آمار و احتمال مهندسی
فصل اول آمار توصـــیفی

مقدمه

امروزه در علوم پایه و مهندسی به دفعات نـاز به جمع آوری اطلاعات در مورد مجموعه‌های از اشیاء و یا انسانها داریم که این امر بر عهده علم آمار می‌باشد و با کمک آمار توصیفی می‌توان اطلاعات جمع آوری شده را به صورتی منظم گرد آوری نمود بطوریکه بتوان با یک نگاه اجمالی به نتایج بدست آمده یک دید کلی نسبت به کل داده‌ها بدست آورد.

در این فصل به چگونگی جمع آوری، اطلاعات و تجزیه و تحلیل آن با کمک نمودارها و پارامترهای مرکزی و پراکندگی می‌پردازیم.

۱-۱ تعاریف اولیه

جامعه آماری : به مجموعه‌ای از اشیاء یا افراد که حداقل یک ویژگی مشترک آنها مورد مطالعه قرار می‌گـیرد. جامعه آماری می‌گوییم. ویژگی‌های مشترک یک جامعه آماری از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند. که آنها را متغیر می‌نامند. متغیرها معمولاً به دو نوع تقسیم می‌شوند:

متغیر کمی : متغیرهایی می‌باشند که معمولاً قابل اندازه‌گیری هستند و می‌توان مقدار آنها را به صورت عددی نمایش داد مثل مقدار وزن، قد، حجم و ....

۱- متغیر کیفی : متغیرهایی می‌باشند که مستقیماً توسط اعداد و ارقام قابل اندازه‌گیری نیستند. مثل گروه خونی، شغل، رنگ چشم و ... که برای اندازه‌گیری این متغیرها به آنها عددی نسبت می‌دهیم.

متغیرهای کمی خود بر دو نوع هستند.

۱- گسسته : متغیرهایی که بین دو مقدار متصور آنها هیچ عدد دیگری وجود نداشته باشد.

۲- پیوسته : متغیرهایی که بین هر دو مقدار متصور آنها همواره عددی دیگری وجود دارد. مثل وزن یا طول و قد افراد.

پس از جمع آوری داده‌ها برای رسیدن به اهداف مورد نیاز به بررسی و تجزیه و تحلیل داده‌ها داریم که برای این منظور ابتدا داده‌ها را در یک جدول تنظیم و طبقه‌بندی می‌کنیم و سپس با استفاده از نمودارهای آماری نحوه توزیع داده‌ها را نمایش می‌دهیم و در نهایت داده‌ها را با کمک چند عدد به نام شاخص یا آماره خلاصه می‌کنیم.

۲-۱ جدول آماری

در جداول آماری علاوه بر داده‌ها، تعداد و درصد تکرار آنها نمایش داده می‌شود بطوریکه با یک نگاه به جدول می‌توان اطلاعات مفیدی در مورد پراکندگی و توزیع داده‌ها بدست آورد. یکی از متداول‌ترین جداول آماری جدول فراوانی است در جداول فراوانی همواره موارد زیر را خواهیم داشت:

۱- فراوانی: با شمردن تعداد دفعات تکرار هر داده در میان تمامی داده‌ها فراوانی آن داده بدست می‌آید. فرض کنید N داده داشته باشیم با قرار دادن داده‌های مشابه در یک دسته، در نهایت K طبقه خواهیم داشت $(K \le N)$ که تعداد داده‌ها در هر دسته را فراوانی آن داده می‌نامیم. فراوانی طبقه i ام را با f_i نمایش می‌دهیم که $1 \le i \le k$ و $1 \le f_i \le N$ و $\sum_{i=1}^{k} f_i = N$ (N تعداد کل داده‌ها)

۲- فراوانی نسبی : عبارتست از حاصل تقسیم فراوانی هر طبقه بر تعداد کل داده‌ها که آنرا با $i = 1, \cdots k$ ، $r_i = \frac{f_i}{N}$ نمایش می‌دهیم.

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

هم چنین اگر فراوانی نسبی را در عدد ۱۰۰ ضرب کنید درصد وقوع هر داده را در میان کل داده‌ها بدست می‌آورید.

۳- فراوانی تجمعی نسبی : حاصل جمع فراوانی هر طبقه با طبقات قبل از آنرا فراوانی تجمعی می‌نامیم و به $(1 \le i \le k)$ g_i نمایش می‌دهیم.

فراوانی تجمعی طبقه iام $= g_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_1 = \sum_{j=1}^{i} f_j$

به همین ترتیب حاصل جمع فراوانی نسبی هر طبقه با طبقات قبل آنرا فراوانی تجمعی نسبی می‌نامیم و به $s_i \ (1 \le i \le k)$ نمایش می‌دهیم

فراوانی تجمعی طبقه iام $= s_i = r_1 + r_2 + \cdots + r_1 = \sum_{j=1}^{i} s_j = s_i = \frac{1}{N} g_i$

توجه : در محاسبه g_i و s_i اگر x_i نماینده طبقه iام باشد می‌بایستی داده‌ها به صورت مرتب و از کوچک به بزرگ در جدول قرار داده شوند بطوریکه داشته باشیم $x_1 < x_2 < \cdots x_n$.

۱-۲-۱ جدول فراوانی برای داده های گسسته

در مثال زیر چگونگی تشکیل جدول فراوانی برای داده‌های گسسته را بیان می‌کنیم.

مثال ۱ : داده‌های زیر تعداد فرزندان تحت پوشش بیمه در ۳۰ خانواده را نشان می‌دهد.

5 , 4 , 2 , 1 , 1 , 1 , 3 , 3 , 3 , 2 , 0 , 5 , 0 , 2 , 2 , 2 ,2 , 4 , 4 , 1 , 0 , 1 , 1 , 3 , 2 , 5 , 2 , 1 , 0 , 3

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ برای تشکیل جداول فراوانی مرتب می‌کنیم:

0 , 0 , 0 ,0 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 ,2 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5 , 5 , 5

در این صورت ۶ طبقه بدست خواهد آمد. نماینده هر طبقه در ستون x_i و فراوانی ان در ستون f_i نوشته می‌شود به این ترتیب جدول زیر را خواهیم داشت:

x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۰	۴	۰/۱۳	۴	۰/۱۳
۱	۷	۰/۲۳	۱۱	۰/۳۶
۲	۸	۰/۲۶	۱۹	۰/۶۲
۳	۴	۰/۱۳	۲۳	۰/۷۵
۴	۴	۰/۱۳	۲۷	۰/۸۸
۵	۳	۰/۱	۳۰	۱
جمع	۳۰	۱		

با توجه به جدول می‌توان به نتایج زیر رسید:

۱- با توجه به عدد ۰/۲۶ در ستون فراوانی نسبی می‌توان نتیجه گرفت که ۲۶ درصد از خانوارها دارای ۲ فرزند می‌باشند.

۲- با توجه به عدد ۰/۷۵ در ستون فراوانی تجمعی نسبی می‌توان نتیجه گرفت که ۷۵ درصد خانوارها حداکثر دارای ۳ فرزند می‌باشند.

۱-۲-۲ جدول فراوانی برای داده‌ها پیوسته

مثال ۲ : داده‌های زیر طول عمر ۴۰ عدد لامپ را نشان می‌دهند که به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد شده‌اند.

11	9	12	15	20	13	14	17	23	22
8	16	17	21	11	18	21	12	11	10
14	13	19	16	15	17	20	8	7	13
15	17	16	14	22	12	11	9	18	19

زمانی که با داده‌های پیوسته کار می‌کنیم داده‌ها را به رده‌های (فاصله‌ها) با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و فراوانی داده‌ها را در هر رده بدست می‌آوریم. در این حالت نیاز به ثبت تمامی داده‌ها در جدول نمی‌باشد بلکه هر رده را به صورت مرتب از کوچک به بزرگ در جدول ثبت می‌کنیم.

در این حالت روند به این صورت است که :

۱- از آنجا که هر عدد به نزدیکترین عدد صحیح گرد شده است پس مثلاً عدد ۱۲ در واقع عددی بین (۱۲/۵ و ۱۱/۵) بوده است برای اینکه این مقدار نیز در عملیات وارد شود از مفهوم میزان تغیر پذیری داده‌ها که با s نمایش می‌دهیم استفاده می‌کنیم.

$$S=\frac{\text{واحد گرد شده داده‌ها}}{2}=\frac{1}{2}=0/5$$

۲- دامنه واقعی داده‌ها و کوچکترین و بزرگترین داده را به این ترتیب محاسبه می‌کنیم.

