت c_p ظرفیت حرارتی ویژه درحجم ثابت c_v وغیره . . . .

درجدول ۱-۱۹ (ستون دوم) ظرفیت حرارتی ویژه بعضی ازجامدات درفشار ثابت

نشان‌داده شده است . درباره‌ٔ ظرفیت حرارتی ویژه گازها دربخش‌های بعدی بحث خواهیم کرد . شمابایدبتوانید ازروی تعریفی‌که برای کالری و Btu شده نشان دهیدکه دقیقاً" رابطه‌ٔ زیر برقراراست .

$$1 \ \frac{cal}{gr\,^{\circ}c} = 1 \ \frac{Kal}{kgr\,^{\circ}c} = 1 \ \frac{Btu}{lb\,^{\circ}F}$$

توجه داشته باشیدکه ظرفیت حرارتی ویژه آب‌که برابر $1 \ \frac{cal}{gr\,^{\circ}c}$ است نسبت به ظرفیت حرارتی ویژه سایرمواد مقدار بزرگی‌است .

جدول ۱-۱۹ - مقادیر C_p برای چند جسم جامد در دمای اطاق وفشار یک اتمسفر

ماده	ظرفیت حرارتی ویژه $(cal/gr\,^{\circ}c)$	وزن ملکولی $(gr/mole)$	ظرفیت حرارتی مولار $(cal/mole\,^{\circ}c)$
آلومینیوم	0.215	27.0	5.82
کربن	0121	12.0	1.46
مس	0.0923	63.5	5.82
سرب	0.0305	207	6.32
نقره	0.0564	108	6.09
تنگستن	0.0321	184	5.92

مثال یک

یک قطعه مس به جرم ۷۵ گرم رااز کوره ای درآورده وداخل یک لیوان شیشه ای به جرم ۳۰۰ گرم که دارای آبی به جرم ۲۰۰ گرم است ، قرار میدهیم . دمای آب از $12^{\circ}C$ به $27^{\circ}C$ میرسد . مطلوبست دمای کوره ؟

دراین مثال دوسیستم وجود داردکه ابتدا دمای آن ها مختلف است ولی بعد ازتماس یافتن باهم وگذشت زمان به تعادل حرارتی میرسند . انرژی مکانیکی درمسئله وارد نشده وفقط

تبادل حرارت وجود دارد ، درنتیجه :

مقدارحرارتی که آب ولیوان گرفته اند = مقدارحرارتی که مس ازدست داده

$$m_c c_c (T_c - T_e) = \left[(m_g c_g + m_w c_w)(T_e - T_w) \right]$$

اند یس c نمایانگرمس ، g نمایانگرشیشه و W نمایانگرآب است . دمای اولیهٔ مس T_c دمای اولیهٔ لیوان وآب T_W ودمای تعادل نهائی T_e میباشد . باجایگذاری مقادیرداده شدهٔ همراه با $C_W = 1 \ \frac{cal}{gr\,^\circ C}$ و $C_g = \frac{12.0\,cal}{gr\,^\circ C}$ و $C_c = 0.092 \frac{cal}{gr\,^\circ C}$ درمعادلهٔ بالا داریم :

$$(75gr)(0.092 \ \tfrac{cal}{gr\,^\circ C})(T_c - 27^\circ C) = \left[(300gr)(0.12 \tfrac{cal}{gr\,^\circ C}) + (200gr)(1.0 \tfrac{cal}{gr\,^\circ C}) \right] \times (27^\circ C - 12^\circ C)$$

وباحل این معادله داریم : $T_c = 530^\circ C$

چه تقریب هائی دربدست آوردن این جواب (چه عملی وچه تئوری) بکاررفته است ؟

۳-۱۹ هدایت حرارتی

انتقال انرژی بواسطهٔ اختلاف دمابین قسمتهای مختلف یك جسم ، هدایت حرارتی نامیده میشود . یك قطعه مکعب مستطیلی درنظر بگیرید که سطح مقطع A وضخامت Δx داشته باشد وسطوحش درد ودمای مختلف نگاه داشته شده باشند . مقدارحرارت ΔQ راکه در زمان Δt درجهت عمود برسطوح جریان می یابد اندازه میگیریم . آزمایش نشان میدهد که ΔQ متناسب با Δt و A واختلاف دمای دوسطح ΔT میباشد . همچنین ΔQ با فاصله ای که حرارت بایستی طی کند (ضخامت Δx) نسبت معکوس دارد . بنابراین بشرط اینکه ΔT و Δx کوچك باشند میتوان نوشت :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

در حد وقتیکه ضخامت بی نهایت کوچک (dx) واختلاف دمای دوسرآن (dT) باشــد ، مامیتوانیم قانون اساس هدایت حرارتی رابه صورت زیر بنویسیم .

$$\frac{dQ}{dt} = -KA\frac{dT}{dx} \qquad (۱۹-۲)$$

دراین معادله $\frac{dQ}{dt}$ نرخ حرارت منتقل شده ازسطح مقطع A و $\frac{dT}{dx}$ گرادیان دماو K ثابت تناسبمیباشدکه ضریب هدایت حرارتی نامیده می شود . جهت جریان حرارت را در جهت افزایش x اختیار میکنیم وچون حرارت درجهت کاهش T جریان می یابد . لــذا ـ علامت منفی که درمعادله ۲-۱۹ وارد شده به این خاطـراست . بعبارت دیگروقتی $\frac{dT}{dx}$ منفی است مقدار $\frac{dQ}{dt}$ مثبت میباشد . ماده ای‌که دارای ضریب هدایت حرارتی بزرگباشد . هادی حرارتی خوبی‌است ، برعکس ماده ای که ضریب هدایت حرارتیش کوچک باشد هادی حرارتی خوبی نیست به عبارت دیگرعایق حرارتی خوبی‌است . مقدار K بستگی‌به‌دمادارد وباافزایش‌دما بطورجزئی افزایش‌می یابد . امادرمقاصد عملی اگراختلاف دمابین دوسرجسم زیاد بزرگ نباشـــد میتوان K راثابت فرض‌نمود . درجدول ۲-۱۹ برای بعضی از مواد مقدار K داده شده است وازاین جدول دیده میشودکه فلزات ازغلیرفلزات هادی های حرارتی بهتری‌هستند وگازهانیــز هادی حرارتی خوبی نیستند .

جدول ۲-۱۹ : ضرایب هدایت حرارتی $Kcal/sec\text{-}Metric$ (گازهادر $0^{\circ}C$ وسایرموارد دردمای اطاق)

فلزات	K	گازها	K	دیگرمواد	K
آلومینیوم	4.9×10^{-2}	هوا	5.7×10^{-6}	پنبه نسوز	2×10^{-5}
برنج	2.6×10^{-2}	هیدروژن	3.3×10^{-5}	بتون	2×10^{-4}
مس	9.2×10^{-2}	اکسیژن	5.6×10^{-6}	پشم	4×10^{-5}
نقره	9.9×10^{-2}			شیشه	2×10^{-4}
فولاد	1.1×10^{-2}			یخ	4×10^{-4}
				چوب	2×10^{-5}

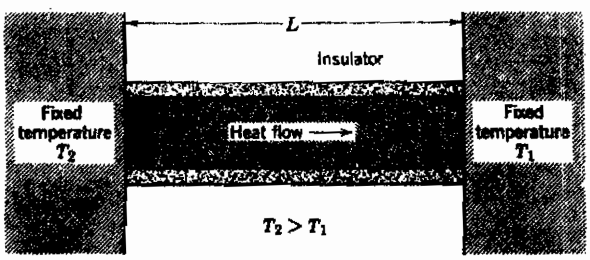
حال اجازه دهید که معادله ۲-۱۹ رابرای یک میله به طول L وسطح مقطع ثابت A ، که به حالت پایدار رسیده است بکار ببریم (شکل ۱-۱۹) . در حالت پایدار دمای تمام نقاط جسم پایدار است .وبا زمان تغییر نمیکند . $\frac{dQ}{dt}$ در تمامی سطوح مقطع یکسان است (چرا ؟) و چون $\frac{dQ}{dt}=-KA\frac{dT}{dx}$ است در نتیجه برای مقدارهای ثابت K و A مقدار گرادیان دما ($\frac{dT}{dx}$) برای تمامی سطوح مقطع یکسان خواهد بود . چون T بطور خطی در امتداد میله کاهش می یابد لذا داریم :

$$-\frac{dT}{dx}=(T_2-T_1)/L$$

وازاینجا مقدار حرارت جریان یافته ΔQ در زمان Δt برابر خواهد بود با :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=KA\,\frac{T_2-T_1}{L} \qquad (۱۹-۳)$$

پدیده هدایت حرارتی تفاوت دو مفهوم دما و گرما راآشکار میکند . میله های مختلف که اختلاف دمای دو سرشان باهم برابر است ، ممکن است کاملاً مقادیر متفاوت حرارت را در زمان Δt از خود عبور دهند .



شکل ۱-۱۹

هدایت حرارت از داخل یک میله که باعایق حرارت پوشانده شده است.

مثال ۲

یک دیواره مرکب که از دو جنس متفاوت باضخامت های L_1 و L_2 وضرایب هدایت حرارتی K_1 و K_2 تشکیل شده مفروض است. اگر دمای سطوح خارجی T_2 و T_1 باشد . مطلوبست میزان حرارت منتقل شده توسط دیواره در حالت پایدار :(شکل ۲-۱۹) .

اگر T_x دمای سطح مشترك دو ماده باشد در آن صورت می‌توان نوشت :

$$(a) \qquad \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{K_2 A (T_2 - T_x)}{L_2}$$

و

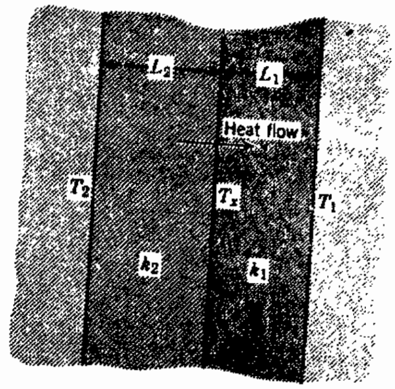
$$(b) \qquad \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{K_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$

در حالت پایدار داریم

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t}$$

یا

$$\frac{K_2 A (T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$



شکل ۲-۱۹ : انتقال حرارت از داخل یك دیواره مرکب که از دولایه باضرایب هدایت حرارتی متفاوت ساخته شده .

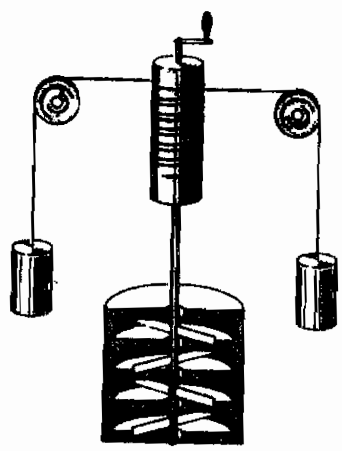
اگر $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ میزان حرارت منتقل شده باشد [که برای تمامی سطوح مقطع یکسان است $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t}\right)$]. با حل معادله بالا میتوان T_x را بدست آورد و در یکی از دو معادله (a) یا (b) قرار داد . در آن صورت در می یابیم که :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = A \frac{(T_2 - T_1)}{L/K_1 + L/K_2}$$

۱۹-٤ معادل مکانیکی حرارت

اگرحرارت نوعی انرژی در آن صورت هرواحد انرژی میتواند واحد حرارت نیز باشد . واحد های کالری و $B.t.u$ قبل ازآنکه دانسته شود که حرارت نوعی انرژی است بنیان نهاده شده اند . ژول اولین کسی بود که انرژی مکانیکی معادل انرژی حرارتی رااندازه گرفت یعنی تعداد واحد ژول هائی که یك کالری میگردند یاتعداد واحد های فوت . پوند که یك $B.t.u$ هستند .

رابطهٔ بین واحد های حرارت وواحد های مکانیکی رامیتوان توسط آزمایش بدست آورد بدین طریق که مقدار کار مکانیکی رابرحسب ژول که به یك سیستم مثلا یك سطل آب داده میشود اندازه می گیریم . ازروی افزایش دما وتعریف Q (بخش ۲-۱۹) مقدار حرارتی راکه لازم است تا همان اثر راد ر سیستم بجای نهد برحسب کالری بدست می‌آوریم . حال میتوانیم نسبت ژول به کالری راکه معادل مکانیکی حرارت نامیده میشود محاسبه نمائیم . دستگاهی راکه ژول برای اولین بارپکاربرد نظیر شکل ۳-۱۹ بود .



شکل ۳- ۱۹ : دستگاهی که ژول بوسیله آن مکانیکی حرارت رااندازه گرفت . پائین آمدن وزنه ها باعث چرخیدن پره هامیگردد ، درنتیجه آب به هم زده میشود ودمایش بالا میرود .

دراین دستگاه پائین آمدن وزنه ها باعث چرخیدن یك دسته پره میشدکه درداخل آب قرارداده شده بودند . مقدار انرژی مکانیکی ازدست رفته ازروی وزن وزنه ها وفاصله سقوط آنها معلوم میگردید وانرژی حرارتی معادل ازروی جرم آب وافزایش دمای آن محاسبه میشد . ژول میخواست نشان دهدکه همان مقدار انرژی حرارتی توسط کار تولید شده حاصل خواهد شد وصرفنظرازاین که طریقهٔ تولید کارمکانیکی چه بوده است . اواین کار راباباهم زدن جیوه . بهم مالیدن حلقه های آهنی درداخل جیوه ، بادادن انرژی الکتریکی توسط سیم گرم به آب ، وازچند راه دیگر انجام داد . درتمامی این آزمایشات ثابت تناسب معادل مکانیکی حرارت (باخطای آزمایش حدود ۵٪) بدست آمد . ژول درآن موقع ترمومتر های دقیق امروزی راد راختیار نداشت . او هم چنین نمیتوانست تصحیحات دقیقی راکه امروزه ما میتوانیم برای حرارت ازدست رفته به محیط آزمایش محاسبه

این اعمال باید پارامترهای مناسب دیگری نیز برای سیستم تعریف کرد .

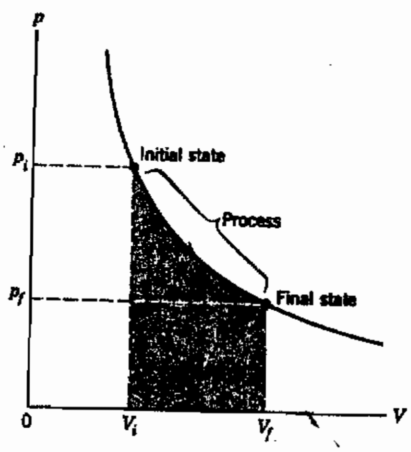
بوسیله اصول ترمودینامیک میتوانیم ازیک طرف رابطه هائی بین پارامترهای اولیه ونهائی سیستم وازطرف دیگربین انرژی های منتقل شده کار (W) وحرارت (Q) بدست آوریم . حال اجازه دهیدکه W رابرای روندی ازاین نوع حساب کنیم . درشکل ٤-۱۹ انبساط گازنشان داده شده است. کارانجام شده توسط گاز درجابجاکردن پیستون به فاصله ds برابر است با :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = pA\,ds = p\,dV =$$

که dV تغییربی نهایت کوچک حجم گاز است. درحالت کلی درحین جابجاشدن پیستون فشار ثابت نخواهد ماند . برای بدست آوردن کل کار انجام شده توسط گازبرروی پیستون باید بدانیم که p چگونه باجابجائی پیستون تغییرمیکند وسپس انتگرال زیررا حساب کنیم .

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV$$

این انتگرال رابطور ترسیمی نیز میتوان بدست آورد ودرآن صورت کارانجام شده سطح زیر منحنی دردیاگرام $p-V$ خواهد بود . برای یک حالت خاص این سطح نشان داده شده است (شکل ٥-۱۹) .



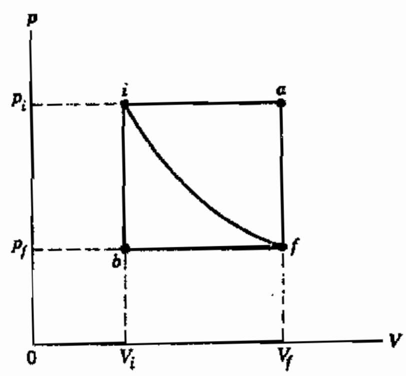
شکل ٥-۱۹ :
کارانجام شده توسط گاز سطح زیرمنحنی $p-V$ میباشد .

ازچند راه میتوان سیستم راازحالت اولیه i به حالت نهائی f رساند . برای مثال (شکل ٦-۱۹) میتوان از i تا a فشار راثابت نگهداشت وسپس از a تا f حجم راثابت نگاه داشت. دراین صورت کارانجام شده توسط گازسطح زیر خط ia خواهد بود . راه دیگر

مسیر ibf است که در آن کارانجام شده سطح زیر bf خواهد بود . مسیر امکان پذیر دیگرمنحنی پیوسته ای از i به f میباشد که کارانجام شده در این روند بامقدار کارانجام شده توسط دوروند دیگرفرق دارد . دیده میشود که کارانجام شده نه تنها به حالت اولیه ونهائی بلکه به حالات میانی نیزبستگی دارد . یعنی کارانجام شده به مسیر تحول وابسته است .

وقتی میخواهیم مقدار حرارت راطی روند های مختلف فوق الذکر محاسبه کنیم نیز چنین حالتی بوجود می آید . حالت اولیه بادمای T_i وحالت نهائی بادمای T_f مشخص می شود . مقدار حرارتی که به سیستم منتقل میشود بستگی به این دارد که چگونه سیستم گرم شود برای مثال ما میتوانیم گاز را در فشار ثابت P_i حرارت دهیم تا دمای گاز به دمای T_f برسد . سپس فشار را در دمای ثابت تغییر دهیم تا گاز به فشار P_f برسد . یامیتوانیم فشار گاز را از P_i به P_f برسانیم وسپس در فشار ثابت P_f گاز را حرارت دهیم تا دمایش به T_f برسد . یامیتوانیم راه های دیگری انتخاب کنیم . در هریك ازاین راه ها مقدار حرارت منتقل شده به سیستم بادیگری متفاوت خواهد بود . پس نتیجه می شود که مقدارحرارت داده شده به سیستم یاگرفته شده ازآن نه تنها به حالات اولیه ونهائی بلکه حالات میانی بستگی دارد . یعنی این مقدارحرارت بستگی به مسیر تحول دارد واین نتیجه عملی است .

کاروحرارت هردو به مسیر تحول بستگی دارند وهیچکدام مستقل ازمسیر نیستند وهیچکدام به تنهائی بقاء ندارند .



شکل ٦-١٩ :
کارانجام شده توسط سیستم نه تنها به حالت اولیه i وبه حالت نهائی f بلکه به مسیرتحول هم بستگی دارد .

۶-۱۹- اصل اول ترمودینامیک

حال ما میتوانیم این نظریه ها را به هم گره بزنیم . فرض کنیم که سیستمی با گرفتن مقدار حرارت Q و انجام کار W از حالت تعادل اولیه i به حالت نهائی f برود . حال مقدار $(Q-W)$ را حساب میکنیم . دوباره سیستم را از طریق مسیر دیگری از حالت تعادل اولیه به حالت تعادل f می بریم . این عمل را برای مسیرهای دیگری که با هم متفاوتند نیز انجام میدهیم . در می یابیم که برای تمامی مسیرها مقدار $(Q-W)$ یکسان است . از این نتیجه چنین برمیآید که گرچه Q و W هریک بتنهائی به مسیر بستگی دارند ولی $(Q-W)$ به مسیر بستگی نداشته بلکه به حالات تعادل ابتدائی و انتهائی بستگی دارد .

در مکانیک نیز میتوان دید که اگر جسمی در میدان جاذبه در غیاب اصطکاک از نقطه اولیه i به نقطه نهائی f برده شود ، کار انجام شده فقط به نقاط اولیه و نهائی بستگی دارد و مستقل از مسیر طی شده است . از این نتیجه برمیآید که تابعی وابسته به مختصات فضائی جسم وجود دارد که مقدار نهائی آن منهای مقدار اولیه اش برابر کار انجام شده در تغییر مکان جسم است . ما این تابع را تابع انرژی پتانسیل می نامیم . حال در ترمودینامیک بوسیله آزمایش در می یابیم که وقتی حالت سیستمی از i به f تغییر می یابد مقدار $(Q-W)$ فقط به مختصات حالات اولیه و نهائی بستگی دارد و بستگی به مسیر انتخاب شده بین این دو حالت ندارد . چنین نتیجه می گیریم که تابعی وابسته به مختصات ترمودینامیکی وجود دارد و مقدار نهائی آن منهای مقدار اولیه اش برابر $(Q-W)$ است . ما این تابع را تابع انرژی داخلی می نامیم .

تابع انرژی داخلی را با حرف U نشان میدهیم . حال انرژی داخلی حالت نهائی f سیستم یعنی U_f منهای انرژی داخلی اولیه i سیستم یعنی U_i تغییر انرژی داخلی سیستم را بدست میدهد که مقدار معینی دارد و مستقل از طریق بردن حالت i به حالت f است . پس داریم :

$$U_f - U_i = \Delta U = (Q-W) \qquad (۱۹-۵)$$

همانند انرژی پتانسیل مکانیکی در این جا نیز فقط تغییر انرژی داخلی مطرح است. اگر مقدار ثابتی برای انرژی داخلی در یک حالت اولیه استاندارد اختیار شود. در هر حالت دیگر مقدار معینی برای انرژی داخلی بدست میآید. معادله ۴-۱۹ به اصل اول ترمودینامیک مشهور است در بکاربردن معادله ۴-۱۹ باید در نظر بگیریم که Q وقتی مثبت است که حرارت وارد سیستم شود و W وقتی مثبت استکه سیستم کار انجام دهد.

اگر سیستم ما تغییر حالت بسیار کوچکی بدهد یعنی مقدار حرارت بسیار جزئی dQ جذب نماید ومقدار بسیار جزئی dW کار انجام دهد در آن صورت تغییر انرژی داخلی dU نیز بسیار جزئی خواهد بود. اگر dW و dQ دیفرانسیل کامل نیستند با این هم اصل اول را میتوان بصورت دیفرانسیلی نوشت

$$dU = dQ + dW \qquad (19\text{-}5)$$

اصل اول را میتوان به صورت زیر بیان کرد:

" هر سیستم ترمودینامیکی در حالت تعادل دارای یك متغیر حالت است که انرژی داخلی U نامیده می شود وتغییر آن dU در یك روند خیلی آهسته از رابطه ۵-۱۹ بدست میآید ".

اصل اول ترمودینامیك برای هر روند، که در طبیعت اتفاق میافتد و از یك حالت تعادل شروع و به حالت تعادل دیگر ختم میشود، میتوان بکاربرد. سیستمی را در حالت تعادل گوئیم که بتوانیم آنرا توسط یك مجموعه مناسب از پارامترهای حالت سیستم مثل فشار، حجم، دما، میدان مغناطیسی وغیره - بیان کنیم. همچنین اصل اول را میتوان برای حالات میانی که سیستم در حین تحول از حالت اولیه به حالت نهائی اختیار میکند، بکاربرد اگرچه این حالات، حالات تعادل نباشند. برای مثال اصل اول ترمودینامیك رامیتوان برای انفجار ترقه ای در داخل استوانه فولادی بسته ای بکاربرد.

سئوالات مهم بسیاری است که اصل اول قادر به جواب دادن آنها نیست. برای مثال اگر چه این اصل بیان میکند که انرژی بقاء دارد ولی نمیتواند بیان کند که یك روند بخصوص اتفاق میافتد یا خیر. اصل دوم ترمودینامیك که یك نتیجه عمومی کاملاً متفاوتی با اصل اول است، این

اطلاعات را بدست میدهد وقسمت اعظم ترمودینامیك به این اصل اختصاص یافته است (فصل ۲) .

