ادامه حل:

$$(\tilde{V}_S)_t - \left(-\omega^2 \tilde{V}_S + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\, V(0,t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (2t-1)\sin(\omega x)\,dx$$

حال t را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم:

$$(\tilde{V}_S)_t + \omega^2 \tilde{V}_S = (2t-1)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(\omega x)\,dx}_{H(\omega)} = (2t-1)H(\omega)$$ ← طرف مرتبه اول

$$\tilde{V}_S(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\left[\int e^{\omega^2 t}(2t-1)H(\omega)\,dt + a(\omega)\right]$$

حل انتگرال نامعین است (بدون t برا است) الزاماً باید حل شود:

$(2t-1)H(\omega)$	$e^{\omega^2 t}$
$2H(\omega)$	$\frac{1}{\omega^2} e^{\omega^2 t}$
0	$\frac{1}{\omega^4} e^{\omega^2 t}$

$$\tilde{V}_S(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\left[\frac{(2t-1)H(\omega)}{\omega^2} e^{\omega^2 t} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4} e^{\omega^2 t} + a(\omega)\right]$$

$$\tilde{V}_S(\omega,t) = \frac{(2t-1)H(\omega)}{\omega^2} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4} + a(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

PAPCO ادامه حل ←

ادامه‌ی حل:

قبل از این که از رابطه‌ی * تبدیل معکوس بگیریم باید $a(w)$ را بیابیم:

در رابطه‌ی * $\xrightarrow{t=0}$ $\tilde{V}_s(w,0) = \frac{-H(w)}{w^2} - \frac{2H(w)}{w^4} + a(w)$ رابطه‌ی ①

$$V(x,0) = \begin{cases} 2x+1 & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فوریه‌ی سینوسی می‌گیریم}} \tilde{V}_s(w,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (2x+1)\sin wx\,dx = K(w)$$

رابطه‌ی ② $\rightarrow \tilde{V}_s(w,0) = K(w)$

① = ② $\rightarrow a(w) = K(w) + \frac{H(w)}{w^2} + \frac{2H(w)}{w^4}$

جاگذاری $a(w)$ در: $\rightarrow \tilde{V}_s(w,t) = \frac{(2t-1)H(w)}{w^2} - \frac{2H(w)}{w^4} + \left(K(w) + \frac{H(w)}{w^2} + \frac{2H(w)}{w^4}\right)e^{-w^2t}$

جواب معادله $\xrightarrow[\text{معکوس می‌گیریم}]{\text{فوریه‌ی سینوسی}}$ $V(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{V}_s(w,t)\sin(wx)\,dw$

* مسئله‌ی ۶-۶ صفحه‌ی ۲۱۶ کتاب: (خ.م):

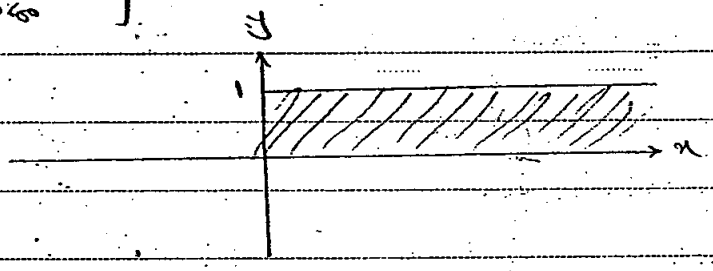
$$U_{xx}+U_{yy}=ye^{-x} \qquad 0<x<\infty \ , \ 0<y<1$$

شرایط:

$$\begin{cases} U(0,y)=1 \rightarrow \text{شرط مرزی} \\ U(x,0)=0 \\ U(x,1)=e^{-x} \\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x,y)=0 \end{cases}$$

شرایط اولیه فرض می‌کنیم

همگی مرزی



$\int_0^\infty 0\,dx=0$ مطلقاً انتگرال‌پذیر

$\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=-\cancelto{0}{e^{-\infty}}+e^0=1$ مطلقاً انتگرال‌پذیر

پس چون $F(x,t)$ ، $f(x)$ ، $g(x)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است، نیازی به همگن کردن شرایط مرزی نداریم:

$$F_s(U_{xx})+F_s(U_{yy})=F_s(ye^{-x})$$

چون شرط مرزی $U(0,y)$ است فوریه‌ی سینوسی می‌گیریم

$$=-\omega^2\tilde{U}_s+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\,\cancelto{1}{U(0,y)}+(\tilde{U}_s)_{yy}=\overbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty ye^{-x}\sin(\omega x)\,dx}^{yH(\omega)}$$

$$=(\tilde{U}_s)_{yy}-\omega^2\tilde{U}_s=yH(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega$$

ادامه‌ی حل ←

ادامهٔ حل: $(\tilde{U}_s)_{yy} - \omega^2 \tilde{U}_s = y H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega$

معادلهٔ کمکی $\Rightarrow \lambda^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\omega$ دو ریشهٔ قرینه

$$\boxed{\tilde{U}_s(\omega, y) = a(\omega)\cosh(\omega y) + b(\omega)\sinh(\omega y) - \frac{y H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2}}$$ رابطهٔ (*)

جواب خصوصی

در رابطهٔ * $\xrightarrow{y=0} \tilde{U}_s(\omega, 0) = a(\omega) + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}$ رابطهٔ ①

رابطهٔ ②:

در رابطهٔ * $\xrightarrow{y=1} \boxed{\tilde{U}_s(\omega, 1) = a(\omega)\cosh(\omega) + b(\omega)\sinh(\omega) - \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2}}$

$U(x,0) = 0 \xrightarrow{\text{فوریهٔ سینوسی می‌گیریم}} \tilde{U}_s(\omega, 0) = 0$ رابطهٔ ③

$U(x,1) = e^{-x} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{فوریهٔ سینوسی}} \tilde{U}_s(\omega, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin(\omega x)\, dx$

$\longrightarrow \tilde{U}_s(\omega, 1) = H(\omega)$ رابطهٔ ④

ادامهٔ حل ←

ادامهٔ حل:

$$① = ③ \Rightarrow a(\omega) = -\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}$$

$$② = ④ \Rightarrow b(\omega) = \frac{H(\omega) + \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}\cosh(\omega)}{\sinh(\omega)}$$

حال $a(\omega)$ و $b(\omega)$ را در رابطهٔ * جایگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega, y) = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}\cosh(\omega y) + \frac{H(\omega) + \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega}\cosh(\omega)}{\sinh(\omega)}\sinh(\omega y) - \frac{yH(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2}$$

فوریهٔ سینوسی معکوس می‌گیریم $\Rightarrow$ $$U(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{U}_s(\omega, y)\sin(\omega x)\, d\omega$$

Subject:
Year. ۸۵ Month: ۲ Date. ۱۹

(۱)

۱۴۸

اعداد مختلط:

مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ که در آن $i=\sqrt{-1}$

نتیجه: $i^2=-1$

تعریف:

فرض $z=x+iy$ که x را قسمت حقیقی z می‌نامیم و با نماد $Re(z)$ نشان می‌دهیم و y را قسمت موهومی z می‌نامیم و با نماد $Im(z)$ نشان می‌دهیم.

مزدوج z را با نماد $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم و $\bar{z}=x-iy$

قدرمطلق z را با نماد $|z|$ نمایش می‌دهیم و $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

مثال:

$z=2-3i \rightarrow \begin{cases} Re(z)=2 \\ Im(z)=-3 \\ \bar{z}=2+3i \\ |z|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13} \end{cases}$

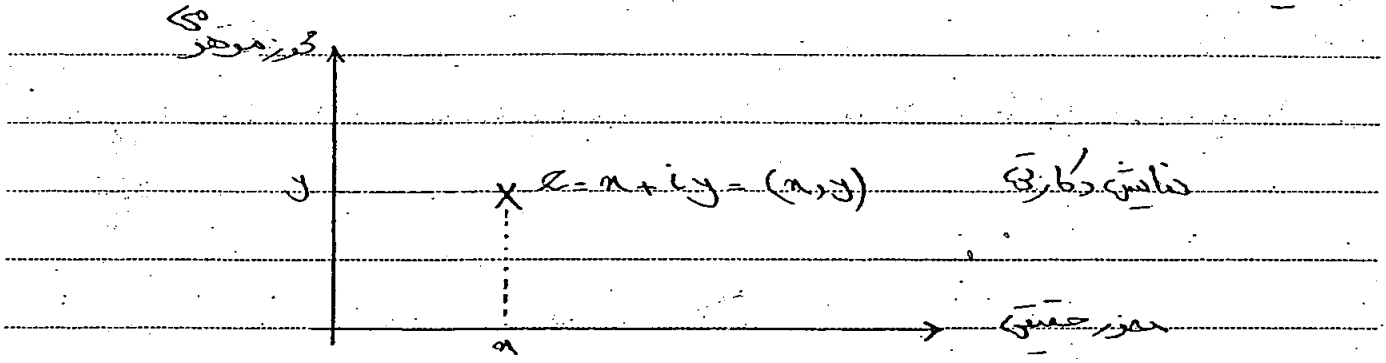
$Re(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 = Re\, z_1\, Re\, z_2 - Im\, z_1\, Im\, z_2$

$Im(z_1 z_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1 = Re\, z_1\, Im\, z_2 + Re\, z_2\, Im\, z_1$

$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\qquad$ $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

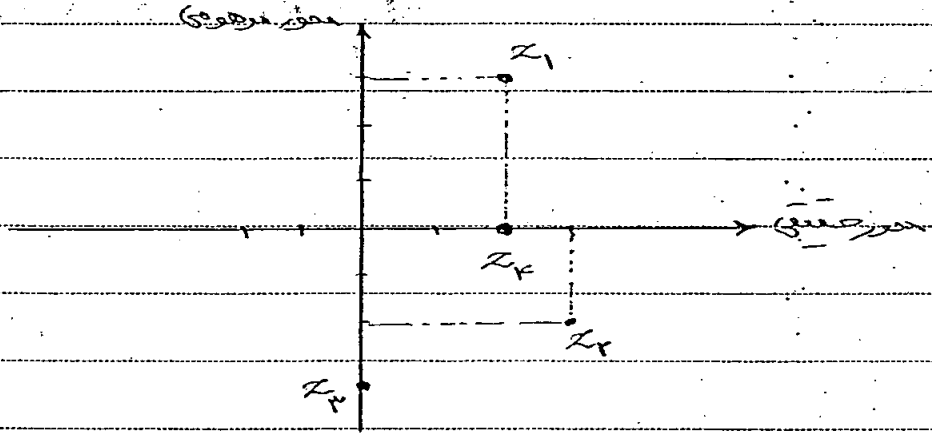
$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

«نمایش اعداد مختلط»



مثال :

در صفحهٔ مختلط نقاط $z_1 = 2+3i$ ، $z_2 = 3-2i$ ، $z_3 = -3i$ ، $z_4 = 2$ را مشخص کنید.



* z اصلاً وجود ندارد.

(۴)

اعمال روی اعداد مختلط

در عمل جمع یا تفریق قسمت‌های حقیقی را با هم و قسمت‌های موهومی را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم.

در عمل ضرب دولغه به دولغه در هم ضرب می‌کنیم.

در عمل تقسیم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

مثال: $z_1 = ۳-۲i$ ، $z_2 = ۴+۳i$

$z_1 + z_2 = ۷+i$

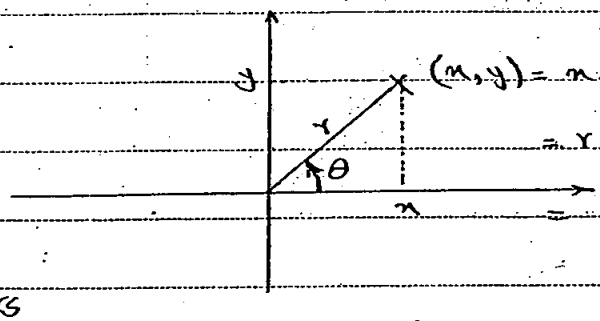
$z_2 - z_1 = ۱+۵i$

$z_1 z_2 = (۳-۲i)(۴+۳i) = ۱۲+۹i-۸i-۶i^{۲} = ۱۸+i$ ($i^{۲} = -۱$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{۳-۲i}{۴+۳i} \times \frac{۴-۳i}{۴-۳i} = \frac{۱۲-۹i-۸i+۶i^{۲}}{۱۶-۹i^{۲}} = \frac{۶-۱۷i}{۲۵}$$

($i^{۲} = -۱$ در صورت و مخرج)

« نمایش قطبی اعداد مختلط »



* r همواره مثبت و θ بر حسب درجه عقربه‌ی ساعت یا مثبت و در خلاف جهت عقربه‌ی ساعت منفی است.

* تعریف اویلر : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

تذکر ۱ :

در نمایش قطبی $re^{i\theta}$ ، r را قدر مطلق z می‌نامیم زیرا : $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

و θ را آرگومان z می‌نامیم و با نماد $\arg(z)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲ :

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\rightarrow e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$\rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ← مزدوج یکدیگرند. ← پس می‌بینیم $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$

ادامه ←

تذکر ۳:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|l|} \hline \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \hline \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \hline \end{array}$$

تذکر ۴:

در روابط بالا θ را به $i\theta$ تبدیل کنیم داریم:

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{i^2\theta} + e^{-i^2\theta}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} \Rightarrow \cos(i\theta) = \cosh(\theta)$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i^2\theta} - e^{-i^2\theta}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \frac{-1}{i}\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) =$$

$$= \frac{-i}{i^2}\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) \Rightarrow \sin(i\theta) = i\sinh(\theta)$$

($i^2 = -1$)

تذکر ۵:

رابطه‌ی بین مختصات دکارتی و قطبی به صورت زیر است:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \text{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \pi + \text{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right), & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, y < 0 \end{cases}$$

مثال:

عدد مختلط $z = -1 + i$ را قطبی کنید.

$$r = \sqrt{2}$$

$$x < 0 \Rightarrow \theta = \pi + \text{Arc}\tan\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \text{Arctan}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

** تابع فرد است و منفی را بیرون می‌دهد.

$$z = 2e^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

مثال: عدد مختلط $z=3-i\sqrt{3}$ را قطبی کنید.

$r=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

$x>0 \longrightarrow \theta=\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$

$z=re^{i\theta}=\sqrt{12}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

مثال:
عدد مختلط $z=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را دکارتی کنید.

* برای تبدیل مختلط به دکارتی از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم:

$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

«ریشه‌یابی در اعداد مختلط»:

مثال: معادلهٔ $z^2+z+1=0$ را حل کنید.

چون درجهٔ دوم است از Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3 < 0$$

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\overset{i}{\cancel{\sqrt{-1}}}\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

«معادله‌ی دوجمله‌ای»:

معادله‌ای به فرم $w^n = z$ را معادلهٔ دوجمله‌ای می‌نامیم که در آن z عدد مختلط معلوم، n عدد طبیعی معلوم و w عدد مختلط مجهول می‌باشد که با حل معادله دوجمله‌ای محاسبه می‌گردد.