$\min=$ کوچکترین داده $\quad -S=7-0/5=6/5$

$\max=$ بزرگترین داده $\quad +S=23+0/5=23/5$

تغیرات داده‌ها دامنه $R=\max-\min=23/5-6/5=11$

۳- با توجه به دامنه داده‌ها می‌توان طول هر رده را معین نمود. برای این می‌بایستی دامنه را بر تعداد رده‌ها (که به صورت دلخواه قابل انتخاب است) تقسیم نمود.

طول رده $=\omega=\frac{R}{K}$ $\qquad$ $K=$ تعداد رده‌ها

معمولاً تعداد رده‌ها طوری انتخاب می‌شوند که هر رده حداقل پنج داده را در برداشته باشد می‌توان از فرمول $K=1+3/322\log_{10}^{N}$ برای تعیین تعداد رده استفاده نمود بنابر این:

$$K=1+3/3222\log_{10}^{40}=6/322\cong 7\ \Rightarrow\ \omega=\frac{17}{7}=2/4\cong 3$$

۴- حالا کافیست ۷ رده به طول ۳ در ستون اول جدول فراوانی ایجاد کنیم و مجدداً مطابق مثال قبل جدول را کامل کنیم. اولین رده از کوچکترین عنصر آغاز می‌شود.

رده‌ها	خط و نشان	x_i	fi	r_i	g_i	s_i
6/5−9/5	卌	۸	۵	0/125	۵	0/125
9/5−12/5	卌 |||	۱۱	۸	0/2	۱۳	0/325
12/5−15/5	卌 ||||	۱۴	۹	0/225	۲۲	0/55
15/5−18/5	卌 ||||	۱۷	۹	0/225	۳۱	0/775
18/5−21/5	卌		۲۰	۶	0/15	۳۷	0/925
21/5−24/5	|||	۲۳	۳	0/075	۴۰	1/0
جمع			۴۰			

توجه شماره ۱ :

- x_i معرف نماینده هر رده است که عضو میانی رده می‌باشد.
- چون آخرین رده شامل هیچ عضوی نبود آنرا حذف می‌کنیم مثلاً در این مثال رده ۲۴/۵-۲۷/۵ شامل هیچ عضوی نیست بنابر این حذف می‌شود.

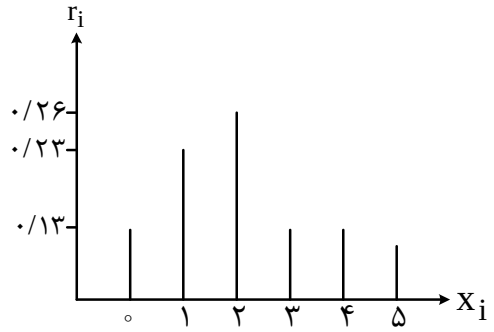
۱-۳ نمودارهای آماری

یکی دیگر از روشهای مناسب برای خلاصه نمودن داده‌های آماری استفاده از نمودار می‌باشد. نمودارها بهترین ابزار برای نمایش نحوه توزیع داده‌ها می‌باشند که در ذیل معروفترین آنها را معرفی می‌کنیم.

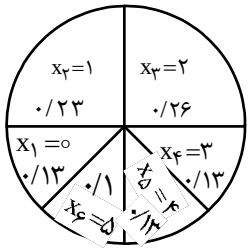
۱-۳-۱ نمودارهای آماری برای داده‌های گسسته

۱- نمودارهای میله‌ای:

در این نمودار محور x ها نمایش دهنده مقادیر داده‌ها و محور y ها نمایش دهنده فراوانی نسبی می‌باشد. چون فراوانی نسبی داده‌های هر جامعه آماری مقادیر بین صفر و یک را می‌گیرد بنابر این می‌توان چندین نمودار را با یکدیگر مقایسه نمود. شکل نمودار میله‌ای را برای مثال ۱ نمایش می‌دهد.



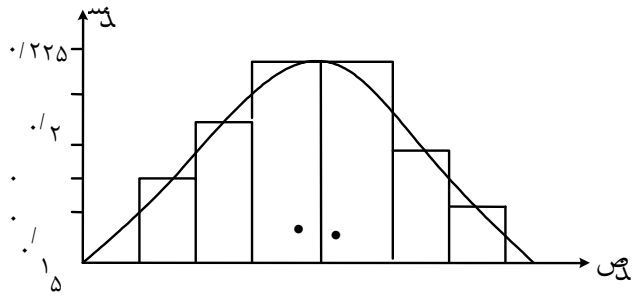
۳- نمودار دایره‌ای : این نمودار درون دایره‌ای رسم می‌شود که به قطاع‌هایی تقسیم شده است و هر قطاع متناسب با مساحت خود معرف یکی از فراوانی‌های نسبی در جدول فراوانی می‌باشد. شکل زیر نمایش دهنده نمودار دایره‌ای برای مثال ۱ می‌باشد.



۲-۳-۱ نمودارهای آماری برای داده‌های پیوسته

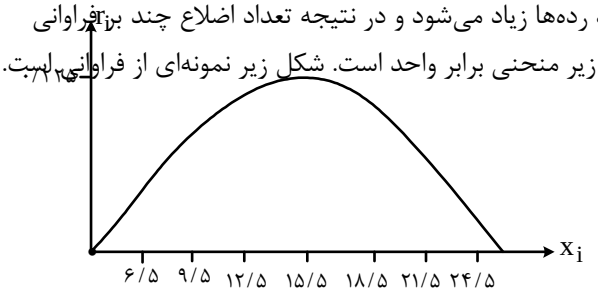
همانطور که در جدول فراوانی مشاهده کردید تفوت عمده رده‌های پیوسته با گسسته در بکارگیری رده‌ها می‌باشد این امر در نمودارها نیز کاملاً صادق است. در این قسمت سه نمودار را که برای نمایش داده‌های پیوسته بکار می‌روند معرفی می‌کنیم.

۱- هیستوگرام (نمودار ستونی) : این نمودار کاملاً مشابه نمودار میله‌ای می‌باشد با این تفاوت که محور xها نمایش دهنده رده‌های جدول فراوانی است و به ازای هر رده مستطیلی که عرض آن یک واحد و ارتفاع آن معادل فراوانی نسبی آن رده است رسم می‌شود. بنابر این مجموع مساحتهای مستطیل‌های رسم شده برابر واحد می‌باشد که همان مجموع کل فراوانی نسبی‌ها است. شکل زیر نمودار هستیوگرام برای مثال ۲ می‌باشد.



۲- چند برابر فراوانی: اگر در نمودار هستیوگرام وسط قاعده‌های بالای مستطیل‌ها را به یکدیگر توسط خطوطی به صورت متوالی متصل کنیم نمودار چند برابر فراوانی بدست می‌آید که در شکل بالا نیز نشان داده شده است. ابتدای خطوط به وسط رده ماقبل و انتهای خطوط به وسط رده مابعد مستطیلهای هستیوگرام متصل می‌شوند به این ترتیب مساحت زیر نمودار چند بر فراوانی مجدداً برابر واحد خواهد بود.

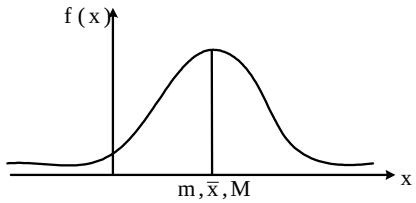
۳- منحنی فراوانی: در صورتی که تعداد داده‌ها زیاد باشد و طول رده‌ها کوچک، تعداد رده‌ها زیاد می‌شود و در نتیجه تعداد اضلاع چند برابر فراوانی افزایش یافته و در نهایت مشابه یک منحنی خواهد شد که در این حالت نیز مساحت زیر منحنی برابر واحد است. شکل زیر نمونه‌ای از فراوانی است.

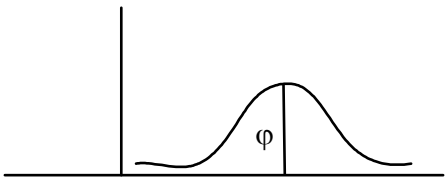


متغیر تصادفی نرمال: اگر مجموعه داده‌های X دارای میانگین $\bar{x}$ و واریانس σ^2 باشند و نمودار آنها از تابع

$$(-\infty < x < +\infty) \qquad f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2^2}}$$

تبعیت کند می‌گوییم متغیر تصادفی X نرمال می‌باشد. نمودار متغیر تصادفی نرمال نسبت به خط $x=\bar{x}$ متقارن می‌باشد. به شکل زیر توجه کنید.