۷-۱۹ - کاربرد هائی از اصل اول ترمودینامیك

دیدیم که وقتی گازی منبسط میگردد کاری برابر با مقدار زیر برروی محیط انجام میدهد :

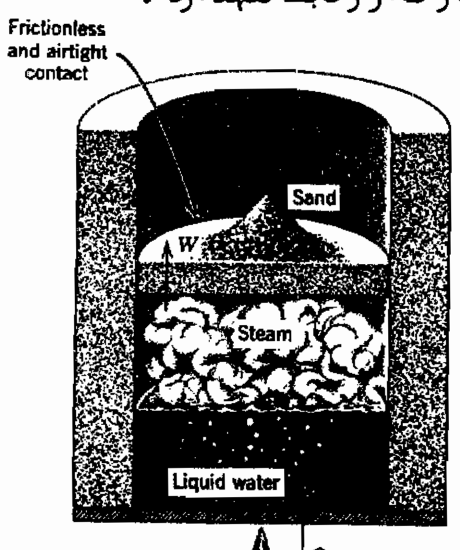
$$W = \int P\,dV$$

که در آن P فشار گاز یا فشاری است که از بیرون به سیستم اعمال میگردد و dV تغییر کوچك حجم گاز است . یك حالت خاص در نظر بگیرید که در آن P ثابت بماند وحجم به مقدار محدود مثلاً از V_i تا V_f تغییر کند . در این صورت خواهیم داشت :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) \qquad \text{(در فشار ثابت)}$$

روندی که در آن فشار تغییر نکند روند ایزوبار Isobaric pross گویند . مثلاً حرارت دادن آب در دیگ ماشین بخار تا رسیدن به نقطه جوش وتبخیر آن وسپس حرارت دادن بخار تماماً در فشار ثابت انجام میگیرند .

در شکل ۷-۱۹ یك روند ایزوبار نشان داده شده است. در اینجا سیستم ما آبی است که درمخزنی استوانه ای است . برروی پیستون بی اصطکاك که مانع ورود هوا به داخل استوانه است، شن ریخته شده تا فشار مناسبی را برآب اعمال کند وبطور خودکار فشار را ثابت نگهدارد .



شکل ۷-۱۹ :

آب در فشار ثابت (بطور ایزوبار) می جوشد . فشار بوسیلهٔ وزن پیستون وشن ثابت نگهداشته میشود .

حرارت تولید شده توسط که یك چراغ بونسون ازمحیط به سیستم منتقل می شود . اگرعمـــــل حرارت دادن برای مدت نسبتاً طولانی ادامه یابد مقداری ازآب تبدیل بخار تبدیل خواهد شد وفرض میکنیم که این عمل اتفاق بیفتد . سیستم خیلی آهسته (شبه استاتیك) منبسط میگردد ولی فشـــاری که توسط گاز برروی پیستون اعمال میشود ثابت میماند . چونکه این فشار باید برابر با فشاری باشد که ازطرف پیستون برروی سیستم اعمال می شود . اگرمانع حرکت پیستون شویم یا درحین حـــرارت دادن مقداری شن برروی آن بگذاریم یامقداری ازشن هابرداریم روند دیگرایزوبار نخواهد بود .

بگذارید که روند جوشیدن رادرنظر بگیریم . میدانیم که مواد تحت فشار ودمای بخصوصـــی تغییرحالت (مثلا ازمایع به گاز) میدهند . برای مثال آب درفشار یك اتمسفر در $100^{\circ}C$ بخار خواهد شد . برای آنکه سیستمی تغییر حالت دهد باید باندازه کافی یابه آن حرارت داد یا ازآن حرارت گرفت تادمایش به مقدار لازمش برسد . فرض کنید که مایعی به جرم m دردماوفشـــار ثابتی ازمایع به بخار تغییر حالت دهد . اگر V_l حجم مایع و V_v حجم بخار باشد کاری که توسط این ماده درانبساط ازحجم V_l به V_v درفشار ثابت انجام میدهد برابراست با :

$$W = P(V_v - V_l)$$

فرض کنید که L حرارت نهان تبخیر باشد یعنی L مقدارحرارتـــی باشد که دردماوفشـــار ثابتی برای تغییرحالت جرم واحدی ازماده ازمایع به بخار لازم است . دراین صورت مقدار حرارت جذب شده توسط جرم m برای تغییر حالت برابراست با :

$$Q = mL$$

ازقانون اول ترمودینامیك داریم :

$$\Delta U = Q - W$$

دراین صورت برای این روند تغییرانرژی داخلی برابرخواهد بود با :

$$\Delta U = mL - P(V_v - V_l)$$

مثال ۳-

درفشاریك اتمسفر یك گرم آب دارای حجم یك سانتیمتر مکعب است ، وقتی که جوشید تبدیل به ۱٦۷۱ سانتیمترمکعب بخارمیگردد . گرمای نهان تبخیر آب دریك اتمسفرفشار برابر $539 \frac{cal}{gr}$

است . اگر $m = 1\,gr$ باشد :

$$Q = mL = 539\ cal$$

این مقدار حرارت که ازمحیط به سیستم منتقل شده مثبت میباشد .

$$W = P(V_v - V_l) = \left(1.013\times10^{5}\ \frac{nt}{m^2}\right)\left[(1671-1)\times10^{-6}\ m^3\right]$$
$$= 169.5\ Joules$$

مقدار W که کارانجام شده توسط سیستم برروی محیط است مثبت میباشد . چون یك کیلو کالری برابر 4180 ژول است پس $W = 41\,cal$ درآن صورت داریم

$$\Delta U = U_v - U_l = mL - P(V_v - V_l) = (539-41)\,cal$$
$$= 498\ cal$$

این مقدار مثبت است یعنی درحین تحول برانرژی داخلی سیستم افزوده میگردد . توجه‌کنید که برای تبخیر یك گرم آب درفشاریك اتمسفر ودمای $^{\circ}C$ ۱۰۰ مقدار ۵۳۹cal حرارت لازم است که از این‌مقدار کالری برابر ۴۱ کالری صرف انبساط میگردد و ۴۹۸ کالری به انرژی داخلی سیستم افزوده می‌شود . این انرژی مقدار کار داخلی‌راکه برای فائق آمدن برنیروی‌جاذبه شدید بین ملکول های آب H_2O لازم است ، نشان میدهد . ۸۰ $cal.$ کالری حرارت لازم برای ذوب یك گرم یخ (در $0^{\circ}C$ ویك اتمسفر فشار) چگونه بین کارخارجی وانرژی‌داخلی تقسیم خواهد شد ؟

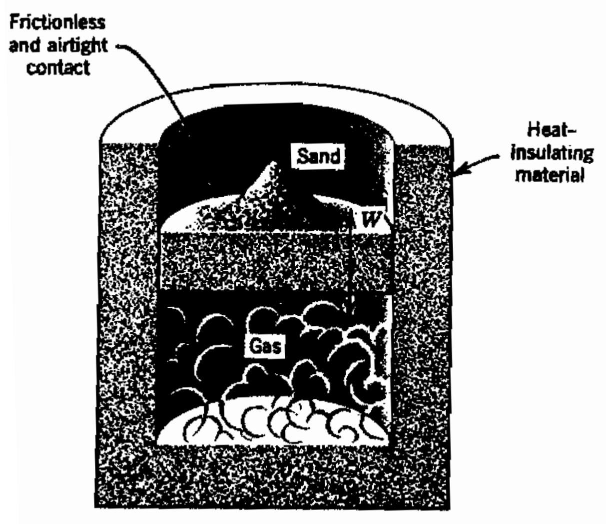
روندی که درآن سیستم نه حرارت میگیرد ونه حرارت به بیرون منتقل کند ، روند آدیاباتیك نامیده میشود . بطورعملی چنین روندی وقتی بوقوع می پیوندد که سیستم ازمحیط توسط مواد عایق حرارت جدا شده باشد ویا روند بطور خیلی سریع انجام گیرد . چون جریان حرارت آهسته صورت میگیرد اگرروندی سریعا" تحول یابد ، روند عملا" آدیاباتیك خواهد بود .

درروند آدیاباتیك Q برابر صفراست ، بنابراین‌ازقانون اول بدست می‌آوریم که :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W$$

از این معادله پیداست که اگر بر روی سیستمی در یک روند آدیاباتیک باندازه W کار انجام گیرد . انرژی داخلی سیستم باندازه W بالا خواهد رفت . اگر در یک روند آدیاباتیک کار توسط سیستم صورت گیرد ، انرژی داخلی درست باندازه کار انجام شده برمحیط کمتر خواهد شد . افزایش انرژی معمولاً " دما را افزایش میدهد ، وکاهش انرژی داخلی معمولاً " باعث کاهش دما میگردد . گازی که بطور آدیاباتیک منبسط میگردد کار خارجی انجام میدهد بنابراین از انرژی داخلیش کاسته میشود . یک چنین روندی برای بدست آوردن دماهای پائین بکار می‌رود . بالا رفتن دما را میتوان در یک روند تراکم سریع(آدیاباتیک) هوا از روی گرم شدن تلمبه دوچرخه دید .

در شکل ۸-۱۹ یک روند آدیاباتیک ساده نشان داده شده است . سیستم ما گازی است که در داخل استوانه ای عایق حرارت قرار دارد . حرارت نه میتواند از سیستم به محیط منتقل شود ونه ازمحیط به سیستم انتقال یابد . در این جا هم مقداری شن روی پیستونی بی اصطکاک که مانع ورود هوا به داخل استوانه است ، قرار دارد تنها اندرکنشی که بین سیستم ومحیط میتواند وجود داشته باشد ، انجام کار است . یک چنین روندی وقتی اتفاق می‌افتد که مقداری ازشن ها برداشته شود ویا برمقدار شن ها افزوده گردد که در آن صورت گاز منبسط یا منقبض میگردد .

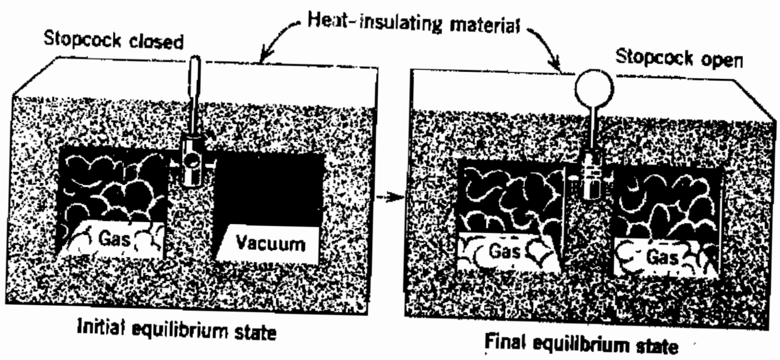


شکل ۸-۱۹ :
در یک روند آدیاباتیک حرارت نه میتواند وارد سیستم شود ونه ازآن خارج گردد . در این شکل دیوارها عایق اند وبابرداشتن ازشن ها یا اضافه نمودن شن برآنها میتوان حجم گاز را بطور آدیاباتیک تغییر داد .

ازمیان روند های آد یاباتیك د رمهند سی میتوان ازانبساط بخار د راستوانه بخار، انبســـــاط گازهای گرم د رماشین د رون سوز (احتراق د اخلی) ، انقباض هواد رموتور د یزل یاکمپرســور هوا ، نام برد . این روند ها بقد رکافی سریع انجام میگیرند ود راین زمان کوتاه فقط مقد ار بسیار ناچیزی حرارت میتواند د اخل سیستم شود یاازآن خارج گرد د . انقباض وانبساط هواد ر موج صوتی آن چنان سریع است که رفتا رگاز انتقال د هند ه آد یاباتیك است .

د لیل مهم مطالعه • روند های آد یاباتیك این است که موتور های ایده آل روند هائی بکارمی برند که کاملا آد یاباتیك هستند . ازموتور های ایده آل بطورتئوری حد ود ی برای کــــار وتوانائی موتورهای واقعی تعیین میگرد د . د رفصل ۲۱ د راین باره بیشتر بحث خواهیم کرد .

یك روند که ازلحاظ تئوری جالب است ، انبساط آزادمی باشد . این روند یك رونـــــد آد یاباتیك است که نه سیستم کاری انجام مید هد ونه برروی سیستم کارانجام میگیرد این روند را بامتصل کرد ن یك محفظه حاوی گاز توسط شیری به قسمت د یگر سیستم که شامل محفظه• د یگری تحت خلاء است ، میتوان انجام د اد . د راین حالت تمامی محفظه توسط ماد ه ای عایق حـــرارت پوشاند ه شد ه است . (شکل ۹-۱۹) .



شکل۹-۱۹ =انبساط آزاد :چون بین سیستم ومحیط نه حرارت ونه کار رد وبد ل میشود . انرژی د اخلی تغییر نمیکند .

اگر بطور ناگهانی شیر باز شود ، گاز به محفظهٔ خالی از هوا میرود وبطور آزاد منبسط می گردد . بخاطر عایق بودن جداره ها این روند آدیاباتیك است وچون دیواره های محفظه صلب می باشد کاری برروی سیستم انجام نمی گیرد . پس با استفاده از قانون اول چون $Q=0$ و $W=0$ است پس نتیجه می گیریم که برای این روند $U_i = U_f$ است. پس در انبساط آزاد تغییری در انـــرژی داخلی سیستم رخ نمیدهد .

در انبساط آزاد برخلاف سایر روند هائی که قبلا ذکرکردیم روند بطورآهسته (شبه استاتیك) صورت نمی گیرد . پس ازبازکردن شیر ما دیگر کنترلی برروی روند نداریم . درحالات میانی فشار، حجم ودما مقادیر مشخصهٔ تك مقدار ندارند یعنی سیستم یك سلسله حالات نامتعادل راطـی میکند وبنابراین مانمی‌توانیم روند رابرروی دیاگرام $p-V$ رسم کنیم. درروی این دیاگرام نقط حالات اولیه ونهائی راکه کاملا مشخص اند وحالات تعادلند می‌توانیم مشخص‌کنیم .

انبساط آزاد نمونهٔ خوبی برای روند برگشت ناپذیر (irreversible) است که دربخش ۲-۲۱ خواهید دید .

فصل ۲۰

تئوری جنبشی گـــــازهـــــا

۲۰-۱ - مقدمــه

علم ترمودینامیك فقط با متغیرهای ماکروسکوپی مانند فشار ، دما و حجم سروکار دارد . قوانین اصلی آن برحسب این متغیرها ابداً چیزی درباره این حقیقت که ماده از اتمها تشکیل میشود صحبت نمی‌کنند . در علم مکانیك آماری ، که مربوط به همان قسمتی از علم میشود کـــــه ترمودینامیك برای بحث آن بکار میرود ، برعکس از قبل وجود اتمها را جزء فرضیات اولیه میگذارند . بنابراین قوانین آن همان قوانین مکانیك میباشند که باتمهای زیادی که سیستم را تشکیل میدهند اعمال شده است . در حال حاضر هیچ کامپیوتر الکترونیکی که بتواند قوانین مکانیك را به تك تك اتمهای موجود در یك کپسول کوچك اکسیژن برای مثال اعمال کند وجود ندارد . اگرهم این مسئله قابل حل بود نتایج این محاسبات بقدری حجیم میبود که به آسانی قابل استفاده نبود .

خوشبختانه تاریخچه حرکت تك تك اتمها اهمیتی ندارد اگرما فقط بخواهیم رفتار ماکروسکوپی گاز را محاسبه نمائیم . ما قوانین مکانیك را فقط بطورآماری بکار میبریم ومی بینیم که تمام متغیرهای تـــرمو دینامیکی را میتوان بصورت متوسطی از خواص اتمها بیان نمود . مثلاً فشاری که یك گاز بدیواره‌های ظرف اطراف خود وارد میکند برابرمتوسط ممانتوم خطی است (برواحد سطح برواحد زمان) کـــه اتمها دربرخورد بادیوار بآن منتقل میکنند . تعداد اتمها دریك سیستم ماکروسکوپی معمولاً آنقدر زیاد است که اینگونه میانگین هااعدادی بسیاردقیق ومعلوم میباشند .

مامیتوانیم قوانین مکانیك رابه مجموعه ای از اتمها در دو سطح مختلف اعمال کنیم . درسطحی که تئوری جنبشی نامیده میشود ما بصورت نسبتاً فیزیکی وبااستفاده از متدهای ساده میانگیـــن گیری درریاضی جلومیرویم . در این فصل ما این متدها رابکار خواهیم برد تادرك خود را ازفشار ، دما ، گرمای ویژه وانرژی داخلی درسطح اتمی افزایش دهیم .* در این کتاب ماتئوری جنبشـی

---

* برای یك شرح جالب در مورد تاریخ تئوری جنبشی مقاله John - James - Waterston and The Kinetic Theory of Gases توسط S. G. Brush را در مجله June 1961, American Scientist ~~ببینید~~ .

رافقط به گازها اعمال خواهیم کرد زیرا اند رکنش بین اتمها د رگازها به مراتب ضعیفتر ازمایعات وجامدات میباشد وموجب میشود که ریاضیات لازم فوق العاده ساده ترباشند .

د رسطح د یگری ما میتوانیم قوانین مکانیک رابطور آماری ولی با متد های اساسی ترو پیچید متر ازتئوری جنبشی بکار ببریم . پیشرفت د راین جهت که توسط افراد ی چون J. Willard Gibbs (1839-1903) Ludwig Boltzman (1844-1906) بوجود آمد بنام مکانیک آماری شناخته میشود که تئوری جنبشی بعنوان یکی ازشعب مختلف آن بحساب میآید . بااستفاده ازاین متد ها ما میتوانیم قوانین ترمود ینامیک رابد ست بیاوریم که خود بخود علم ترمود ینامیک را بصورت شاخه ای ازعلم مکانیک د رمیاورد . مکانیک آماری د رسطح مکانیک کوانتیک (آمارکوانتیک) شامل اعمال قوانین کوانتیک (بجای مکانیک کلاسیک) به سیستمهای اتمهای زیاد میشود .**

۲-۰ ۲ گازایده آل ـ یک توصیف ماکروسکوپی

فرض کنید جرم m ازیک گاز د رظرفی بحجم V محبوس باشد . چگالی گاز ρ برابر $\frac{m}{V}$ است وواضح است که ما میتوانیم ρ رایاازطریق بیرون کشید ن مقد اری ازگاز (کم کرد ن m) ویامنتقل کرد ن گاز به ظرفی با حجم زیاد تر (زیاد کرد ن V) کم نمائیم .تجربه نشان مید هد که د رچگالی باند ازه کافی کم برای تمام گازها رابطه ساده ای بین متغیرهای ترمود ینامیکی P ، V و T وجود دارد . این بما تصور یك گازایده ال راپیشنهاد میکند که همان رابطه ساده برایش تحت تمام شرائط د ماوفشارصادق است . د ر این قسمت ما یك تعریف ماکروسکوپی یاترمود ینامیکی ازگازایده آل خواهیم نمود . د رقسمت ۳-۰ ۲ ما یك تعریف میکروسکوپی وازنقطه نظر تئوری جنبشی خواهیم نمود وبعد بامقایسه ایند وتعریف خواهیم د ید که میتوانیم چه چیزهائی بیاموزیم .

** ـ برای د ید ن یك بررسی کاملتر ترمود ینامیك ، تئوری جنبشی وبخصوص مکانیك آماری (ازآنچه ما میتوانیم د راینجاارائه د هیم) به Thermal physics توسط Philip M. Morse (ناشر 1962-W. A. Benjamin Inc. N. Y.) رجوع کنید .

اگریك مقدار m ازگاز درحالت تعادل گرمائی داشته باشیم میتوانیم فشار P ، خجم V و دمای T آنرا اندازه بگیریم برای مقادیر کم چگالی تجربه نشان میدهد که (۱) برای مقدار جرم معینی ازگازکه دمای آن ثابت باشد فشار بامعکوس حجم متناسب میباشد (قانون Boyle) و (۲) برای مقدار جرم معینی ازگاز که در فشار ثابت نگاهداشته میشود حجم متناسب باد مـــای گازمیباشد (قانون Charles و Gay-Lussac) . میتوانیم اینـــدو نتیجه تجربی راتوسط رابطه زیرخلاصه کنیم :

$$\frac{PV}{T} = \text{ثابت} \quad \text{(برای مقدار ثابتی از گاز)} \qquad (۲۰-۱)$$

حجم اشغال شده توسط یك گاز (ایده آل یاحقیقی) دریك فشار ودمای بخصوص متناسب با جرم آن میباشد . بنابراین ثابت موجود درمعادله ۲۰-۱ بایستی باجرم گاز موجود نیز متناسب باشد . بنابراین ماثابت معادله رابصورت μR مینویسیم که درآن μ جرم گاز برحسب مول (mole) * میباشد و R ثابتی است که برای هرگاز بایستی توسط آزمایش تعیین گردد . تجربه نشان میدهد که درچگالی باندازه کافی کم مقدار R برای تمام گازها یکی است و برابر

$R = 8.314 \frac{joules}{mole\,°K} = 1.986 \frac{cal}{mole\,°K}$ میباشد . R را ثابت کیهانی گازها نامند بنابراین مامعادله ۲۰-۱ رابصورت

$$PV = \mu R T \qquad (۲۰-۲)$$

مینویسیم وسپس گازایده آل راچنان تعریف مینمائیم که تحت تمام شرایط رابطه فوق راارضانماید . چیزی بتمام معنی گازایده آل وجود ندارد ولی معهذا مفهوم گازایده آل بسیارمفید وساده میباشد و رابطه آن باحقایق باین ترتیب است که رفتارتمام گازهای حقیقی به گازایده آل نزدیك میشود -

---

* یك مول (mole) ازیك جسم مقدارجرمی ازجسم است که تعداد بخصوصی 6.02217×10^{23} که بنام عدد آووگادرو شناخته میشود مولکول داشته باشد . این عدد نتیجه تعریفی است که یك مولکول کربن (درحقیقت ایزوتوپ C^{12} آن) بایستی ۱۲ گرم جرم داشته باشد . وزن مولکولی M یك جسم یك کمیت بدون دیمانسیون است که نماینده تعداد گرم دریك مول آن جسم است. بنابراین وزن مولکولی اکسیژن $32\ g/mol$ میباشد . اگرچه مول یك واحد جرم میباشد مانمیتوانیم آنرامثلا" برحسب گرم بیان کنیم تازمانیکه ترکیب شیمیائی جسم رابدانیم . باین دلیل راحتتر است که ماجرمهائی راکه توسط مول بیان میشود توسط علامت مخصوص μ نمایش دهیم .

هنگامیکه چگالی آنها باندازه کافی کم باشد . معادله ۲۰ـ۲ رامعادله حالت گاز ایده آل نامند . اگرمامیتوانستیم یك ترمومتر گازی باحجم ثابت (ایده آل) رابایك گاز ایده آل پرکنیم معادله ۲۰ـ۲ نشان میدهد که مامیتوانیم دمارابرحسب فشارهائی که روی‌آن خوانده میشوند تعریف کنیم ، یعنی

$$T = 273.16^{\circ}K \left(\frac{P}{P_{tr}}\right) \qquad \text{(گازایده آل)}$$

در اینجا P_{tr} فشار گاز در نقطه سه گانه آب است که در آنجا برحسب تعریف دمابرابر $T_{tr} = 273.16^{\circ}K$ میباشد . در رعمل ما بایستی ترمومتر رابایك گاز حقیقی پرکنیم ودما راباکمك معادله زیر ازطریق تخمین زدن حد به سمت چگالی صفراندازه بگیریم

$$T = 273.16^{\circ}K \lim_{P_{tr} \to 0} \left(\frac{P}{P_{tr}}\right) \qquad \text{(گاز حقیقی)}$$

مثال ۱

یك کپسول استوانه ای محتوی اکسیژن در دمای $20\ ^{\circ}C$ ، فشار ۱۵ اتمسفر وحجم ۱۰۰ لیتر میباشد . حجم استوانه راتوسط پائین آوردن یك پیستون به ۸۰ لیتر میرسانیم ودما به $25^{\circ}C$ میرسد . بافرض اینکه اکسیژن تحت این شرائط مانند گاز ایده آل عمل‌میکند فشار گاز در این حالت چیست ؟

ازمعادله ۲۰ـ۱ بعلت اینکه جرم گاز تغییر نمیکند میتوانیم بنویسیم $\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$ شرائط اولیه ماراقرارداتمسفر $V_i = 100$ لیتر ، $T_i = 293^{\circ}K$ ، $P_i = 15$ وشرائط نهائی‌از قرار $P_f = ?$ و $T_f = 298^{\circ}K$ و لیتر $V_f = 80$ میباشند بنابراین [redacted]

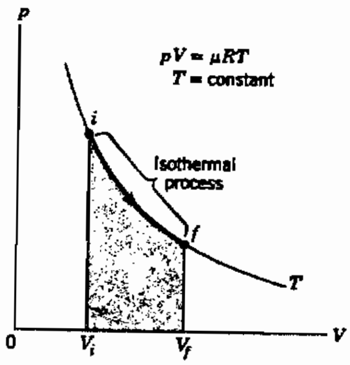
$$P_f = \left(\frac{T_f}{V_f}\right)\left(\frac{P_i V_i}{T_i}\right) = \left(\frac{298^{\circ}K}{80\,lit}\right)\left(\frac{15\ \text{اتمسفر} \times 100\,lit}{293^{\circ}K}\right) = 19\ \text{اتمسفر}$$

مثال ۲

مقدار کارانجام شده توسط هرمول (mole) ازگاز ایده آل راکه بطور ایزوترم

(یعنی د ردمای ثابت) از V_i به V_f انبساط پید امیکند رامحاسبه نمائید .