در حقیقت با حل معادلهٔ دوجمله‌ای توانسته‌ایم ریشهٔ n ام z را بدست آوریم.

برای این منظور z را قطبی می‌کنیم. فرض کنید $z=re^{i\theta}$ باشد در این صورت w به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$w = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$$

مثال: معادله $w^3 = i$ را در اعداد مختلط حل کنید.

$$x=0,\ y=1 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$w = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2K\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2K\pi}{3}\right)},\quad K=0,1,2 \quad (n-1)$$

$$K=0 \rightarrow w = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K=1 \rightarrow w = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K=2 \rightarrow w = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

مثال: معادله $w^4 + 2w^2 + 2 = 0$ را حل کنید.

$$\{w^2 = z\} \Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\rightarrow w^2 = z = -1 \pm i \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$r = \sqrt{2}$:

$w^2 = z = -1 + i$

$x < 0 \rightarrow \theta = \pi + \operatorname{Arctan}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$$w = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}, \quad k = 0, 1 \quad n = 1$$

$k = 0 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$k = 1 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{8}}$

$w^2 = -1 - i$ معادله دوجمله‌ای

$r = \sqrt{2}$

$x < 0 \rightarrow \theta = \pi + \operatorname{Arctan}(1) = \frac{5\pi}{4}$

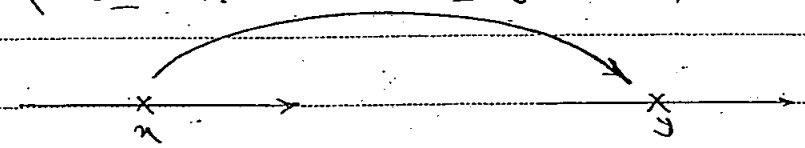
$$w = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{8} + k\pi\right)}, \quad k = 0, 1$$

$k = 0 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{8}}$

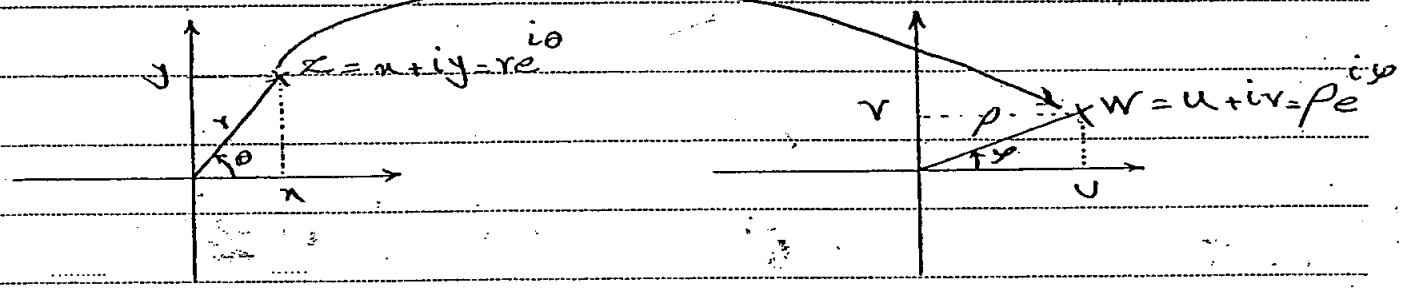
$k = 1 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{8}}$

«توابع مختلط»:

$y=f(x)$ تابع حقیقی (تابع f، x را به y تصویر می‌کرد)



$w=f(z)$ تابع مختلط

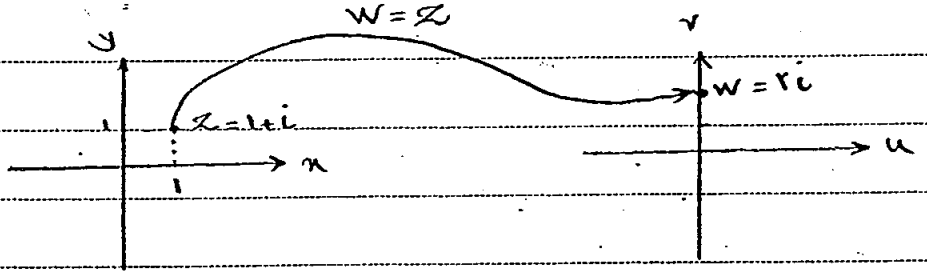


* تابع $w=f(z)$ نقطهٔ z را به w تصویر می‌نماید *

مثال و سؤال امتحانی!

تصویر نقطه $z=1+i$ را تحت تابع $w=z^2$ بیابید.

$$w=z^2=(1+i)^2=1+\cancelto{-1}{i^2}+2i=2i$$



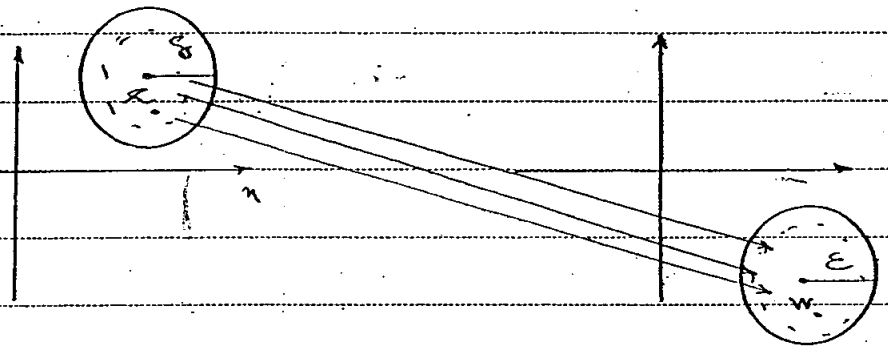
(۱۳)

«حد تابع مختلط»:

گوییم $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ اگر و فقط اگر:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

داخل دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع δ ... داخل دایره‌ای به مرکز w_0 و شعاع ε



* در اعداد مختلط، قدر مطلق یعنی دایره ولی در اعداد حقیقی قدر مطلق یعنی فاصله

قضیه:

فرض کنیم $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ در اینصورت $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

مثال:

مقدار $\lim_{z \to i} z^2$ را بیابید:

* اولین کار این است که z^2 را برحسب x و y بنویسیم:

$$z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$$

$$\lim_{z \to i} z^2 = \lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2-y^2) + i \lim_{(x,y)\to(0,1)} (2xy) = (-1) + i(0) = -1$$

$z \to i$

$z = 0 + (1)i$

$x \quad y$

مثال: $\lim_{z\to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2}$ را بیابید.

$$z^2=(x+iy)^2=\overbrace{(x^2-y^2)}^{Re}+i(2xy)$$

$$\frac{Re(z^2)}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

چون مبهم در دو بعدی است مسیر می‌دهیم

$$\lim_{z\to 0}\frac{Re(z^2)}{|z|^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\xrightarrow{y=mx}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$ ✗ حد موجود نیست چون وابسته به m است

«پیوستگی»:

تابع $w=f(z)$ را در z_0 پیوسته گوییم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱- $f(z_0)$ موجود باشد.

۲- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجود باشد.

۳- $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

مثال:

تابع $w=z^2$ در $z_0=i$ پیوسته است زیرا:

$\lim_{z\to i} z^2=-1$ در مثال قبلی ثابت شد

$f(i)=i^2=-1$

مثال: تابع $w=\frac{Re(z^2)}{|z|^2}$ در $z=0$ پیوسته نیست زیرا:

$\lim_{z\to 0}\frac{Re(z)^2}{|z|^2}$ * طبق مسیر $y=mx$ ⇐ موجود نمی‌باشد.

«مشتق توابع مختلط»:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

قضیه کوشی ـ ریمان (کاربرد: مشتق‌پذیری از توابع مختلط):

فرض کنیم $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تابعی از نقاط در صفحه مختلط در دستگاه کوشی ـ ریمان به فرم:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

صدق کند، f در این نقاط مشتق‌پذیر است و چنانچه صدق کند f به شرطی مشتق‌پذیر است که توابع u، v، u_x، v_x، u_y، v_y در این نقاط پیوسته باشند، در این صورت داریم:

$$f'(z) = u_x + i\,v_x$$

Subject:

Year ٨٥ Month. ٢ Date. ٢٩ ( )

PqPCO

مثال: $w = z^2$

اولین کار تبدیل w به x و y است:

$$\rightarrow w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_x = 2x : \text{پیوسته (چون چندجمله‌ای)} \\ v_y = 2x : \text{پیوسته (چون چندجمله‌ای)} \end{cases} \rightarrow u_x = v_y$$

$$\begin{cases} u_y = -2y : \text{پیوسته} \\ v_x = 2y : \text{پیوسته} \end{cases} \rightarrow u_y = -v_x$$

$w = z^2$ در تمام نقاط صفحهٔ مختلط مشتق‌پذیر است (تابع تام):

ویژگی این توابع این است که مشتق آن‌ها مانند توابع تک متغیره است.

$$f'(z) = u_x + i v_x = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

مثال: $w = \bar{z}$ ← قرینهٔ z است

* ابتدا حتماً w را برحسب x و y نوشت:

$$\rightarrow w = \bar{z} = \underbrace{x}_{u} + i\underbrace{(-y)}_{v}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{cases} \Rightarrow u_x \neq v_y$$

$w = \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای از صفحهٔ مختلط مشتق ندارد.

مثال: $w = (Re(z))^2 + i\,(Im(z))^2$

* ابتدا حتماً برحسب x و y، w را درمی‌آوریم: $w = \underbrace{x^2}_{u} + i\underbrace{y^2}_{v}$

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2y \end{cases} \Rightarrow$$ وقتی $u_x = v_y$ که $y = x$ باشد

$$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x$$

$\Rightarrow$ تابع فقط روی نقاط $y = x$ مشتق دارد.

$$f'(z) = u_x + i v_x = 2x = 2Re(z) \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{cases} f'(\overset{x}{-1} + \overset{y}{2}i) = \text{موجود نیست} \\ f'(2 + 2i) = 4 \\ f'(-1 - i) = -2 \end{cases}$$

چون y با x مساوی نیست

$-1 = -1$

مثال: $w = |z|^2$

$$w = |z|^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u} \quad , \quad v = 0$$

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ و } u_x = v_y \text{ وقتی}$$

$\Rightarrow$ $w = |z|^2$ فقط در مبدا مشتق دارد.

$$\begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ باشد و } u_y = -v_x \text{ وقتی}$$

$$f'(z) = u_x + i v_x = 2x \Rightarrow f'(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \text{موجود نیست} & z \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $w = e^z$ * طبق اویلر

$$\rightarrow w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v}$$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y$$

$$\begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x$$

$\Rightarrow$ $w = e^z$ تابع تام است یعنی در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{e^{iy}} = e^x e^{iy}$$

$$= e^{x+iy}$$

$$= e^z$$

مثال: $w = \cos z$

اولین کار در حل این مسائل تبدیل z به $x+iy$ است:

بسط می‌دهیم

$$\rightarrow w = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$

$$= \cos x \cosh y - i \underbrace{\sin x \sinh y}_{v = -\sin x \sinh y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} u_x = -\sin x \cosh y \\ v_y = -\sin x \cosh y \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \\ \begin{cases} u_y = \cos x \sinh y \\ v_x = -\cos x \sinh y \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع تام}$$

$$f'(z) = u_x + i v_x = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$= -\left(\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)\right) = -\sin(x+iy) = -\sin z$$

قضیه‌ی کوشی ـ ریمان در فرم قطبی:

فرض کنیم: $w = f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ در این صورت دستگاه معادلات کوشی ـ ریمان به فرم زیر است:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

و مشتق از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$f'(z) = (u_r + i\,v_r)\,e^{-i\theta}$$

* در این حالت به جای z، $re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم.

مثال: اگر $z = x+iy$ قرار دهیم چه می‌شود. $w = z^9 \Rightarrow$

$$w = (re^{i\theta})^9 = r^9 e^{i9\theta} = \underbrace{r^9\cos(9\theta)}_{u} + i\underbrace{r^9\sin(9\theta)}_{v}$$

(اویلر)

$$\begin{cases} u_r = 9r^8\cos(9\theta) \\ v_\theta = 9r^9\cos 9\theta \end{cases} \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

تابع تام است. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} v_r = 9r^8\sin(9\theta) \\ u_\theta = -9r^9\sin(9\theta) \end{cases} \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

$$f'(z) = (u_r + i\,v_r)e^{-i\theta} = (9r^8\cos 9\theta + i\,9r^8\sin(9\theta))\,e^{-i\theta} = 9r^8(\cos 9\theta + i\sin 9\theta)e^{-i\theta}$$

(فاکتور $9r^8$)

$$= 9r^8 e^{i9\theta - i\theta} = 9(re^{i\theta})^8 = 9z^8$$

PAPCO

تابع نیست

تابع است.

تابع $w = \mathrm{Ln}\, z$: (سؤال امتحان: فرق بین $\ln z$ و $\mathrm{Ln}\, z$ چیست؟)

منظور «ال-ان» بزرگ است و تابع است

«ال-ان» کوچک

$$w = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln\left(re^{i(\theta+2\pi)}\right) = \ln r + \ln\left(e^{i(\theta+2\pi)}\right)$$

روی همان نقطه $i\theta$ می‌افتد.

$$= \underbrace{\ln r}_{u} + i\underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{v} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

* به ازای هر k، یک w خواهیم داشت

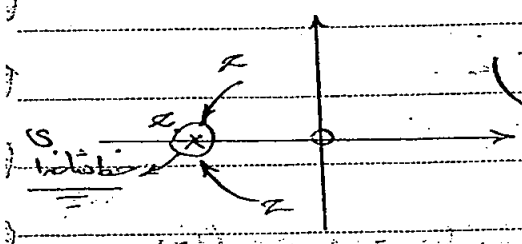
$w = \ln z$ تابع نیست زیرا برای هر z، بی‌نهایت مقدار برای w بدست می‌آید

چنانچه θ را در محدوده $-\pi < \theta < \pi$ اختیار کنیم، آنگاه یک تابع حاصل می‌شود

که آن را با $w = \mathrm{Ln}\, z$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$w = \underbrace{\mathrm{Ln}\, z}_{\text{بزرگ}} = \underbrace{\ln(r + i\theta)}_{\text{کوچک}}, \quad -\pi < \theta < \pi$$ * مهم

* تذکر مهم: تعریف خط شاخه‌ای: (سؤال امتحان)



$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\pi$$

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Ln}\, z = \ln r - i\pi$$

$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \mathrm{Ln}\, z =$ موجود نیست $\Rightarrow$ $\mathrm{Ln}\, z$ در z_0 پیوسته نیست

$f'(z_0)$ وجود ندارد.

اگر مشتق پذیری Ln بزرگ خواسته شد باید مبحث خط شاخه‌ای را انجام داد.