همچنین با افزایش مقدار δ نمودار در راستای محور xها کشیده تر می‌شود.

با افزایش مقدار $\bar{x}$ نمودار به سمت راست و با کاهش آن به سمت چپ جابجا می‌شود.

۱-۴ پارامترهای مرکزی و پراکندگی

از آنجا که با مطالعه یک جامعه آماری تعداد زیادی داده بدست می‌آوریم و مطالعه روی تک تک یا قسمتی از این داده‌ها مشکل و حتی غیر ممکن است همواره علاقه داریم این داده‌ها را با کمک شاخص‌ها و پارامترهایی خلاصه کنیم تا بتوان با یک نگاه اجمالی به آن یک دید کلی نسبت به کل داده‌ها و جامعه آماری بدست آورد. بنابر این پارامترهای مرکزی و پراکندگی را معرفی می‌کنیم.

۱-۴-۱ پارامترهای مرکزی

عموماً داده‌ها در جامعه آماری یکنوع تجمع .و فشردگی حول یک مقدار خاص از صفت مورد مطالعه را بوجود می‌آورند که این مقدار خاص به عنوان یک پارامتر مرکزی معرفی می‌شود. مهمترین پارامترهای مرکزی عبارتند از: میانگین، میانه و مد (نما)

۱- میانگین: میانگین بر چند نوع است که معروفترین آنها میانگین حسابی، خندسی، همساز (هارمونیک) و درجه دوم می‌باشد.

الف) میانگین حسابی: اگر داده های $x_1, x_2, \ldots, x_k$ به ترتیب دارای فراوانی $f_1, f_2, \ldots, f_k$ باشند و تعداد کل این داده‌ها N باشد $\bar{X}$ یا میانگین حسابی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} f_i\, x_i$$

برای داده‌های پیوسته x_i را نماینده هر رده در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال میانگین حسابی برای مثال ۱ و ۲ عبارتست از:

$$\text{مثال}1 \;:\; \bar{X} = \frac{1}{30}\,(4\times0+7\times1+8\times2+4\times3+4\times4+3\times5) = 2/2$$

$$\text{مثال}2 \;:\; \bar{X} = \frac{1}{40}\,(8\times5+11\times8+14\times9+17\times9+20\times6+23\times3) = 14/9$$

ب) میانگین هندسی: در صورتی که همگی داده‌ها مثبت باشند میانگین هندسی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$G=\left(\prod_{i=1}^{N} x_i^{f_i}\right)^{\frac{1}{N}}$$

ج: میانگین همساز: (همنوا یا هارمونیک) : اگر هیچکدام از داده ها صفر نباشد می‌توان میانگین همساز را از طریق فرمول محاسبه نمود.

$$H=\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}$$

در حالت کلی رابطه $H \le G \le \overline{X}$ بین این سه میانگین برقرار است. که حالت تساوی زمانی رخ می دهد که همگی داده‌ها برابر باشند.

۲- میانه: با مرتب نمودن داده‌ها به صورت غیر نزولی عدد m را بعنوان میانه آنها در نظر می‌گیریم اگر تقریباً نیمی از داده‌ها سمت چپ آن و نیمی دیگر در سمت راست آن قرار داشته باشند.

همچنین با توجه به جدول فراوانی، میانه کوچکترین مقدار x است که فراوانی تجمعی آن بیشتر یا مساوی با $\frac{N}{۲}$ باشد.

- برای داده‌های گسسته در صورتی که داده‌ها را به صورت غیر نزولی مرتب کنیم اگر تعداد داده‌ها فرد باشد میانه داده وسطی یا به عبارتی $m=x_{(\frac{n+1}{2})}$ خواهد بود و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه میانگین دو داده وسطی می‌باشد

$$m=\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \qquad ; m=\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}=\frac{2+2}{2}=4$$

- برای داده‌های پیوسته ابتدا می‌بایستی رده میانه دار را پیدا نمود. رده میانه دار اولین رده‌ای است که فراوانی تجمعی نسبی آن از ۰/۵ بیشتر است. میانه عددیست که در این رده قرار دارد. حال برای محاسبه آن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$m=L_{0/5}+\frac{(0/5N-g_{0/5})\omega}{f_{0/5}}$$

که در آن :

$L_{0/5}$: کران پایین رده میانه دار

N : تعداد داده ها

$g_{0/5}$: فراوانی تجمعی رده قبل از رده میانه دار

$f_{0/5}$: فراوانی رده میانه دار

ω : طول رده

به عنوان مثال میانه برای مثال ۱ با توجه به تعداد زوج داده‌ها عبارتست از:

برای مثال ۲ نیز میانه برابر است با:

$$m=12/5+\frac{(0/5\times 40-13)3}{9}=14/8$$

۳- مد یا نما: داده‌ای که فراوانی آن از سایر داده‌ها بیشتر باشد مد یا نما گفته می‌شود و با M نمایش داده می‌شود.

الف) روش محاسبه مد برای داده‌های گسسته: پس از بدست آوردن فراوانی داده، داده‌های که فراوانی آن از بقیه بیشتر باشد مد می‌باشد در این صورت سه حالت زیر پیش می‌آید: (که در مثال زیر به آن می‌پردازیم)

مثال ۳ : برای داده‌های مثال ۱ تنها عدد ۲ دارای بیشترین فراوانی می‌باشد. پس عدد ۲ مقدار مد خواهد بود. اما برای داده‌های ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۲ و۱ و ۱ و ۱ چون فراوانی ۱ و ۲ برابر است و این دو عدد به صورت متوالی قرار گرفته‌اند در این حالت مد برابر است با میانگین این دو عدد:

$$M=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

اما برای داده‌های ۴ و ۴ و۲ و ۲ و ۱ و ۱، فراوانی ۱ و ۴ مساوی می‌باشد ولی مجاور یکدیگر نیستند دو مقدار برای مد خواهیم داشت که عبارتند از:

$$M_1 = 1 \qquad M_2 = 4$$

توجه کنید در صورتی که فراوانی همه داده‌ها برابر باشد داده‌ها بدون مد در نظر گرفته می‌شوند.

ب) محاسبه مد برای داده‌های پیوسته: رده‌ای که فراوانی آن از سایر رده‌ها بیشتر است را به عنوان رده نمایی انتخاب می‌کنیم در این حالت می‌توان نماینده رده را به عنوان مد یا نما انتخاب کرد. اما برای محاسبه دقیق تر از فرمول زیر نیز می‌توان استفاده نمود:

$$M = L_M + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2}\right)\omega$$

L_M: کران پایین رده نمایی.

D_1: اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمایی و رده قبل از آن.

D_2: اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمایی و رده بعد از آن.

ω: طول رده.

در مثال ۲ داریم:

$$M_1 = 14 \quad ; \quad M_2 = 17$$

$$M = \frac{14+17}{2} = 15/5$$

و یا بصورت دقیق تر:

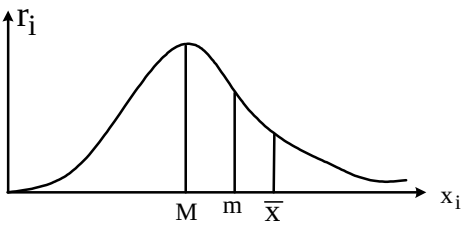
$$M_1 = 12/5 + \left(\frac{0/025}{0/025+0}\right) \times 3 = 15/5$$

$$M_2 = 15/5 + \left(\frac{0}{0+0/075}\right) \times 3 = 15/5$$

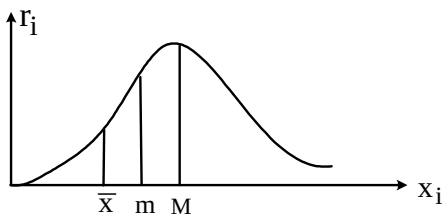
$$\Rightarrow M = 15/5$$

۱-۵ چولگی توزیع فراوانی

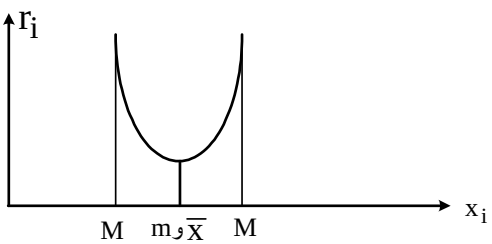
با رسم نمودار فراوانی داده‌های پیوسته عموماً یکی از اشکال زیر بدست می‌آید. که چگونگی قرار گرفتن میانگین و میانه و مد را در اشکال زیر مشاهده می‌شود.