کارانجام شده رامیتوان بصورت $W=\int_{V_i}^{V_f} p\,dV$ نوشت. ازقانون گازایده آل داریم $p=\frac{\mu RT}{V}$. بنابراین $\frac{W}{\mu}$ که کارتوسط یك مول میباشد برابر $\frac{W}{\mu}=\int\frac{RT\,dV}{V}$ ویا $\frac{W}{\mu}=RT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V}=RT\ln\frac{V_f}{V_i}$ میباشد .این کارانجام شده توسط یك مو ل گازایده آل د ریك انبساط ایزوترم د ردمای T ازحجم اولیه V_i به حجم نهائی V_f میباشد . توجه کنید که وقتی گاز انبساط پید امیکند $V_f > V_i$ وکارانجام شده توسط گاز مثبت است. وقتی که گازفشرده میشود $V_f < V_i$ وکارانجام شده توسط گاز منفی است. این باقرارد اد علامتی که برای کار درقانون اول ترمود ینامیك انتخاب شده مطابقت دارد .



شکل ۱-۲۰

کارانجام شده توسط سطح هاشورزده زیرمنحنی د رشکل ۱-۲۰ نشان داده شده است . منحنی نشان داده شده یك منحنی ایزوترم است یعنی رابطه p برحسب V وقتی د ماثابت باشد . د رعمل ما چگونه میتوانیم یك گازد رحال انبساط یافشرده شدن راد ردمای ثابت نگاه داریم؟

۲-۲۰ـ گازایده آل ـ یك توصیف میکروسکوپی

ازنقطه نظر میکروسکوپی ماگازایده آل رامطابق فرضیات زیر تعریف میکنیم . برنامه ما این خواهد بود که قوانین مکانیك کلاسیك رابطور آماری به اتمهای این گازاعمال نمائیم ونشان د هیم که تعریف میکروسکوپی مابا تعریف ماکروسکوپی قسمت قبل مطابقت دارد :

۱ـ یك گاز ازذ راتی بنام مولکولهاتشکیل میشود . بستگی به اینکه گاز چه باشد هرمولکو ل ازیك یاتعد ادی اتم تشکیل میشود . اگر گاز یکی ازعناصر ویاترکیبات بوده ود ریك حالت پایدار

میباشد ماتمام مولکولها را یکسان د رنظرخواهیم گرفت .

۲- مولکولها د رحرکات غیرمشخص هسته و ازقوانین حرکت نیوتن تبعیت میکنند . مولکولها د رتمام جهات وبا تند یهای مختلف حرکت میکنند . د رمحاسبه خواص حرکت ما فرض خواهیم کرد که مکانیك نیوتنی د رسطح میکروسکوپی صد ق میکند . مانند بقیه فرضیاتمان اینهم برحسب اینکه آیا نتایجی که پیش بینی خواهد کرد صحیح است یا خیر (ازنظرتجربی) مورد قبول یا رد واقع خواهد شد .

۳- تعد اد کل مولکولها زیاد میباشد . جهت وتند ی حرکت هرمولکول بخصوص میتواند آنا بخاطر تصاد م با مولکول د یگر یا با د یوار د ستگاه تغییر نماید ومسیرآن بصورت یك خط شکسته ود رهم بخاطر تصاد مات متوالی خواهد بود . امابخاطر آنکه تعد اد مولکولها آنقد ر زیاد است ما میتوانیم یك توزیع کلی سرعتها وغیرمشخص بود ن حرکت مولکولها رابرای د ستگاه باید ارتصور نمائیم .

٤- حجم مولکولها نسبت به حجم اشغال شد ه توسط گازکسری کاملا" قابل صرفنظرکرد ن است . اگرچه تعد اد بسیاری مولکول موجود است ولی مولکولها فوق العاد ه کوچك هستند . با توجه باینکه مامیتوانیم حجم محتوی گازرابد ون هیچ اشکال تغییرد هیم واینکه پس ازمایع شد ن یك گاز حجم آن هزاران برابر کوچك میشود بنظر میرسد که فرضیه بالا احتمال صحت زیاد ی د ارد .

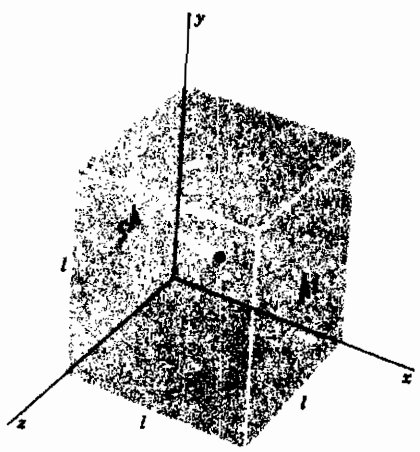
٥- هیچ نیروی قابل ملاحظه ای بین مولکولها رد وبد ل نمیشود مگرد رهنگام تصاد م . اگر این فرض صحیح باشد مولکولها د ربین د وتصاد م با سرعت ثابتی حرکت خواهند کرد . چون ما مولکولها را اینقد ر کوچك (نسبت به فاصله بین مولکولها) فرض کرد ه ایم فرض عد م تباد ل نیرو معاد ل اینست که حوزه اثر نیروی بین مولکولها راد رحد ود حجم خود مولکولها د رنظر بگیریم .

٦- تصاد مها الاستیك هستند وازنظر زمانی فوق العاد ه کوتاه میباشند . د رتصاد مها بین مولکولها وبین مولکولها ود یوار د ستگاه ممانتوم خطی وهمچنین (مافرض میکنیم) انرژی جنبشی بقاد ارند . چون زمان تصاد مها د رمقایسه زمان بین د و تصاد م بسیارناچیز است انرژی جنبشی که د رحین تصاد مها به انرژی پتانسیل تبد یل شد ه چنان سریع د وباره به انرژی جنبشی تبد یل

میشود که ما بکلی ازاین تهدیل صرفنظر خواهیم نمود .

۴-۲- محاسبه فشار توسط تئوری جنبشی

میخواهیم فشار یك گاز ایده آل را توسط تئوری جنبشی محاسبه نمائیم . برای ساده کردن کار گاز را در یك محفظه مکعب شکل با دیوارهای کاملا" ارتجاعی در نظر میگیریم . طول هر ضلع مکعب را l وسطوحی راکه عمود برجهت محور x (شکل ۲-۲۰) بوده وهریك به مساحت l^2 هستند A_1 و A_2 مینامیم . یك مولکول با سرعت $\vec{v}$ را در نظر میگیریم کهمولفه های آن در جهات لبه های مکعب v_x، v_y و v_z میباشد .



شکل ۲-۲۰ - یك جعبه مکعب شکل به ضلع l که محتوی گازایده آل میباشد . یك مولکول درحال حرکت بسمت A_1 دیده میشود .

اگراین مولکول با A_1 تصادم کند درهنگام برگشت مولفه x سرعت آن برعکس خواهد شد وتصادم هیچ اثری در مولفه های v_y و v_z نخواهد داشت . بنابراین Δp تغییر مانتوم مولکول برابر

$$\Delta p = p_f - p_i = (-mv_x) - (mv_x)$$

وبرابر $-2mv_x$ در جهت عمود به A_1 خواهد بود . لذا مانتوم وارده برسطح A_1 برابر $+2mv_x$ میباشد زیرادرتصادم مانتوم کل بقا دارد .

فرض کنیم که ذره بدون برخورد باذره دیگر به سطح A_2 برسد . زمان لازم برای اینکار برابر l/v_x میباشدکه پس ازآن ذره به A_2 برخورد نموده جهت v_x آن دوباره عوض میشود . اگر دوباره بین راه بامولکولی برخورد نکند پس اززمان $2l/v_x$ دوباره به A_1 خواهد رسید . پس تعداد برخورد هائی که این مولکول با A_1 خواهد داشت درواحد زمان برابر $v_x/2l$ خواهد بود و مقدارممانتوم وارده برسطح درواحد زمان برابر $2mv_x \frac{v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l}$ میباشد . بـــرای یافتن نیروی کل وارد بر A_1 ، یعنی آهنگ وارد نمودن ممانتوم به A_1 توسط کلیه مولکولها ، بایستی

$\frac{mv_x^2}{l}$ رابرای‌تمام مولکولها جمع‌کنیم. سپس‌برای یافتن فشار نیروی‌کل وارده بر A رابرمساحت A_1 یعنی l^2 تقسیم مینمائیم . اگر m جرم هرمولکول باشد داریم :

$$p = \frac{m}{l^3}\left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \cdots\right)$$

که دراینجا v_{x_1} مولفه x سرعت مولکول یکم v_{x_2} مولفه x سرعت مولکول دوم وغیره . . . . میباشند . اگر N تعداد کل مولکولها و n تعداد مولکولها درواحد حجم باشد $n = \frac{N}{l^3}$ ویا $l^3 = \frac{N}{n}$. بنابراین :

$$p = mn\left(\frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \cdots}{N}\right)$$

ولی میدانیم که mn جرم درواحد حجم ویاچگالی (ρ) کمیت در پرانتز $\left(\frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \cdots}{N}\right)$ نیز میانگین v_x^2 برای تمام ذرات سیستم میباشد . بگذارید این میانگین رابا $\overline{v_x^2}$ نشان دهیم . دراینصورت $p = \rho\overline{v_x^2}$ برای‌هرمولکول $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ باضافه ماتعداد بسیاری مولکول داریم وحرکت همه آنهاکاملا غیر مشخص‌است . بنابراین میانگین مقدار v_x^2 ، v_y^2 و v_z^2 مساوی بوده وهر یك دقیقاً برابر $\frac{1}{3}$ میانگین v^2 میباشند . بعبارت دیگر مولکولها جهت بخصوصی رابرای حرکت ترجیح نمیدهند . لذا $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ بطوریکه :

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} \qquad (۲۰-۳)$$

اگرچه مااین نتیجه راباصرفنظرکردن ازتصادمات بین مولکولها بدست آوردیم ولی حتی بادرنظر گرفتن این تصادمات باز نتیجه قبلی صحت دارد . بخاطر عوض وبدل شدن سرعتهادرتصادمات بین ذرات همجور همیشه یك مولکول باممانتوم mv_x ودرحال برخورد با A_2 وجود داردکه ممانتوم آن درجهت x مساوی ذره دیگری است که A_1 راترك کرده بود . باضافه زمان‌صرف شده درچنین تصادمات درمقایسه بازمان صرف‌شده بین تصادمها بسیارناچیزاست . بنابراین صرفنظر کردن مااز وجود این‌تصادمات فقط برای سهولت محاسبات میباشد . بهمین ترتیب ما

میتوانستیم گاز راد رظرفی بشکل د لخواه د رنظر بگیریم. مکعب فقط محاسبات راسهل تر میکند . اگر چه ما فقط فشار وارد ه به یك سطح بخصوص A رامحاسبه کرد یم ، د رصورت صرفنظرکرد ن از وزن گاز ازقانون پاسکال $(Pascal)$ نتیجه میشود که فشار روی تمام د یواره هاوهمچنین تمام نقاط د اخلی ظرف یکسان میباشد .

ریشه د وم $\overline{v^2}$ بنام ریشه‌میانگین‌ـ مربع root-mean-squar تندی مولکولها نامید ه میشود ونوعی متوسط ازتند ی مولکولها میباشد (بخش ۹-۲۰ راببینید) ، بکمك معاد له ۳-۲۰ میتوانیم مقدار این ریشه میانگین مربع (rms) راازمقاد یر اند ازه گرفته شد ه فشار وچگالی گازبد ست آوریم . بنابراین

$$v_{rms}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}} \qquad (۲۰-٤)$$

د رمعاد له (۳-۲۰) ما یك کمیت ماکروسکوپی (فشار p) رابه مقد ار متوسط یك کمیت میکروسکوپی (یعنی $\overline{v^2}$ یا v_{rms}^2) مربوط مینمائیم . معهذ ا میانگین رامیتوان روی زمانهای کوتاه یابلند یا روی قسمتی کوچك یابزرگ ازفضامحاسبه نمود . میانگین محاسبه شد ه برای یك قسمت کوچك فضا برای زمانهای کوتاه میتواند کاملاً به زمان یافضای انتخاب شد ه بستگی د اشته باشد و مقاد یر بد ست آمد ه میتوانند تغییرکنند مثلاً د رمورد یك گاز باچگالی فوق العاد ه کم این میتواند اتفاق بیافتد . ولی د رمورد د ستگاههائی که تعد اد ذ رات د رآنها باند ازه کافی زیاد است این تغییرات فوق العاد ه کم وقابل صرفنظر کرد ن میباشند .

<u>مثال ۳</u>

با فرض اینکه هید روژن یك گازاید ه آل است v_{rm} مولکولهای آنراد رد مای $0.0\,^{\circ}C$ وفشار 1.00 اتمسفر محاسبه کنید .

تحت این شرائط هید روژن د ارای چگالی برابر $8.99\times10^{-2}\,Kg/m^3$ میباشد . چون $p=1$ اتمسفر $=1.01\times10^{5}\,nt/m^2$ بنابراین $v_{r.m.s}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=1840\,m/sec$ که د رحد ود 1.8 کیلومترد رثانیه یاد رحد ود 6600 کیلومتر د رساعت میباشد .

جدول ۱-۲۰ نتیجه محاسباتی مانند بالا را برای بعضی ازگازها در $0^{\circ}C$ نشان میدهد . این سرعتهای مولکولی در حدود سرعت صوت در همان دما میباشند . مثلاً در هوا در $0^{\circ}C$ $v_{r.m.s}=485\frac{m}{sec}$ وسرعت صوت برابر $331\frac{m}{sec}$ ، در هیدروژن $v_{r.m.s}=1838\frac{m}{sec}$ وسرعت صوت برابر $1286\frac{m}{sec}$ در اکسیژن $v_{r.m.s}=461\frac{m}{sec}$ وسرعت صوت برابر $317\frac{m}{sec}$ میباشد . این نتایج را با مدلی که ما ازگاز اختیار کردیم میتوان انتظار داشت (مسئله 7 را ببینید)

جدول ۱-۲۰

* - مول ووزن مولکولی قبلاً تعریف شده اند (صفحه) مقادیر در ستون سمت چپ در بخش بعد بحث خواهند شد .

گاز	$v_{r.m.s}$ $(\frac{m}{sec})$ در $0^{\circ}C$	وزن مولکولی $(\frac{gr}{mol})$	انرژی جنبشی * انتقالی برمول در $0^{\circ}C$ $\frac{1}{2}Mv^2_{r.m.s}$ $(\frac{Joule}{mol})$
O_2	461	32	3400
N_2	493	28	3390
هوا	485	28.8	3280
CO	493	28	3390
H_2	1838	2.02	3370
He	1311	4.0	3430
CO_2	393	44	3400
H_2O	615	18	3400
Ne	584	20.1	3420

ما بایستی بین تندی هر مولکول (که توسط $v_{r.m.s}$ بیان میشود) وتندی بسیار کمتری که یک گاز درگاز دیگری رخنه میکند تفاوت بگذاریم. بنابراین اگر ما دریک شیشه آمونیاک را در یک گوشه اطاق باز میتوانیم بوی آمونیاک را پس از مدت زمان کاملاً قابل اندازه گیری در گوشه دیگر اطاق احساس نمائیم. سرعت رخنه کردن (diffusion) بعلت تعداد فوق العاده زیاد تصادمات با مولکولهای هوا که از پیشرفت مولکولهای آمونیاک جلوگیری میکنند کم میباشد .

مثال ٤

فرض کنید که سرعت صوت در یک گاز مساوی v_{rms} مولکولهای آن میباشد (مطابق آنچه قبلاً دیدیم این تقریباً صحیح است). نشان دهید که سرعت صوت در یک گاز ایده آل به دما چگونه بستگی دارد.

چگالی گاز برابر $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu M}{V}$ میباشد که در آن m جرم گاز، M وزن مولکولی $\left(\frac{gr}{Mole}\right)$ و μ جرم گاز در واحد mole میباشد. ترکیب رابطه بالا با معادله حالت گاز ایده آل $PV = \mu RT$ رابطه $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$ را بدست میدهد. ازمعادله ٤-۲۰ داریم $v_{r.m.s} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. بنابراین اگر v_1 سرعت صوت در دمای T_1 و v_2 سرعت صوت در دمای T_2 باشد رابطه $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ صدق خواهد کرد.

مثلاً اگر سرعت صوت در $273^{\circ}K$ درهوابرابر $332\ m/sec$ است در دمای $300^{\circ}K$ برابر با

$$\sqrt{\frac{300}{273}} \times 332\ \frac{m}{sec} = 348\ \frac{m}{sec}$$

خواهد بود. آیا این نتیجه بالا فرقی میکرد اگرما بجای آنکه سرعت صوت را مساوی $v_{r.m.s}$ بگیریم آنرا متناسب، $v_{r.m.s}$ میگرفتیم؟ (مسئله ۷ راببینید).

۵-۲۰ توجیه دما از نقطه نظر تئوری جنبشی

اگرما دوطرف معادله ۳-۲۰ را در حجم V ضرب کنیم رابطه $P = \frac{1}{3}\rho V v_{rms}^2$ بدست میآید که در آن ρ چگالی گاز ولذا ρV جرم کل گاز m میباشد. ماهمچنین میتوانیم جرم گاز رابصورت μM که در آن μ جرم برحسب مول و M وزن مولکولی میباشد بیان کنیم.

اگر اینکار راانجام دهیم $pV=\frac{1}{3}\mu M v_{r.m.s}^2$ که در اینجا $\frac{1}{3}\mu M v_{r.m.s}^2$ دو سوم انرژی جنبشی انتقالی کل مولکولها [یعنی $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mu M v_{r.m.s}^2\right)$] میباشد . بنابراین میتوانیم رابطه رابصورت $pV=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mu M v_{r.m.s}^2\right)$ بنویسیم. باضافه معادله حالت گاز ایده آل - $pV=\mu RT$ است. باترکیب دو رابطه اخیر نتیجه میشود :

$$\frac{1}{2}Mv_{r.m.s}^2=\frac{3}{2}RT \qquad (۲۰-۵)$$

بعبارت دیگرانرژی جنبشی انتقالی کل هرمول گازایده آل بادمامتناسب است. میتوانیم بگوئیم که معادله (۲۰-۵) لازم است برای اینکه تئوری جنبشی رابامعادله حالت گاز ایده آل تطبیق دهد ویااینکه معادله ۲۰-۵ رابصورت تعریف دمای یك گاز درمقیاس میکروسکوپی یاتئوری جنبشی درنظر گرفت. بهرحال مادرمورد معنی دمای گازهای درك بهتری پیدا کرده ایم.

دمای یك گاز به انرژی کل انتقالی گازنسبت به مرکزجرم آن مربوط میشود . انرژی جنبشی خود مرکزجرم ربطی به دمای گازندارد . مثلا" دمای یك ظرف محتوی گاز زیاد نمیشود اگرآنرا روی یك ترن متحرك قرار دهیم.

حالا دوطرف معادله ۲۰-۵ را به عدد آوگادرو (N_0) تقسیم میکنیم که تعداد مولکولها دریك mole گازاست . لذا $\frac{M}{N_0}=m$ جرم یك مولکول است وداریم :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{N_0}\right)v_{r.m.s}^2=\frac{1}{2}mv_{r.m.s}^2=\frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_0}\right)T$$

حالا $\frac{1}{2}mv_{r.m.s}^2$ برابر انرژی جنبشی انتقالی متوسطهرمولکول است . نسبت $\frac{R}{N_0}$ که بنام ثابت بلتزمان (Boltzmann) معروف است رل ثابت گازها رابرای یك مولکول دارد بنابراین

$$\frac{1}{2}mv_{r.m.s}^2=\frac{3}{2}kT \qquad (۲۰-۶)$$

که در آن

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8.317 \ Joule/mole^{\circ}K}{6.02 \times 10^{23} \ molecules/mole} = 1.381 \times 10^{-23} \frac{Joule}{molecule\text{-}^{\circ}K}$$

در بخش ۹-۲۰ درباره درباره ثابت بلتزمان صحبت خواهیم کرد .

در آخرین ستون جدول ۱-۲۰ مقادیر محاسبه شده $\frac{1}{2} M v_{rms}^2$ رانوشته ایم. همانطور که معادله ۵-۲۰ پیش‌بینی میکند این مقدار (انرژی جنبشی انتقالی هرمول) تقریباً" در یک دمای بخصوص (در این جدول $0^{\circ}C$) دارای یک مقدار ثابت برای تمام گازها میباشد . از معادله ۶-۲۰ نتیجه میگیریم که در دمای T مساوی نسبت $v_{r.m.s}$ مولکولهای دو گاز مختلف برابر با ریشه عکس نسبت جرمهای آنها میباشد . یعنی $T = \frac{2}{3k} \frac{m_1 v_{1r.m.s}^2}{2} = \frac{2}{3k} \frac{m_2 v_{2r.m.s}^2}{2}$

ولذا

$$\frac{v_{1\,r.m.s}}{v_{2\,r.m.s}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \qquad (۷-۲۰)$$

ما میتوانیم معادله ۷-۲۰ را در مورد رخنه کردن دو گاز مختلف از دیوارهای متخلخل یک ظرف شامل هردو آنها (اگر ظرف را در فضای خلاء بگذاریم) بکار ببریم. گاز سبکتر که مولکولهایش تند تر حرکت میکنند زودتر از گاز سنگینتر از دیواره ها خارج خواهد شد . نسبت تعداد مولکولهای دو گاز که در مدت زمان کمی از دیوارها بیرون نفوذ میکنند برابر ریشه عکس نسبت جرمهای آنها $\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ میباشد . این متد *diffusion* یکی ازراههای مجزاکردن اورانیوم U^{235} (قابل تجزیه هسته ای) ازنمونه های معمولی اورانیوم که حدود ٪99.3 U^{238} وحدود ٪0.7 U^{235} دارد میباشد .

۲۰-۶ گرمای ویژه برای یك گاز ایده آل

مامولکولهای یك گاز ایده آل راز راتی کروی وسخت والاستیك (یعنی د رتصاد مات انرژی جنبشی د رد اخل آن جذب نمی شود) د رنظر میگیریم وفرض میکنیم هیچ نیروئی بین مولکولها وجود ند ارد (مگرد رهنگام تصادم) ود رضمن تصاد مات باعث هیچ تغییر شکلی د رمولکولها نمی شوند اگر اینطور باشد بنابراین انرژی پتانسیل د اخلی وجود ند ارد وتمام انرژی د اخلی گازایده آل از نوع جنبشی میباشد . ماقبلاً پیدا کرده ایم که متوسط انرژی جنبشی انتقالی هرمولکول برابر $\frac{3}{2}kT$ میباشد . بنابراین انرژی د اخلی یك گاز تك اتمی ایده آل که شامل N مولکول است برابراست با

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\mu RT \tag{۲۰-۸}$$

این پیش بینی تئوری جنبشی میگوید که : انرژی د اخلی یك گاز ایده آل متناسب با د مای کلوین است وفقط به د ما بستگی د ارد ومستقل ازحجم وفشار سیستم میباشد . باد رد ست د اشتن این نتایج میتوان اطلاعاتی د رمورد گرماهای ویژه گاز ایده آل بد ست آورد .

گرمای ویژه یك جسم حرارت لازم برای بالا برد ن د مای یك واحد جرم ازجسم باند ازه یك د رجه میباشد . یك واحد مفید برای جرم مول میباشد که گرمای ویژه برای آن گرمای ویژه مولار میباشد وآنرابا c نشان مید هیم . برای گاز ها د ونوع گرمای ویژه مولار مهم میباشند : د رحجم ثابت (C_V) ود رفشار ثابت (C_p) .

بگذ ارید تعد اد معینی مول ازیك گاز ایده آل راد ریك مجموعه سیلند ر ـ پیستون مانند شکل ۲۰-۳ a محبوس نمائیم . سیلند ر راروی یك منبع حرارتی د رنظر میگیریم که د رد مای آنرا میتوانیم مطابق میل تغییرد هیم وبنابراین مطابق میل به سیستم حرارت د اده یا حرارت بگیریم .

گازد ارای فشار p است بطوریکه نیروی بسمت بالا ی آن روی پیستون (بد ون اصطکاك) د رست وزن پیستون وشنهای بالا ی آنرا خنثی میکند . حالت اولیه سیستم توسط نقطه a روی منحنی $p-V$ شکل ۲۰-۳ b د یده میشود . این منحنی د وعد د ایزوترم (یکی تمام نقاط باد مای T ود یگری تمام

نقاط دمای (بالاتر) $T+\Delta T$ رانشان میدهد .