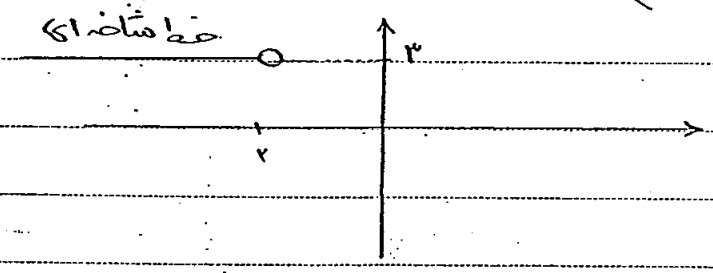
طریقه‌ی محاسبهٔ خط شاخه‌ای:

$$W = \ln z = \ln(x + iy) \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

* اگر مشتق پذیری Ln بزرگ خواسته شد، $x \leq 0$ قرار می‌دهیم *

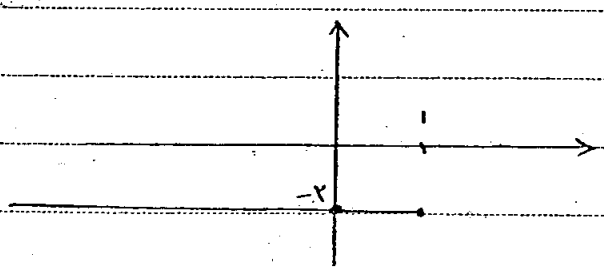
مثال: خط شاخه‌ای $w = \ln(z + 2 - 3i)$ را بیابید.

$$w = \ln(x + iy + 2 - 3i) = \ln\Big(\underbrace{(x+2)}_{<0} + i\,\underbrace{(y-3)}_{=0}\Big) \Rightarrow \begin{cases} x+2<0 \Rightarrow x<-2 \\ y-3=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$



مثال:
در مشتق پذیری $w = \ln(z - 1 + 2i)$ در صفحهٔ مختلط بحث کنید.

$$w = \ln(x + iy - 1 + 2i) = \ln\Big(\overbrace{(x-1)}^{\leq 0} + i\,\overbrace{(y+2)}^{=0}\Big) \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y+2=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$



تذکر مهم:
در اعداد حقیقی صفر و اعداد منفی لگاریتم ندارند ولی در اعداد مختلط
فقط صفر لگاریتم ندارد و اعداد منفی لگاریتم دارند.

مثال: $w = \ln(-2) = \ln(2e^{i\pi}) = \ln(2) + \ln(e^{i\pi}) = \ln(2) + i\pi$ (تبدیل کارتزین به قطبی)

تعریف: تابع تحلیلی:

تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی گوییم هرگاه:

به مرکز z_0 بتوان دایره‌ای زد به طوری که f در تمام نقاط داخل آن دایره مشتق‌پذیر باشد.

مثال:
کلیهٔ «توابع تام» در تمام نقاط صفحهٔ مختلط تحلیلی هستند.

مثال:
$w = \bar{z}$ در هیچ نقطه مشتق ندارد (طبق صفحه ۱۲۶ جزوه) بنابراین هیچ جا تحلیلی نیست

مثال:
$w = |z|^2$ در $z=0$ مشتق‌پذیر است ولی هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال:
$w = (Re(z))^2 + i(Im(z))^2$ در نقاط $y=x$ مشتق‌پذیر است ولی هیچ جا تحلیلی نیست

مثال:
$w = \ln z$ برای $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ مشتق ندارد بنابراین در این نقاط تحلیلی نیست و در نتیجه نقاط تحلیلی است

مثال: (سؤال چندین دوره امتحانی):

در کلیه بردن تابع $w = |x+y| + i|y-x|$ در صفحه خطا بحث کنید.

* اولین کار در حل مسائل قدر مطلقی، از بین بردن قدر مطلق است:

① : $x+y>0$, $y-x>0$:

$$w = \underbrace{(x+y)}_{u} + i\underbrace{(y-x)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y = 1 \\ u_y = -v_x = 1 \end{cases}$$

تابع در تمام نقاط ناحیه ① مشتق دارد.

② : $x+y>0$, $y-x<0$:

$$w = \underbrace{(x+y)}_{u} + i\underbrace{(x-y)}_{v=-(y-x)} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \neq v_y = -1 \\ \text{در هیچ نقطه‌ای ناحیه ② مشتق ندارد.} \end{cases}$$

③ : $x+y<0$, $y-x>0$:

$$w = \underbrace{(-x-y)}_{u} + i\underbrace{(y-x)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = -1 \neq v_y = 1 \\ \text{در هیچ نقطه‌ای ناحیه ③ مشتق ندارد.} \end{cases}$$

④ : $x+y<0$, $y-x<0$:

$$w = \underbrace{(-x-y)}_{u} + i\underbrace{(x-y)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y = -1 \\ u_y = -v_x = -1 \end{cases}$$

در تمام نقاط ناحیه ④ مشتق دارد.

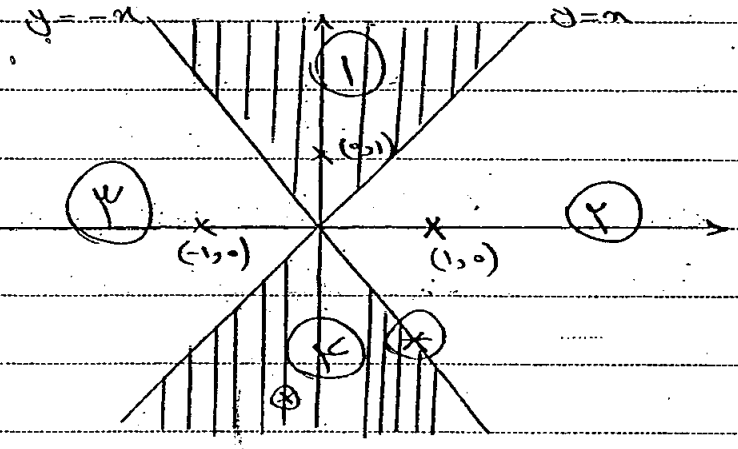
PAPCO

ادامه دارد ←

ادامهٔ حل:

برای این که در تحلیلی بودن بحث کنیم باید ابتدا نقاطی که مشتق دارند را هاشور زده

و سپس باید دید در چه نقاطی می‌توان دایره را زد:



تابع در نقاط ناحیهٔ ۱ و ۴ تحلیلی و در نقاط ۲ و ۳ و نقاط روی $y=x$ و $y=-x$ (نواحی مرزی) تحلیلی نمی‌باشد.

تذکر مهم:

$$\begin{cases} w = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(x+iy) \\ \text{نقاط غیرتحلیلی} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

توابع همساز:

تابع $u(x,y)$ را همساز می‌نامیم هرگاه در معادله لاپلاس صدق کند یعنی:

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

مثال:

همسازبودن یا نبودن $u=x^2-y^2$ را بررسی کنید.

$$\begin{cases} u_{xx}=2 \\ u_{yy}=-2 \end{cases} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$ همساز است

قضیه: (ویژگی مهم توابع تحلیلی):

فرض کنیم: $w=f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد در این صورت u و v توابعی همساز هستند (هردو در معادله لاپلاس صدق می‌کنند) یعنی $u_{xx}+u_{yy}=0$ ، $v_{xx}+v_{yy}=0$ در این صورت u و v را مزدوج همساز یکدیگر می‌نامیم و با داشتن یکی از آن‌ها می‌توان با استفاده از معادلات کوشی - ریمان مزدوج همساز آن را بدست آورد.

مثال:

مزدوج همساز $u = x^2 - y^2$ را بیابید و تابع تحلیلی $w = f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید.

جزء مثال قبل تابع $u = x^2 - y^2$ همساز است و برای یافتن مزدوج همساز آن می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = 2x \xrightarrow{\int dy} 2xy + c(x) \\ v_x = 2y \xrightarrow{\int dx} 2xy + c(y) \end{cases}$$

با انتخاب $c = 0$ قرارداد می‌شود

حال حالات مشابه را یکبار و حالات غیر مشابه را یکبار می‌نویسیم:

$\rightarrow$ $v = 2xy$ مزدوج همساز

$$w = f(z) = u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) = z^2$$

مثال:

a را چنان بیابید که $u = e^{ax}\sin(2y)$ همساز شود. v مزدوج همساز آن را بیابید و تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید.

برای این که تابع همساز باشد باید در معادلهٔ لاپلاس صدق کند:

$$u_{xx} = a^2 e^{ax}\sin(2y)$$

$$u_{yy} = -4e^{ax}\sin(2y)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow (a^2-4)e^{ax}\sin(2y) \rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

برای یافتن مزدوج همساز باید تابع حتماً همساز باشد یعنی اول باید a را جاگذاری کرده و سپس مزدوج همساز را یافت:

$$a = 2 \Rightarrow u = e^{2x}\sin(2y)$$ تابع همساز

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_y = 2e^{2x}\sin(2y) \xrightarrow{\int dy} -e^{2x}\cos(2y) \\ v_x = -2e^{2x}\cos(2y) \xrightarrow{\int dx} -e^{2x}\cos 2y \end{cases} \longrightarrow$$

در نتیجه:

$$\longrightarrow v = -e^{2x}\cos(2y)$$ مزدوج همساز

$$f(z) = u + iv = e^{2x}\sin(2y) - ie^{2x}\cos(2y) =$$

$$= -ie^{2x}\left(\cos(2y) \overset{+i}{-\frac{1}{i}}\sin(2y)\right) \qquad -\frac{1}{i} \times \overset{1}{\frac{i}{i}} = \frac{-i}{i^2} = +i$$

$$= -ie^{2x}e^{i2y} = -ie^{2(x+iy)} = -ie^{2z}$$

برای $a = -2$ خودتان بررسی کنید.

PAPCO

انتگرال گیری از توابع مختلط روی منحنی

تابع $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ روی منحنی c مفروض است. فرض کنیم c دارای نمایش پارامتری به صورت زیر باشد:

$$c: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

انتگرال f روی c را با نماد $\int_c f(z)\,dz$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c f(x+iy)(dx+i\,dy) \xrightarrow{\text{با استفاده از پارامتر}} \int_a^b f(x(t)+i\,y(t))\,(x'(t)+i\,y'(t))\,dt$$

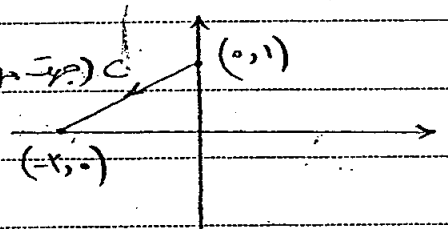
مثال در صفحه بعد

مثال: شماره ۱

مطلوب است محاسبه $\int_C z^2\,dz$ که در آن C قسمتی از پاره‌خط $y=\frac{1}{2}x+1$ است که از نقطه (۱,۰) و به نقطه (-۲,۰) ختم می‌شود.

تذکر مهم:

برای پارامتری کردن خط از فرمول $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=t$ که در آن (x_0,y_0) نقطه شروع و (x_1,y_1) نقطه پایان می‌باشد. در این پارامتری همواره $0\le t\le 1$



* اولین گام پارامتری کردن C است:

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-1}{0-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=1-t \end{cases} \quad 0\le t\le 1$$

در $t=1$ نقطه پایان و در $t=0$ نقطه شروع داریم.

$$\int_C z^2\,dz=\int_C (x+iy)^2(dx+i\,dy)$$

$$=\int_0^1 (-2t+i(1-t))^2(-2-i)\,dt$$

$$=(-2-i)\int_0^1 \underbrace{(4t^2-(1-t)^2-4t(1-t)i)}_{(3t^2+2t-1)+i(-4t+4t^2)}\,dt$$

$$=(-2-i)\left[(t^3+t^2-t)+i\left(-2t^2+\frac{4}{3}t^3\right)\right]_0^1=(-2-i)\left(1-\frac{2}{3}i\right)=$$

$$=-2+\frac{4}{3}i-i-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}i$$

PAPCO

مثال: شماره ۲

مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_C z^2 dz$ که در آن C دایره $x^2+y^2=4$ می‌باشد.

روش دوم:

چنانچه منحنی C دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد، برای پارامتری کردن آن بهتر است از فرمول $z=ae^{it}$ استفاده کنیم و چنانچه مرکز دایره z_0 باشد آن‌گاه: $z-z_0=ae^{it}$

حل:

$z=2e^{it} \rightarrow dz=2ie^{it}dt$

$$\oint_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} (2e^{it})^2 (2ie^{it}dt)$$

$$\int e^{3it} = \frac{1}{3i} e^{3it}$$

$$= 8i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{8}{3} \left[e^{i3t} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{8}{3} \left[e^{i(2\pi)} - 1 \right] = 0$$

$e^{i(2\pi)}=1$ طبق اویلر

مثال:

مطلوب است محاسبهٔ $\oint_C \bar{z}\,dz$ که در آن C دایرهٔ $x^2+y^2=4$ است.

$$\oint_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (\overline{2e^{it}})(2ie^{it}\,dt)$$

* تذکر مهم:

$$(\overline{e^{it}}) = e^{-it}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\, 2ie^{it}\,dt = 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i$$

قضیه‌ی کوشی ـ گورسا:

فرض کنیم $w=f(z)$ در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد و c منحنی بسته واقع در D باشد در این صورت:

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

EX: $\oint_{|z|=2} e^{z^2}\,dz = 0$

دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ

EX: $\oint_{|z-2i|=3} \frac{e^z}{\text{تحلیلی}} \cdot \frac{\cos z}{\text{تحلیلی}}\,dz = 0$ (تحلیلی)

دایره‌ای به مرکز $2i$ و شعاع ۳

نتیجه: قضیه‌ی کوشی ـ گورسا: (برای منحنی‌های باز است)

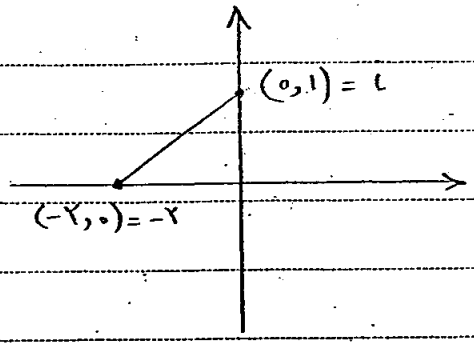
فرض کنیم $f(z)$ در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد و c منحنی واقع در D باشد که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل می‌کند، $F(z)$ تابع اولیه‌ی $f(z)$ باشد در این صورت:

$$\int_c f(z)\,dz = F(z)\Big|_A^B = F(B) - F(A)$$

در این صورت محاسبه‌ی انتگرال مستقل از مسیر انتگرال گیری می‌شود.

PaPCO

در مثال شمارهٔ ①:



دیگه لازم نیست به صورت پارامتری بنویسیم و چون z^2 تابعی تحلیلی است و مسیر منحنی باز است

با استفاده از نتیجه کوشی - گورسا خواهیم داشت:

$$\int_c z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_i^{-2} = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(i)^3}{3} = \frac{-8}{3} + \frac{i}{3}$$

* تذکر مهم:

توابع تحلیلی نیازی به پارامتری کردن ندارند اگر منحنی بسته باشد انتگرالشان صفر است و در منحنی باز انتگرالشان از نتیجهٔ قضیهٔ کوشی - گورسا استفاده می‌کنیم.