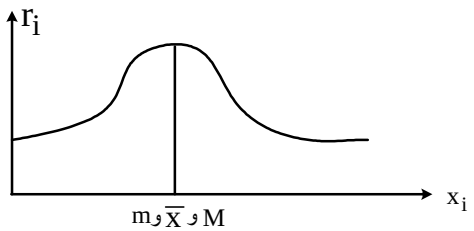
چوله به‌راست $M < m < \overline{X}$



چوله به‌چپ $\overline{X} < m < M$



متقارن $m = \overline{X} = M$



متقارن $M = \overline{X} = m$

برای محاسبه میزان عدم تقارن منحنی، شاخصی به نام B_1 (ضریب چولگی) وجود دارد که در فصل‌های بعدی با آن آشنا می‌شوید.
در توزیع‌هایی که چولگی زیاد نباشد رابطه تجربی زیر که به رابطه پیرسن معروف است برقرار می‌باشد.

$$\overline{X} - M \cong 3(\overline{X} - m)$$

مقدار عدم تقارن منحنی که با ضریب چاولگی سنجیده می‌شود را با نمودار نرمال مقایسه می‌کنیم برای بدست آوردن ضریب چاولگی از مفهوم گشتاور مرتبه kام طول میانگین (گشتاور مرکزی مرتبه kام) استفاده می‌کنیم. که عبارتست از :

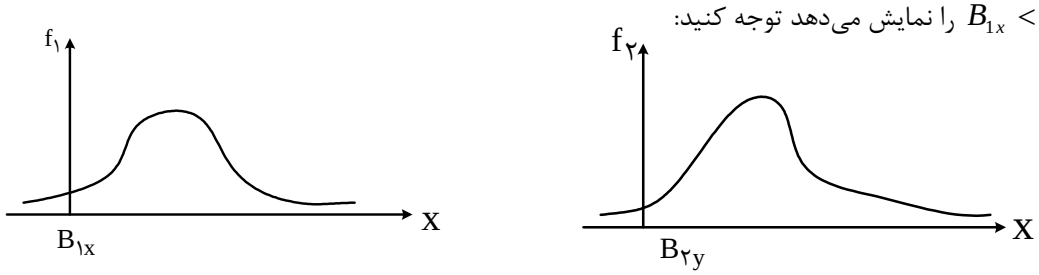
$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \ (x_i - \overline{x})^k$$

ضریب چاولگی که با B_1 نمایش داده می‌شود میزان عدم تقارن منحنی را نسبت به منحنی نرمال نمایش می‌دهد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\delta^3}$$

در صورتی که منحنی متقارن باشد مقدار B_1 برابر صفر می‌باشد و هر چه B_1 مقدار بزرگتری داشته باشد نشان دهنده افزایش عدم تقارن می‌باشد.

به شکل زیر که دو مقدار $B_{1x} < B_{1y}$ را نمایش می‌دهد توجه کنید:

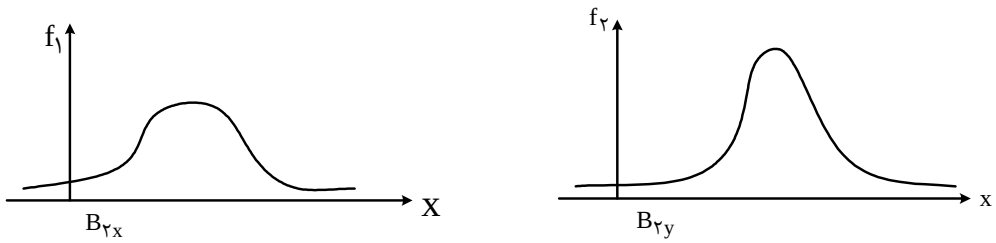


ضریب کشیدگی : نشان دهنده میزان کشیدگی منحنی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\delta^4}$$

دو منحنی زیر متقارن می‌باشند اما ضریب کشیدگی در آنها متفاوت است.

$B_{2x} < B_{2y}$



۱-۶ پارامترهای پراکندگی

شاخص های مرکزی تنها یک منطقه را به عنوان محل تمرکز داده ها معرفی می کنند حال آنکه ممکن است دو دسته داده با پراکندگی های متفاوت دارای میانگین برابری باشند به عبارتی نیاز به شاخصی برای نمایش میزان پراکندگی داده ها خواهیم داشت که در ادامه به معرفی این پارامترها می پردازیم.

۱- دامنه داده‌ها: حاصل تفاضل بزرگترین داده از کوچکترین داده را R یا دامنه داده‌ها گویند.

$$R = X_N - X_۱$$

که در آن داده‌ها به فرم $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_N$ با فرض اینکه مرتب شده‌اند.

این شاخص معیار خوبی برای محاسبه میزان پراکندگی داده‌ها نیست. زیرا در محاسبه تنها کوچکترین و بزرگترین داده وارد می‌شود.

مثال ۴ : نمرات ۱۰ دانش آموز در دو کلاس متفاوت در درس ریاضی به قرار زیر است:

کلاس A :۰ , 4 , 4 , 12 , 12 , 12 , 14 , 16 , 16 , 20

کلاس B :8 , 8 , 9 , 9 , 12 , 12 , 12 , 13 , 13 , 14

با محاسبه مقادیر $\overline{X}$ و m و M دیده می‌شود که برای هر دو کلاس داریم:

$$\overline{X} = ۱۱ \quad , \quad M = ۱۲ \quad , \quad m = ۱۲$$

اما با توجه به مقادیر تک تک نمرات واضح است که میزان پراکندگی نمرات در دو کلاس کاملاً متفاوت است و برای این منظور نیاز به شاخص‌های پراکندگی می‌باشد تا این مطلب را بتوان با مقایسه آنها نشان داد.

برای دو کلاس مقدار دامنه را محاسبه می‌کنیم:

کلاس A : $R = ۲۰ - ۰ = ۲۰$

کلاس B : $R = ۱۴ - ۸ = ۶$

۲- میانگین انحرافات: فاصله داده x_i از میانگین را انحراف از میانگین داده x_i گویند که به صورت $|x_i - \overline{x}|$ محاسبه می شود. اگر این مقدار را برای تمامی داده‌ها محاسبه کنیم و از نتیجه میانگین بگیریم میانگین انحرافات بدست خواهد آمد که عبارتست از : $D = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{K} f_i\,|x_i - \overline{x}|$.

از آنجا که میانگین انحرافات به تمام داده‌ها وابسته است معیار مناسبی برای سنجش پراکندگی داده‌ها محسوب می‌شود اما بدلیل وجود قدر مطلق در فرمول، محاسبه آن مشکل است و نمی‌توان آنرا ساده نمود بنابر این از واریانس و انحراف استاندارد استفاده می‌کنیم.

۳- واریانس و انحراف استاندارد: میانگین مجذور انحرافات را واریانس می‌نامیم و با نماد ∂ یا $S_b^۲$ نمایش می‌دهیم. که عبارتست از:

$$S_b^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{K} f_i\,(x_i - \overline{x})^۲$$

در مبحث استنباط آماری واریانس را از مجموع مجذور انحرافات داده ها تقسیم بر $N-۱$ بدست می‌آورند و آنرا با $S^۲$ نمایش می‌دهند.

$$S^۲ = \frac{۱}{N-۱}\sum_{i=۱}^{K} f_i\,(x_i - \overline{x})^۲$$

در مباحث این درس هر جا صحبت از واریانس می‌کنیم منظور $S^۲$ می‌باشد.

اگر از واریانس جذر بگیریم یعنی $S = \sqrt{s^۲}$ در این صورت S را انحراف استاندارد می‌نامیم که مغیار مناسبی برای سنجش پراکندگی می‌باشد.