حالا بیائید دمای سیستم راتوسط زیادکردن دمای منبع بطورخیلی آهسته باندازه ΔT زیادکنیم . درعین حال بیائید بااضافه کردن مقدار شن روی پیستون ازازدیاد حجم درایـــن تحول جلوگیری کنیم . این تحول ایزو والوم سیستم راازحالت اولیه (شکل (a) ۳-۲۰) به حالت نهائی (شکل (c) ۳-۲۰) میبرد . بعبارت دیگردرشکل (d)۳-۲۰) ازنقطه A به نقطه C تحول پیدامیکند . حالا قانون اول ترمودینامیك $\Delta Q=\Delta U+\Delta W$ رابه این تحول اعمال‌میکنیم . بنابه تعریف C_v داریم $\Delta Q=\mu C_v\Delta T$ باضافه $W=P\Delta V$ زیرا $\Delta V=0$ ولذا :

$$\Delta U=\mu C_v\Delta T$$

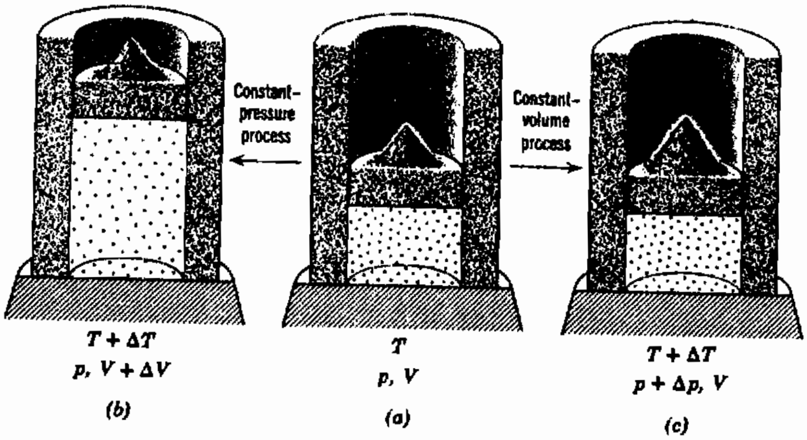
(۹-۲۰)

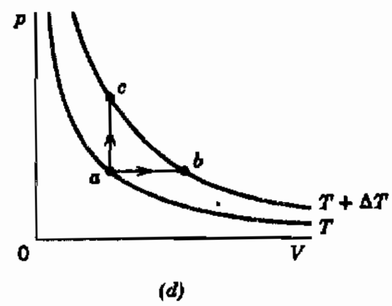
حالا میائیم وسیستم رابه حالت اولش برمیگردانیم ویکبار دیگر دمای‌آنرابهمان اندازه ΔT افزایش میدهیم ولی‌این بار مقدارشن روی پیستون رابدون تغییر میگذاریم بطوریکه فشار درحین تحـــول ثابت بماند . این تحول ایزوبار دستگاه راازحالت اولیه (شکل (a) ۳-۲۰) به حالت نهائی (شکل (b) ۳-۲۰) میبرد که درمنحنی شکل (d) ۳-۲۰ معادل تحول‌ازنقطه A به نقطه B میباشد . بیائید قانون اول‌ترمودینامیك را به این تحول اخیر اعمال‌کنیم :بنابه تعریف C_p داریم $\Delta Q=\mu C_p\Delta T$ وهمچنین $\Delta W=P\Delta V$. حالا میدانیم که برای‌گازایده آل U فقط به دما بستگی‌دارد چون دوتحول $A\to B$ و $A\to C$ درشکل ۳-۲۰ هردو شامـــل یك مقدارتغییردما (ΔT) هستند بنابراین برای‌هردوشامل یك مقدارتغییردما ΔT هستند بنابراین برای‌هردو مقدارتغییردرانرژی داخلی ΔU یکی میباشدکه مقدارآن توسط معادله ۹-۲۰ داده میشود . بنابراین برای‌تحول با فشارثابت قانون اول نتیجه میدهدکـــه

$$\mu C_p\Delta T=\mu C_v\Delta T+P\Delta V$$

حال معادله حالت گازایده آل رابرای‌تحول $A\to B$ بکارمیبریم : $PV=\mu RT$. در حالت فشارثابت برای‌تغییرات V و T داریم $P\Delta V=\mu R\Delta T$. باقراردادن این نتیجه درمعادله قانون اول‌نتیجه میشودکه :

$$C_p-C_v=R \qquad (۱۰-۲۰)$$





شکل (۳-۲۰) ـ دمای یك مقدار معین جرم ازگاز توسط دو تحول فشار ثابت $(a \to b)$ وتحت حجم ثابت $(a \to c)$ بیك اندازه زیاد میشود .

این نشان میدهد که گرمای ویژه مولار یك گازایده آل در فشار ثابت همیشه ازگرمای ویژه در حجم ثابت باندازه مقدار ثابت گازها $R(= 8.31 \frac{Joules}{mole\,°K} = 1.99 \frac{cal}{mole\,°K})$ بزرگتر میباشد . اگرچه معادله ۲۰-۱۰ فقط برای یك گاز ایده آل دقیقاً" صحیح است برای گازهای حقیقی نیز در فشارهائی که خیلی زیاد نباشند تقریباً" صحیح است (جدول ۲۰-۲) راببینید . توجه کنید که در بدست آوردن این نتیجه ماازمعادله بخصوص $U = \frac{3}{2}\mu RT$ استفاده نکردیم وفقط این حقیقت راکه U فقط به T بستگی دارد رابکاربردیم .

اگرمابتوانیم C_v رامحاسبه کنیم بعدمعادله (۲۰-۱۰) مقدار C_p رابدست خواهدداد وبالعکس . ما باترکیب کردن معادله ۲۰-۹ بانتیجه تئوری جنبشی برای انرژی داخلی گازایده آل $U = \frac{3}{2}\mu RT$ (معادله ۲۰-۸) میتوانیم مقدار C_v رابدست بیاوریم .

بنابراین در حد تغییرات دیفرانسیلی (خیلی کوچک) :

$$C_v = \frac{dU}{\mu dT} = \frac{d[\frac{3}{2}\mu RT]}{\mu dT} = \frac{3}{2}R \qquad (۲۰-۱۱)$$

این نتیجه (حدود $3\ \frac{cal}{mol^{\circ}k}$) برای گازهای تک اتمی نسبتاً خوب از آب در آمده است. اما با مقادیر بدست آمده برای گازهای اتمی وچند اتمی شدیداً مغایرت دارد (جدول ۲۰-۲ را به بینید) . این اشکال نشان میدهد که معادله (۲۰-۸) بطورعمومی صحت ندارد چون آن معادله مستقیماً از مدل تئوری جنبشی نتیجه شد بنابراین ما بایستی مدل راتغییر دهیم اگر بخواهیم که تئوری جنبشی بعنوان یك تقریب خوب برای گازهای حقیقی مفید باقی بماند .

مثال ه

نشان دهید که برای یك گاز ایده آل که تحت یك تحول آدیاباتیك قرار دارد pV^{γ} = ثابت که در آن $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

میاثیم ازقانون اول ترمودینامیك $\Delta Q = \Delta W + \Delta U$ استفاده میکنیم . چون تحول آدیاباتیك است $\Delta Q = 0$ بجای ΔW ما $p\Delta V$ قرارمیدهیم . چون گاز ایده آل است U فقط به T بستگی دارد واز معادله ۲۰-۹ داریم : $\Delta U = \mu C_v \Delta T$.

باقرار دادن مقادیر ذکرشده درمعادله قانون اول خواهیم داشت :

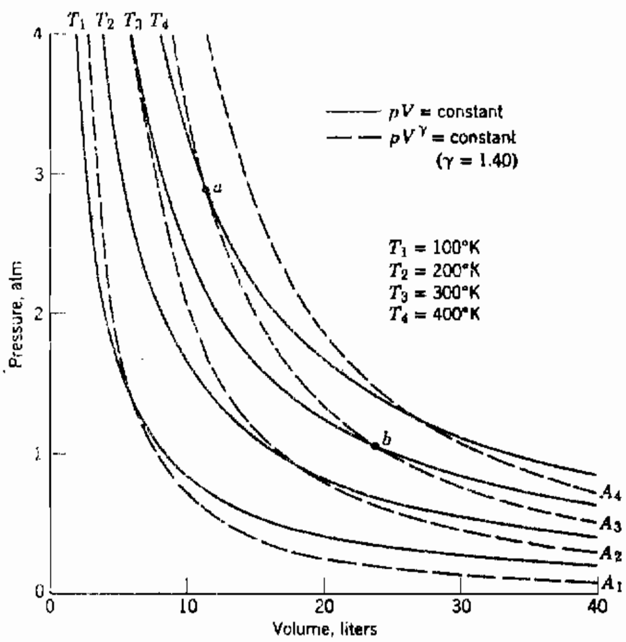
$$0 = \mu C_v \Delta T + p\Delta V \quad \text{ویا} \quad \Delta T = -\frac{p\Delta V}{\mu C_v}$$

برای یك گاز ایده آل $pV = \mu RT$. بنابراین اگر p ، V و T رامقداری تغییر دهیم $p\Delta V + V\Delta p = \mu R\Delta T$ ویا $\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{\mu R}$ بامساوی قرار دادن دورابطه ای که برای ΔT بدست آورده ایم واستفاده ازرابطه $C_p - C_v$ (معادله ۲۰-۱۰) وپس ازمقداری عملیات نتیجه میگیریم که $p\Delta V C_p + V\Delta p C_v = 0$.

این رابطه رابه حاصلضرب pVC_v تقسیم میکنیم . با درنظرگرفتن اینکه $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ رابطه $\frac{\Delta p}{p} + \gamma\frac{\Delta V}{V} = 0$ بدست میاید . بافرض اینکه γ ثابت است ازحد دیفرانسیل معادله قبل

$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$ انتگرال میگیریم :

ثابت $= \ln p + \gamma \ln V$ که به رابطه ثابت $= pV^{\gamma}$ تبدیل میشود . مقـدار ثابت در این معادله بامقدارگازمتناسب است . درشکل ۴-۲۰ مارفتار یک گاز ایده آل راتحت دونوع تحول ایزوتوم وآدیاباتیک مقایسه میکنیم .



شکل (۴-۲۰) - T_1 ، T_2 ، T_3 ، T_4 منحنی‌های ایزوترم یک مول ازگاز ایده آل نشان میدهند که درهر یک ازدماهای ثابت فشار برحسب حجم چگونه تغییر میکند A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 نشان میدهد که فشارگاز ایده آل برحسب تغییرات حجم چگونه تغییرمیکند وقتی هیچگونه حرارت به سیستم اضافه یاکـــم نمیشود (آدیاباتیک) ازدیاد حجم درتحول آدیاباتیک (مانند حرکت از a به b درامتداد A_3) همیشه باکم شدن دماتوام است زیرا در (a) دمابرابر $T = 400°K$ و در (b) دمابرابر $T = 300°K$ میباشد .

حجم V (لیتر)

۷-۲۰- اصل همپاری انرژی (Equipartition of energy)

یک تغییر درمدل تئوری جنبشی برای اولین بار توسط کلاسیوس (Clausius) در سال

۱۸۵۷ پیشنهاد شد به نحوی که گرماهای ویژه گازها را توجیه نماید . بخاطر بیاورید که در مدل قبلی ما فرض کردیم که مولکولها مانند ذرات کروی سخت والاستیك رفتار میکنند وما انرژی جنبشی را فقط با رنوع انتقالی در نظر گرفتیم و پیش بینی مقدار ویژه برای گازهای تك اتمی رضایت بخش بود . با اضافه بخاطر موفقیتهائی که این مدل ساده در پیش بینی کردن صحیح رفتار گازهای مختلف در حوزه های وسیعی از مقادیر دما داشته است ما مطمئن هستیم که آنچه ما بصورت دمای یك گاز اندازه میگیریم توسط متوسط انرژی جنبشی انتقالی تعیین میشود .

معذلك در مورد گرماهای ویژه ما توجه به تمام طرق ممکنه داریم که توسط آنها گاز میتواند انرژی جذب کند وما بایستی سئوال کنیم که آیا یك مولکول میتواند در خود انرژی داخلی (در فرمی غیراز انرژی جنبشی انتقالی) ذخیره کند یا خیر . اگر ما مولکول را نه بشکل یك ذره سخت بلکه بصورت جسمی با ساختمان داخلی تصور کنیم مطمئنا" اینطور خواهد بود . زیرا در اینصورت مولکول میتواند دوران ونوسانات داخلی هم علاوه برحرکت انتقالی داشته باشد . در تصادمها انواع دورانی و نوسانی حرکت میتوانند تحریك شوند وانرژی این حرکات در انرژی داخلی گاز سهیم خواهد بود . بنابراین در اینجا مدل دیگری داریم که ما را قادر میسازد فرمول تئوری جنبشی را برای انرژی داخلی یك گاز ترمیم نمائیم .

حالا بیائید انرژی کل یك سیستم شامل تعداد زیادی ازاین مولکولها راکه هر ملکول بصورت جسمی با ساختمان داخلی است پیدا کنیم . انرژی کل تشکیل خواهد شد ازانرژی جنبشی انتقالی و انرژی هائی مانند انرژی جنبشی نوسانات داخلی ملکولها انرژی پتانسیل نوسانات داخلی مولکولها . اگرچه انواع دیگری ازانرژی (مانند مغناطیسی) نیزوجود دارند ولی برای گازها ما میتوانیم انرژی کل را با دقت بسیارخوبی باانرژی هائی مانند آنچه ذکر شد شبیه آنها نشان دهیم . مادر مکانیك آماری میتوانیم نشان دهیم که وقتی تعداد ذرات زیاد باشد ومکانیك نیوتنی صدق میکند تمام این ترمهای مختلف برای انرژی مکانیکی دارای یك مقدار متوسط هستند و آن مقدار متوسط فقط به دما بستگی دارد . بعبارت دیگر انرژی موجود فقط به دما بستگی دارد ومقدار کل آن بطور مساوی بین طرق مختلفی که ملکولها میتوانند انرژی جذب کنند تقسیم شده است .

این قضیه که د راینجابد ون اثبات ذ کرشد ه است اصل همپاری انرژی نامید ه میشود وتوسط کلارك ماکسول (Clark Maxwell) نتیجه گیری شد ه است. هریك ازاین طرق مستقل جذ ب انرژی رایك د رجه آزاد ی مینامیم . ازمعاد له ۸ــ۲۰ د اریم که انرژی جنبشی انتقالی یك مول گاز برابر $\frac{3}{2}RT$ میباشد . انرژی جنبشی انتقالی هرمول مجموع سه ترم ازقراررزیر $\left(\frac{1}{2}M\overline{v_z^2},\ \frac{1}{2}M\overline{v_y^2},\ \frac{1}{2}M\overline{v_x^2}\right)$ میباشد . قضیه همپاری (یاتوزیع مساوی) انرژی لا زم میکند که هریك ازاین ترمها بیك اند ازه د رانرژی کل برمول سهیم باشند یعنی $\frac{1}{2}RT$ برای هرد رجه آزاد ی .

برای گازهای تك اتمی ملکولها فقط حرکت انتقالی د ارند (یعنی د رتئوری جنبشی نمیتوان بآنها ساختمان د اخلی نسبت د اد) بنابراین $U=\frac{3}{2}\mu RT$. ازمعاد له ۱۱ــ۲۰ نتیجه میشود که $C_v=\frac{3}{2}R\simeq 3\frac{cal}{mol^\circ K}$ بصورت زیر سپس ازمعاد له ۱۰ــ۲۰ د اریم $C_p=\frac{5}{2}R$ ونسبت گرماهای ویژه د رمیاید

$$\gamma=\frac{C_p}{C_v}=\frac{5}{3}=1.67$$

برای یك گاز د واتمی میتوانیم هرملکول را بصورت یك د مبل تصورنمائیم یعنی د وکره که توسط یك میله سخت بیکد یگر متصل شد ه اند . این ملکول میتواند حول سه محور (که هریك بهم عمود هستند) بطورمستقل د وران نماید . اما ممان اینرسی د وران حول محوری که د رامتد اد میله واسط آنهاست بایستی د رمقابل ممان اینرسی حول د ومحور د یگر که به میله واسط عمود هستند خیلی ناچیز باشد . این بافرضیه قبلی ماکه یك ملکول تك اتمی د وران ند ارد وفق میکند . یعنی مامد ل ذ ره جرم نقطه ای را برای اتمها بکاربرد ه ایم . بنابراین فرضیات انرژی جنبشی د ورانی فقط بایستی د وترم د اشته باشد مثلا $\frac{1}{2}I\omega_y^2$ و $\frac{1}{2}I\omega_x^2$ بنابرقضیه همپاری انرژی هرد رجه آزاد ی د ورانی لا زم است که بهمان اند ازه یك د رجه آزاد ی انتقالی د رانرژی کل سهیم باشد . لذ ا برای یك گاز د واتمی که ملکولها یش د رحرکات انتقالی ود ورانی هستند :

$$U=3\mu\left(\tfrac{1}{2}RT\right)+2\mu\left(\tfrac{1}{2}RT\right)$$

وبنابراین $C_v=\frac{1}{\mu}\frac{dU}{dT}=\frac{5}{2}R$ بنابراین $C_v=\frac{5}{2}R\simeq 5\frac{cal}{mol^\circ K}$ و $C_p=C_v+R=\frac{7}{2}R$ وهمچنین $\gamma=\frac{C_p}{C_v}=\frac{7}{5}=1.40$

برای ملکولهای چند اتمی هرملکول شامل سه یابیشتر کره (اتم) است که توسط میله هـــا ی سخت (د رمد ل ما) بیکد یگر متصلند .بنابراین هرملکول قاد راست انرژی جنبشی د ورانی حول هریك ازسه محور (عمود برهم) د اشته باشد . بنابراین برای یك گاز چند اتمی که ملکولهایش د ارای حرکات انتقالی ود ورانی هستند : $U=3\mu(\frac{1}{2}RT)+3\mu(\frac{1}{2}RT)$ بنابرایـــن $U=3\mu RT$ ولذا $C_v=\frac{1}{\mu}\frac{dU}{dT}=3R=6\frac{cal}{mol\,°K}$. حالا $C_p=4R$ و $\gamma=\frac{C_p}{C_v}=1.33$

حالا بیائید به نتایج آزمایشها مراجعه ونتایج عقاید بالا را امتحان کنیم . د رجد ول ۲-۲۰ مامقاد یر تجربی بد ست آمد . برای گرماهای ویژه گازهای معمولی د ر د مای $20°C$ و 1.0 اتمسفر فشار رالیست کرد ه ایم . توجه کنید که برای گازهای تك اتمی ود واتمی مقاد یر C_v ، C_p و γ به پیش بینی های مابرای گاز ایده آل نزد یك میباشند . د ربعضی ازگازهای د و اتمـــی مانند کلرین (Cl_2) وبرای بیشترگازهای چند اتمی گرماهای ویژه از مقاد یر پیش بینی شد ه بزرگتر میباشند . برای گازهای چند اتمی حتی γ هیچ نوع ترتیب بخصوصی برای مقاد یرش ند ارد . این اشاره میکند باینکه مد ل ما هنوز به حقیقت باند ازه کافی نزد یك نیست . *

نوع گاز	گاز	C_p $(cal/mol\,°K)$	C_v $(cal/mol\,°K)$	C_p-C_v	$\gamma=\frac{C_p}{C_v}$
تك اتمی	He	4.97	2.98	1.99	1.67
•	A	4.97	2.98	1.99	1.67
د واتمی	H_2	6.87	4.88	1.99	1.41
•	O_2	7.03	5.03	2.00	1.40
•	N_2	6.95	4.96	1.99	1.40
•	Cl_2	8.29	6.15	2.14	1.35
چند اتمی	CO_2	8.83	6.80	2.03	1.30
•	SO_2	9.65	7.50	2.15	1.29
•	C_2H_6	12.35	10.30	2.05	1.20
•	NH_3	8.80	6.65	2.15	1.31

جد ول ۲-۲۰

* آخرین ستون د رجد ول ۱ فصل ۹ ۱ نیزنشان مید هد که این چنین نکاتی د رمورد گرمای ویـــژه جامد ات نیزبایستی حائز اهمیت باشند د رحقیقت نیزاینطور است اما ما جزئیات وتفاصیل رابـــه کتابهای سطح بالاتر (ویاتصورات خود شما) واگذ ارخواهیم کرد .

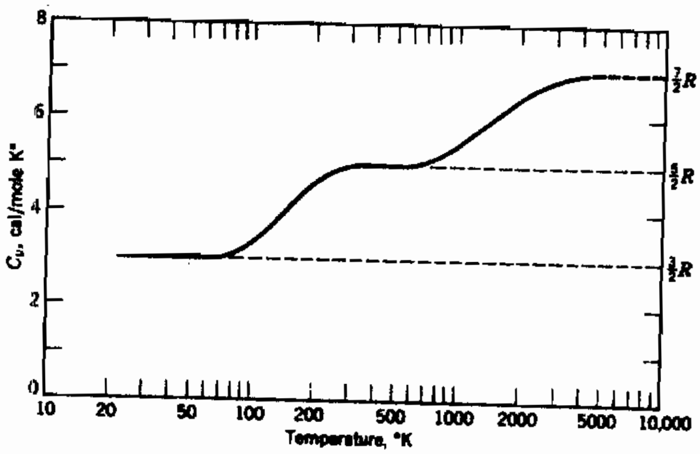
ما هنوز سهم انرژی نوسانات اتمها را در مولکولهای دو اتمی و چند اتمی در نظر نگرفته ایم . مثلا میتوانیم مدل دمبل را برای مولکول دو اتمی ترمیم کنیم و دو اتم را بجای میله سخت با فنر بهمدیگر وصل کنیم . این مدل جدید در بعضی موارد نتایج تئوری ما را بمراتب بهتر میکند . اما این بار بجای داشتن یک مدل تئوری برای تمام گازها ما محتاج بمدلی هستیم که از گاز تا گاز دیگر تفاوت میکند . ما هنوز میتوانیم تصویر خوبی از رفتار مولکولها بدینوسیله بدست بیاوریم و بنابراین این مدلهای جدید مفید هستند ولی دیگر مدلهای اساسی نیستند .

برای اینکه این موضوع روشنتر شود به شکل ۵-۲۰ نگاه میکنیم که تغییرات گرمای ویژه مولار هیدروژن را برحسب تغییرات دما نشان میدهد . مقدار $5\frac{cal}{mole\,°K}$ که توسط مدل ما برای مولکولهای دو اتمی پیش‌بینی شده بود فقط از حدود $250°K$ تا حدود $750°K$ برای هیدروژن صادق است بالاتر از $750°K$ خیلی سریع به $7\frac{cal}{mole\,°K}$ میرسد و پائین تر از حدود $250°K$ بطور پیوسته بسمت $3\frac{cal}{mole\,°K}$ میرود . دیگر گازها نیز این چنین تغییرات گرمای ویژه را برحسب دما نشان میدهند . در اینجا میتوانیم این تغییرات را بنحو ممکن زیر توجیه کنیم : در دماهای پائین مولکول هیدروژن ظاهراً (مثال ٦ را به بینید) فقط انرژی جنبشی انتقالی دارد و بیک دلیلی نمیتواند دوران کند . در دماهای بالاتر دوران نیز ممکن میشود و در حدود دمای اطاق مولکول هیدروژن مثل مدل دمبل ما رفتار میکند . در دمای خیلی بالا تصادم بین مولکولها باعث حرکات نوسانی در اتمهای مولکول میشود و ملکولها دیگر مانند یک جسم صلب رفتار نمیکنند . گازهای مختلف دارای ساختمان داخلی مختلف برای مولکولها هستند ولذا این اثرات در دماهای مختلف ممکن است در آنها دیده شود . بنابراین ظاهراً ملکول کلرین (Cl_2) در دمای اطاق دارای نوسانات میباشد .