Subject:

Year ٨٥ Month ٣ Date ٢ ( )

قضیه تیلور (بسط توابع در نقاط تحلیلی):

فرض کنیم f و تمام مشتقات آن در نقاط داخل دایره‌ای به مرکز z_0 موجود باشد.

در این صورت:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$$

بسط تیلور حول نقطه $z_0 = 0$ را بسط مک لورن می‌نامیم:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z) + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \cdots$$

مثال: بسط مک لورن $f(x)=\sin x$ را بیابید.

یعنی $x=0$ در بسط تیلور

$f(x)=\sin x \rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x \rightarrow f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(x)=\cos x \rightarrow f^{(5)}(0)=1$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

بسط مک لورن $\sin x$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

« قضیه لوران » (بسط توابع در نقاط غیرتحلیلی)

فرض کنیم $f(z)$ در نقطه z_0 غیرتحلیلی باشد و دو دایره C_1 و C_2 به مرکز z_0 موجود باشند به طوری که $f(z)$ در نقاط داخل آن دایره تحلیلی باشد. در این صورت برای نقاط بین دو دایره داریم:

بسط لوران:

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{قسمت اصلی بسط لوران}} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

که در آن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

* همواره لوران را به کمک ماکلورن و تیلور حالبه می‌کنیم.

مثال: (مثال شمارهٔ ۱)

بسط لوران $f(z)=\dfrac{\sin(2z)}{z^2}$ را بیابید

تابع فوق فقط در نقطهٔ ۰ غیرتحلیلی است و در بسط لوران نمی‌گویند بسط را در چه نقطه‌ای بیابیم زیرا باید بسط فوق را فقط در نقاط غیرتحلیلی بنویسیم

حل):

چون نقطهٔ غیرتحلیلی $z=0$ است لذا بسط لوران از روی بسط مک‌لورن بدست می‌آید بدین شکل که ابتدا مک‌لورن $\sin z$ را می‌نویسیم سپس به جای z مقدار $2z$ قرار می‌دهیم و بر z^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

$$\rightarrow \sin(2z) = 2z - \frac{8z^3}{6} + \frac{32}{120}z^5 - \dots$$

$$\xrightarrow{\div z^2} \frac{\sin(2z)}{z^2} = \overset{c_{-1}}{\frac{2}{z}} - \overset{c_1}{\frac{8}{6}}z + \overset{c_3}{\frac{32}{120}}z^3 - \dots$$ بسط لوران

مهم‌ترین چیز در بسط لوران، ضرائب هستند.

مثال: بسط لوران $f(z)=z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ را بیابید (شماره ۲)

چون نقطه غیر تحلیلی $z=0$ است ابتدا بسط مک لورن $\sin z$ را بدست می‌آوریم

بجای z مقدار $\frac{1}{z}$ قرار می‌دهیم در z^2 ضرب می‌کنیم:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \cdots$$

$$\rightarrow f(z) = z + \frac{\overset{\rightarrow c_{-1}}{-\frac{1}{6}}}{z} + \frac{\overset{\rightarrow c_{-3}}{\frac{1}{120}}}{z^3} - \cdots$$ بسط لوران

مثال شمارهٔ ۳ :

بسط لوران $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$ را در نقطهٔ $z=1$ بیابید.

مک لورن

تیلور

چون نقطهٔ غیر تحلیلی $z=1$ است و تابع $g(z)=\frac{1}{z+2}$ در این نقطه تحلیلی است لذا

بسط تیلور $g(z)$ در این نقطه را بدست می‌آوریم و بر $z-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$g(z)=\frac{1}{z+2} \rightarrow g(1)=\frac{1}{3}$$

$$g'(z)=\frac{-1}{(z+2)^2} \rightarrow g'(1)=\frac{-1}{9}$$

$$g''(z)=\frac{-2}{(z+2)^3} \rightarrow g''(1)=\frac{-2}{27}$$

$$g(z)=g(1)+\frac{g'(1)}{1!}(z-1)+\frac{g''(1)}{2!}(z-1)^2+\cdots$$

$$\rightarrow \frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(z-1)+\frac{1}{27}(z-1)^2+\cdots \quad \div \frac{1}{z-1}$$

$$\rightarrow f(z)=\frac{\overset{c_{-1}}{\frac{1}{3}}}{z-1}\overset{c_0}{-\frac{1}{9}}+\overset{c_1}{\frac{1}{27}}(z-1)+\cdots$$ بسط لورن

تعریف ماحنده:

فرض کنیم $f(z)$ در نقطهٔ z_0 غیرتحلیلی باشد. ضریب c_{-1} در بسط لوران تابع در نقطهٔ z_0 را ماحنده تابع f در z_0 می‌نامیم و با نماد $\operatorname{Res}_{z=z_0}(f(z))$ نشان می‌دهیم.

① در مثال: $\operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{\sin(2z)}{z^2}\right) = 2$ ← نقطهٔ غیرتحلیلی

② در مثال: $\operatorname{Res}_{z=0}\left(z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\frac{1}{6}$

③ در مثال: $\operatorname{Res}_{z=1}\left(\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right) = \frac{1}{3}$

تعریف قطب مرتبهٔ m ام:

فرض کنیم $f(z)$ در نقطهٔ z_0 غیر تحلیلی باشد. نقطهٔ z_0 را قطب مرتبهٔ m ام $f(z)$ می‌نامیم، هرگاه بسط لوران آن به صورت زیر باشد:

$$f(z) = \underbrace{\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{قسمت اصلی}} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$$

① $z=0$ قطب مرتبهٔ اول است ← در مثال

② $z=0$ قطب مرتبه‌ی بی‌نهایت است ← در مثال

③ $z=1$ قطب مرتبهٔ اول است. ← در مثال

«راههای تکنیکی محاسبهٔ مانده»: روشهایی هستند که به کمک آنها بدون تشکیل بسط لوران می‌توان مانده را محاسبه کرد.

روش اول: روش $\frac{p}{q}$:

فرض کنیم $f(z)=\frac{P(z)}{q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $q(z)$ توابعی تحلیلی هستند و

$q(z_0)=0$ ولی $q'(z_0)\neq 0$ در اینصورت:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(f(z)\right)=\frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{\overbrace{z+1}^{P(z)}}{\underbrace{z^2+4}_{q(z)}}\right)=?$$

$$?=\left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=2i}=\frac{2i+1}{4i}$$

مثال: * هرچیزی به غیر از عبارت $q(z_0)=0$ را به صورت می‌بریم.

$$\operatorname*{Res}_{z=-3}\left(\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}\right)=?$$

$$?=\operatorname*{Res}_{z=-3}\left(\frac{\overbrace{\frac{z+2}{z-1}}^{P}}{z+3}\right)=\left.\frac{\frac{z+2}{z-1}}{1}\right|_{z=-3}=\frac{-3+2}{-3-1}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

مثال: هر چیز غیر از $q(z_0)=0$ به صورت می‌آید

$$? = \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2+1}{(2z-1)(z-1)^5(z^3+4)^2} \right) = ?$$

$$? = \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} \left(\frac{\overbrace{\frac{z^2+1}{(z-1)^5(z^3+4)^2}}^{p}}{\underbrace{2z-1}_{q}} \right) = \left. \frac{\frac{z^2+1}{(z-1)^5(z^3+4)^2}}{2} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\frac{5}{4}}{(-\frac{1}{2})^5(\frac{32}{8})^2}}{2}$$

روش دوم: تکنیک m:

فرض کنیم z_0 قطب مرتبهٔ m ام تابع $f(z)$ باشد. در اینصورت:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} (f(z)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)}$$

مرتبهٔ مشتق

تذکر ①:

توان $z-z_0$ در مخرج کسر مرتبهٔ قطب می‌باشد مشروط بر اینکه نقطهٔ غیرتحلیلی z_0 صورت را صفر نکند

تذکر ②:

چنانچه $m=1$ باشد آنگاه از هر دو روش می‌توان مانده را حساب نمود که در این مورد روش $\frac{p}{q}$ بهتر می‌باشد ولی چنانچه $m>1$ باشد الزاماً باید از تکنیک m مانده را محاسبه نمود.

EX. $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\dfrac{e^{3z}}{z^{3}}\right)=?$

چون $z=0$ صورت کسر را صفر نمی‌کند ⇐ مرتبهٔ قطب $m=3$ ⇐ $m>1$ روش m

$$? = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^{3}\,\frac{e^{3z}}{z^{3}}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[9e^{3z}\right] = \frac{9}{2}$$

EX. $\operatorname*{Res}_{z=1}\left(\dfrac{z+3}{(z-1)^{2}(z+2)}\right)=?$

مرتبهٔ قطب: $m=2$

چون $m>1$ است از روش و تکنیک m می‌رویم:

$$? = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^{2}\,\frac{z+3}{(z-1)^{2}(z+2)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[\frac{(z+2)-(z+3)}{(z+2)^{2}}\right] = -\frac{1}{9}$$

EX. $\underset{z=-2}{\mathrm{Res}}\left(\dfrac{z+3}{(z-1)^2(z+2)^{1}}\right) = ?$ هر چیزی به غیر از $q(z_0)=0$ را به صورت کسر می بریم.

$m=1$ ← بهتر است از روش $\frac{p}{q}$ برویم.

$$\underset{z=-2}{\mathrm{Res}}\left(\frac{\overbrace{\dfrac{z+3}{(z-1)^2}}^{p}}{\underbrace{z+2}_{q}}\right) = \left.\frac{\dfrac{z+3}{(z-1)^2}}{1}\right|_{z=-2} = \frac{1}{9}$$

مثال:

مرتبهٔ قطب $z=0$ را برای تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^7}$ را بیابید

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^7} = \underbrace{\frac{\overset{c_{-6}}{1}}{z^6} - \frac{1}{6z^4} + \frac{1}{120z^2}}_{\text{قسمت اصلی}} \cdots$$

بسط لوران تابع $f(z)$

← چون $z=0$ غیرتحلیلی است.

$z=0$ قطب مرتبهٔ ششم است.

راه حل تستی:

$$\frac{\sin z}{z^7} \approx \frac{z}{z^7} = \frac{1}{z^6}$$

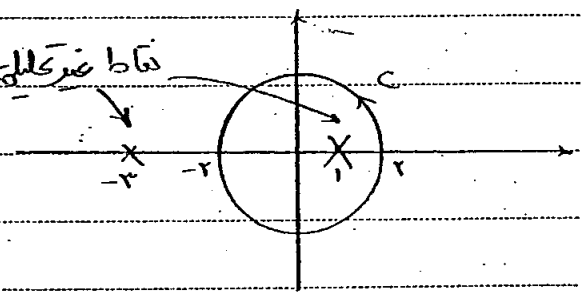
EX. $\dfrac{1-\cos z}{z^4} \approx \dfrac{\frac{z^2}{2}}{z^4} = \dfrac{1}{2z^2}$ $z=0$ قطب مرتبهٔ دوم است.

«قضیهٔ مانده ۴۰»:

فرض کنید $f(z)$ در نقاط z_1 و z_2 و ... و z_n داخل منحنی بستهٔ C، غیرتحلیلی باشد در اینصورت:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f(z)) + \operatorname*{Res}_{z=z_2}(f(z)) + \dots \operatorname*{Res}_{z=z_n}(f(z))\right]$$

EX. $$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$$



قضیه فقط برای نقاط داخل منحنی بستهٔ C صادق است:

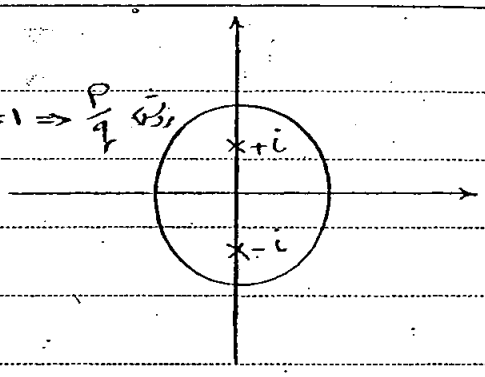
$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left(\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\right]'$$

$m=2$ $(m>1)$ ← پس از روش m می‌رویم

$$\lim_{z\to 1}\frac{2z(z+3)-(z^2+1)}{(z+3)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+6z-1}{(z+3)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$? = 2\pi i \times \frac{3}{8} = \frac{3\pi i}{4}$$

Ex. $\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{(z^2+1)}\,dz \Rightarrow (z-i)(z+i) \Rightarrow m=1 \Rightarrow \frac{p}{q}$ ریشه



$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$ نقاط غیرتحلیلی

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{z+2}{z^2+1}\right) = \frac{z+2}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{i+2}{2i}$$

(p: $z+2$، q: z^2+1)

$$\operatorname*{Res}_{z=-i}\left(\frac{z+2}{z^2+1}\right) = \frac{z+2}{2z}\Big|_{z=-i} = \frac{-i+2}{-2i}$$

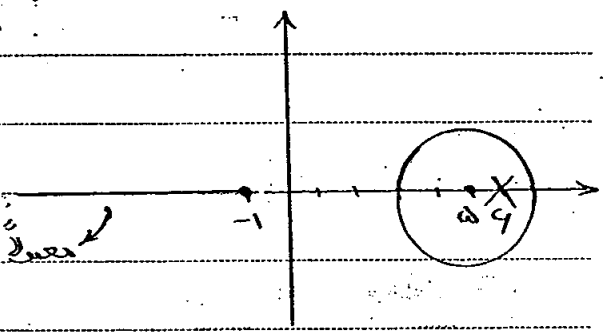
(p: $z+2$، q: z^2+1)

$$I = 2\pi i\left(\frac{i+2}{2i} + \frac{i-2}{2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{2i}{2i}\right) = 2\pi i$$

* هیچ‌گاه نقاط را روی دایره نمی‌دهند.

EX $\displaystyle\oint_{|z-5|=2} \frac{\ln(z+1)}{z-6}\, dz = ?$

* ما اصلاً ln (کوچک) نداریم چون اصلاً تابع نیست و فقط Ln (بزرگ) داریم.



معمولاً خط شاخه‌ای به داخل دایره نمی‌رود.

هم باید نقاط غیرتحلیلی را یافت و هم خط شاخه‌ای Ln را می‌یابیم.

$$\ln(z+1) = \ln(x+iy+1) = \ln\big(\underbrace{(x+1)}_{\leq 0} + i\underbrace{y}_{=0}\big) \Rightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \rightarrow x \leq -1 \\ y=0 \end{cases}$$

برای نقاط غیرتحلیلی است

$$\operatorname*{Res}_{z=6}\left(\frac{\overset{p}{\ln(z+1)}}{\underset{q}{z-6}}\right) = \frac{\ln(z+1)}{1}\Bigg|_{z=6} = \ln(7)$$

در اعداد حقیقی ln کوچک داریم ولی در z ها (مختلط ها) Ln بزرگ داریم.