همچنین $S^۲$ را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$S^۲ = \frac{۱}{N-۱}\left[\sum_{i=۱}^{K} f_i\,x_i^۲ - \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{K} f_i\,x_i)^۲\right] = \frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{i=۱}^{K} f_i\,x_i^۲ - n\,\overline{x}^۲\right]$$

اثبات:

$$S^{۲} = \frac{۱}{N-۱}\sum_{i=۱}^{N} f_i\,(x_i-\overline{x})^{۲} = \frac{۱}{N-۱}\sum_{i=۱}^{n} f_i\,(x_i^{۲}-۲\overline{x}_i\,\overline{x}+\overline{x})$$

$$=\frac{۱}{N-۱}\,(\sum_{i=۱}^{n} f_i\,x_i^{۲}) - ۲n\,\overline{x}^{۲}+n\,\overline{x}^{۲} = \frac{۱}{N-۱}\,(\sum_{i=۱}^{n} f_i\,x_i^{۲}) - n\,\overline{x}^{۲}$$

مثال ۵: مقدار واریانس را برای مثال ۲ محاسبه کنید:

$$\overline{X} = ۱۴/۹ \qquad N=۴۰$$

$$S^{۲}=\frac{۱}{۴۰-۱}\left[(۵۰\times۶۴ + ۸\times ۱۲۱ +۹\times۱۹۶ + ۹\times(۱۷)^{۲}+۶\times۴۰+۳\times(۲۳)^{۲}-۴۰\times۱۴۹)^{۲}\right]$$

۴- ضریب تغییرات : در محاسبه میزان پراکندگی داده‌ها همواره با داده‌هایی سروکار داریم که با مقیاس‌های مختلفی اندازه‌گیری شده‌اند بنابر این برای مقایسه میزان پراکندگی داده‌های بدست آمده از دو جامعه آماری که با مقیاس‌های مختلفی اندازه‌گیری شده‌اند استفاده از واریانس مناسب نمی‌باشد زیرا واریانس به مقیاس اندازه‌گیری وابسته می‌باشد بنابر این از مقیاس مناسبتری به نام ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم که از رابطه $CV = \frac{S}{\overline{X}}$ بدست می‌آید و معمولاً با ضریب آن در عدد صد بر حسب درصد بیان می‌شود.

مثال ۶: یک کارخانه تولید لاستیک دو نوع محصول A و B تولید می‌کند. لاستیک نوع A دارای میانگین طول عمر ۲۰۰۰۰ کیلو متر و انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلو متر می‌باشد و لاستیک نوع B دارای میانگین طول عمر ۱۸۰۰۰ کیلو متر و انحراف استاندارد ۲۰۰ کیلو متر می‌باشد، کدام نوع لاستیک برای خرید مناسب‌تر می‌باشد؟

$$X_A = ۲۰۰۰۰ \qquad \overline{X}_B = ۱۸۰۰۰ \qquad \Rightarrow \qquad CV_A = \frac{۲۰۰۰}{۲۰۰۰۰} = ۰/۱$$

$$S_A = ۲۰۰۰ \qquad S_B = ۲۰۰ \qquad \Rightarrow \qquad CV_B = \frac{۲۰۰}{۱۸۰۰۰۰} = ۰/۰۱$$

$$CV_A = ۰/۱\times۱۰۰ = \%۱۰$$

$$CV_A = ۰/۰۱\times۱۰۰ = \%۱$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید میانگین طول عمر لاستیک دوم از لاستیک اول کمتر است ولی با توجه به اینکه ضریب تغییرات لاستیک دوم کمتر از لاستیک اول است خرید لاستیک دوم به صرفه‌تر می‌باشد.

۱-۷ تغییر مقیاس و مبدأ

داده‌ها را با واحدهای متفاوتی می توان از جامعه آماری جمع آوری نمود به عنوان مثال فرض کنید داده‌های مربوط به وزن ۴۰ نفر از دانشجویان یک کلاس را با واحد کیلوگرم جمع آوری کرده باشید و بخواهید مقادیر میانگین و واریانس را بر حسب پاوند بدست بیاورید برای این منظور نیازی به محاسبه مجدد میانگین و واریانس نمی‌باشد بلکه کافیست از روش تغییر مقیاس و مبدأ استفاده کنید.

۱-۷-۱ تغییر مقیاس

اگر تمامی داده‌ها در عدد a ضرب شوند در این صورت داریم:

$$x_۱, x_۲, \ldots, x_n \quad\rightarrow\quad ax_۱, ax_۲, \ldots, ax_n$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n} x_i \quad\rightarrow\quad \overline{X}_a = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n} ax_i = a\,(\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n} x_i) = a\,\overline{X} \quad\Rightarrow\quad \overline{X}_a = a\overline{X}$$

به همین ترتیب برای محاسبه واریانس بدست می‌آید:

تمرین ۱ :

$$S_a^۲ = a^۲ S^۲ \quad \rightarrow \quad S_a = |a|\, S$$

$$S_a = \frac{۱}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(a x_i - a\bar{x})^۲ = a^۲ \frac{۱}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ = a^۲ S^۲$$

$$\Rightarrow S_a = \sqrt{a^۲ S^۲} = |a|\, S$$

تمرین ۲ :

$$X \rightarrow X + b$$

$$\bar{X}_b = \bar{X} + b$$

$$\bar{X}_b = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n}(x_i + b) = \frac{۱}{n}\left[\sum_{۱}^{n} x_i + \sum_{۱}^{n} b\right] = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n} x_i + \frac{b}{n}\sum_{۱}^{n}(۱) = \bar{X} + b\frac{n}{n} = \bar{X} + b$$

$$S_b^۲ = S^۲$$

$$S_b^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(x_i + \cancel{b} - \bar{X} - \cancel{b})^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ = S^۲$$

تمرین ۳ –

$$X \rightarrow Y = aX + b$$

$$\bar{Y} = a\bar{X} + b \quad , \quad S_Y^۲ = a^۲ S^۲$$

اثبات : $\bar{Y} = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n}(ax_i + b) = \frac{a}{n}\sum_{۱}^{n} x_i + \frac{bn}{n} = a\bar{X} + b$

$$S_Y^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(ax_i + \cancel{b} - a\bar{x} - \cancel{b})^۲ = \frac{a^۲}{n-۱}\sum_{۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ = a^۲ S^۲$$

استاندارد سازی

مثال : نمره علی از امتحان فیزیک و ریاضی به ترتیب برابر ۴۰ و ۶۰ شده است اگر میانگین نمرات امتحان فیزیک و ریاضی به ترتیب برابر ۲۰ و ۵۰ باشد و انحراف معیار امتحان فیزیک و ریاضی به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد علی کدام درس را بهتر امتحان داده است.

حل: برای اینکه بتوان نمرات دو درس را با یکدیگر مقایسه نمود می‌بایستی ابتدا نمرات را استاندارد سازی نمود و سپس آنها را با یکدیگر مقایسه نمود.

نمرات استاندارد شده علی در درس ریاضی $= \frac{۶۰ - ۵۰}{۲} = ۵$

نمرات استاندارد شده علی در درس فیزیک $= \frac{۴۰ - ۲۰}{۱} = ۲۰$

با وجود اینکه نمره علی در درس فیزیک کمتر از ریاضی می‌باشد اما با استاندارد نمودن نمره دو درس مشاهده می‌کنیم که نمره وی در درس فیزیک بالاتر از درس ریاضی می‌باشد به عبارتی علی درس فیزیک را بهتر از درس ریاضی امتحان داده است.

۱-۷-۲ تغییر مبدأ

در صورتی که به تمام داده‌ها مقدار b را اضافه یا کم کنیم می‌توان نشان داد که مقادیر $\overline{X}$ و S^2 جدید از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\overline{X}_b = \overline{X} + b$$
$$S_b^2 = S^2$$

تغییر مبدأ روی واریانس بی تأثیر است

با اعمال همزمان تغییر مبدأ و مقیاس خواهیم داشت:

$$\overline{Y} = a\,\overline{X} + b$$
$$S_a^2 = a^2 S^2$$

مطالب فوق برای میانه و مد نیز صادق می‌باشند و داریم:

$$m^1 = am + b$$
$$M^1 = a\,m + b$$

۱۳-۱ استاندارد سازی

از یک جامعه آماری n نمونه $x_1, x_2, \ldots x_n$ بصورت تصادفی انتخاب می‌کنیم بطوریکه میانگین و واریانس نمونه‌ها بترتیب $\overline{x}$ و S_x^2 می‌باشد. با توجه به تغییر مبدأ و مقیاس مقدار هر نمونه را از میانگین نمونه‌ها کم می‌کنیم و حاصل را بر S_x تقسیم می‌کنیم بنابر این داده‌های $y_1 = \frac{x_1 - \overline{x}}{S_x}$, $y_2 = \frac{x_2 - \overline{x}}{S_x}$, $y_n = \frac{x_n - \overline{x}}{S_x}$ را خواهیم داشت.