اگرچه توصیف بالا در اصل صحیح است و بما چیزهائی درمورد رفتار مولکولها میاموزد این رفتار مخالف تئوری جنبشی کلاسیک میباشد . زیرا تئوری جنبشی براساس اعمال مکانیک نیوتنی به تعداد زیادی ذرات بنا شده است و اصل همپاری انرژی در فیزیک نتیجه اجباری از آن میباشد که توسط مکانیسک آماری کلاسیک اثبات میشود . ولی اگر اصل همپاری انرژی صادق است صرفنظر از اینکه انرژی داخلی

شکل ۲۰-۵

تغییرات گرمای ویژه مولا ر C_v هید رژن برحسب د ما . توجه کنید که مقیاس محور T لگاریتمی است . هید رژن د رحد ود $3200^{\circ}K$ تجزیه میشود ود ر $20^{\circ}K$ مایع میشود . قسمت منحنی که با خط شکسته کشید ه شد ه است برای یک گاز د و اتمی است که د ر د مای کمتر از $10000^{\circ}K$ تجزیه نمیشود



چگونه بحسب د ما تغییرمیکند هرقسمت ازانرژی ـ انتقالی ، د ورانی ونوسانی ـ بایستی بیک اند ازه د رتغییرات سهیم باشند . د رمکانیک کلاسیک هیچ مکانیزمی برای تغییر یکی ازانواع انرژی بتنهائی د رچنین سیستمهائی وجود ند ارد . تئوری جنبشی لازم مینماید که گرماهای ویژه گازها مستقل ازد ماباشند .

بنابراین مابسرحد مرز صحت مکانیک کلاسیک رسید ه ایم وقتی که میخواهیم ساختمان د اخلی اتم یامولکول راتوجیه نمائیم .

همانطورکه قوانین نیوتن د رسرعتهای زیاد (نزد یک سرعت نور) صد ق نمیکنند د راینجاهم د رحد ابعاد خیلی کوچک هم د یگرصحت ند ارند . تئوری نسبیت قوانین نیوتن راتغییرمید هد . برای اینکه بتواند رفتارسیستمهای فیزیکی راد رسرعتهای زیاد توجیه کند . فیزیک کوانتمی نیز قوانین نیوتن راترمیم میکند تارفتار سیستمهای فیزیکی راد ر ابعاد خیلی کوچک توجیه کند . هم تئوری کوانتم

وهم تئوری نسبیت تعمیم تئوری کلاسیك هستند به این معنی‌که نتایج آنها در حدودی‌که فیزیك نیوتنی صدق میکند باآن یکی‌است . ماتوجه خود را فقط به اعمال خیلی‌مفید ترمودینامیك وتئوری جنبشی به سیستمهای کلاسیك محدود خواهیم کرد .

مثال ٦

بنابرتئوری‌کوانتم انرژی داخلی یك اتم (یاملکول) کوانتیزه (Quantized) میباشد بااین معنی‌که اتم انرژی های پیوسته ودلخواه نمیتواند اختیارکند وبلکه فقط مقادیر غیرپیوسته یامجزا رامیتواند داشته باشد. وقتی که اتم ازپائین ترین سطح مجاز به سطح بالا تری میرود پس از برگشتن به سطح پائین تفاوت انرژی دوسطح رابصورت انرژی تشعشع میکند .

وقتی دواتم تصادم میکنند مقداری ازانرژی جنبشی انتقالی آنهامیتواند به انرژی داخلی یکی یاهردوی آنها تبدیل شود . دراینصورت تصادم الاستیك نخواهد بود زیرا انرژی جنبشی انتقالی بقاندارد . دریك گازانرژی جنبشی انتقالی هراتم برابر $\frac{3}{2}kT$ میباشد .وقتی‌که دماتا حدی بالا برود که مقدار $\frac{3}{2}kT$ درحدود انرژی لازم برای تحریك اتمها به سطوح انرژی بالاترشود درآنصورت تعداد متناهی ازاتمها خواهند توانست توسط تصادمهای غیر الاستیك انرژی جذب نموده وبسطوح انرژی بالا تر بروند . مامیتوانیم صحت این عقاید راامتحان کنیم زیراپس ازمدتی انرژی جذب شده توسط اتمها به خارج ازآنها بصورت تشعشع ساطع میشود .

(a) -انرژی جنبشی انتقالی متوسط یك ملکول رادر دمای‌اطاق $(T \approx 300\,^{\circ}K)$ محاسبه‌کنید .

داریم $T = 300\,^{\circ}K$ بنابراین

$$\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\left(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{Joules}}{\text{molecule}\,^{\circ}K}\right)(300\,^{\circ}K) = 6.21 \times 10^{-21} \frac{\text{Joules}}{\text{molecule}} = 3.88 \times 10^{-2} \frac{eV}{\text{molecule}}$$

این درحدود $\frac{1}{25}\,eV$ برای هرملکول است . بعضی ازملکولها انرژی بیشتری وبعضی‌ها انرژی کمتری ازاین مقدار راخواهند داشت.

(b) اولین حالت داخلی مجازاتم هیدرژن ۱۰٫۲ eV بالاتر ازسطح ابتدائی (سطح زمین

آن میباشد . چه دمائی مورد احتیاج است که تعداد قابل توجهی از اتمهای هیدروژن انرژی فوق الذکر رابصورت تشعشع ساطع کنند . ؟ بعبارت دیگر ماباپستی داشته باشیم $\frac{3}{2}kT=10.2\,eV$ ازرابطه $\frac{3}{2}k(300^\circ K)=\frac{1}{25}\,eV$ استفاده میکنیم . می بینیم که

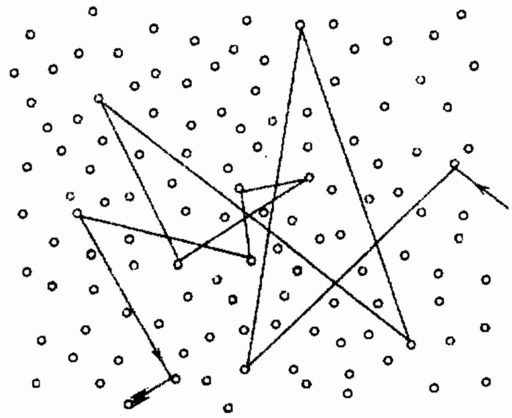
$$T=300^\circ K\times\frac{10.2}{1/25}=7.5\times10^4\,^\circ K$$

درعمل چون تعدادی ازمولکولها همیشه انرژی خیلی بالاتر ازمقدارمتوسط دارند تشعشع قابل توجه ممکن است در دمای کمی کمتر ازآنچه مامحاسبه کردیم مشاهده شود .

ماحالا میتوانیم متوجه شویم که چرا فرضیه بدون ساختمان داخلی بودن اتمها درتئوری جنبشی درحدود دمای اطاق صادق است . فقط در دماهای خیلی بالاکه انرژی جنبشی متوسط اتمها بصورت انتقالی قابل مقایسه باتفاوت سطوح انرژی داخلی اتمها میشود درآنصورت ساختمان داخلی اتمها باعث غیرالاستیک شدن تصادمها میشود . درحقیقت حالا که به گذشته مینگریم می بینیم که مدرك علمی برای کوانتیزه بودن سطوح انرژی اتمها درآزمایشهای مربوط به گازها نهفته بود و جوانه های تئوری کوانتم درتئوری جنبشی گازهابود .

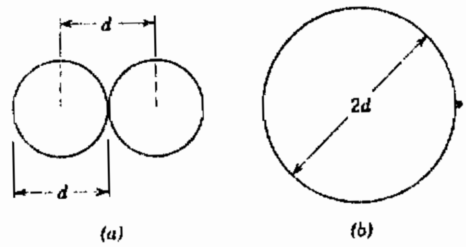
۸-۰۲ متوسط پویش آزاد

دربین هرد وتصادم متوالی ملکول هابا تندی ثابت درامتداد خط راست حرکت میکنند . فاصله متوسط بین دوتصادم متوالی راپویش آزاد ملکولها نامند (شکل ٦-۲۰) . اگر ملکولها فقط نقاط هندسی بودند هرگز باهم تصادم نمیکردند وپویش آزاد بینهایت میشد . اما ملکولها نقطه نیستند وبنابراین تصادمات اتفاق میافتند . اگرتعداد ملکولها آنقدرزیاد بودکه تمام فضای موجود راپرمیکردند وفضائی برای حرکت انتقالی نبود متوسط پویش آزاد صفرمیشد . بنابراین متوسط پویش آزاد باندازه ملکولهاوبه تعداد آنها درواحد حجم مربوط میشود .



شکل (۲۰-٦) ـ حرکت یك ملکول در یك گاز وتصادم آن باملکولهای دیگر که در سرراه قرارد ارند . البته تمام ملکولهای دیگرنیزبهمین ترتیب در حال حرکت میباشند .

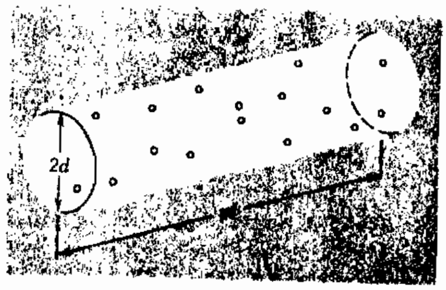
فرض میکنیم ملکولهای گاز بشکل کره هائی باقطر d باشند . بنابراین سطح مقطع موثر برای تصادم برابر πd^2 میباشد یعنی تصادم اتفاق خواهد افتاد اگرمرکز دوملکول درفاصله d (یاکمتر) ازیکدیگر قرار بگیرند . یك نوع معادل برای درنظرگرفتن تصادمات اینست که یك ملکول را باقطر $2d$ وبقیه رابصورت نقاط هندسی درنظر بگیریم (شکل ۲۰-۷)



شکل (۲۰-۷) اگریك تصادم موقعیکه دو ملکول بهفاصله d ازیکدیگر قرار دارد اتفاق بیافتد (حالت a) میتوانیم حالت معادل رابصورت تصورکردن یك ملکول باشعاع d (قطر $2d$) ودیگری رابصورت نقطه جرم درنظر گرفت (حالت b)

حال حرکت این چنین ملکولی راباقطر $2d$ وتندی v درفضای اشغال شده توسط نقاط جرمی (فرض شده) درنظر میگیریم ودرحال حاضر تصورمیکنیم هیچ نوع نیروئی بین مولکول مذکور ونقاط جرمی وجود نداشته باشد . درزمان t ملکول فضای یك استوانه بسطح قاعده πd^2 وارتفاع vt راجارو خواهد کرد . اگر n تعداد ذرات درواحد حجم باشد این استوانهمحتوی $n\pi d^2 vt$ نقطه جرم خواهد بود (شکل ۲۰-۸) . چون ملکول وذرات درحین تصادمات بیکدیگر نیرو وارد میکنند این تعداد برابر تصادمهائی است که ملکول درطی زمان t خواهد

داشت. در عمل استوانه شکل (۸-۲۰) استوانه شکسته ای است که با هر تصادم جهت آن عوض میشود ومقدار v نیز ثابت نخواهد بود.



شکل (۸-۲۰) - ملکول با قطر معادل $2d$ با تندی v یک استوانه با قاعده πd^2 و ارتفاع vt را در زمان t جارو میکند. بنابراین با هر ملکول دیگری که مرکزش در این استوانه قرار داشته باشد تصادم خواهد کرد.

پویش آزاد l متوسط فاصله بین تصادمهای متوالی میباشد. بنابراین l برابر با فاصله کل vt طی شده در زمان t است تقسیم برتعداد تصادمهائی که ذره در این فاصله زمانی داشته‌است. بنابراین

$$\bar{l} = \frac{vt}{\pi d^2 vt n} = \frac{1}{\pi d^2 n}$$

این معادله براساس این تصور بدست آمده است که ملکول متحرک ما با یک عده نقطه جرم ساکن که در سر راهش قرار دارند تصادم میکند. در حقیقت ملکول ما بیک عده هدف متحرک برخورد میکند. موقعیکه مولکولهای هدف نیز در حال حرکت باشند دو v بکاربرده در معادله بالا یکی نخواهند بود. v بکاربرده در صورت کسر میانگین سرعت ملکولها نسبت به ظرف محتوی گاز میباشد. در حالیکه v بکاربرده در مخرج برابر $\bar{v}_{rel}$ سرعت نسبی متوسط آن ملکول نسبت به بقیه ملکولها میباشد. این سرعت نسبی ملکولها میباشد که تعداد برخوردها را در زمان تعیین خواهد کرد.

میتوانیم بطورکیفی نشان دهیم که $\bar{v}_{rel} > v$ دو ملکول با سرعت v حرکت میکنند و جهت حرکت آنها بسمت یکدیگر است، در اینصورت سرعت نسبی آنها $\bar{v}_{rel} = 2v > v$. دو ملکول متحرک با تندی v که جهت حرکتشان بهم عمود است دارای سرعت نسبی $\bar{v}_{rel} = \sqrt{2}\, v > v$ هستند. دو ملکول متحرک با تندی v که جهت حرکتشان هردو بیک

سمت میباشد دارای سرعت نسبی صفر میباشند . اگرروی ملکول اولیه کره ای راتصورکنیم تمـــام مولکولهائی‌که ازنیمکره بسمت حرکت مولکول (نیمکره جلو) وارد میشوند وهمچنین مقداری‌ازنیمکره عقب دارای تندی نسبی $\overline{v_{rel}} > v$ میباشند . قسمتی‌ازنیمکره عقب بنحوی است کـــــه مولکولهای رد شده ازآن دارای تندی نسبی $\overline{v_{rel}} < v$ نسبت به مولکول اولیه میباشد . چون تعداد ملکولهای با $\overline{v_{rel}} < v$ کوچکتر است وقتی‌روی تمام سطح کره متوسط میگیریم می بینیم که $\overline{v_{rel}} > v$. یك محاسبه کمی که توزیع‌تندی تمام ملکولها‌را درنظر میگیرد به نتیجه میرسد که $\overline{v_{rel}} = \sqrt{2}\ \overline{v}$. بااین تغییرمتوسط پویش‌آزاد کمتر میشود وبرابربا

$$l = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, n d^2} \qquad (۱۲-۲۰)$$

میشود .

مثال ۷

بیابید متوسط پویش‌آزاد وآهنگ برخورد ملکولهای هوارا درد مای $0^{\circ}C$ وفشاریـــك اتمسفر محاسبه کنیم . مامقدار $d = 2\times10^{-8}\,cm$ رااندازه موثر قطر مولکولهای هوادر نظر میگیریم . برای شرائط ذکر شده تندی متوسط ملکولهای هوادرحدود $1\times10^{5}\,cm/sec$ است ودرحدود 3×10^{19} ملکول در cm^3 وجود دارند . بنابراین متوسط پویش‌آزاد برابر است با

$$l = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\, n d^2} = \frac{1}{(3.14)\sqrt{2}\,(3\times10^{19}/cm^3)(2\times10^{-8}cm)^2} = 2\times10^{-5}\,cm$$

این طول حدود هزاربرابر یك قطرملکولی است. فرکانس برخورد برابر

$$\frac{\overline{v}}{l} = \frac{1\times10^{5}\,cm/sec}{2\times10^{-5}\,cm} = 5\times10^{9}/sec$$

است . بنابراین بطور متوسط هرملکول پنج میلیارد تصادم درثانیه خواهد داشت .

درجوزمین متوسط پویش‌آزاد ملکولهای هوادرسطح دریا (فشار $760\ mm$ جیوه) درحدود $10^{-5}\,cm$ است. درصدکیلومتری سطح زمین (فشار $10^{-3}\,mm$ جیوه)

پویش آزاد در حدود یک متر است . در ۳۰۰ کیلومتری سطح (فشار $10^{-6}\ mm$ جیوه) در حدود ۱۰ کیلومتراست وهنوز در این ارتفاع حدود $10^{8}\ \frac{molecules}{cm^3}$ وجود دارد . این نشان میدهد که ملکولها حقیقتاً کوچک هستند . در ارتفاعات فوق العاده زیاد مفهوم متوسط پویش آزاد شکست میخورد زیرا ملکولهائی که بسمت بالا حرکت میکنند مسیرشان طوریست که میتوانند بکلی ازجوزمین خارج شوند .

در آزمایشگاه مفهوم پویش آزاد درحالاتی مانند مثال ۷ مفید میباشد . ولی حتی باخلاءهای متوسط نیز تاحدی معنی پویش آزاد ازدست میرود زیراتقریباً تمام تصادمها با دیوارظرف محتوی گاز میباشند ونه باملکولهای دیگر. مثلاً یک مکعب بضلع $10\ cm$ راکه محتوی هوابافشار $10^{-6}\ m\text{-}m\text{-}Hg$ میباشد رادرنظر میگیریم . مطابق آنچه دربالا گفته شد متوسط پویش آزاد در حدود ۱۰ کیلومتر میباشد بنابراین تصادم بین ملکولها حقیقتاً کمیاب است باوجود اینکه این جعبه محتوی 10^{12} ملکول است .

حتی دریک جعبه باابعاد معین نیز تحت شرائطی بخصوص میتوان ذراتی داشت که مسافات فوق العاده طولانی رابدون تصادم طی میکنند . دریک سینکروترون پروتونی (Proton synchrotron) که برای شتاب دادن پروتونها به انرژی های میلیارد الکترون ولت بکارمیرود توسط یک میدان مغناطیسی پروتونها رامحدود میکنند که روی یک مسیر دایره ای حرکت کنند . بااینصورت پروتونها ممکن است درمراحل شتاب پیداکردن مسافتی معادل چند صد هزارکیلومتر راطی کنند . دراین صورت مفهوم متوسط پویش آزاد مهم است اگرنخواهیم که پروتونها درحین شتاب پیداکردن بسا باقیمانده ملکولهای هواتصادم می داشته باشند . دراینصورت بعلت کوچک بودن فوق العاده شعاع یک پروتون سطح مقطع موثر برای تصادم باهواآنقدر ازسطح موثر برای تصادم ملکولهای هوا با یکدیگر کوچکتراست که حتی باخلاء $10^{-6}\ mm-Hg$ اصولاً اشعه پروتونها به هیچوجه بخاطرتصادم پروتونها باهواپراکنده نخواهد شد .

۲۰-۹ توزیع تندی ملکولها

در بخش های پیشین ما $v_{r.m.s}$ ملکولهای یک گاز رابحث کرده ایم . اماتندی مولکولها مقادیر فوق العاده زیادی را اختیارمیکند . معذلك توزیع بخصوص ازتندی هابــرای ملکولها وجود دارد که همانطور که در زیر خواهیم دید به دمابستگی دارد . اگرتمام ملکولهــای یك گاز دارای یك تندی بخصوص v بودند این وضع مدت زیادی ادامه نمیداشت زیراتندیها بخاطر تصادمات عوض میشدند . اماما انتظارنداریم که بسیاری ازملکولها تندیهائی بسیارکمتر از $v_{r.m.s}$ (یعنی حدود صفر) ویاتندیهائی بسیار بیشتراز $v_{r.m.s}$ داشته باشند زیرا این تندیهای غیرعادی محتاج یك عده تصادمات متوالی خیلی بخصوص (ولذاکم احتمـــال) میباشند .

کلارك ماکسول (Clerk-Maxwell) اول مسئله پراحتمال ترین توزیع تندیها رابـــرای ملکولهای یك گازکه تعدادشان زیادباشد حل کرد . قانون اوبرای توزیع تندی دریك گاز شامل ملکول مطابق زیراست :

$$N(v)=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^{2} e^{-\frac{mv^{2}}{2KT}} \qquad (۲۰-۱۴)$$

دراین معادله $N(v)dv$ تعداد ملکولهای گازاست که تندیشان بین v و $v+dv$ میباشد . T دمای مطلق ، k ثابت بلتزمان و m جرم یك ملکول است . توجه کنید که برای گازبخصوص توزیع تندی فقط به دمابستگی دارد . ماتعدادکل ملکولهای گاز (N) رامی یابیم بتوسط جمع کردن (یاحقیقتاً انتگرال گیری) تعدادمولکولهاکه درهر دیفرانسیل تندی dv دارای تندی میباشند ویاامتحان کردن تمام سرعتهااز صفر تابینهایت برای تعدادمولکولها :

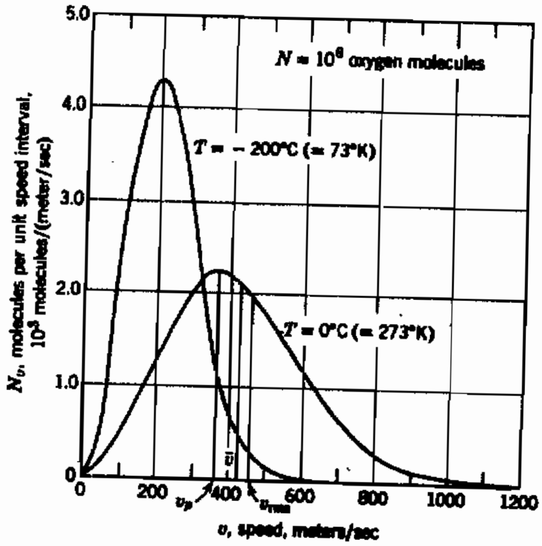
$$N=\int_{0}^{\infty} N(v)\, dv \qquad (۲۰-۱۵)$$

واحد $N(v)$ دراینجا مثلا $\frac{molecules}{(cm/sec)}$ میباشد .

درشکل ۲۰-۹ ماتوزیع تندیهارا برای مولکولهای اکسیژن دردو دمای مختلف نمایـــش میدهیم تعدادملکولهائی که تندیشان بین دومقدار v_1 و v_2 است برابر سطح زیر منحنـــی

بین دوخط عمودی در v_1 و v_2 میباشد . همانطورکه معادله (۱۵-۲۰) نشان میدهد سطح زیرمنحنی توزیع تندیها که برابرانتگرال موجود درآن معادله میباشد تعداد کل ملکولهای گازمیباشد . درهر دمائی تعداد ملکولها دریك فاصله بخصوص Δv تایك ماکزیمم بخصوص با زیاد شدن تندی زیاد میشود وسپس با زیاد شدن تندی دائما کم شده وبطور مجانب به صفر نزدیك میشود . تندی که درآن ماکزیمم اتفاق میافتد محتمل ترین تندی v_p است . توزیع تندیها دردوطرف محتمل ترین تندی متقارن نیست زیراکمترین تندی محققاً صفراست ولی برای بالا رفتن تندی قابل حرکت برای یك ملکول حد کلاسیکی وجود ندارد . دراینصورت تندی متوسط $\bar{v}$ از محتمل ترین تندی قدری بیشترخواهد بود . $v_{r.m.s}$ چون ریشه متوسط مجموع مجذور تندیهاست مقدارش بازهم بیشترخواهد بود .

وقتی دما بالا میرود $v_{r.m.s}$ (وهمینطور $\bar{v}$ و v_p) مطابق توجیه میکروسکوپی دما زیاد خواهد شد . حوزه سرعتهای بااحتمال قابل توجه نیز زیاد شده باعث پهن شدن تابع توزیع میشود . چون سطح زیرمنحنی توزیع(که تعداد کل ملکولها درگازاست)ثابت باقی میماند شکل تابع توزیع بایستی دربالا تخت تر بشود اگر دما زیاد شده باشد . بنابراین تعداد مولکولهائی که تندیشان ازیك تندی معین بیشتراست باازدیاد دمازیاد میشود (شکل ۹-۲۰رابه بینید) . این خیلی ازپدیده هامانند زیاد شدن سرعت ترکیبات وعملیات شیمیائی برحسب ازدیاد دما را توجیه میکند .



شکل ۹-۲۰) ـ توزیع ماکسول برای تندی 10^6 ملکول اکسیژن دردودمای مختلف . تعداد ملکولهاباتندی درحوزه بخصوصی ازتندیها (مثلاً بین ۳۰۰ و ۶۰۰ متربرثانیه) برابر سطح زیرمنحنی دراین حدود بخصوص است . سطح کامل زیرمنحنی برای هریك از منحنی هابرابرتعداد کل ملکولهااست (10^6)سطح کل برای هریك از دودمایکی است زیرامنحنی هاهردو برای مقدار بخصوص گازهستند . فشارکمترازاتمسفراست زیرا دردمای $73°K$ وفشاریك اتمسفر اکسیژن مایع میشود .

توزیع تند یها د ر یك مایع نیز شباهت به منحنی های شکل ۹-۲ د ارد . این توجیه میکند که چرا بعضی ملکولها د ریك مایع (ملکولهای تند) میتوانند ازسطح مایع فرارنمایند (تبخیر) د ر د ماهائی که بسیار پائین تراز نقطه جوش مایع است . فقط این ملکولهامیتوانند نیروی جـــــاذ ب ملکولهای سطح راد رهم شکسته وباتبخیر ازآن بگریزند . متوسط انرژی جنبشی بقیه ملکولها نیـــز باین د لیل کم میشود ود مای مایع پائین ترمیرود . این توجیه میکند که چراتبخیر باعث خنك شــــد ن میشود .

ازمعاد له (۱٤-۲۰) می بینیم که توزیع تند ی ملکولها به جرم مولکولهانیز علاوه برد مابستگی د ارد . هرچه جرم کوچکتر باشد تعداد مولکولها (د رهرد مای بخصوص) که تند ی بیشتری د ارند افزایش می یابد . بنابراین هید رژن احتمال زیاد تری د ارد که د رارتفاعات زیاد ازمید ان جاذ بـــه زمین بگریزد تااکسیژن یاازت .