$? = 2\pi i \ln 7$

سؤال صد در صد امتحانی :

$$EX \oint_{|z|=1} \left(z^3 \cos z + \frac{z^2+1}{z^2-2z} + \bar{z} + z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) dz = ?$$

قضیه کوشی-گورسا

$$? = \underbrace{\underbrace{\oint_{|z|=1} \underbrace{z^2}_{\text{تحلیلی}} \underbrace{\cos z}_{\text{تحلیلی}}}_{\text{تحلیلی}}\, dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z-2)}\, dz}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz}_{I_3} + \underbrace{\oint_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz}_{I_4}$$

چون تابع $\bar{z}$ همه جا غیر تحلیلی است

باید پارامتری بنویسیم

$I_1 = 0$ طبق قضیه کوشی-گورسا

$$I_2 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{z^2+1}{z(z-2)} \right) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{\overbrace{\frac{z^2+1}{z-2}}^{p}}{\underbrace{z}_{q}} \right) =$$

نقطه داخل دایره

$z=2$ داخل دایره نیست

$m=1$ (روش $\frac{p}{q}$)

$$= 2\pi i \left. \frac{\frac{z^2+1}{z-2}}{1} \right|_{z=0} = -\pi i$$

$$I_3 = \oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz \rightarrow \begin{cases} z = e^{it} \\ dz = i e^{it} dt \\ \bar{z} = e^{-it} \end{cases} = \int_0^{2\pi} (\cancel{e^{-it}})(i \cancel{e^{it}} dt) = 2\pi i$$

ادامه حل ←

ادامهٔ حل: $I_4 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 2\pi i \times \frac{1}{24} = \frac{\pi i}{12}$

چون فرمول‌های یافتن Res کسری بودند و در اینجا کسر نداریم باید لوران بزنیم

چون $z=0$ نقطهٔ غیرتحلیل است لوران می‌زنیم:

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots$ بسط مک لورن $\cos z$

$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots$

$z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{24z} - \dots$ $\quad \frac{1}{24z} \to C_{-1}$

$$\boxed{I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 - \pi i + 2\pi i + \frac{\pi i}{12} = \frac{13\pi i}{2}}$$

«کاربردهای انتگرال گیری از توابع مختلط»

کاربرد اول:

محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم: $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

* روش فوق برای توابع مثلثاتی است که محدودهٔ انتگرال معین ۰ تا 2π یا ۰ تا π باشد

با تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ داریم:

$r = 1$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

حال با جاگذاری روابط فوق داریم:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}}$$

$|z|=1$ ← دایره‌ای به شعاع ۱

EX. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{۳+\cos\theta}\, d\theta = ?$

انتگرال فوق را به صورت خط در آورده و سپس انتگرال‌های خط را طبق نکات گفته شده حل می‌نماییم:

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^۲+۱}{۲z}}{۳+\frac{z^۲+۱}{۲z}} \frac{dz}{iz}$$

همواره

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^۲+۱}{۲z}}{\frac{z^۲+۶z+۱}{۲z}} \frac{dz}{iz}$$

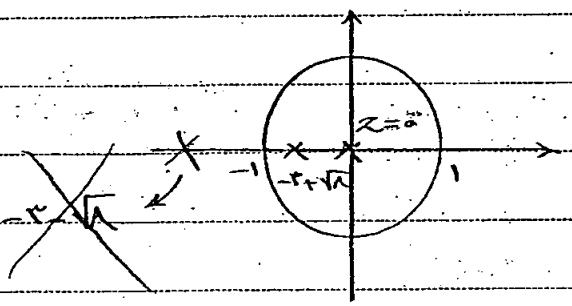
$$= \frac{۱}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^۲+۱}{(z^۲+۶z+۱)z}\, dz$$

همواره دایره‌ای به شعاع ۱

حال نقاط غیر تحلیلی را می‌یابیم و عبارتند از:

$z=۰$

$$z^۲+۶z+۱=۰ \rightarrow z=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۱}}{۱} \Rightarrow \begin{cases} z=-۳+\sqrt{۸} \\ z=-۳-\sqrt{۸} \end{cases}$$



$-۳-\sqrt{۸}$ خارج دایره است.

ادامه حل

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^2+1}{z(z^2+6z+1)}\right)=\left.\frac{\frac{z^2+1}{z^2+6z+1}}{1}\right|_{z=0}=1$$

$m=1$ (از روش $\frac{p}{q}$)

$$\operatorname*{Res}_{z=-3+\sqrt{8}}\left(\frac{z^2+1}{z(z^2+6z+1)}\right)=\left.\frac{\frac{z^2+1}{z}}{2z+6}\right|_{z=-3+\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{\frac{(-3+\sqrt{8})^2+1}{-3+\sqrt{8}}}{2\sqrt{8}}=\frac{18-6\sqrt{8}}{16-6\sqrt{8}}=\frac{9-3\sqrt{8}}{8-3\sqrt{8}}$$

$$T=\frac{1}{i}\times 2\pi i\left(1+\frac{9-3\sqrt{8}}{8-3\sqrt{8}}\right)=\boxed{\frac{2\pi(17-6\sqrt{8})}{8-3\sqrt{8}}}$$

طبق انتگرال

EX. $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = ?$ $\quad 0<a<1$

هرگاه بازهٔ کران‌ها را ۰ تا π دادند ما کران‌ها را ۰ تا 2π می‌گیریم و یک، $\frac{1}{2}$ در آن ضرب می‌کنیم:

$$? = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

اینجا ما در صورت $\cos 2\theta$ داریم نه $\cos\theta$:

$$\cos(2\theta) = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2}$$

$$? = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{1-2a\frac{z^2+1}{2z}+a^2}\,\frac{dz}{iz} \rightarrow d\theta$$

طبق فرمول

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{\cancel{2}\cancel{z^2}z}}{\frac{2z-2az^2-2a+2a^2z}{\cancel{2}\cancel{z}}}\,\frac{dz}{iz}$$

فاکتور از $\ominus$

$$= -\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2\left(az^2-(1+a^2)z+a\right)}\,dz$$

ادامهٔ حل ←

ادامهٔ حل ←

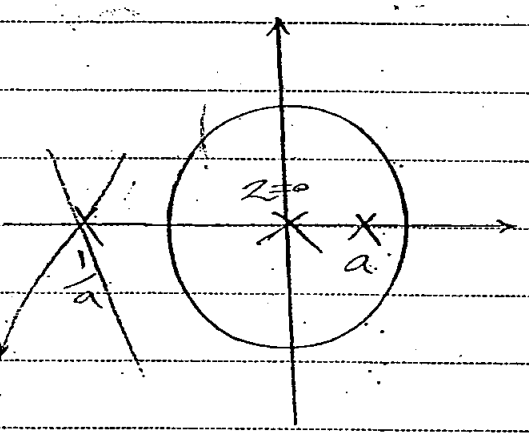
$\boxed{z=0}$

حال نقاط غیر تحلیلی را می‌یابیم:

$$az^2-(1+a^2)z+a=0 \longrightarrow \frac{1+a^2\pm\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2a}$$

چون $0<a<1$

$$\rightarrow z=\frac{1+a^2\pm\sqrt{(1-a^2)^2}}{2a}=\frac{1+a^2\pm(1-a^2)}{2a}\Rightarrow\begin{cases} z=\frac{1}{a}\Rightarrow \frac{1}{a}>1 \\ z=a\Rightarrow \underbrace{0<a<1}_{\text{داده مسئله}}\end{cases}$$



خارج از دایره است.

چون $0<a<1$ است یکبار $z=0$ و یکبار $z=a$ می‌گیریم و داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^4+1}{z^2(az^2-(1+a^2)z+a)}\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[\cancel{z^2}\,\frac{z^4+1}{\cancel{z^2}(az^2-(1+a^2)z+a)}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z^3(az^2-(1+a^2)z+a)-(2az-(1+a^2))(z^4+1)}{(az^2-(1+a^2)z+a)^2}=\frac{a^2+1}{a^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\left(\frac{\overbrace{\frac{z^4+1}{z^2}}^{P}}{\underbrace{az^2-(1+a^2)z+a}_{q}}\right)=\left.\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2az-(1+a^2)}\right|_{z=a}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶۰

۱۶۸

$$= \frac{\frac{a^4+1}{a^2}}{a^2-1} = \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)}$$ ← ادامهٔ حل

$$I = -\frac{1}{4i} \times 2\pi i \left(\frac{a^2+1}{a^2} + \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)} \right)$$

* طبق انتگرال است

Subject:

Year. ٨٥ Month. ٣ Date. ١٩ ( )

PAPCO

کاربرد دوم: محاسبهٔ برخی انتگرال‌های خاص

برای محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(\alpha x)\,dx$$

می‌توان از اتحاده‌ها استفاده کرد، مشروط بر این‌که:

۱. $F(x)$ تابع گویا باشد. (کسری باشد و صورت و مخرج چند جمله‌ای باشند)

۲. مخرج $F(x)$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

۳. درجهٔ مخرج، حداقل دو واحد از درجهٔ صورت بیشتر باشد.

در این صورت برای حل انتگرال‌های فوق از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(F(z))$$

نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحهٔ فوقانی $(y>0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z}\right)\right\}$$

نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحهٔ فوقانی (۰<y)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z}\right)\right\}$$

نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحهٔ فوقانی (۰<y)

EX. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$

روش اول: $? = \left[\mathrm{Arctan}\,x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

روش دوم: اولین کار بردن به z است (به جای x، z می‌نویسیم)

$z^2+1=0 \xrightarrow{\text{غیرتحلیلی}} z=\pm i \longrightarrow z=i$ در نیم صفحهٔ فوقانی است

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

$1 \to p$, $z^2+1 \to q$

$$? = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

Ex. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$

ابتدا 0 تا ∞ صفر تابع زوج است و به $-\infty$ تا ∞ تبدیل می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$$

حال چون تابع گویا است و توان مخرج حداقل ۲ واحد بیشتر از توان صورت است و ریشه‌های حقیقی در مخرج نداریم داریم:

$$z^4+5z^2+4=0 \Rightarrow (z^2+1)(z^2+4)=0 \rightarrow \begin{cases} z=\pm i \\ z=\pm 2i \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z=+i & \text{در نیم صفحه فوقانی} \\ z=+2i & \text{در نیم صفحه فوقانی} \end{cases}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}\right) = \frac{1}{4z^3+10z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{6i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}\right) = \frac{1}{4z^3+10z}\Big|_{z=2i} = \frac{1}{-32i+20i} = \frac{-1}{12i}$$

$$I = \left(\frac{1}{2}\right) \times 2\pi i \left(\frac{1}{6i} + \frac{-1}{12i}\right) = \frac{\pi}{12}$$

EX. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$

$z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2i \longrightarrow z=2i$: در نیم صفحه فوقانی

* چون توان بیشتر از ۱ و چون عامل ۲i نداریم آنها مزدوج می‌نویسیم

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{1}{(z^2+4)^2}\right) = \operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{1}{(z-2i)^{2}(z+2i)^2}\right) =$$

$m=2$

$$= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)^2 \times \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-2}{-64i} = \frac{1}{32i}$$

$$? = 2\pi i \times \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

Ex. $\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{4x^4+13x^2+9}\,dx = ?$ امتحان پنجم (ص ۲۵۳)

اولین کار مهم یافتن نقاط غیرتحلیلی است و در مثلثاتی ها به جای sin و cos، $e^{i\alpha z}$ نوشته و سپس Res گرفته، اگر sin ای بود Im و اگر cos ای بود Re می‌گیریم:

$$4x^4+13x^2+9=0 \Rightarrow z^2=\frac{-13\pm\sqrt{169-144}}{8} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\frac{-13+5}{8}=-1 \rightarrow z=\pm i \\ z^2=\frac{-13-5}{8}=-\frac{9}{4} \rightarrow z=\pm\frac{3}{2}i \end{cases}$$

$z=i$ و $z=\frac{3}{2}i$ در نیم صفحه فوقانی قرار دارند:

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{i2z}}{4z^4+13z^2+9}\right)=\frac{e^{i2z}}{16z^3+26z}\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{-2}}{-16i+26i}=\frac{e^{-2}}{10i}$$

$e^{i2z} \rightarrow p$, $4z^4+13z^2+9 \rightarrow q$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{3}{2}i}\left(\frac{e^{i2z}}{4z^4+13z^2+9}\right)=\frac{e^{i2z}}{16z^3+26z}\Bigg|_{z=\frac{3}{2}i}=\frac{e^{-3}}{-54i+39i}=\frac{-e^{-3}}{15i}$$

$e^{i2z} \rightarrow p$, $4z^4+13z^2+9 \rightarrow q$

چون تابع زوج است

$$?=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[2\pi \cancel{i}\times\left(\frac{e^{-2}}{10\cancel{i}}+\frac{-e^{-3}}{15\cancel{i}}\right)\right]=\pi\left(\frac{e^{-2}}{10}-\frac{e^{-3}}{15}\right)$$

چون i نداره قسمت Re (واقعی) کل عبارت می‌شود.

مثال ص ۱۱۹ — EX. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}\,dx$

مانند تمام مثال های قبل، نقاط غیر تحلیلی می گیریم:

$$z^2+z+1=0 \longrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\longrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ در نیم صفحه فوقانی

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{e^{i2z}}{z^2+z+1}\right)=\frac{e^{i2z}}{2z+1}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,i}$$

$e^{i2z} \to p$, $z^2+z+1 \to q$

چون سینوسی است

$$\rightarrow \rho=\operatorname{Im}\left\{2\pi \cancel{i}\times\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}\,\cancel{i}}\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}e^{-i}\right\}$$ اویلر می زنیم

$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\left(\cos(1)-i\sin(1)\right)\right\}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin(1)$$

چون ضریب i در $e^{i\alpha}$ برابر ۱ می باشد.