با محاسبه مقایر میانگین و واریانس داده‌های جدید داریم: $S_y^2 = (\frac{1}{S_x^2})\, S_x^2 = 1$; $\overline{y} = \frac{\overline{x} - \overline{x}}{S_x} = 0$

همانطور که ملاحظه می‌کنید داده‌های جدید دارای میانگین صفر و واریانس ۱ می‌باشند که به آنها داده‌های استاندارد شده می‌گوییم. همینطور اگر داده‌های x_1 تا x_n را با متغییر تصادفی X نمایش دهیم در این صورت $Y = \frac{X - \overline{x}}{S_x}$ فرم استاندارد شده یا صورت معیاری متغیر تصادفی X می‌باشد.

مسائل فصل اول :

۱- دو جامعه با اندازه‌های میانگین $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ و انحراف معیار S_1 , S_2 را با یکدیگر ادغام می‌کنیم ثابت کنید میانگین و انحراف معیار جدید از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\overline{X} = \frac{N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2}{N_1 + N_2}$$

$$S^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2}\ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$$

۲- میانگین و واریانس ۲ داده به ترتیب ۱۵ و ۵ می‌باشد. اگر به جای عدد ۲۵ اشتباهاً عدد ۱۵ را در محاسبات اعمال کرده باشیم میانگین و واریانس جدید را بدست بیاورید.

۳- نشان دهید تغیر مقیاس داده بر روی مقدار ضریب تغیرات $CV = \frac{S}{X}$ بی‌اثر می‌باشد، آیا این مطلب در مورد تغیر مبدأ نیز صادق است؟

۴- ثابت کنید برای میانگین حسابی، هندسی و همساز رابطه زیر برقرار است.

$$\overline{X}_H \le \overline{X}_G \le \overline{X}$$

۵- اگر میانگین را از داده‌های یک خامعه آماری کم کنیم و نتیجه را بر انحراف معیار تقسیم کنیم (یعنی $y_i = \frac{x_i - \overline{X}}{S}$) نشان دهید میانگین و انحراف معیار جدید به ترتیب صفر و یک می‌باشد.

۶- برای بدست آوردن یک معیار پراکندگی جدید داده‌ها را دو به دو با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و میانگین $n^۲$ داده جدید $(X_i - X_j)$ را با $S_{ij}^۲$ نمایش می‌دهیم:

$$S_{ij}^۲ = \frac{۱}{n^۲} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} (X_i - X_j)^۲$$

نشان دهید $S_{ij}^۲ = ۲S^۲$ (راهنمایی: داخل پرانتز مقدار $\overline{X}$ را اضافه و کم کنید)

۷- نشان دهید میانگین حسابی و واریانس نخستین n عدد طبیعی به ترتیب $\frac{n+۱}{۲}$ و $\frac{n^۲-۱}{۱۲}$ می‌باشد.

۸- جدول زیر را برای داده‌ها و فراوانی آنها در نظر بگیرید:

x	۰	۱	۲	...	n
f	$\binom{n}{۰}$	$\binom{n}{۱}$	$\binom{n}{۲}$	...	$\binom{n}{n}$

نشان دهید میانگین و واریانس این داده‌ها به ترتیب عبارتست از:

$$\overline{X} = \frac{n}{۲} \quad , \quad S^۲ = \frac{n}{۴}$$

۹- اگر متحرکی مسافت $x_۱$ را با سرعت $v_۱$ و ... و مسافت x_n را با سرعت v_n طی کنید ثابت کنید سرعت متوسط این متحرک با استفاده از رابطه میانگین همساز یا هارمونیک بدست می‌آید که در آن v_i معادل مقادیر داده‌ها و x_i معادل فراوانی آنهاست.

۱۰- عدد QP که $۰ < P < ۱$ را چندک Pام داده‌ها تعریف می‌کنیم هر گاه فراوانی تجمعی نسبی (r_i) آن بزرگتر یا مساوی با عدد P باشد. به عبارت دیگر هر گاه XP ۱۰۰٪ از داده‌ها قبل از آن قرار گیرند. به عنوان مثال $Q_{۰/۵}$ که به آن چارک دوم می‌گوییم همان میانه می‌باشد چرا که ۵۰٪ داده‌ها قبل از آن قرار دارند. در حالت کلی $Q_{۰/۲۵}$ و $Q_{۰/۵}$ و $Q_{۰/۷۵}$ را به ترتیب با $Q_۱, Q_۲, Q_۳$ نمایش می‌دهیم و به آنها چارکهای اول و دوم و سوم می‌گوییم.

الف) اگر برای داده‌های گسسته x_i داشته باشیم $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_i < \cdots x_N$ انگاه نشان دهید $Q_P = (۱-\omega)\, x_r + \omega x_{r+۱}$ که در آن $r = (n+۱)P \quad , \quad \omega = (n+۱)P - r$.

ب) برای داده‌های پیوسته رده‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی با عددP باشد را رده QP می‌نامیم
نشان دهید چندک Pام برای داده‌های پیوسته از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Q_P = L_p + \frac{(n\,p - g_p)}{f_p}$$

که در آن :

L_P : کران پایین رده QP

g_P : فراوانی تجمعی رده قبل از رده QP

f_P : فراوانی رده QP

ω : طول رده QP

۱۱- جدول زیر تعداد کتب فروخته شده توسط کتابفروشی را در طول ۳۰ روز نمای‌ش می‌دهد

۱۵	۱۰	۷	۲۰	۱۱	۱۳	۱۸	۶	۵	۴
۱۱	۱۹	۱۲	۱۶	۹	۱۰	۲۱	۱۳	۸	۱۴
۱۷	۲۰	۱۰	۱۲	۱۶	۱۳	۱۱	۱۲	۷	۱۱

برای داده‌های فوق :

الف: یک جدول فراوانی تشکیل دهید و نمودار میله‌ای داده‌ها را رسم کنید.

ب: میانگین داده‌ها $\overline{X}$ ، مد M و میانه m را بدست آورید.

ج: دامنه داده‌ها R، میانگین انحرافات، واریانس $S^{۲}$ و ضریب تغیر را بدست آورید.

د: اگر به بزرگترین داده مقدار x $[x \geq ۰]$ واحد اضافه کنیم کدامیک از مقادیر مد یا میانه بدون تغیر باقی می‌مانند.

ه: چارک اول و سوم را بدست آورید و دامنه چارکها را محاسبه کنید .(دامنه چارکها : $Q_{۳} - Q_{۱}$)

و: مقدار دهک چهارم را محاسبه کنید . (دهک چهارم همان $Q_{۰/۴}$ می‌باشد)

۱۲- در یک شهر میزان درجه حرارت در طول ۳۰ روز به قرار زیر است:

۵	۷	۸/۳	۱۰	۱۱	۱۲/۵	۱۳/۸	۱۳	۱۲	۱۳/۱
۱۴	۱۵/۲	۱۵/۶	۱۶	۱۵/۴	۱۵	۱۶/۵	۱۷	۱۹	۱۹/۷
۲۰/۶	۲۱	۲۱/۳	۲۰/۵	۲۲	۲۲/۸	۲۱/۷	۲۳	۲۴/۱	۲۵

الف: برای داده‌های فوق یک جدول فراوانی تشکیل دهید و هستیوگرام و چند بر فراوانی را رسم کنید

ب: مقادیر میانگین، میانه و مد را محاسبه کنید.

ج: مقادیر واریانس و ضریب تغیر را محاسبه کنید.

د: چند درصد داده‌ها در فاصله $(\overline{X}-S , \overline{X}+S)$ و چند درصد داده‌ها در فاصله $(\overline{X}-۲S , \overline{X}+۲S)$ قرار دارند؟

ه: چند درصد داده‌ها بین چارک اول و سوم قرار دارند؟

فصل دوم
آنالیز ترکیبی و احتمال

در این فصل ابتدا با روشها و قواعد شمارش آشنا می‌شوید. این قوانین به شما کمک می‌کنند که تعداد دفعات قوع یک حالت خاص از بین تمتمی حالات را به دست بیاورید. در ادامه با استفاده از نتایج بدت آمده و بکارگیری قوانین احتمالات، می‌توانید احتمال وقع یک حالت خاص را بدست آورید.