کره ماه ممکن است د ارای یك جو رقیق باشد . برای آنکه ملکولهای این جواحتمال زیاد ی برای فرارازمید ان جاذ به ضعیف آن ند اشته باشند ماانتظارد اریم که ملکولها ازاتمهای سنگینـــی تشکیل شده باشند . مدارك تجربی به گازهای نجیب (Noble) سنگین مانندکر یپتون (Kr) وزینون (Xe) اشاره میکندکه میتوانند توسط تجزیه های راد یو اکتیو د رد وره ای از تاریخ کره ماه د رآنجا ایجاد شده باشند . فشار جوی د رکره ماه نمیتواند بیشترازحد ود 10^{-13} برابـــر فشار جوزمین باشد .

مثال ۸

تند یهای د ه ذ ره د رواحد متر برثانیه برابر 0 ، 1.0 ، 2.0 ، 3.0 ، 3.0 ، 3.0 ، 4.0 ، 4.0 ، 5.0 و 6.0 میباشند . (a) تند ی متوسط رابیابید . (b) v_{rms} و (c) محتمل ترین تند ی این ذ رات .

(a) تند ی متوسط برابراست با

$$\bar{v} = \frac{0+1.0+2.0+3.0+3.0+3.0+4.0+4.0+5.0+6.0}{10} = 3.1 \ m/sec$$

b) متوسط مجذور تندیها برابراست با :

$$\overline{v^2} = \frac{0+(1.0)^2+(2.0)^2+(3.0)^2+(3.0)^2+(3.0)^2+(4.0)^2+(4.0)^2+(5.0)^2+(6.0)^2}{10}$$

$$= 12.5 \ \frac{m^2}{sec^2}$$

وبنابراین داریم

$$v_{r.m.s} = \sqrt{\overline{v^2}} = 3.5 \ \frac{m}{sec}$$

c) ازده تاذره سه تاتندی $3.0 \ \frac{m}{sec}$ ، دوتاتندی $4.0 \ \frac{m}{sec}$ وپنج ذره بقیه هریك تندی متفاوتی دارند . بنابراین محتمل ترین تندی یك ذره v_p برابراست با

$$v_p = 3.0 \ m/sec$$

فصل ۲۱

آنتروپی وقانون دوم ترمودینامیک

۱-۲۱- مقدمه

قانون اول ترمودینامیک درحقیقت بیان کننده اصل بقاء انرژی است. تعداد زیادی تحولات ترمودینامیکی رامیتوان تصورکرد که درهرکدام انرژی باقی مانده وقانون اول ترمودینامیک راهم نقض نکنند وباوجود این اصولاً " درطبیعت هرگز اتفاق نمی‌افتد. بعنوان مثال هرگاه دوجسم گرم وسرد را درمجاورت هم قراردهیم هرگز جسم گرم گرمتر و جسم سرد سردتر نمیشود. و یااینکه دریک روزگرم تابستان هیچگاه آب حوض دفعتاً " یخ نمی بندد وگرمای خود رابه پیرامون خود نمیدهد. درعین حال هیچکدام ازاین دوتحول مغایر باقانون اول ترمودینامیک نیست. همچنین قانون اول محدودیتی بروی توانائی ما درتبدیل کار به گرما وبالعکس قائل نمیشود بجزاینکه درچنین تحولی انرژی بایستی باقی بماند. باوجود این درعمل، اگرچه میتوانیم مقدار معینی کارراتماماً " به گرماتبدیل کنیم، هرگز نتوانستیم روشی پیداکنیم که باآن روش مقداری گرما را تماماً " بکارتبدیل کنیم. قانون دوم بااین سئوال سروکاردارد که آیا تحولاتی که باقانون اول سازگارهستند آیااصولاً " درطبیعت به وقوع می پیوندد یاخیر. قانون دوم شامل ایده هائی است که گرچه ممکن است درمرحله اول مجرد یابغرنج بنظر برسند امادرکاربردهای گوناگون خود رابسیار مفید وعملی نشان داده اند.

۲-۲۱- تحولات برگشت پذیر وبرگشت ناپذیر

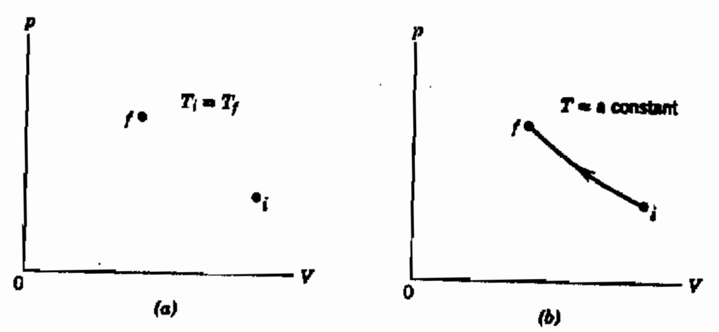
سیستم بخصوصی رادرنظر بگیرید که درحال تعادل ترمودینامیکی است. مثلاً " گازی - (حقیقی) بجرم m که درظرفی استوانه یی، کەبوسیله پیستونی مسدود شده، محبوس گردیده است. حجم، فشارودمای سیستم رابه ترتیب V ، p و T فرض میکنیم. درحالت تعادل این متغیرهای ترمودینامیکی درطول زمان ثابت میمانند. فرض کنید قاعده استوانه، کەاز

نظر گرما کاملا" هادی ولی جدار آن کاملا" عایق فرض میشود ، روی یك منبع گرمائی با همان دمای (دمای گاز داخل استوانه) قرار گرفته است (شکل ٤-١٩) . اکنون بیائید سیستم را به حالت تعادل دیگری ببریم که در آن دمای سیستم همان T اما حجم سیستم به نصف کاهش یابد . از بین روشهای متعددی که برای انجام این عمل وجود دارد دو روش بخصوص زیر را مورد بحث قرار میدهیم :

١- پیستون را بتندی و با شدت میرانیم تا حجم سیستم نصف شود . سپس مدتی صبر میکنیم تا دوباره بین منبع گرمائی و سیستم تعادل برقرار شود . در طول این تحول گاز داخل استوانه وضع مغشوش و آشفته ای دارد و فشار و دمای آن بدرستی معین نیست . چنین تحولی را نمیتوانیم بوسیله یك منحنی پیوسته روی دیاگرام $V-P$ نمایش دهیم زیرا نمیدانیم فشار (یا دمای) مربوط به یك حجم معین سیستم چه اندازه است . در این حالت سیستم بهنگام رفتن از حالت تعادل ابتدائی i به حالت تعادل انتهائی f ، از یك سری حالتهای غیرتعادل میگذرد . (شکل a ١-(٢)

٢- در این روش ، درست برخلاف روش قبلی پیستون را (که بدون اصطکاك فرض میشود) بسیار آهسته میرانیم- مثلا" با افزودن تدریجی دانه های شن بروی سرپیستون - بطوریکه فشار ، حجم و دمای گاز در تمام لحظات مقادیر معین و دوراز ابهامی داشته باشند . ابتدا چند دانه شن روی پیستون می ریزیم . در نتیجه حجم سیستم بمقدار خیلی جزئی کاهش یافته و دمای سیستم نیز به مقدار خیلی جزئی افزایش می یابد . سیستم از حال تعادل خارج میشود اما نه خیلی زیاد . مقدار خیلی کمی گرما از سیستم به منبع منتقل شده و در مدت کوتاهی سیستم به وضع تعادل جدیدی رسیده و دمای آن با دمای منبع یکسان میشود . سپس باز هم چند دانه شن روی پیستون ریخته و حجم سیستم را باز هم به مقدار جزئی کاهش میدهیم و صبر میکنیم تا سیستم بحالت تعادل برسد و همینطور آنقدر این عمل را تکرار میکنیم تا حجم سیستم به نصف کاهش یابد . در تمام این تحولات سیستم هیچگاه در حالتی نیست که با حالت تعادل تفاوت چندانی داشته باشد . هر اندازه افزایش فشار در هر نوبت - که با افزودن دانه های شن حاصل میشود - کمتر باشد (یعنی هربار مقداری

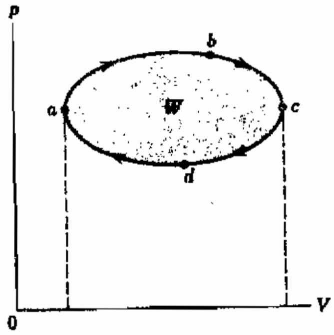
کمتری دانه های شن روی پیستون بریزیم) تفاوت حالت سیستم ازحالت تعادل ناچیز ترمیشود . اگرتعداد دفعاتی‌که باریختن دانه های شن روی پیستون فشارسیستم را زیاد میکنیم بینهایت زیاد شده ودرعین حال افزایش فشار درهرنوبت بینهایت کوچک شود به تحول ایده آلی میرسیم که درطول آن سیستم دائماً وبطور پیوسته ازحالات تعادل پشت سرهم عبورمیکند . چنین تحولی رامیتوان بصورت یک منحنی پیوسته روی دیاگرام $P-V$ نمایش دهیم (شکل b ۱-۲۱) . درطول این تحول مقدار معینی گرما ازسیستم به منبع منتقل میشود . تحولاتی ازنوع اول رابرگشت پذیر وتحولاتی ازنوع دوم را برگشت ناپذیر مینامند . دریک تحول برگشت پذیر باتغییری نهایت کوچکی درمحیط ، میتوان مسیرتحول رامعکوس کرد . مثلاً درروش دوم که پیستون به آهستگی به پائین میرود فشاری‌که ازخارج به پیستون وارد میشود . ازفشار گاز داخل استوانه باندازه بینهایت کوچک dP زیادتر است. حال اگر دراثر برداشتن دانه شن ازروی پیستون فشارخارجی ازفشارداخلی باندازه dP کمتر شود . گاز بجای تراکم شروع به انبساط کرده ودرواقع مسیر تحول معکوس میشود .



شکل ۱-۲۱- گازی را ازحالت تعادل اولیه (P_i و V_i و T_i) به حالت تعادل ثانویه (P_f و $V_f = \frac{1}{2} V_i$ و $T_f = T_i$) ببریم چنین تحولی را بدو طریق برگشت ناپذیر (a) وبرگشت پذیر (b) میتوان انجام داد .

در عمل همه تحولات برگشت ناپذیرند ولی بوسیله روشهای مناسب بیك تحول برگشت پذیر میتوان بحد دلخواه نزدیك شد . تحول برگشت پذیر مطلق مفهومی است تجریدی ، ساده ومفید ودر مقایسه باتحولات واقعی بهمانگونه است که مفهوم گاز کامل در مقایسه با گازهای حقیقی .

تحولی که در روش دوم شرح داده شد نه تنها برگشت پذیر بلکه ایزوترم نیزهست ، زیرا فرض کرده ایم که دمای گاز در تمام لحظات نسبت به دمای منبع ، که استوانه بروی آن قرار گرفته است ، باندازه بینهایت کوچك dT تفاوت میکند .



شکل ۲-۲۹- دیاگرام $p-V$ برای گازی که یك سیکل برگشت پذیر راطی میکند .سطح محدود به منحنی بسته برابراست باکار انجام شده توسط سیستم در طول این سیکل

همچنین ، بابرداشتن استوانه ازروی منبع گرمائی وقرار دادن آن روی یك پایه عایق ، میتوانیم حجم گاز را بصورت آدیاباتیك کاهش دهیم . در یك تحول آدیاباتیك هیچ مقدار گرمائی ازسیستم خارج یابآن داخل نمیشود بعبارت دیگر سیستم در چنین تحولی بامحیط تبادل گرما نمیکند . تحول آدیاباتیك میتواند هم برگشت پذیر باشد هم برگشت ناپذیر . زیراکه تعریف تحول آدیاباتیك مغایر باهیچکدام از تعاریفی که برای برگشت پذیری وبرگشت ناپذیری کرده ایم نیست . در یك تحول برگشت پذیر آدیاباتیك پیستون رابطور خیلی آهسته میرانیم . مثلا" باروش ریختن دانه های شن بروی پیستون ـ ودر تحول برگشت ناپذیر آدیاباتیك پیستون راباشدت میرانیم . در هر حال در هر دو مورد برای اینکه تحول آدیاباتیك باشد استوانه راروی پایه عایق قرارمیدهیم.

در یك تراکم آدیاباتیك دمای گاز بالا میرود ، چنانکه ازقانون اول نتیجه میشود با $Q = 0$ کاری که برای راندن پیستون انجام میشود بصورت افزایش انرژی داخلی سیستم ویابعبارت دیگر افزایش ΔU ظاهر میشود . کارانجام گرفته بروی سیستم که ازدستور $W=\int p\,dV$ محاسبه میشود (مساحت زیرمنحنی در دیاگرام $p-V$) بسته به چگونگی حرکت پیستون مقادیرمختلفی خواهد

داشت . به عبارت دیگرمقدار کار به مسیر تحول بستگی دارد . فقط برای تحولات برگشت پذیر (که در آنها مقدار p معلوم ومعین است) مقدار کار به مسیر تحول بستگی نداشته وفقط به حالات ابتدائی وانتهائی سیستم بستگی دارد . بنابراین تغییر انرژی داخلی سیستم ΔU وهمچنین تغییر دمای سیستم ΔT برای تحولات آدیاباتیك برگشت پذیر وبرگشت ناپذیر یکسان نخواهد بود .

۲۱-۲ سیکل کارنو

فرض کنید سیستمی در حال تعادل داریم . مثلا گازی حقیقی در داخل استوانه ئی که با پیستونی مسدود شده است . باتغییراتی که در محیط بوجود میآوریم میتوانیم . بنا به دلخواه تحولات گوناگونی در سیستم ایجاد کنیم . میتوانیم سیستم را منبسط یا متراکم کنیم . میتوانیم ، بصورت گرما ، انرژی به سیستم بدهیم یا از آن بگیریم . همه این تحولات را میتوانیم هم بطور برگشت ناپذیر وهم بطور برگشت پذیر انجام دهیم . همچنین میتوانیم یك سری تحولات پشت سرهم را چنان انجام دهیم که سیستم بعد از این تحولات دست آخر به حال تعادل اولیه برسد . مجموعه چنین تحولاتی را یك سیکل مینامیم . هرگاه تمام تحولاتی که مجموعاً یك سیکل تشکیل میدهند برگشت پذیر باشند آن سیکل را سیکل برگشت پذیر مینامیم .

شکل ۲۱-۲ یك سیکل برگشت پذیر را روی دیاگرام $p-V$ نمایش میدهد . در طول منحنی abc سیستم منبسط میشود . کاری که سیستم در اثر این انبساط انجام میدهد برابر است با سطح محدود به منحنی abc خطوط $V=a$ ، $V=b$ و محور V . در طول منحنی cda گاز متراکم شده وسیستم بحال اول برمیگردد . کار انجام شده بروی سیستم در اثر تراکم برابر است با سطح محدود به منحنی cda ، خطوط $V=a$ $V=c$ ومحور V . بنابراین کار خالصی که سیستم انجام میدهد برابر است باتفاوت این دو مقدار یعنی سطح منحنی بسته $abcda$ مقدار این کار مثبت است . اگر سیکل در جهت عکس انجام میشد یعنی سیستم

د رمسیر $c\ b\ a$ متراکم ود رمسیر $a\ d\ c$ منبسط میشد کارخالصی که سیستم انجام میداد بهمان اندازه حالت قبل ولی باعلامت منفی بود . بعبارت دیگر د راین حالت کارخالصی بهمان اندازه حالت قبل . ولی ازطرف محیط بروی سیستم انجام میشد .

یکی ازسیکل های برگشت پذیر مهم سیکل کارنواست که توسط سادی کارنو Sadi-Carnot د رسال ۱۸۲٤ معرفی شد . بعداً خواهیم دید که این سیکل محدودیتی د رتبدیل گرما قائل میشود . سیکل کارنواز دوتحول ایزوترم و دوتحول آدیاباتیك تشکیل شده است. هرچهار تحول برگشت پذیرند . سیستمی که این تحولات د رآن صورت میگیرد گازی است که برای سادگی وفهم بیشتر موضوع آن را یك گاز ایده آل فرض میکنیم . این گاز د رداخل استوانه یی قرار دارد که قاعده آن هادی ولی جدارآن عایق است . پیستونی هم که د راستوانه قرار دارد عایق فرض میشود . همچنین دومنبع گرمائی بادماهای T_1 و T_2 ودوپایه عایق رابعنوان قسمتی ازمحیط د رنظر میگیریم اکنون سیکل کارنورا د رچهارمرحله بنحوی که د رشکل ۳-۱۲ نشان داده شده انجام میدهیم . دیاگرام مربوط به این سیکل د رشکل ٤-۱۲ نمایش داده شده است . (شکل‌های ۳-۱۲ و٤-۱۲ د رصفحه بعد) .

مرحله اول ـ د رابتدا گاز د رحال تعادل است . این حالت د ردیاگرام $P-V$ د رشکل ٤-۱۲ بانقطه a به مختصات P_1 ، V_1 ، T_1 مشخص شده است. استوانه محتوی گاز راروی منبع گرمائی بادمای T_1 قرار میدهیم ومیگذاریم تاگاز بآهستگی منبسط شده وبحالتی برسد که د ردیاگرام ٤-۱۲ بانقطه b به مختصات P_2 ، V_2 و T_1 مشخص شده است. د رطول این تحول مقدارانرژی گرمائی برابر Q_1 بطریقه هدایت ازقاعده استوانه جذب گاز میشود . د ر این تحول یك انبساط ایزوترم د ر دمای T_1 صورت گرفته وگاز باپالا بردن پیستون وباروی آن (دانه های شن ، شکل ۳-۱۲) کارانجام میدهد .

مرحله دوم ـ استوانه راازروی منبع گرمائی برداشته وروی پایه عایق قرارمیدهیم وگاز داخل آن را به آهستگی منبسط میکنیم بطوریکه فشار ، حجم ودمای ان به ترتیب به P_3 ، V_3 ، T_3 برسد

(نقطه c شکل ٤-(٢) . این یک انبساط آدیاباتیک است، زیرا هیچ مقدار گرما به سیستم وارد یا از آن خارج نمیشود . گاز برای بالا بردن پیستون کار انجام داده و دمای آن از T_1 به T_2 کاهش مییابد .

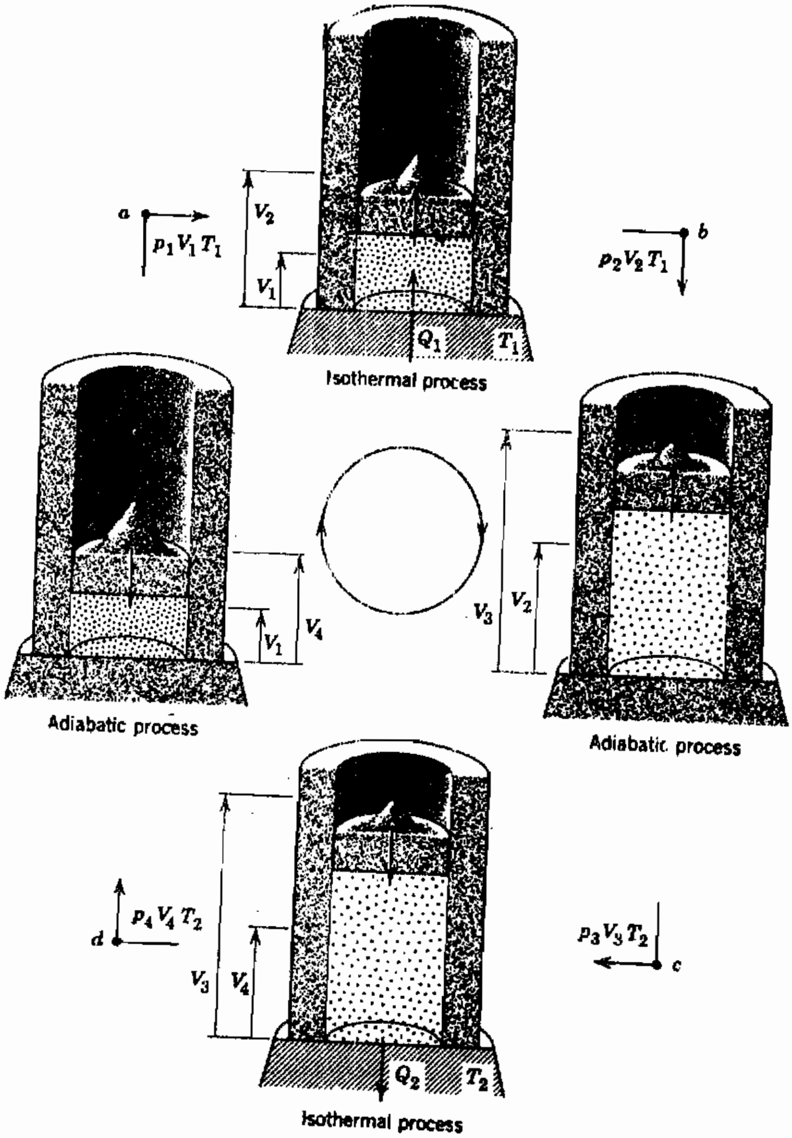
مرحله سوم ـ استوانه را روی منبع سرد با دمای T_2 قرار داده و به آهستگی گاز متراکم میکنیم تا فشار ، حجم و دمای آن به ترتیب P_4 و V_4 و T_4 برسد (نقطه d ، شکل ٤-(٢)) .
در این تحول مقداری انرژی گرمائی برابر Q_2 از گاز به منبع منتقل شده و یک تراکم ایزوترم در دمای ثابت T_2 صورت میگیرد که در اثر آن از طرف پیستون و بار روی آن بروی گاز کار انجام میشود .

مرحله چهارم ـ استوانه را از روی منبع T_2 برداشته و روی پایه عایق قرار داده و گاز را بآهستگی متراکم میکنیم تا به حالتی که در ابتدای مرحله اول داشت برسد یعنی فشار ، حجم و دمای آن به ترتیب به P_1 ، V_1 و T_2 برسد . این یک تراکم آدیاباتیک است زیرا در این تراکم هیچ مقدار گرما نمیتواند به سیستم وارد یا از آن خارج شود . در این تحول بروی گاز کار انجام شده و دمای آن از T_2 به T_1 افزایش می یابد .

کار خالصی که سیستم در این سیکل انجام داده برابر است با مساحت منحنی بسته $abcd$ (شکل ٤-(٢)) . انرژی گرمائی خالصی که سیستم در این سیکل دریافت کرده است برابر است با $Q_1 - Q_2$. Q_1 گرمائی است که سیستم در مرحله اول جذب کرده و Q_2 گرمائی است که در مرحله سوم به منبع پس داده است . چون حالات ابتدائی وانتهائی سیستم یکسان هستند ، پس تغییری در انرژی داخلی سیستم بوجود نمیآید یعنی $\Delta U = 0$ و بنابر قانون اول ترمودینامیک برای این سیکل داریم :

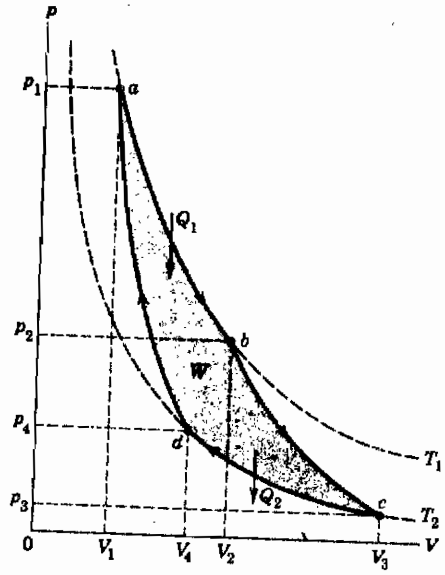
$$W = Q_1 - Q_2 \qquad (٢١-١)$$

در رابطه فوق Q_1 و Q_2 مثبت فرض شده اند . نتیجه سیکل اخیر اینستکه گرما بوسیله سیستم به کار تبدیل شده است . باتکرار این سیکل میتوان هر مقدار دلخواهی بدست آورد بنابراین چنین سیستمی مانند یک ماشین گرمائی عمل میکند .



شکل ۳-۲۱ سیکل کارنو . نقاط a ، b ، c و d دراین شکل مربوط به نقاط همنام در دیاگرام شکل ۴-۲۱ هستند . جای پیستون وجهت حرکت آن در داخل استوانه مراحلی را در سیکل کارنو نشان میدهد که نقاط مجاور را در دیاگرام ۴-۲۱ بهم متصل میکنند . در چهار شکل بالا فلش بسمت پائین نمایش دهنده تراکم (بعلت افزودن دانه های شن) وفلش بسمت بالا نمایش دهنده انبساط (بعلت برداشتن دانه های شن) است.