* مثال استفاده از ترم قبل:

$$\text{Ex.}\quad \int_0^\infty \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx = ?$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx = ? = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx$$

روش اول حل معادله دوجمله‌ای: $z^4+1=0$ معادله دوجمله‌ای $\Rightarrow w^n = z$

روش دوم: اتحاد اول را به کار می‌بریم:

$$(z^2+1)^2 - 2z^2 = 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)=0$$

نقاط غیرتحلیلی

$$\begin{cases} z^2+\sqrt{2}z+1=0 \longrightarrow z = \dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z^2-\sqrt{2}z+1=0 \longrightarrow z = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ در نیم صفحه فوقانی قرار دارند:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\overbrace{z^2e^{i2z}}^{p}}{\underbrace{z^4+1}_{q}}\right) = \frac{z^2e^{i2z}}{4z^3} = \frac{e^{i2z}}{4z}\Bigg|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\overbrace{z^2e^{i2z}}^{p}}{\underbrace{z^4+1}_{q}}\right) = \frac{e^{i2z}}{4z}\Bigg|_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$$

PAPCO

ادامه حل:

چون کسینوسی

$$? = \frac{1}{\cancel{2}} \operatorname{Re}\left\{ \cancel{2}\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}} + \frac{e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}} \right) \right\}$$

چون تابع زوج

$$= \operatorname{Re}\left\{ \frac{\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(\sqrt{2})+i\sin(\sqrt{2})}{1+i} + \frac{\cos(\sqrt{2})-i\sin\sqrt{2}}{-1+i} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left\{ \frac{\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{(\cos\sqrt{2})+i\sin(\sqrt{2})(-1+i)+\cos(\sqrt{2})-i\sin(\sqrt{2})(1+i)}{-2} \right\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left\{ \frac{-\pi i e^{-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \left(\cancel{-\cos\sqrt{2}} + i\cos(\sqrt{2}) - i\sin(\sqrt{2}) - \cancel{\sin(\sqrt{2})} + \cancel{\cos\sqrt{2}} + i\cos(\sqrt{2}) - i\sin(\sqrt{2}) + \cancel{\sin\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{-\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(i\cos(\sqrt{2}) - i\sin(\sqrt{2}) \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\cos\sqrt{2} - i\sin\sqrt{2} \right)$$

مثال امتحان ترم قبل:

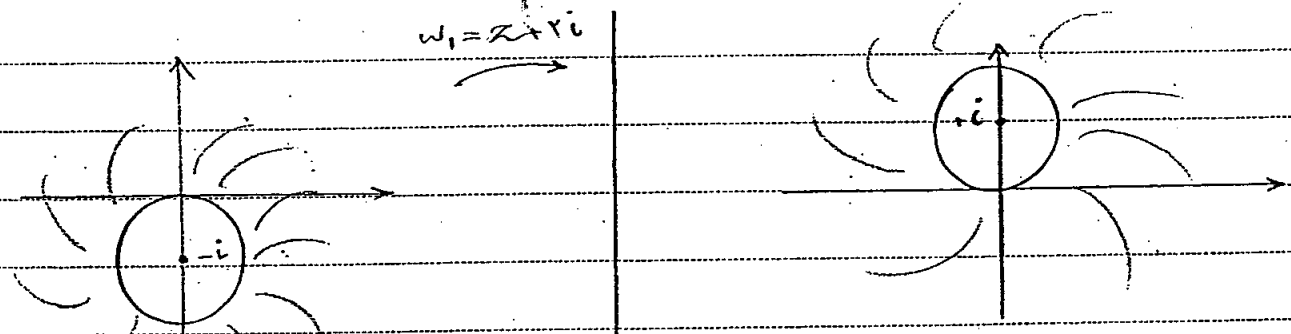
دایره‌ای به مرکز $(0,-i)$

* خارج

مشخص کنید $w = i\left(\frac{z}{z+2i}\right)$ ناحیه $|z+i| > 1$ را به چه ناحیه‌ای می‌نگارد؟

نگاشت فوق، نگاشت موبیوس است که از i فاکتور گرفته است:

$$w = i\left(\frac{(z+2i)-2i}{z+2i}\right) = i\left(1-\frac{2i}{z+2i}\right) = i + \frac{2}{z+2i} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z+2i & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = 2w_2 & \text{دوران} \\ w = i + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$



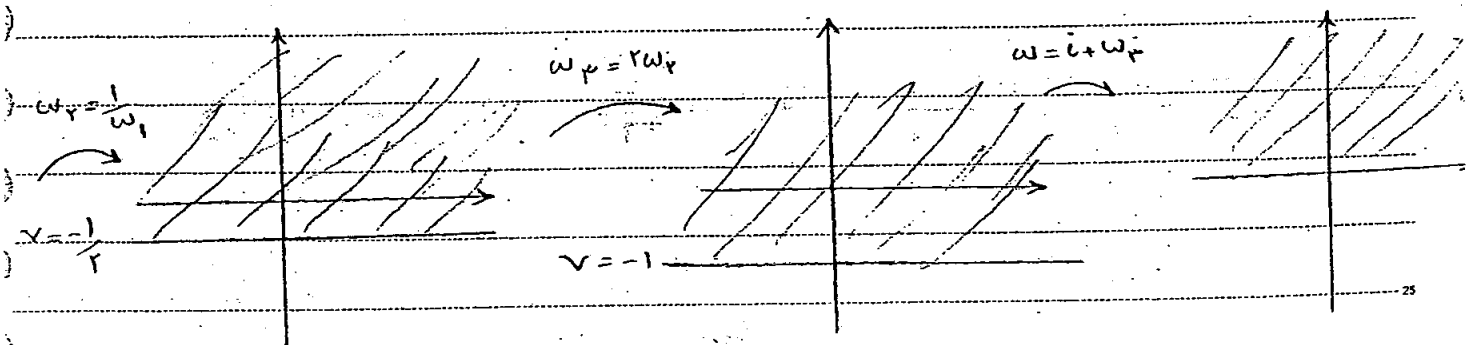
بهتر است فرم دکارتی را بنویسیم

$$x^2+(y-1)^2 \geq 1 \rightarrow x^2+y^2 \geq 2y$$

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 \geq \frac{-2v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{u^2+v^2}} \geq \frac{-2v}{\cancel{u^2+v^2}} \rightarrow -2v \leq 1$$

$$\rightarrow v \geq -\frac{1}{2}$$

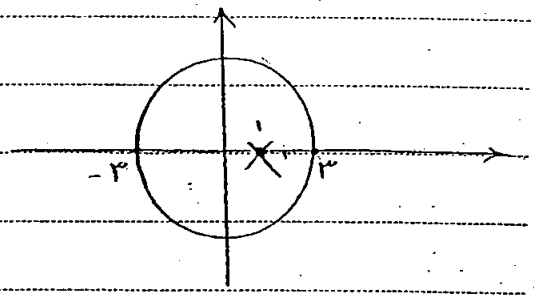


منبسط $|2| = 2$

PAPCO $\arg(2) = 0$

مثال ص ۲۵۱

$$EX \quad \oint_{|z|=3} (z-1)^3 \cos\left(\frac{z}{z-1}\right) dz$$



$z-1=0 \Rightarrow z=1$ نقطه‌ی غیرتحلیلی

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \left((z-1)^3 \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)\right)$$

$$\cos\left(\frac{(z-1)+1}{z-1}\right) = \cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \cos(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) - \sin(1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

باید کاری کنیم تا توان‌های $(z-1)$ بدست آید.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \cdots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{24(z-1)^4} - \cdots$$

$$\boxed{(z-1)^3 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) = (z-1)^3 - \frac{z-1}{2} + \frac{1}{24(z-1)} - \cdots \quad c_{-1} = \frac{1}{24}}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \cdots$$

Subject:

Year ۸۵ Month: ۴ Date: ۲۶

(۷۱)

۲۰۲

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6(z-1)^3} + \frac{1}{120(z-1)^5} - \cdots$$

$$(z-1)^3 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = (z-1)^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120(z-1)^2} - \cdots \qquad c_{-1} = 0$$

$$\operatorname{Res}_{z=1}\left((z-1)^3 \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{\cos(1)}{24}$$

$$? = 2\pi i \frac{\cos(1)}{24} = \frac{\pi i}{12}\cos(1)$$

حذفیات کتاب:

قسمت ۲-۲ صـ ۲۶

تبدیل فوریه مثلثی در کتاب ۲-۴

قسمت ۳-۳-۱۵ تا آخر فصل حذف است.

قسمت ۹-۷-۵ صـ ۱۲۰

«نگاشت ع»:

۱- نگاشت انتقال $(w = z + a)$ (a: عدد مختلط)

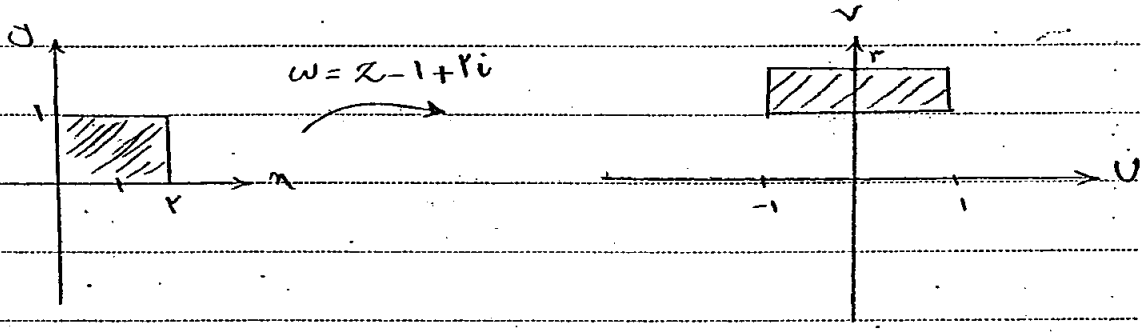
$$w = z + a = x + iy + a_1 + ia_2$$

$$= \underbrace{(x + a_1)}_{u} + i\underbrace{(y + a_2)}_{v}$$

تحت نگاشت انتقال، ناحیه داده شده به اندازه a_1 واحد در جهت محور ox و a_2 واحد در جهت محور oy منتقل می‌شود. (شکل را عوض نمی‌کند و فقط شکل را نگاشت انتقال، منتقل می‌کند)

مثال:

حاصل ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = z - 1 + 2i$ بیابید.



(-1) واحد در جهت ox و $(+2)$ واحد در جهت oy منتقل می‌شود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

199

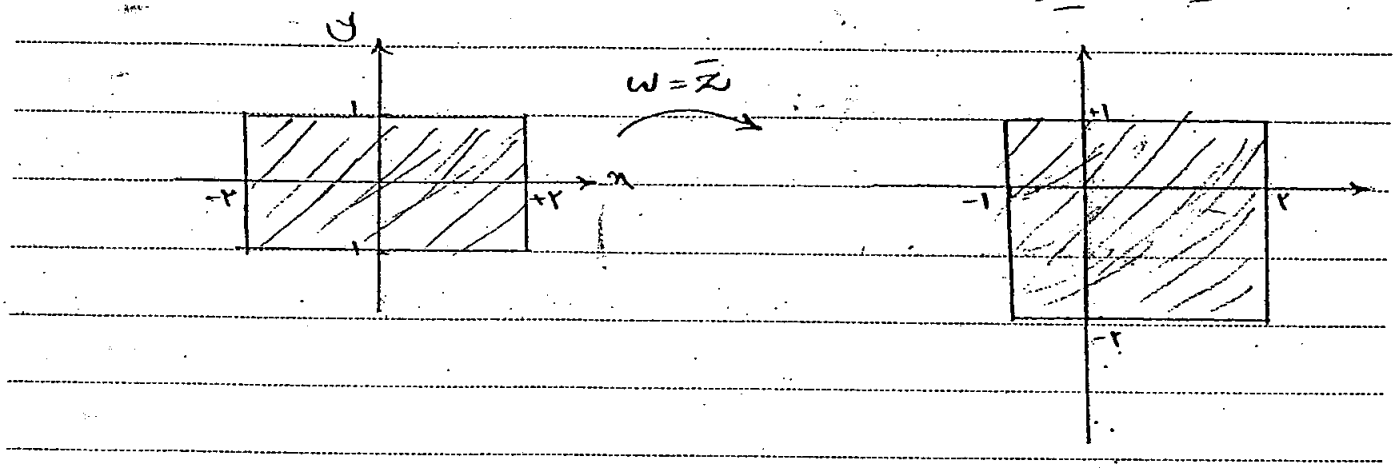
PqPCO

۲- قرینهٔ مزدوج ($w=\bar{z}$) :

$$w=\bar{z}=x+i(-y) \Rightarrow \begin{cases} x=u \\ y=-v \end{cases}$$

قرینهٔ مزدوج ناحیهٔ داده شده را نسبت به محور ox قرینه می‌سازد.

مثال: تصویر ناحیهٔ زیر را تحت نگاشت $w=\bar{z}$ بیابید.



مثال:

تصویر ناحیهٔ $x^2+(y-1)^2 \le 1$ را تحت نگاشت $w=\overline{z+1-i}$ بیابید

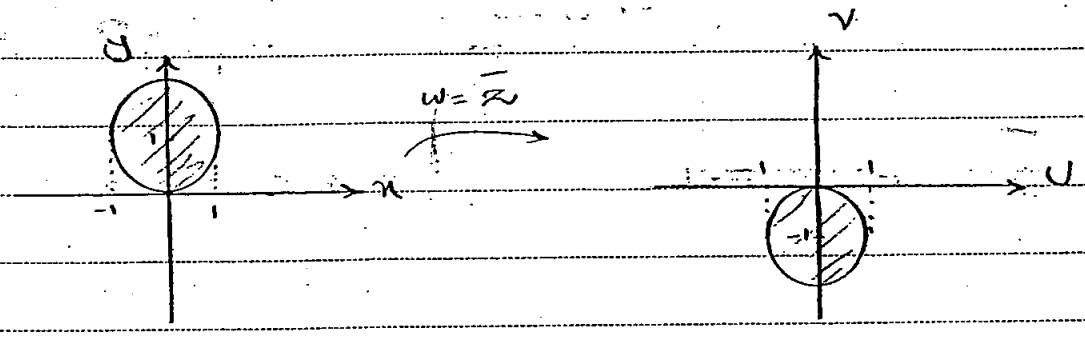
اول مزدوج بعد انتقال

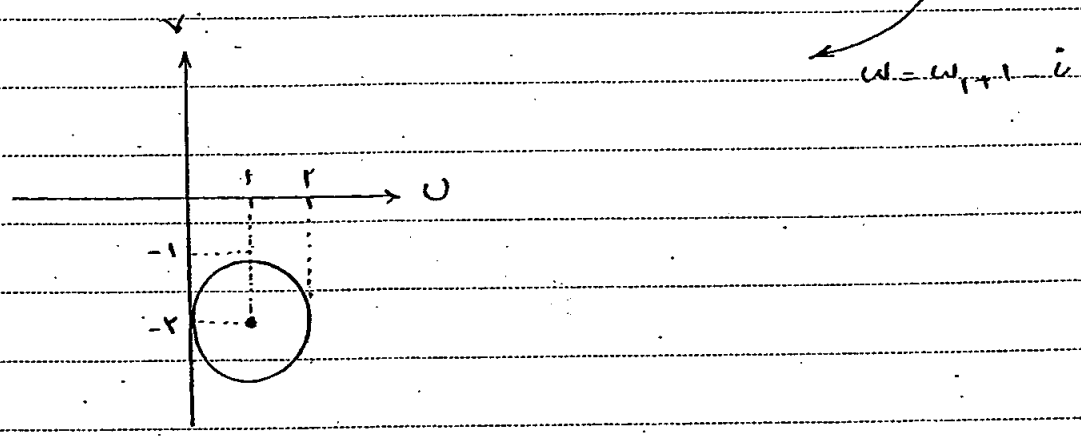
دارای دو نگاشت مزدوج و انتقال هستیم

* تذکر: $w=\overline{z+1-i}$ (اول انتقال بعد مزدوج)