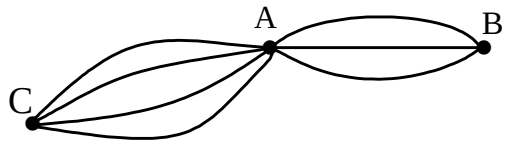
۲-۱ آنایز ترکیبی

یک سکه را در نظر بگیرید با پرتاب این سکه دو حالت ممکن است رخ بدهد. شیر یا خط حال اگر بخواهیم بدانیم با پرتاب ۳ عدد سکه چند حالت رخ می‌دهد می‌بایستی از قوانین شمارش استفاده کنیم.

به طور کلی تمامی قوانین شمارش مبتنی بر دو اصل ضرب و جمع می‌باشند. که با استفاده از این دو اصل می‌توان تمامی مسایل شمارش را به سادگی حل نمود.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به $n_۱$ طریق و کار دیگری را به $n_۲$ طریق انجام داد و این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه کار اول یا کار دوم را می‌توان به $n_۱+n_۲$ طریق انجام داد.

مثال ۱: فرض کنیم از شهر A بتوان به سه طریق به شهر B و به چهار طریق به شهر C سفر نمود. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B یا شهر C سفر نمود؟

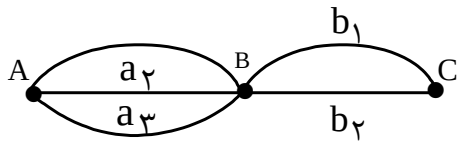


حل: کار اول را سفر از شهر A به B در نظر بگیرید که به $n_۱=۳$ طریق قابل انجام است همینطور کار دوم را سفر از شهر A به C ذر نظر بگیرید که به $n_۲=۴$ طریق قابل انجام است به وضوح هر دو کار نیز همزمان قابل انجام نیستند پس به $n=n_۱+n_۲=۷$ طریق می‌توان از شهر A به B یا C سفر نمود.

توجه: اصل جمع را می‌توان به n کار نیز تعمیم داد. به شرطی که هیچ دو جفت کاری را نتوان همزمان انجام داد.

اصل ضرب: اگر کاری را بتوان به $n_۱$ طریق و کار دیگری را به $n_۲$ طریق انجام داد واین دو کار را بتوان بصورت همزمان و یکی پس از دیگری انجام داد، آنگاه هر دو کار را می‌توان به $n_۱\times n_۲$ طریق انجام داد.

مثال ۱: فرض کنید از شهر A به سه طریق بتوان به شهر B سفر نمود. و از شهر B نیز به دو طریق به شهر C سفر نمود. به چند طریق می‌توان از شهر C سفر نمود؟



با توجه به شکل می‌بایستی ابتدا از شهر A به B و سپس به C سفر نمود که این دو عمل می‌بایستی ابتدا از شهر A به B و سپس به c سفر نمود مه این دو عمل می‌بایسی یکی پس از دیگری انجام شوند تا کل کار (سفر از شهر A بع C) انجام پذیرد. بنابر این کار اول سفر از شهر A به B که به $n_۱=۳$ طریق قابل انجام است و کار دوم سفر از شهر B به C $n_۲=۲$ طریث قابل انجام است را خواهیم داشت که کل کار را می‌توان به $n=n_۱\times n_۲=۳\times۲=۶$ طریق می‌وان انجام داد.

اگر راهها از شهر A به B را با a_i و از شهر B به C را با b_i نامگذاری کنیم این ۶ طریق را می‌توان به صورت زیر لیست نمود:

۱) $a_۱ b_۱$ ۳) $a_۲ b_۱$ ۵) $a_۳ b_۱$

۲) $a_۱ b_۲$ ۴) $a_۲ b_۲$ ۶) $a_۳ b_۲$

توجه: اصل ضرب را می‌وان به n کار نیز تعمیم داد به شرطی که تمتم کارها را یکی پس از دیگری و همزمان بتوان انجام داد.

مثال ۳: پرتاب ۳ سکه بصورت همزمان چند حالت ممکن را در پی دارد؟

پرتاب یک سکه به دو حالت ممکن شیر و خط امکان‌پذیر است حال سه کار را در نظر بگیرید که عبارتند از پرتاب سکه که هر کدام به دو طریق قابل انجام هستند و بناست این سه کار همزمان انجام شوند بنابراین کل حالات ممکن عبارتست از:

$$n=n_۱\times n_۲\times n_۳=۲\times ۲\times ۲=۸$$

این حالات را می‌توان در یک جامعه لیست نمود که به آن فضای نمونه گویند.

خط: خ شیر: ش

S={(ش و خ و ش) و (خ و ش و خ) و (ش و خ و خ) و (ش و ش و خ) و (خ و ش و ش) و (خ و خ و خ) و (خ و خ و ش) و (ش و ش و ش)}

با توجه به مثال فوق به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: مجموعه تمام حالات ممکن از انجام یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه نامند و با S نمایش می‌دهند.

اغلب در مسایل به تعداد اعضای مجموعه فضای نمونه یعنی |S| نیازمندیم زیرا در بسیاری از حالات تعداد اعضا بسیار زیاد یا حتی نامتناهی هستند در نتیجه نمی‌توان اعضای مجموعه را لیست نمود.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه منید:

مثال ۴: اگر یک سکه را آنقدر پرتاب کنیم تا برای اولین بار خط بیاید، فضای نمونه مربوط به آزمایش را نمایش دهید:

بوضوح ممکن است یک سکه در اولین پرتاب خط بیاید و یا ممکن است پس از چندین بار شیر، خط بیاید که با در نظر گرفتن این حالات با یک فضای نمونه نامتناهی روبرو هستیم زیرا ممکن است حتی پس از هزار بار پرتاب باز هم شیر بیاید و خط را مشاهده نکنیم !

که البته احتمال وقع چنین حالتی را در ادامه این فصل محاسبه می‌کنیم.

S={(خ) و (خ و ش) و (خ و ش و ش) و (خ و ش و ش و ش) و ...}

در ادامه برای روشهای شمارش فنونی را با استفاده از اصل ضرب می‌آوریم.

۲-۱-۱ جایگشت

در بسیاری از مسایل قصد داریم چندین شیء را به ترتیب در یک ردیف قرار دهیم. برای حل این گونه مسایل ابتدا مفهوم جایگشت را معرفی می‌کنیم.

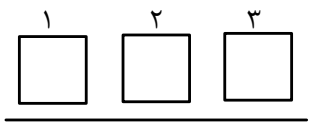
تعریف: یک جایگشت از n شئی عبارتست از قرار دادن آنها در یک صف یا ردیف با رعایت یک نظم و ترتیب مشخص.

مثال ۵: حروف A و l و i را به عنوان سه شئی در نظر بگیرید در این صورت کلمه Ali یک جایگشت از این سه حرف می‌باشد. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم است مثلاً ilA یک جایگشت دیگر از این حروف می‌باشد و با جایگشت قبلی متمایز است.

مثال ۶: به چند طریق می‌توان سه عدد کتاب متمایز را در یک قفسه قرار داد؟

ابتدا توجه کنید که کتابها متمایزند پس آنها را $A_۱, A_۲, A_۳$ نامگذاری می‌کنیم از طرفی قرار گرفتن کتابها در قفسه به این معنی است که ترتیب قرار گیری برای ما مهم است. بنابراین می‌بایستی تمام جایگشتهای سه شئی (کتاب) را بدست بیاوریم.

برای هر کتاب در قفسه یک مکان در نظر بگیرید مطابق شکل زیر:



در هر یک از مکانها می‌توانیم هر یک از سه کتاب را قرار دهیم. در مکان اول یکی از سه کتاب را قرار دهیم از آنجا که در هر صورت یک کتاب در مکان اول قرار می‌گیرد در مکان دوم می‌توان یکی از دو کتاب باقیمانده را قرار داد و به همین ترتیب در مکان آخر تنها کتاب باقیمانده قرار می‌گیرد.