شکل ۴-۲۱-۲ دیاگرام $p-V$ مربوط به یک سیکل کارنو که در شکل ۳-۲۱-۲ نشان داده شده است .



در اینجا بعنوان مثال از گاز ایده آل برای تبدیل گرمابه بهره گرفتیم . امامواد دیگر راهم میشود بکارگرفت. البته دیاگرام $p-V$ برای مواد مختلف فرق میکند . درماشینهای گرمائی معمولی ازبخار آب یا مخلوطی ازهواویک ماده سوختنی نظیر بنزین ومانند آن استفاده میشود . گرمای لازم بوسیله احتراق سوختهائی ازقبیل بنزین یاذغال ویااینکه دراثر شکاف هسته اتم و انهدام جرم درراکتورهای هسته ئی تامین میشود . گرمای باقیمانده Q_2 ازطریق اگزوزیخارج بخار رفته ویااینکه درماشین های بخار به چگالنده میرود . اگرچه ماشینهای گرمائی حقیقی برپایه سیکل برگشت پذیر کارنمیکنند اماسیکل کارنو، که برگشت پذیراست ، اطلاعات مفیدی راجع به رفتارماشینهای گرمائی بمامیدهد .

بازده یک ماشین گرمائی عبارتست ازنسبت کارخالص انجام شده توسط ماشین دریک سیکل به گرمای گرفته شده ازمنبع گرم درهمان یک سیکل . اگربازده رابا e نشان دهیم داریم :

$$e = \frac{W}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (۲-۲۱-۲)$$

رابطه ۲-۲۱-۲ نشان میدهد که بازده یک ماشین گرمائی ازیک کمتراست مگراینکه مقدارگرمای خارج

شده ، مثلا* ازطریق اگزز ، صفرشود . تجربه نشان میدهد که هرماشین گرمائی د رهنگام تخلیه (هنگام چهارم د رماشین های‌چهار زمانه وهنگام د وم د رماشینهای‌د وزمانه) مقد اری‌گرمابه خارج د فع میکند . این همان گرمائی‌است که د رماشین به کارتبد یل نشده وبخارج رفته است .

این امکان وجود د ارد که سیکل کارنو رااز نقطه ئی مانند a د رشکل ٤-١٢ شروع نموده وآن راد رجهت عکس انجام د هیم . د رنتیجه مقد اری گرمابرابر Q_2 ازمنبع سرد د رد مای T_2 گرفته شده ومقد اری گرمابرابر Q_1 د رد مای T_1 به منبع گرم د اده میشود . د راین حالت باید بوسیله یك عامل خارجی کاربروی سیستم انجام شود تاسیستم بتواند گرمارااز منبع سرد بیرون کشیده وبه منبع گرم منتقل کند . باتکرار این سیکل‌معکوس هرمقد ارگرمائی‌که بخواهیم میتوانیم ازمنبع سرد خارج کنیم . بنابراین چنین سیستمی مانند یك ماشین مبرد (یخچال) عمل‌میکند که گرمارا از جائی باد مای‌کمتر (فریزر) به جائی باد مای‌بیشتر (اطاق) منتقل میکند . کار لازم بصورت انرژی الکتریکی به ماشین د اده میشود .

مثال ١-

نشان دهید که بازده یك ماشین کارنوکه د رآن از گاز ایده آل استفاده میشود برابراستبا :

$$e = (T_1 - T_2)/T_1$$

د رانبساط ایزوترم (از a تا b شکل ٤-١٢) د ما ود رنتیجه انرژی د اخلی یك گاز ایده آل ثابت میماند . بنابه قانون اول . گرمای Q_1 که د راین انبساط بتوسط گاز جذب شده بایستی برابرکار W_1 که سیستم د راین انبساط انجام د اده است باشد . ازمثال ٢ فصل بیستم د اریم :

$$Q_1 = W_1 = \mu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

بهمین ترتیب د رتراکم ایزوترم d c (شکل ٤-١٢) د اریم :

$$Q_2 = W_2 = \mu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

ازتقسیم رابطه اول بررابطه دوم داریم :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln \frac{V_1}{V_4}}{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}} \qquad (I)$$

چون تحول از a تا b ایزوترم است پس:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

وچون تحول از c تا d هم ایزوترم است :

$$P_3 V_3 = P_4 V_4$$

وچون تحول از b تا c وهمچنین از d تا a آدیاباتیك است پس :

$$P_2 V_2^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma}$$

$$P_4 V_4^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

طرفین چهار رابطه اخیر را درهم ضرب وازطرفین رابطه حاصل عامل مشترك $P_1 P_2 P_3 P_4$ راحذف میکنیم :

$$V_1 V_2^{\gamma} V_3 V_4^{\gamma} = V_1^{\gamma} V_2 V_3^{\gamma} V_4$$

$$(V_2 V_4)^{\gamma-1} = (V_3 V_1)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

ودرنتیجه بااستفاده ازرابطه (I) :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T}$$

دماهای T_1 و T_2 بوسیله ترمومتر گازیکه درفصل ۱۸ شرح داده شده اندازه‌گیری میشوند .

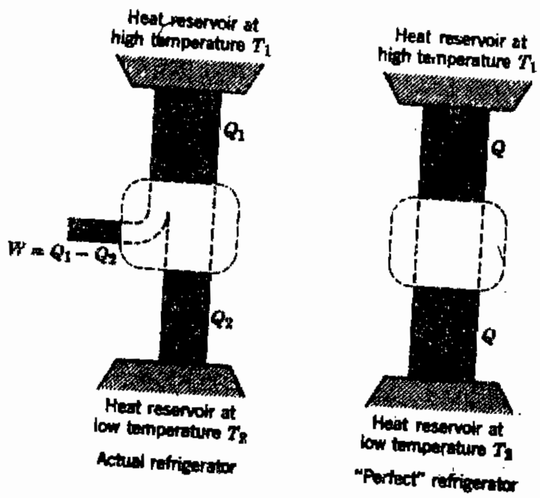
۴-۲۱ قانون دوم ترمودینامیك

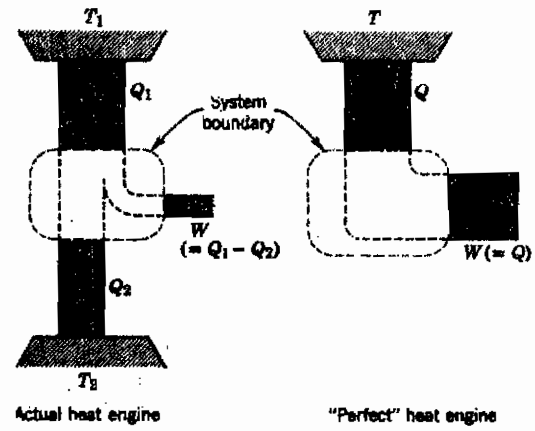
بازده ماشینهای گرمائی اولیه بسیارکم بود . تنهاکسرکوچکی ازگرمای گرفته شده از منبع گرم قابل تبدیل به کارمفید بود . باوجود پیشرفتی که درکارطراحی این ماشین هاحاصل شدباز

هم مقدارقابل توجهی ازگرمای جذب شده به منبع سرد ماشین رفته وبه انرژی مکانیکی تبدیـــل نمیشد . درآن زمان این امید وجود داشت که بتوان ماشینی طرح کرد که باگرفتن گرماازیک منبـــع لایزال مانند اقیانوس ،تمام آن رابه کارتبدیل کند . درنتیجه احتیاجی به منبع گرم بادمائـــی بالاتر از دمای محیط نبود (شکل ۵-۲۱) بهمین نحواین امید هم وجود داشت که بتوان ماشینی ساخت که گرمارا ازجسم سرد گرفته وبه جای گرم منتقل کند بدون اینکه برای این عمل احتیاجی به گرفتن انرژی ازخارج داشته باشد (شکل ۶-۲۱) . همانطوریکه درشروع این فصل گفته شـــد هیچکدام از این دومورد مغایر باقانون اول ترمودینامیک نیست. ماشین گرمائی بسادگی انرژی گرمائی رابطور کامل به کارتبدیل نموده وانرژی کل درطول این تحول ثابت باقی خواهد ماند . در ماشین مبرد ایده آلی هم که امید ساختنش میرفت گرما از منبع سرد به منبع گرم منتقل میشد بدون اینکه درچنین تحولی انرژی راازبین ببرد . باوجود این هیچیک از این امید های جاه طلبانه تاکنـــون صورت تحقق بخود نگرفته است ومنطقی است اگرپیش بریم که درآینده نیز امکان ساختن چنیـــن ماشینهائی نخواهد بود .

بنابرقانون دوم ترمودینامیک که نتیجه یی تعمیم یافته ازمشاهدات تجربی است، چنیـن وسایلی وجود ندارند . قانون دوم باشکال متعددی بیان شده است که هرکدام روی یک جنبـــه ازقانون تاکید میکند امامیتوان نشان داد که همه باهم معادلند . مثلا" قانون دوم توسط کلوزیوس Clausius ازیکطرف ولردکلوین Kelvin وپلانک Planck ازطـرف دیگربدونحومختلف بیان شده است که بعد از شرح هرکدام نشان میدهیم باهم معادلند .

بیان کلوزیوس- درهیچ ماشین سیکلی ممکن نیست که بعد ازهرسیکل (یابعد ازچند سیکل) کامل تنها عملی که ماشین انجام میدهد اخذ مقداری گرماازیک منبع گرمائی وانتقال آن به منبعـــی گرمتر باشد . این بیان امکان ساختن ماشین مبرد ایده آل را مردود میسازد زیرابنابراین بـــرای انتقال گرما ازمنبع گرم به منبع گرمتر بطور پیوسته انجام کار توسط عامل خارجی ضروری است . بنا برتجربه میدانیم که هرگاه دوجسم درتماس باشند انرژی گرمائی ازجسم گرم به جسم سرد منتقل میشـــود





شکل ۵-۲۱ دریک ماشین گرمائی واقعی مقداری ازگرمای گرفته شده برابر Q_1 به کار W تبدیل میشود اما بقیه یعنی Q_2 به خارج میرود . دریک ماشین "کامل" تمام گرمای وارد شده به ماشین بکارتبدیل میشود .

شکل ۶-۲۱ دریک ماشین سرد واقعی برای انتقال گرما از منبع سرد به منبع گرم کار W لازم است. درماشین سرد "کامل" بدون اینکه کاری لازم باشد گرما ازمنبع سرد به منبع گرم جریان مییابد .

قانون دوم امکان انتقال گرما از جسم سرد به جسم گرم را دراین شرایط نفی نمود . وبنابراین جهت انتقال گرما رامعین میکند .

بیان کلوین ـ پلانک هرتبدیلی که تنها نتیجه آن جذب مقداری گرما ازیک منبع گرمائی وتبدیل آن به کارباشد غیرممکن است. این بیان امکان ساختن ماشین گرمائی ایده آل رانفی میکند زیراکه بنابرآن گرفتن مقداری گرما ازیک منبع وتبدیل آن به کار ، بدون اینکه مقداری ازگرما را به یک منبع بادمای کمتر برگردانیم غیرممکن است.

برای اینکه نشان دهیم این دو بیان معادل هستند لازم است نشان دهیم که اگریکی ازاین دو بیان فرضاً نادرست باشد دیگری نیز نتیجتاً بایستی نادرست باشد . فرض کنید بیان کلوزیوس درست نبود بطوریکه میتوانستیم ماشین مبردی داشته باشیم که بتواند بدون گرفتن انرژی مکانیکی ازخارج کارکند . دراینصورت میتوانستیم یک ماشین گرمائی معمولی رابکار گیریم که مقداری گرماازمنبع گرم گرفته ، بخشی ازآن رابه کارتبدیل نموده وبقیه رابه منبع سرد برگرداند . امابااتصال ماشین مبرد ایده آل مذکور به این سیستم میتوانیم این گرما رابه منبع گرم منتقل کنیم بدون اینکه کاری لازم باشد . درنتیجه این گرمادوباره برای ماشین گرمائی قابل استفاده خواهد بود . بنابراین ازترکیب دوماشین فوق یک ماشین گرمائی ایده آل حاصل میشود که بیان کلوین ـ پلانک رانیز نقض خواهد کرد . بالعکس اگرفرض کنیم بیان کلوین ـ پلانک صحیح نباشد درآنصورت میتوانیم یک ماشین حرارتی داشته باشیم که گرما راازمنبع گرم گرفته وتماماً به کارتبدیل کند . بااتصال این ماشین گرمائی ایده آل بیک ماشین مبرد معمولی میتوانیم گرمارا ازمنبع گرفته وتماماً به کارتبدیل نموده وازکار حاصل برای بکارانداختن ماشین مبرد استفاده کرده وازیک جسم سرد گرمابگیریم واین گرما ، باضافه گرمای حاصل ازتبدیل کاردرماشین مبرد ، را به منبع گرم بدهیم . نتیجه آن خواهد شد که گرمابدون صرف انرژی مکانیکی ، ازجسم سرد به جسم گرم منتقل شده وبیان کلوزیوس رانقض میکند .

ازقانون دوم نتیجه میشود که بسیاری ازتحولات برگشت ناپذیرند . برای مثال بنابربیان کلوزیوس ، عکس کردن جهت انتقال گرماازجسم گرم به جسم سرد امکان پذیر نیست . نه تنها بعضی ازتحولات بخودی خود تغییر جهت نمیدهند بلکه هیچ ترکیبی از دو یا چند تحول وجود ندارد که بتواند فقط وفقط اثر یک تحول رادرجهت عکس داشته باشد وتغییرد یگری رادرجای دیگر موجب نشود . درقسمتهای بعد این مطالب راتوسعه بیشتری داده وقانون دوم رابطورکمی فرموله میکنیم .

۵-۲۱- بازده ماشینهای گرمائی

برای اولین بار کارنو بطور علمی مطالبی درباره تئوری ماشینهای گرمائی نوشت . به سال ۱۸۲٤ اومقاله یی با عنوان " درباره نیروی حرکت زای گرما " منتشر نمود . در آن موقع استفاده از ماشین بخار در صنایع متداول شده بود . کارنو در آن مقاله چنین نوشت :

علیرغم کوششهای زیادی که صرف ماشین بخار گردیده وعلیرغم تکاملی که این ماشین پیدا کرده است تئوری آن چندان پیشرفتی نکرده است. تولید حرکت در ماشین بخار همیشه تابع شرایطی است که ما آن را مخصوصا " مورد توجه قرار میدهیم . شرایطی که در آن کالری (گرما) از جسمی که دمای آن کم وبیش بالا ست به جسمی که دمایش پائین تر است میرود . نیروی حرکت زای گرما مستقل از عوامل بوجود آورنده آن است . مقدار این نیرو فقط بوسیله دمای اجسامی که انتقال گرما بین آنها صورت میگیرد ، تعیین میشود .

بنابراین کارنو توجه خود را به این حقایق معطوف کرد که اختلاف دما بین دو منبع عامل اصلی نیروی حرکت زائی گرماست . انتقال گرما در این تبدیل نقش مهمی داشته ولی نوع ماده یی که این تبدیل در آن صورت میگیرد از نظر تئوریك هیچ اهمیتی ندارد .

اگر بخاطر آوریم که در سال ۱۸۲٤ معادل مکانیکی گرما واصل بقاء انرژی هنوز شناخته نشده بودند ، ارزش و اهمیت کارهای کارنو در آن زمان معلوم میشود . در مقاله های بعدی که در ۱۸۷۲ بعد از مرگش منتشر شد معلوم شد که کارنو قانون بقاء انرژی را پیش بینی نموده ومعادل مکانیکی گرما را هم دقیقا " تعیین کرده بود . او طرح یك برنامه وسیع تحقیقاتی را ریخته بود که شامل تمام پیشرفتهای مهمی میشد که دیگر پژوهشگران این رشته در طول چند دهه بعد بآنها رسیدند . اما کارنو در سال ۱۸۳۲ براثر اپیدمی وبا ، درحالیکه فقط ۳۶ سال داشت ، درگذشت وادامه کارهایش را به دیگران واگذارد . بعد از کارنو ویلیام تامسون (که بعدا " لقب " لرد کلوین " گرفت) استدلال او را تعدیل نموده وآن را با تئوری مکانیکی گرما تطبیق داد . تامسون بعدا " باتفاق کلوزیوس پیروزمندانه دانش ترمودینامیك را بنیانگذاری کرد .

کارنو مفهوم ماشین برگشت پذیر راتوسعه داد وقضیه یی درمورد این ماشینهابیان کرد که بـــه ترتیب زیراست :

بازده تمام ماشینهای گرمائی برگشت پذیر که دمای منبع گرم آنها باهم ودمای منبع سـرد نیز باهم برابرند یکی است . بازده هیچ ماشینی برگشت ناپذیری ازبازده یك ماشین برگشت پذیر که باهمان منابع کارمیکند بیشترنیست . بعبارت دیگر بازده یك ماشین گرمائی که بین دو منبع سرد وگرم معین کارمیکند هنگامی ماکزیمم است که آن ماشین برگشت پذیرباشد .

کلوزیوس وکلوین نشان دادند که قضیه فوق الزاماً نتیجه یی ازقانون دوم است . توجـه کنید که دراین قضیه اشارهیی به ماده تبدیل کننده نشده است. یعنی بازده یك ماشین برگشت پذیر مستقل ازماده تبدیل کننده بوده وفقط به دماهای دومنبع سرد وگرم بستگی دارد . اکنون ثابت میکنیم که بازده یك ماشین گرمائی بادومنبع T_1 و T_2 وقتی ماکزیمم است که برگشـت پذیر باشد .

فرض کنید دوماشین برگشت پذیر H و H' داشته باشیم که بادومنبع T_1 و T_2 $(T_1>T_2)$ کارمیکنند . این دو ماشین ممکنست مثلاً جنس ماده تبدیل کننده شان مختلف بوده یافشـار اولیه و اول ضربه هایشان یکی نباشد . H رابصورت یك ماشین گرمائی و H' رابصورت یك ماشین مبرد بکارمیاندازیم . ماشین گرمائی H گرمای Q_1 را دردمای T_1 گرفته وگرمای Q_2 رادردمای T_2 به خارج میدهد . ماشین مبرد H' گرمای Q'_2 رادردمای T_2 گرفتـــه وگرمای Q'_1 رادردمای T_1 بخارج میدهد . اکنون دوماشین رابهم متصل میکنیم وآنهاراچنان تنظیم میکنیم که کاری که ماشین H دریك سیکل مید هد درست برابر کاری باشد که ماشین مبرد H' دریك سیکل لازم دارد (شکل ٧-٢١) فرض کنید e بازده ماشین H از e' بازده ماشین H' بیشتر باشد دراینصورت :

$$e > e'$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}$$

بنا به فرض کارانجام شده توسط ماشین H دریك سیکل برابراست باکارگرفته شده توسط ماشین H' دریك سیکل :

$$W = W'$$
$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2$$

بامقایسه این دو رابطه وباتوجه باینکه $Q_1 - Q_2 > 0$ داریم :

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q'_1}$$

یا

$$Q_1 < Q'_1$$

وباتوجه رابطه تساوی کارها : $\Leftarrow$

$$Q_2 < Q'_2$$

بنابراین منبع گرم گرمائی برابر $Q'_1 - Q_1 > 0$ گرفته ومنبع سرد گرمائی برابر $(Q'_2 - Q_2)$ ازدست میدهد . امادر این تحول کارخالص توسط سیستم $H + H'$ انجـــام نمیشود . یعنی ، توانسته ایم بدون انجام کار گرمارااز منبع سرد به گرم منتقل کنیم که متناقـض بابیان کلوزیوس است . نتیجه میگیریم که e نمیتواند بزرگتر از e' باشد . بهمین نحواگـــر ماشینهارادرجهت عکس بکار اندازیم میتوانیم همین استدلال رابکاربرده وثابت کنیم که e' نمیتواند بزرگتر از e باشد بنابراین :

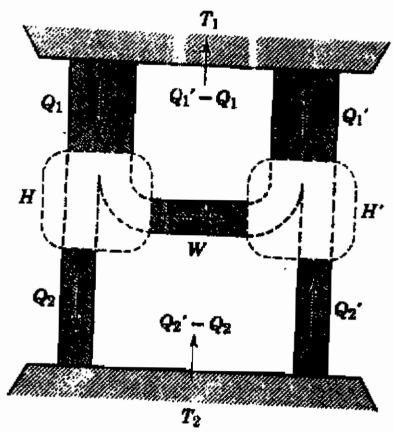
$$e = e'$$

وقسمت اول قضیه کارنو ثابت میشود .

اکنون فرض کنید که H یك ماشین برگشت ناپذیر باشد . دراینصورت درست باهمان روش میتوان ثابت کرد که e_{ir} (بازده ماشین برگشت ناپذیر H) نمیتواند از e' بزرگتر باشد . ولی ماشین H نمیتواند درجهت عکس کارکند (برگشت پذیرنیست) بنا براین نمیتوانیم ثابت کنیم که e' نمیتواند بزرگتراز e_{ir} باشد . بعبارت دیگر امکان اینکه $e' > e_{ir}$ باشد وجود دارد . یعنی e_{ir} مساوی یاکوچکتر از e' است . چون $(e' = e = e_{برگشت پذیر})$ داریـــم :

$$e_{\text{برگشت ناپذیر}} \leqslant e_{\text{برگشت پذیر}}$$

وبدین ترتیب قسمت دوم قضیه کارنوهم ثابت میشود .



شکل ٧-٢١ اثبات قضیه کارنو

مثال ٢

دریك ماشین بخار، بخار از دیگ باد مای C° ٢٠٠ (فشار دیگ ٢٢٥ lb/in^2) وارد ماشین شده و باد مای C° ١٠٠ درهوا (فشار هوا ١٤ lb/in^2) تخلیه میشود . بازده ماکزیمم چقدر است ؟

بااستفاده از نتیجه مثال[1] (که یك ماشین برگشت پذیر وقضیه کارنو درمورد آن صادق است) داریم :

$$e_{Max} = e_{\text{برگشت پذیر}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(٤٧٣-٣٧٣)^\circ K}{٤٧٣^\circ K} \times ١٠٠٪ = ٢١/١٪$$

عملاً بازده ماشینها به حدود ١٥٪ میرسد . اتلاف انرژی دراثر اصطکاك . آشفتگی (turbulence) وهدایت گرما به خارج صورت میگیرد . درماشینهای کاملتر باپائین ترآوردن دمای بخار خارج شده میتوان بازده ماکزیمم را به ٣٥٪ وبازده حقیقی را به ٢٠٪ افزایش داد . بازده موتور اتومبیل معمولی درحدود ٢٢٪ وبازده موتورهای بزرگ دیزل به حدود ٤٠٪ میرسد .

۲۱-۶ آنتروپی ـ تحولات برگشت پذیر :

قانون " صفرم " ترمودینامیك بامفهوم دما T وقانون اول بامفهوم انرژی داخلی U سروکار دارد . دراین قسمت وقسمتهای بعد نشان میدهیم که قانون دوم ترمودینامیك بایك متغییرترمودینامیکی بنام آنتروپی S سروکار دارد وما میتوانیم قانون دوم رابکمك این مفهوم بطورکلی بیان نیم . مطلب رابادرنظرگرفتن یك سیکل کارنوشروع میکنیم . برای چنین سیکل دیده ایم که (رابطه ۳-۲۱) :

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

که درآن Q_1 و Q_2 مقادیر مثبت بودند . بعبارت دیگر ماباقدر مطلق این کمیات سروکارداشتیم . حال اگر دوباره آنهارا بعنوان کمیات جبری درنظر بگیریم یعنی وقتی گرمابه سیستم وارد میشود علامت آن را مثبت وموقعیکه خارج میشود منفی بگیریم ، رابطه فوق رابصورت زیر بنویسیم :

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

بنابراین معادله مجموع جبری $\frac{Q}{T}$ برای هرسیکل کارنوصفراست .

درمرحله بعد فرض میکنیم که هرسیکل برگشت پذیر رامیتوان باهرتقریب دلخواه معادل با مجموعهی ازسیکل های کارنوگرفت . شکل ۲۱-۸a سیکل برگشت پذیر دلخواهی رانشان میدهد که روی دستهی از منحنی های ایزوترم رسم شده است .