$w_1=\bar{z}$ مزدوج

$w=w_1+1-i$ ⟸ ۱ واحد در جهت x ها و ۱- واحد در جهت y ها





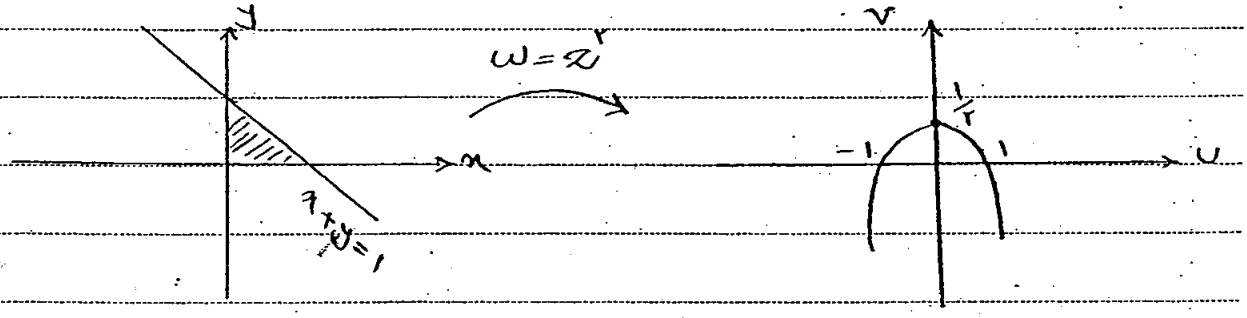
۳- نگاشت توان ($w=z^2$) :

$$w=z^2=(x+iy)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{u}+i\underbrace{(2xy)}_{v}\Rightarrow\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$$

$$w=(re^{i\theta})^2=\overset{\rho}{r^2}e^{i\overset{\varphi}{2\theta}}\Rightarrow\begin{cases}\rho=r^2\\ \varphi=2\theta\end{cases}$$

اگر ناحیه به صورت مثلث، مستطیل و ... بود از فرمول اول می‌رویم و اگر ناحیه زاویه‌دار مثلی داید و ... باشد از فرمول دوم می‌رویم.

مثال: تصویر خط $x+y=1$ را تحت نگاشت $w=z^2$ بیابید.



چون ناحیه دکارتی است، از فرمول اولی می‌رویم:

$$\begin{cases}u=x^2-y^2=x^2-(1-x)^2=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{u+1}{2}\\ v=2xy=2x(1-x)=2x-2x^2\end{cases}\qquad y=1-x$$

چون u و v برحسب x هستند، x را از بین برده تا بتوانیم رابطهٔ بین u و v را بیابیم.

ادامهٔ حل.

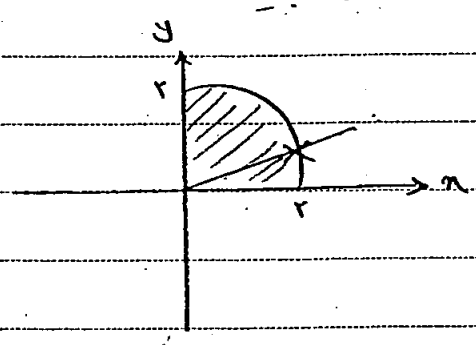
ادامهٔ حل: $V = 2\left(\frac{u+1}{2}\right) - 2\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 = u+1-\frac{1}{2}\left(u^2+2u+1\right)$

سهمی: $V = \frac{-u^2+1}{2}$

u	V
0	$\frac{1}{2}$
± 1	0

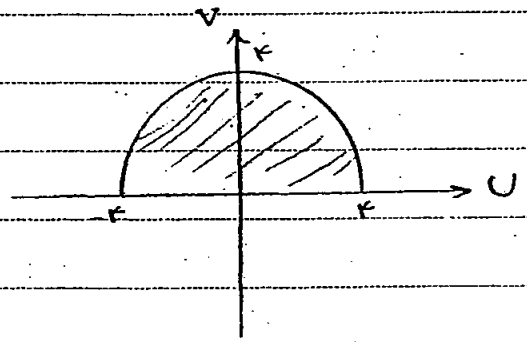
اگر به جای خط می‌گفتند مثلث، آن‌گاه ما سه خط $x=0$ و $y=0$ و $x+y=1$ را منتقل کرده و سپس سطح مشترک را هاشور می‌زنیم.

مثال: تصویر $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$ را تحت نگاشت $w=z^2$ بیابید.



$0 \leq r \leq 2 \rightarrow 0 \leq r^2 \leq 4 \rightarrow 0 \leq \rho \leq 4$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq 2\theta \leq \pi \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$

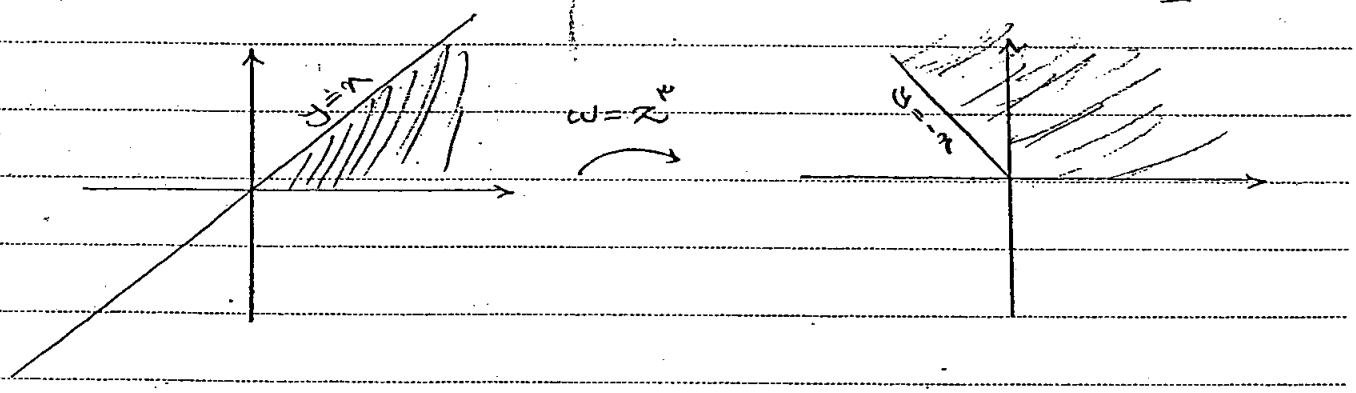


۳- نگاشت $w = z^n$

$$w = \left(re^{i\theta}\right)^n = \underbrace{r^n}_{\rho}\, e^{i\underbrace{n\theta}_{\varphi}} \Rightarrow \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیهٔ زیر را تحت نگاشت $w = z^3$ بیابید

توانهای بیشتر از ۲ را چه ناحیه دکارتی باشد، چه قطبی، از راه قطبی حل می‌نمائیم



$$0 \leq r \leq \infty \rightarrow 0 \leq r^3 < \infty \rightarrow 0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \leq 3\theta \leq \frac{3\pi}{4} \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$$

۴- نگاشت نمایی ($w = e^z$) :

$$w = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\rho}\, e^{\overset{\rho}{y}} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \rho = y \end{cases}$$

* تذکر مهم :

اگر تحلیلی بودن تابع نمایی مختلط را می‌خواستند از اویلر می‌رفتیم یعنی: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

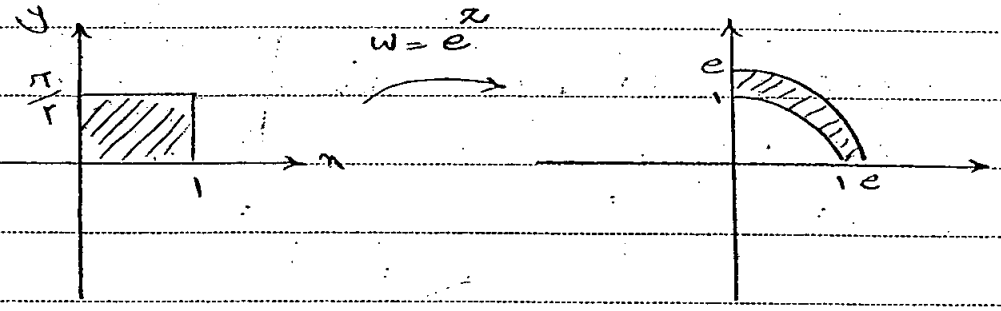
ولی در نگاشت فوراً ρ و ρ را می‌یابیم.

* خاصیت نگاشت e^z :

یک ناحیهٔ دکارتی را به ناحیهٔ قطبی تبدیل می‌کند.

مثلاً: یک مستطیل را به یک دایره تبدیل می‌کند.

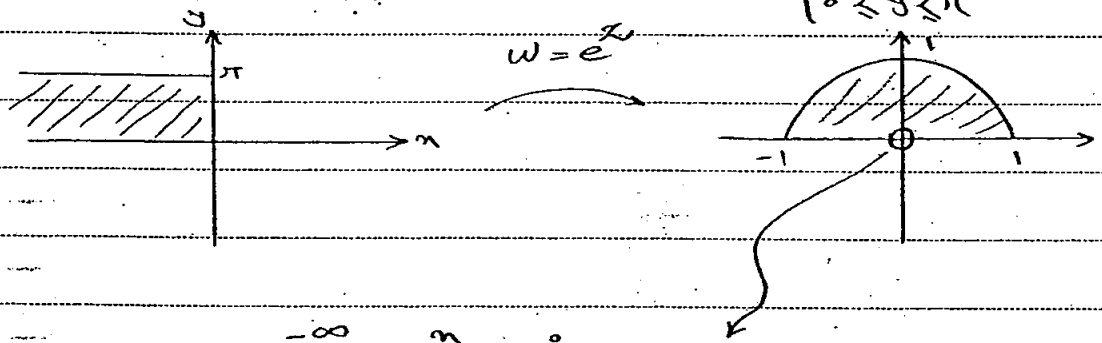
مثال: تصویر ناحیهٔ زیر را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.



$$0 \le x \le 1 \rightarrow 1 \le e^x \le e \rightarrow 1 \le \rho \le e$$

$$0 \le y \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$ ربع اول *

مثال: تصویر $\begin{cases} x \le 0 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.



$$-\infty < x \le 0 \rightarrow e^{-\infty} < e^x \le e^0 \rightarrow 0 < \rho \le 1$$

$$0 \le y \le \pi \rightarrow 0 \le \theta \le \pi$$ ربع اول و دوم

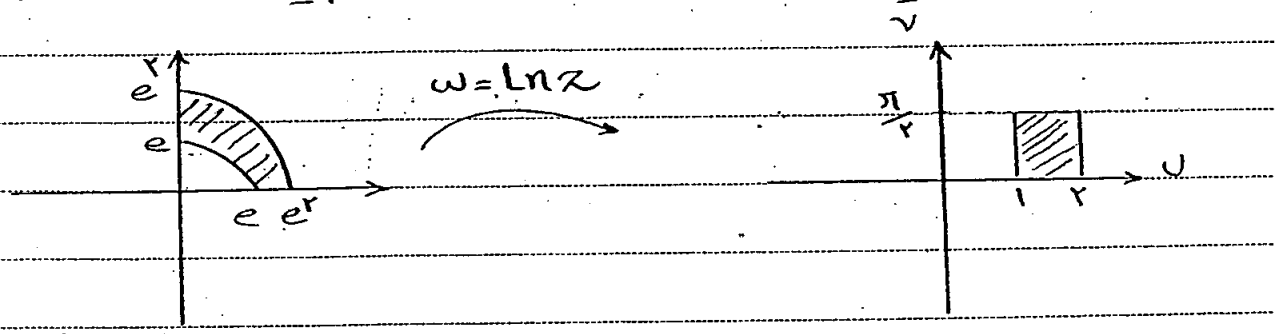
۵- نگاشت $w = \ln z$:

$$w = \ln(re^{i\theta}) = \underbrace{\ln r}_{u} + \underbrace{i\theta}_{v} \rightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

خاصیت نگاشت $w = \ln z$:

* ناحیهٔ خطی را به ناحیهٔ دکارتی می برد.

مثال: تصویر ناحیهٔ زیر را تحت نگاشت $w = \ln z$ بیابید.



$$e \leq r \leq e^2 \rightarrow 1 \leq \ln r \leq 2 \rightarrow 1 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

۶- نگاشت دوران ($w = az$)

عدد مختلط

$\rho = \theta$ همان زاویه است

$\rho = r = \sqrt{x^2+y^2} = |w|$ همان شعاع است

$$\rho = |w| = |az| = |a||z| = r|a|$$

تحت نگاشت دوران، فاصلهٔ w تا مبدأ برابر است با فاصلهٔ z تا مبدأ ضربدر $|a|$.

چنانچه $|a|<1$ باشد فاصلهٔ w تا مبدأ از فاصلهٔ z تا مبدأ کم‌تر است در

این حالت گوییم انقباض صورت گرفته است. (شکل کوچکتر می‌شود.)

و چنانچه $|a|>1$ باشد فاصلهٔ w تا مبدأ از فاصلهٔ z تا مبدأ بیشتر می‌شود در

این حالت گوییم انبساط صورت گرفته است. (شکل بزرگتر می‌شود)

$|a|=1$ (شکل تغییری نمی‌کند.)

$$\rho = \arg(w) = \arg(az) = \arg(a) + \arg(z) = \arg(a) + \theta$$

تحت نگاشت دوران، زاویه‌ای که w با محور $4v$ می‌سازد برابر است با زاویه‌ای که z

با محور $4x$ می‌سازد به علاوهٔ $\arg(a)$. یعنی شکل به اندازهٔ $\arg(a)$ دوران پیدا می‌کند.

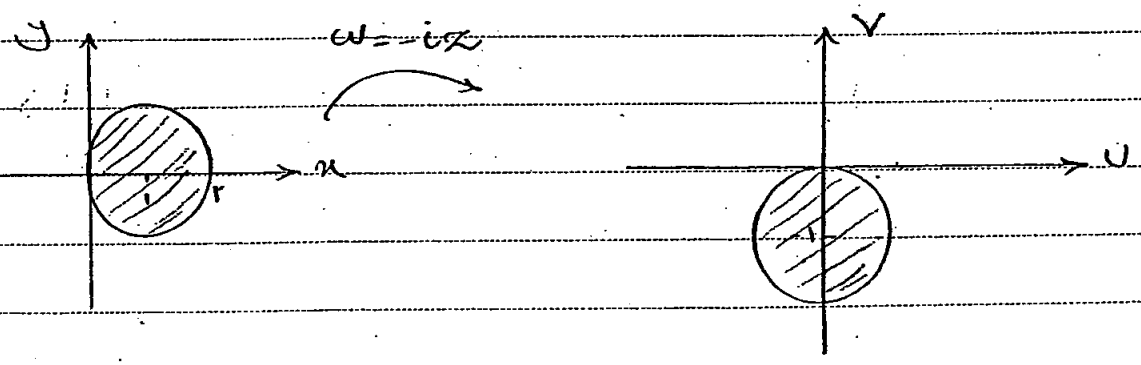
مثال: تصویر $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ را تحت نگاشت $w=\underbrace{-i}_{a}z$ بیابید.

* اولین کار یافتن $|a|$ و همچنین $\arg(a)$ است.

$|-i| = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = 1$ نه انبساط داریم و نه انقباض

$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ چون $x=0$ و $y<0$

دوران به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در راستای جهت عقربه‌های ساعت

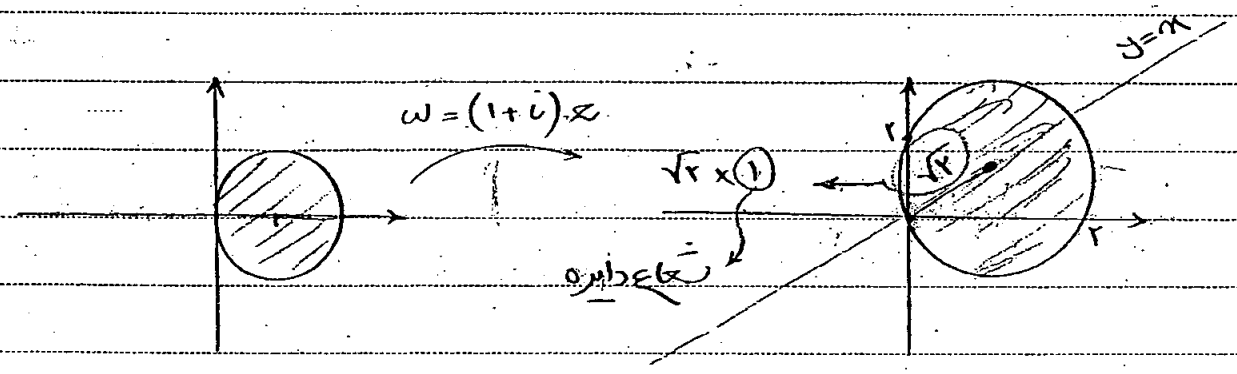


مثال: تصویر $(x-1)^2+y^2\leq 1$ را تحت نگاشت $w=(1+i)z$ بیابید.

a

$|1+i|=\sqrt{2}$ ⇒ انبساط به اندازهٔ $\sqrt{2}$ داریم

$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ⇒ چون مثبت است در خلاف عقربه‌های ساعت است.



نقاط کلیدی را در خود نگاشت گذاشته تا کل دقیق بدست آید.

۷- خاصیت انعکاس $\left(w=\frac{1}{z}\right)$:

$$w=\frac{1}{z} \rightarrow z=\frac{1}{w} \rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}$$

$$\rightarrow x+iy=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$ فرم دکارتی:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho=\dfrac{1}{r} \\ \varphi=-\theta \end{cases}$$ فرم قطبی:

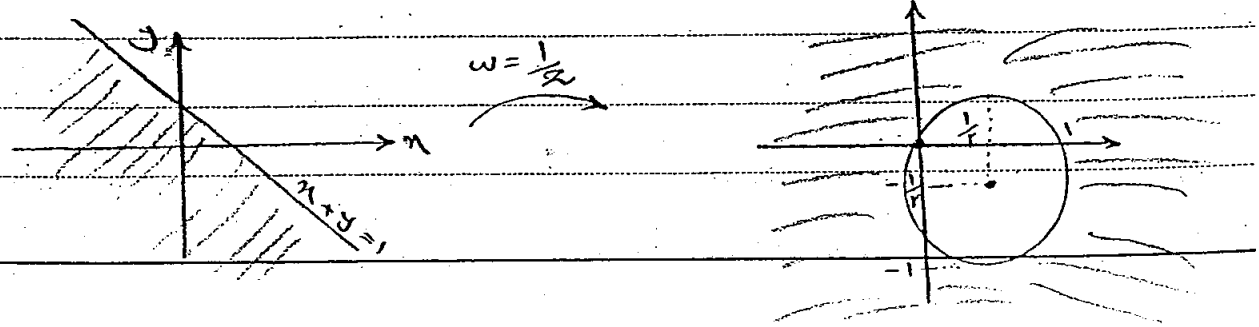
مثال: تصویر ناحیه $x+y\leq 1$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

که خاصیت دکارتی است و فرم دکارتی را برای می‌دهیم

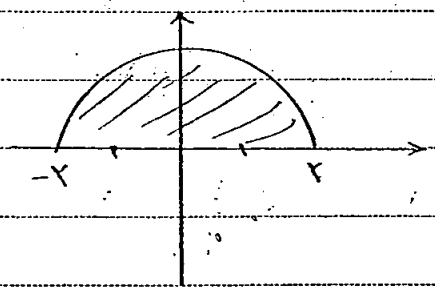
$$x+y\leq 1 \rightarrow \frac{u}{u^2+v^2}+\frac{-v}{u^2+v^2}\leq 1 \rightarrow u-v\geq u^2+v^2$$

$$\rightarrow u^2-u+v^2+v\leq 0 \xrightarrow{\text{مربع کامل کرده}} \left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\leq 0$$

$$\rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$ خارج دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$

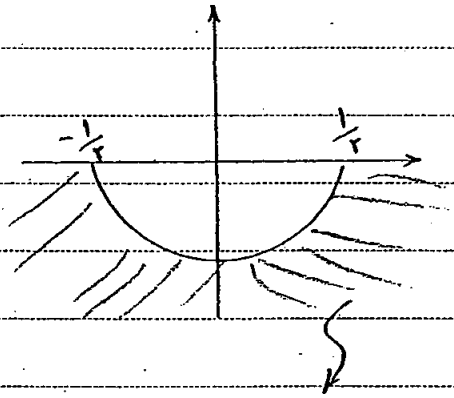


مثال: تصویر $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ از یک نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.



$$0 \le r \le 2 \rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{r} < \infty \rightarrow \frac{1}{2} \le \rho < \infty$$

ربع اول و چهارم $0 \le \theta \le \pi \rightarrow -\pi \le -\theta \le 0 \rightarrow -\pi \le \phi \le 0$



خارج دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

۸ نگاشت $w = \sin z$:

$$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

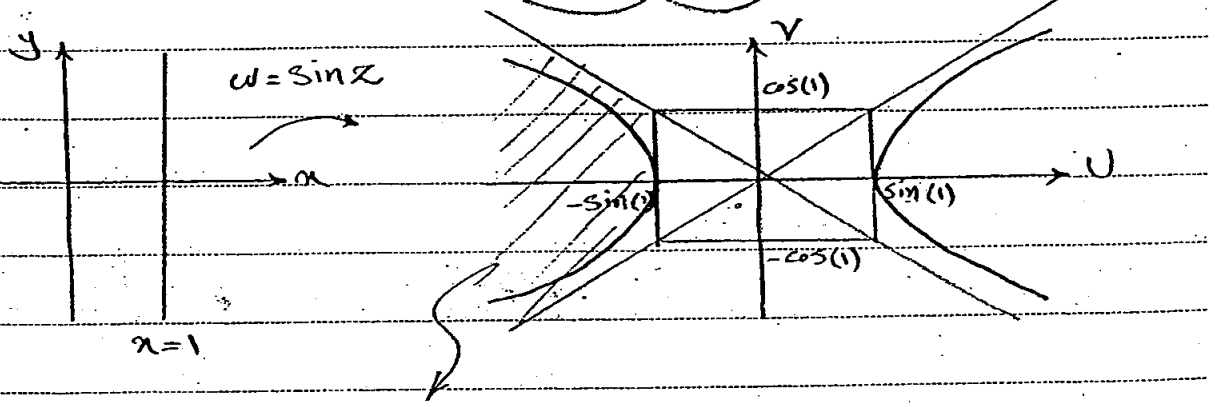
$$= \underbrace{\sin x \cosh y}_{u} + i \underbrace{\cos x \sinh y}_{v} \rightarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

مثال: تصویر خط $x=1$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ را بیابید.

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} u = \sin(1) \cosh y \\ v = \cos(1) \sinh y \end{cases}$$

حال چون ما رابطه‌ای بین u و v را می‌خواهیم داریم:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \rightarrow \frac{u^2}{\sin^2(1)} - \frac{v^2}{\cos^2(1)} = 1$$ هذلولی



چون $u = \sin(1)\cosh y \geq \sin(1)$

همواره $\cosh(y)$ بزرگتر مساوی یک است.

تذکرات مهم:

مثال‌های حل شده نکاتی از کتاب حتماً خوانده شود.

حتماً نکاتی که sin ای در امتحان می‌آید خصوصاً یک مسئله صفحه ۱۳۱ و صفحه ۱۳۳

کتاب

«نگاشت‌های ترکیبی»

اگر داشتیم:

$$w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} w_1 = z + \frac{\pi}{2} & \text{انتقال} \\ w = \sin(w_1) & \text{سینوسی} \end{cases}$$

$$w = \cosh z = \cos(iz) = \sin\left(iz + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} w_1 = iz & \text{دوران} \\ w_2 = w_1 + \frac{\pi}{2} & \text{انتقال} \\ w = \sin(w_2) & \text{سینوسی} \end{cases}$$

$$w = \sinh z = -i\sin(iz) \quad \begin{cases} w_1 = iz & \text{دوران} \\ w_2 = \sin(w_1) & \text{سینوسی} \\ w = -iw_2 & \text{دوران} \end{cases}$$

$$w = \sin(\ln z) \rightarrow \begin{cases} w_1 = \ln z \\ w = \sin(w_1) \end{cases} \Rightarrow$$ مثالش در صفحه ۱۳۳ کتاب آمده

$$w = \frac{1}{z^2+1} \rightarrow \begin{cases} w_1 = z^2 & \text{توان} \\ w_2 = w_1 + 1 & \text{انتقال} \\ w = \frac{1}{w_2} & \text{انعکاس} \end{cases}$$

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲

مهم ترین نگاشت ترکیبی:

نگاشت موبیوس: $W = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

در نگاشت موبیوس مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- از ضریب z در صورت و z در مخرج فاکتور می گیریم.

۲- مخرج را در صورت تولید می کنیم.

۳- تفکیک صورت در مخرج انجام می دهیم

۴- ضریبی که در ابتدا فاکتور گرفته بودیم را ضرب می نمائیم

مراحل به فرم ریاضی:

$$(1): W = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$$

$$(2): = \frac{a}{c}\,\frac{\left(z+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{z+\frac{d}{c}}$$

$$(3): = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

ادامه ←

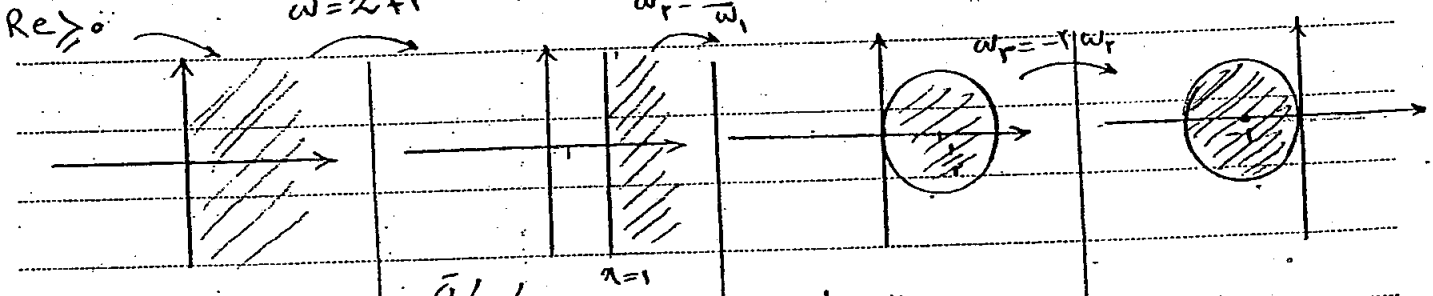
ادامه ←

$$④ \; = \underbrace{\frac{a}{c}}_{A} + \frac{\overbrace{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}^{B}}{z+\underbrace{\frac{d}{c}}_{C}}$$

$$w = A + \frac{B}{z+C} \rightarrow \begin{cases} w_1 = z + C & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = B w_2 & \text{دوران} \\ w = A + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$

مثال: تصویر $Re(z) \geq 0$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-1}{z+1}$ را بیابید.

$$w = \frac{(z+1)-2}{z+1} = 1 + \frac{-2}{z+1} \rightarrow \begin{cases} w_1 = z+1 & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = -2 w_2 & \text{دوران} \\ w = 1 + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$



انعکاس دکارتی

$x \geq 1 \rightarrow \frac{u}{u^2+v^2} \geq 1$

$u^2 - u + v^2 \leq 0$

$(u-\frac{1}{2})^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}$

$|-2| = 2$

$\arg(-2) = \pi + \arctan(0)$

$= \pi$

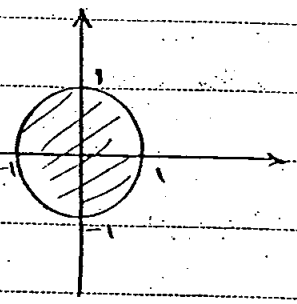
Subject:

Year. ۱۴۰۵ Month. ۲ Date. ۱۲ ( )

۱۸۹

ادامه حل:

$w = 1 + w_2$



نگاشت سه نقطه:

نگاشتی که سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 را به ترتیب به روی w_1 و w_2 و w_3 بنگارد،

«موبیوس» است و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\times\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

مثال: نگاشتی را بیابید که سه نقطه 0 و 1 و i را به ترتیب بر روی -1 و ∞ و 0 بنگارد.

z_1 z_2 z_3 w_1 w_2 w_3

* حتماً، حتماً باید ترتیب رعایت شود و حال در فرمول قرار می‌دهیم:

$$\frac{w+1}{w-0}\times\cancel{\frac{\infty-0}{\infty+1}}=\frac{z-0}{z-i}\times\frac{1-i}{1-0}$$

اگر $\frac{\infty}{\infty}$ شد صورت و مخرج را باهم ساده می‌کنیم. زیرا:

$$\frac{\infty-0}{\infty+1}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{\cancel{t}+1}=1$$

$$\frac{w+1}{w}=\frac{z-iz}{z-i}\Rightarrow 1+\frac{1}{w}=\frac{z-iz}{z-i}\Rightarrow\frac{1}{w}=\frac{\cancel{z}-iz-\cancel{z}+i}{z-i}$$

$$\frac{1}{w}=\frac{-iz+1}{z-i}\Rightarrow w=\frac{z-i}{-iz+i}$$

حتماً حتماً باید تست کنیم یعنی z_1 و z_2 و z_3 را قرار داده تا w_1 و w_2 و w_3 بدست آید.

نگاشت موبیوس.