درشکل ۲۱-۸b مجموعه یی ازسیکل های کارنودیده میشود که ازبهم پیوستن منحنی های ایزوترم ومنحنی های آدیاباتیك تشکیل شده اند چنانکه می بینیم این مجموعه سیکل های کارنو تقریبا" معادل با سیکل برگشت پذیر اصلی است که بامنحنی مسدود درشکل نشان داده شده . باید خودرا متقاعد کنیم که پیمودن یکایك مجموعه سیکل های کارنو دراین شکل ، ازنقطه نظر گرمای منتقل شده وکارانجام گرفته ، درست معادل باپیمودن خط شکسته متشکل ازمنحنی های ایزوترم وآدیاباتیك میباشد . چنانکه ازشکل پیداست این خط شکسته رامیتوان تقریبی ازسیکل

اصلی بحساب آورد زیراهر دو سیکل کارنو مجاور هم دارای یك منحنی ایزوترم مشترك بوده وپیمودن منحنی در دوجهت عکس، تاآنجاکه به کارانجام شده وگرمای منتقل شده مربوط میشود . یکدیگر را در نواحیی که برهم منطبق شده اند خنثی میکنند . باکوچك کردن اختلاف دما بین منحنی های ایزوترم در شکل b ۸-۲۱ وافزایش تعداد منحنی های ایزوترم ومنحنی های آدیاباتیك که منحنی ایزوترم رابهم متصل میکند ، میتوان بحد دلخواه به سیکل برگشت پذیر اصلی نزدیك شد .

درنتیجه برای رشته منحنی های ایزوترم ـ آدیاباتیك در شکل b ۸-۲۱ میتوان نوشت :

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

یادرحدیکه اختلاف بین دمای منحنی های ایزوترم درشکل مذکور بینهایت کوچك شود :

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \qquad (٢١-٤)$$

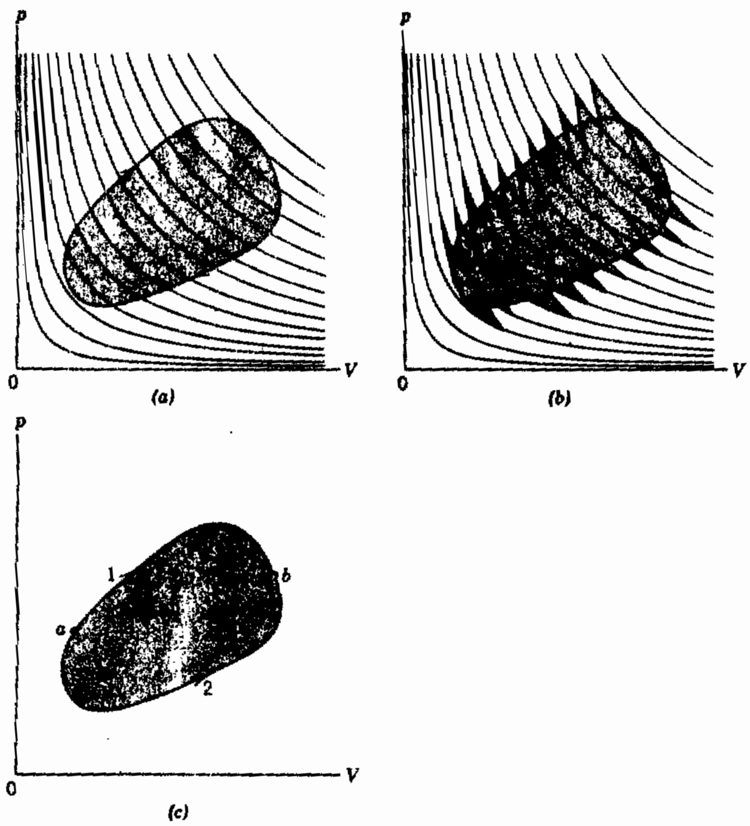
که درآن علامت $\oint$ نشان میدهد که انتگرال کمیت $\frac{dQ}{T}$ روی یك سیکل کامل ، که ازیك نقطهٔ اختیاری شروع وبهمان نقطه ختم میشود ، محاسبه میشود .

اگرانتگرال کمیتی روی منحنی بستهٔ صفر شود ، آن کمیت را " متغیر حالت " مینامیم . چنین کمیتی دارای مقداری است که فقط مشخص کننده حالت سیستم میباشد بدون توجه باینکه سیستم چگونه وازچه راه بآن حالت رسیده است. متغیر $\frac{dQ}{T}$ رابا dS وانتگرال آن را با S نمایش داده وآن راآنتروپی مینامیم . بنابررابطه ٤-٢١ داریم :

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \text{و} \qquad \oint dS = 0 \qquad (٢١-٥)$$

واحدهای متداول برای آنتروپی عبارتند از ژول بردرجه کلوین $Joule/K$ وکالری بردرجه کلوین Cal/K

انرژی پتانسیل جاذبه U_g انرژی داخلی U فشار P ودما T ازدیگر متغیرهای حالت میباشند ورابطه یی به شکل $\oint dx = 0$ برای هرکدام برقراراست که درآن بجای x کمیت مربوطه یعنی U_g ، U ، P یا T را قرار میدهیم . گرما Q وکار W



شکل ۸-۲۱ (a) سیکل برگشت پذیری که روی یک سته منحنی های ایزوترم رسم شده است (b) ازبهم پیوستن منحنی های ایزوترم بوسیله منحنی های آدیاباتیک مجموعه ئی از سیکل های کارنوتشکیل میشود که تقریبا" معادل با سیکل برگشت پذیراصلی است. (c) a و b دونقطه اختیاری روی سیکل برگشت پذیر هستند که بادوراه برگشت پذیر ۱و۲ بهم متصل شده اند .

متغیرهای حالت نیستند ومیدانیم که عموما" $\oint dQ \neq 0$ و $\oint dW \neq 0$. این عدم تساوی هارا بسادگی میتوانید برای حالت خاص سیکل کارنونشان دهید .

خاصیت یك متغیر حالت راکه بارابطه $\oint dx = 0$ بیان میشود میتوان بدین ترتیب

هم بیان نمود که مقدار انتگرال $\oint dx$ بین هر دو حالت تعادل برای تمام تحولات برگشت پذیری که آن دو حالت را بهم متصل کنند یکی است. این مطلب را در مورد یک متغیر حالت آنتروپی است ثابت میکنیم :

معادله ۵-۲۱ را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم (شکل C ۸-۲۱ را ببینید) :

$$\int_{1\,a}^{b} dS + \int_{2\,b}^{a} dS = 0 \qquad (۲۱-۶)$$

که در آن a و b دو نقطه اختیاری (دو حالت تعادل اختیاری سیستم) و ۱ و ۲ راههائی (تحول هائی) است که این دو نقطه را بهم متصل میکنند . ازآنجاکه این سیکل برگشت پذیر است معادله (۶-۲۱) را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$\int_{1\,a}^{b} dS - \int_{2\,a}^{b} dS = 0$$

یا :

$$\int_{1\,a}^{b} dS = \int_{2\,a}^{b} dS \qquad (۲۱-۷)$$

در رابطه ۷-۲۱ راه ۲ را در جهت عکس پیموده ایم (تحول۲ را در جهت عکس انجام داده ایم) یعنی از a به b ، نه از b به a . این کار را باتعویض حدود بالا وپائین انتگرال دوم درمعادله ۶-۲۱ ، که البته باید باتعویض علامت انتگرال همراه باشد ، انجام داده ایم که منجر به رابطه ۷-۲۱ شده است. انتگرال اخیر مبین اینستکه کمیت $\int_a^b dS$ بین هر دو حالت تعادل سیستم همچون a و b مستقل از تحولی است که آن دو را بهم متصل میکند زیراکه دو تحول a و b کاملاً اختیاری هستند . بحثی کاملاً مشابه راکه در فصل ۲-۷ درمورد نیروهای کنسرواتیو کردیم بخاطرآورید .

تغییر آنتروپی از a تا b در شکل C ۸-۲۱ برابراست با

$$S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T} \qquad (۲۱-۸) \quad \text{(تحول برگشت پذیر)}$$

انتگرال فوق روی هرراه برگشت پذیری که د وحالت a و b رابهم مربوط میکند محاسبه میشود .

۷-۲۱- آنتروپی - تحولا ت برگشت ناپذیر

د رقسمت ٦-۲۱ فقط د رمورد تحولا ت برگشت پذیر بحث کرد یم . با وجود این آنتروپی ، مانند تمام متغیرهای حالت ، فقط به حالت سیستم بستگی د ارد وباید بتوانیم تغییرآنتروپی رابرای تحولا ت برگشت ناپذیر هم محاسبه کنیم . تنهاشرط اینستکه حالا ت ابتدائی وانتهائی این تحولا ت حالات تعادل باشند . د ومثال د رنظر میگیریم :

۱- انبساط آزاد - نظیرآنچه د رقسمت ۷-۱۹ (شکل ۹-۱۹ راملاحظه کنید) آورد یم فرض کنید مقد اری گاز بد اخل ظرفی که قبلا" تخلیه شد ه است د اخل شد ه وحجم آن د وبرابرشود از آنجائیکه هیچ کاری روی خلاء انجام نمیشود $W=0$ وازآنجاکه گاز بوسیله جد ارهای غیرهادی احاطه شد ه است $Q=0$ بنابراین ازقانون اول نتیجه میشود که

$$\Delta U = 0 \qquad \text{یا}$$

$$U_i = U_f \qquad (۹-۲۱)$$

i و f نمایانگر حالا ت تعادل ابتدائی وانتهائی هستند . اگرگاز ایده آل باشد انرژی آن فقط به د مایش بستگی د اشته وازمعادله ۹-۲۱ نتیجه میشود که $T_i = T_f$

بد یهی است که انبساط آزاد برگشت ناپذیراست زیرابه مجرد یکه ماشیر رابط بین د و محفظه راد رشکل ۹-۱۹ بازمیکنیم کنترل محیط ازد ستمان خارج میشود . باوجود این آنتروپی سیستم د رحالات تعادل ابتدائی وانتهائی یکسان نیست . امانمیتوانیم تغییرآنتروپی یعنی $S_f - S_i$ راباا ستفاد ه ازرابطه ۸-۲۱ محاسبه کنیم زیراآن رابطه فقط برای تحولا ت برگشت پذیر صاد ق است . اگر بخواهیم آن رابطه رابکار ببریم د رمرحله اول بااین مشکل مواجه میشویم که برای انبساط آزاد $Q=0$ است وازآن گذشته د مای سیستم T د رحالا ت غیرتعادل بینابین برای مامعلوم نیست ، پس چگونه $S_f - S_i$ رابرای انبساط آزاد محاسبه کنیم ؟ برای اینکار راه برگشت پذیرد لخواهی

که دو حالت i و f را بهم مربوط کند پیدا میکنیم وتغییر آنتروپی را برای این راه حساب مینمائیم راه برگشت پذیر مناسبی در انبساط آزاد (بفرض اینکه گاز ایده آل باشد) انبساط ایزوترمی از V_i به V_f $(V_f = 2V_i)$ میباشد. از نوع همان انبساط ایزوترمی که درشکل ٤-۲۱ بین دو حالت a و b از سیکل کارنو صورت میگیرد. چنین انبساطی با انبساط آزاد کاملا فرق میکند. تنها وجه اشتراک این دو انبساط اینستکه هردو آنها سیستم را از حالت تعادل ابتدائی i به حالت تعادل انتهائی f میبرند. از معادله ۸-۲۱ ومثال داریم:

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \mu R \ln \frac{V_f}{V_i} = \mu R \ln 2$$

که مقداری است مثبت یعنی آنتروپی سیستم در این تحول برگشت ناپذیر آدیاباتیک افزایش می یابد.

۲- هدایت گرما- برای مثال دیگر دو جسم را درنظر بگیرید که ازهرحیث مشابهند جز اینکه دمای یکی T_1 ودیگری T_2 باشد $(T_1 > T_2)$ اگرهر دو جسم را داخل جعبه ئی با دیواره های عایق در تماس بایکدیگر قرار دهیم بعد از مدتی دمای هردو یکی شده وبمقدار T_m میرسد که تقریبا" برابر است با $\frac{T_1 + T_2}{2}$. البته این تحول نیز همانند انبساط آزاد برگشت ناپذیر است. همچنین این تحول نیز آدیاباتیک است زیرا در طول تحول هیچ گرمائی به سیستم وارد یا از آن نمیشود.

دراینجا نیز برای محاسبه تغییر آنتروپی سیستم باید تحول برگشت پذیری پیدا کنیم که همان حالات ابتدائی وانتهائی سیستم را بهم مربوط کند وتغییر آنتروپی را بااستفاده ازرابطه ۸-۲۱ محاسبه کنیم. برای اینکار باید یك منبع گرمائی باظرفیت گرمائی زیاد دراختیار داشته باشیم که بتوانیم دمای آن را، مثلا" باچرخاندن یك تکمه، بدلخواه تغییر دهیم. درابتدا دمای منبع را بروی T_1 تنظیم کرده وجسم گرم را (که دمای آنهم T_1 است) روی منبع قرار میدهیم. سپس دمای منبع را بآهستگی (بطور برگشت پذیر) از T_1 به T_m کاهش میدهیم وبدین ترتیب مقداری گرما ازجسم خارج میکنیم. آنتروپی جسم گرم دراین تحول کم میشود. مقدار این کاهش تقریبا" برابراست با:

$$\Delta S_1 \cong -\frac{Q}{T_{1,m}}$$

دررابطه فوق $T_{1,m}$ میانگین T_1 و T_m و Q گرمائی است که ازجسم خارج شـــده است .

درمرحله بعد دمای منبع رابروی T_2 تنظیم کرده وجسم سرد بادمای T_2 راروی منبـــع قرارمیدهیم . سپس به آهستگی (بطور برگشت پذیر) دمای منبع رابالا میبریم تابــه T_m برسد . بدین ترتیب جسم سرد مقداری گرمامیگیرد . آنتروپی جسم دراین تحول زیاد میشود . مقدار افزایش آنتروپی تقریبا" برابراست با :

$$\Delta S_2 \cong +\frac{Q}{T_{2,m}}$$

دررابطه فوق $T_{2,m}$ میانگین T_2 و T_m و Q گرمائی است که جسم گرفته است.

اکنون دمای هردوجسم یکسان وسیستم ، که ازاین دوجسم تشکیل شده ، درحالـــت تعادل انتهائی خویش است ، تغییر آنتروپی سیستم عبارتست از :

$$S_f - S_i = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_{1,m}} + \frac{Q}{T_{2,m}}$$

ازآنجاکه $T_{1,m} > T_{2,m}$ داریم $S_f > S_i$. دراینجانیز ، همانند انبساط آزاد ، آنتروپی سیستم دراین تحول برگشت ناپذیرآدیاباتیك زیادشده است .

درهریك ازاین دومثال باید بدقت تحول (برگشت ناپذیر) واقعی را (انبساط آزاد ، هدایت گرما) ازتحول برگشت پذیری که صرفا" بمنظورمحاسبه تغییر آنتروپی بکاربردیم مشخص ومتمایز کنیم . هرتحول برگشت پذیری راکه نظیر تحول واقعی همان حالات تعادل ابتدائـــی و انتهائی سیستم رابهم مربوط کند میتوان بکاربرد زیراکه تغییرآنتروپی سیستم فقط به حالات ـ ابتدائی وانتهائی سیستم ، ونه به نوع تحولی که آنها رابهم مربوط میسازد چه برگشت پذیر وچه برگشت ناپذیر ، بستگی دارد .

۸-۱۲- آنتروپی وقانون دوم

اکنون برای بیان قانون دوم ترمودینامیك برپایه کمیت آنتروپی آماده ایم . ازآنجاکه ایـــن قانون نتیجه تعمیم یافته ئی ازمشاهدات تجربی است نمیتوانیم آن را اثبات کنیم اما میتوانیـــم نشان دهیم آنچه مینویسیم باتجربه تطبیق نموده ومعادل بابیان های دیگرقانون دوم است که

قبلا" بآنهااشاره شد . حال قانون دوم رابصورت زیربیان میکنیم .

هرتحول طبیعی که ازحالت تعادلی شروع وبه حالت تعادل دیگری خاتمه یابد همواره درجهتی است که باعث ازدیاد آنتروپی سیستم ومحیط میشود .

دو آزمایش قسمت ۷-۲۱ (انبساط آزاد وهدایت گرما) بابیان فوق سازگارند . درهردو تحول آنتروپی سیستم زیاد شد . توجه کنید که آنتروپی محیط درهر دومورد ثابت اند زیرا ، بخاطر انجام هردو آزمایش درمحفظه های آدیاباتیک ، هیچگونه تبادل گرمائی بامحیط صورت نگرفت . بنابراین ، بهمانگونه که بیان اخیر درمورد قانون دوم اقتضا میکند ، آنتروپی سیستم بعلاوه‌محیط درهریك ازاین دوتحول (طبیعی) افزایش یافت .

قانون دوم به صورتی که بیان شد فقط درمورد تحولات برگشت ناپذیر بکارمیرود زیرا فقط چنین تحولاتی هستند که دارای جهت یاخط سیر طبیعی میباشند . درواقع فهم چگونگی خط سیرطبیعی این تحولات موضوع اصلی قانون دوم است. (قسمت ۱-۲۱ راملاحظه کنید) . لکن تحولات برگشت پذیر درهردو جهت بخوبی انجام پذیر بوده وبرای این دسته ازتحولات آنتروپی سیستم ومحیط بلاتغییر میماند . بدین علت اگرگرمائی برابر dQ ازمحیط به سیستم منتقل شود درآنتروپی محیط کاهشی برابر $\frac{dQ}{T}$ ودرآنتروپی سیستم افزایشی درست بهمان اندازه $\frac{dQ}{T}$ حاصل میشود بطوریکه تغییرخالصی درآنتروپی مجموعه سیستم ومحیط پدید نمیآید . درواقع برگشت پذیری تحول بدان معنی است که بهنگام انتقال گرما اختلافی که دردمای سیستم ومحیط بوجود میآید برابر مقدار بینهایت کوچك dT است واین کاملا" برخلاف مساله هدایت گرما (برگشت ناپذیر) درقسمت قبل است که درآن اختلاف دمای دو جسم که درتماس بایکدیگر درمیآمدند زیاد بود .

تحولات آدیاباتیك دسته دیگری ازتحولات هستند (برگشت پذیر یابرگشت ناپذیر) . دراین گونه تحولات هیچگونه تبادل گرمائی بین سیستم ومحیط صورت نمیگیرد بطوریکه تنها آنتروپی سیستم ممکن است تغییرکند . ازبیان اخیردرمورد قانون دوم ومطالبی که درپاراگراف بالا درمورد تحولات برگشت پذیر گفته شد نتیجه میگیریم که :

(تحول آدیاباتیك برگشت پذیر) $S_f = S_i$

(تحول آدیاباتیك برگشت ناپذیر) $S_f > S_i$

و آنتروپی سیستم درحالات انتهائی وابتدائی است.

بیان اخیردرمورد قانون دوم بابیان کلوزیوس سازگار است (صفحات قبل وشکل ٦-٢١ را ملاحظه کنید) چرا که اگربیان کلوزیوس درست نباشد یعنی ماشین مبرد کامل وجود داشته‌باشد درآنصورت آنتروپی منبع سرد کاهشی برابر $\frac{Q}{T_2}$ وآنتروپی منبع گرم افزایشی برابر $\frac{Q}{T_1}$ پیدا میکند . آنتروپی سیستم تغییر نمیکند چون سیستم بعد ازطی یك سیکل بحالت ابتدائی بـــــر میگردد . بنابراین آنتروپی کل مجموعه سیستم ومحیط کاهش پیدا میکند زیرا $T_2 < T_1$ است . این نتیجه مغایر با بیان قانون دوم برپایه آنتروپی است. پس اگراین بیان رامعتبر بدانیم بایــد قبول کنیم که ماشین مبرد کامل وجود ندارد یعنی بیان کلوزیوس هم معتبر است .

بیان قانون دوم برپایه آنتروپی بابیان کلوین- پلانك هم سازگار است . زیرا اگر بنا به فرض کلوین - پلانك درست نباشد یعنی ماشین گرمائی کامل وجود داشته باشد که بتواند فقـــط بایك منبع (بادمای T) کارکند درآنصورت آنتروپی منبع باندازه $\frac{Q}{T}$ کم میشود . امادراینجا هم آنتروپی سیستم تغییرنمیکند زیراسیستم بعد ازطی یك سیکل به حالت اول برمیگردد . بدین ترتیب آنتروپی کل سیستم ومحیط کم میشود . این نیز بنوبه خود متناقض بابیان قانون دوم برپایه آنتروپی است واگراین بیان رامعتبر بدانیم باید قبول کنیم که ماشین گرمائی کامل هم وجود ندارد یعنی بیان کلوین پلانك هم معتبراست .

<u>مثال ٣</u>

یك کیلوگرم یخ دردمای صفر سانتیگراد ذوب شده وبه آب صفردرجه سانتیگراد تبدیـــل میشود . اگرتحول برگشت پذیر فرض شود تغییرآنتروپی سیستم رامحاسبه کنید . گرمای نهان ذوب یخ $\frac{cal}{gr}$ ٧٩/٦ است .

فرض برگشت پذیر بودن تحول فوق بدین معنی است که برای ذوب شدن یخ آن را روی یك منبع گرمائی قرارمیدهیم که دمای آن ازصفر سانتیگراد تنها مقدار بینهایت کوچکی زیادتر است .

(اگر دمای منبع را باندازه بینهایت کوچکی ازصفر سانتیگراد پائین تر بیاوریم ، یخ ذوب شده دوباره شروع به انجماد میکند) ازآنجائیکه تحول برگشت پذیراست میتوانیم رابطه ۸-۲۱ را برای محاسبه تغییرآنتروپی سیستم بکارببریم . دمای سیستم در K° ۲۷۳ ثابت میماند بنابراین :

$$S_{آب} - S_{یخ} = \int_{0}^{Q} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_{0}^{Q} dQ = \frac{Q}{T}$$

اما :

$$Q = 1\,kg \times 10^{3}\,\frac{gr}{kg} \times 79.6\,\frac{cal}{gr} = 7.96 \times 10^{4}\,cal$$

یا :

$$S_{آب} - S_{یخ} = \frac{7.96 \times 10^{4}\,cal}{273^{\circ}K} = 292\,\frac{cal}{K^{\circ}} = 1220\,\frac{Joule}{^{\circ}K}$$

دراین ذوب برگشت پذیرتغییرآنتروپی سیستم ومحیط ، همانند تمام تحولات برگشت پذیرصفر است . تغییرآنتروپی که دربالا حساب شد افزایش آنتروپی سیستم است . آنتروپی محیط کاهشی درست بهمان اندازه ($\frac{Joules}{^{\circ}K}$ ۱۲۲۰-) پیدا میکند که مربوط به گرمائی است که ازمنبع (محیط) دردمای K° ۲۷۳ بیرون رفته و یخ راذوب کرده است . عملا" پدیده ذوب تحولی است برگشت ناپذیر . مثلا" وقتی یک قطعه یخ را درلیوان آب میاندازیم . چنین تحولی فقط دریک جهت صورت میگیرد : یخ ذوب میشود . آنتروپی سیستم ومحیط درچنین تحولی ، چنانکه قانون دوم طلب میکند ، زیاد میشود . مثال هدایت گرما (برگشت ناپذیر) درقسمت قبل این موضوع راقابل فهم میکند .

مثال ۴

دریک انبساط ایزوترم وبرگشت پذیر حجم گاز ایده آلی از V_1 به V_2 میرسد . تغییر آنتروپی سیستم را حساب کنید .

ازقانون اول داریم :

$$dU = dQ - pdV$$

اما dU زیراکه برای یک گاز ایده آل U فقط به دما بستگی دارد وبنابفرض دما ثابت است . پس :

$$dQ = pdV$$

و:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{PdV}{T}$$

اما:

$$PV = \mu R T$$

$$dS = \mu R \frac{dV}{V}$$

درنتیجه:

$$S_f - S_i = \int_{V_i}^{V_f} \mu R \frac{dV}{V} = \mu R \ln \frac{V_f}{V_i} \qquad (۲۱-۱۰)$$

چون $V_f > V_i$ پس $S_f > S_i$ یعنی آنتروپی گاززیاد میشود.

برای انجام این تحول باید منبعی با دمای T دراختیارداشته باشیم که با سیستم درتماس بوده وگرمای لازم برای انبساط گاز راتامین کند. بنابراین آنتروپی منبع باندازه

$$\int \frac{dQ}{T} \left[= \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \right]$$

کم میشود. بطوریکه آنتروپی سیستم ومحیط دراین تحول تغییر نمیکند. دراینجا هم مانند مثال قبل ثابت بودن آنتروپی مشخصه تحول برگشت پذیراست.