از آنجا که این کار را می‌توان در سه مرحله و به صورت پیاپی انجام داد بطوریکه مرحله اول ۳ حالت مرحله دوم ۲ حالت و مرحله سوم ۱ حالت دارد. بنابراین با توجه به اصل ضرب داریم:

تعداد کل جایگشتها $=۳\times۲\times۱=۶$

که فضای نمونه نیز عبارتست از:

$$S=\{(A_۱,A_۲,A_۳),(A_۱,A_۳,A_۲),(A_۲,A_۱,A_۳),(A_۲,A_۳,A_۱),(A_۳,A_۱,A_۲),(A_۳,A_۲,A_۱)\}$$

در حالت کلی تعداد جایگشتهای n شئی متمایز در یک ردیف (رعایت ترتیب) عبارتست از:

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\cdots(۲)(۱)=n!$$

در نتیجه مثال قبل را می‌توان به صورت خلاصه جایگشت سه شئی در یک ردیف در نظر گرفت که می‌شود:

$$۳!=۶$$

توجه: اگر در محاسبه جایگشت‌ها تکرار اشیاء مجاز باشد، می‌توانیم در تمام مکان‌ها از تمام n شئی استفاده کنیم و در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها عبارتست از: $n\times n\times n\cdots n=n^n$.

مثال ۷: اگر در مثال ۶ از هر سه کتاب به تعداد دلخواه داشته باشیم تعداد کل جایگشت‌ها عبارتست از: $۳\times۳\times۳=۳^۳=۲۷$

۲-۱-۲ ترتیب‌های n شئی به گروههای rتایی (P_r^n)

یک حالت کلی‌تر از جایگشتۀا قرار دادن n شی متمایز در r $(r\le n)$ مکان، به ترتیب می‌باشد که با توجه به روش بدست آوردن تعداد کل جایگشت‌ها که گفته شد در این حالت نیز تعداد کل جایگشتهای n شی متمایز در r مکان عبارتست از:

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

که آنرا با (P_r^n) می‌دهیم. توجه کنید که $P_n^n=n!$ که همان تعداد کل جایگشت‌هاست. و اگر تکرار اشیاء مجاز باشد در این صورت تعداد حالات ممکن عبارتست از:

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\ \text{بار}}=n^r$$

مثال ۸: به چند طریق می‌توان با حروف A , B , C , D , E یک کلمه سه حرفی ساخت؟

$$P_۳^۵=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=۵\times۴\times۳=۶۰$$

توجه کنید که حروف متمایز می‌باشند.

مثال ۹: از بین ۱۵ تیم شرکت کننده در مسابقه فوتبال به چند طریق سه تیم رتبه‌های اول و دوم و سوم را بدست می‌آورند؟

$$P_۳^{۱۵}=\frac{۱۵!}{(۱۵-۳)!}=\frac{۱۵!}{۱۲!}=۱۵\times۱۴\times۱۳=۲۷۳۰$$

مثال ۱۰: اگر در مثال ۸ تکرار حروف مجاز باشند تعداد حالات ممکن چند تاست؟

$$n^r:۵\times۵\times۵=۵^۳=۱۲۵$$

حال حالت خاصی از جایگشت را در نظر می‌گیریم که در آن تمامی اشیاء متمایز نیستند.

مثال ۱۱: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه book را بدست آورید.

در این حالت حرف o دوبار تکرار شده است بنابراین تمامی اشیاء متمایز نیستند اما مجدداً با استفاده از اصل ضرب می‌توانیم تعداد حالات را محاسبه کنیم.

ابتدا تعداد کل حالات را بدون در نظر گرفتن عدم تمایز اشیاء بدست می‌آوریم که برابر است با:

$$n! = ۴! = ۲۴$$

دقت کنید که در فضای نمونه مثلاً دو جایگشت obok و obok دوبار تکرار می‌شوند.

زیرا فرض شده است تمام اشیاء (حروف) متمایز باشند اما چون حرف o دوبار تکرار شده استو مسلماً با جابجایی دو حرف o در تمام حالات تغییری در کلمه بوجود نمی‌آید بنابراین طبق اصل ضرب !۲ اضافه در عدد !۴ ضرب شده است که برای حذف آن می‌بایستی !۴ را بر !۲ تقسیم کنیم بنابراین تعداد کل حالات عبارتست از:

$$\frac{۴!}{۲!} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

حالت کلی این مساله بصورت زیر است:

اگر از n شئی، $n_۱$ تای آنها مشابه یکدیگر و $n_۲$ تای آنها مشابه یکدیگر و ..... و n_k تای آنها مشابه یکدیگر باشند تعداد حالاتی که می‌توان این n شی را در یک ردیف مرتب کرد عبارتست از:

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!} \ , \ \sum_{i=۱}^{k} n_i = n :$$

که آنرا با $(n_۱, n_۲, \cdots, n_k)$ یا $c_n^{n_۱, n_۲, \ldots, n_k}$ نمایش دهیم.

مثال ۱۲: به چند طریق می‌توان دانشجویان یک کلاس ۲۰ نفری را به دسته‌های ۳ و ۴ و ۶ و ۷ نفری تقسیم نمود؟

در این مثال با وجود اینکه تمام اشیاء (دانشجویان) متمایز هستند اما چون هدف تقسیم آنها به چهار دسته ۳ و ۴ و ۶ و ۷ نفری است در نتیجه دانشجویان تخصیص داده شده به هر دسته مثل اشیاء مشابه در نظر گرفته می‌شوند به عبارت بهتر بین تخصیص دانشجوی iام به دسته jام تفاوت قایل هستیم (رعایت ترتیب) اما بین دانشجویان تخصیص داده شده به یک دسته مشخص تفاوتی قایل نیستیم (تشابه) بنابراین تعداد حالات ممکن عبارتست از:

$$\frac{۲۰!}{۳!\,۴!\,۶!\,۷!}$$

توجه کنید که می‌بایستی حتماً مجموع تعداد اعضای دسته‌ها برابر تعداد کل دانشجویان باشد»

$$۳+۴+۶+۷ = ۲۰$$

۲-۱-۳ ترکیب و مسایل انتخاب

تا بحال با اشیاء متمایز و نظو در ترتیب قرارگیری سروکار داشتیم اما اگر بخواهیم از ترتیب قرار گیری صرف نظر کنیم این حالت به مساله انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز تبدیل می‌شود که به آن ترکیب r شئی می‌گوییم.

مثال ۱۳: از بین ۵ مدل اتومبیل سه مدل را انتخاب کنیم به چند طریق این امر امکان‌پذیر است؟

اتومبیل‌ها را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم و سه جایگاه برای سه مدل اتومبیل انتخابی در نظر می‌گیریم بنابراین طبق جایگشت‌های ۳ شئی از ۵ شئی تعداد کل حالات عبارتست از:

$$P_۳^۵ = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰$$

اما چون مساله تنها انتخاب می‌باشد و ترتیب قرار گیری مورد نظر نیست بنابراین به عنوان مثال حالت‌های زیر تکراری محسوب می‌شوند:

(۱,۲,۳) (۳,۲,۱) (۲,۱,۳) (۲,۳,۱)

(۱,۳,۲) (۳,۱,۲)

به تعداد جایگشت‌های مکان‌های سه اتومبیل، جایگشت تکراری داریم که طبق اصل ضرب یعنی عدد !۳ اضافه در عدد $P_{۳}^{۵}$ ضرب شده است و در نتیجه تعداد کل انتخاب‌ها عبارتست از:

$$\frac{P_{۳}^{۵}}{۳!}=\frac{۵!}{۳!\,۲!}=۱۰$$

در حالت کلی تعداد حالات انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز عبارتست از:

$$c_n^r=\binom{n}{r}=\frac{P_r^n}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\qquad (o\le r\le n)$$

که آنرا با $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهند.

در مثال بعد حالتی را بررسی می‌کنیم که بتوان از اشیاء تکراری نیز استفاده نمود:

مثال ۱۴: می‌خواهیم از سه دسته اسکناس ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی ۵ عدد اسکناس انتخاب کنیم، این کار به چند طریق ممکن است؟

همانطور که در این مساله مشاهده می‌کنید اشیاء اسکناس ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی می‌باشند که متمایز می‌باشند. اما می‌توانیم از آنها به تعداد دلخواه انتخاب کنیم. مثلاً حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

AAABB یا ABCBC یا BBBBB

A = تومانی ۱۰۰

B = تومانی ۲۰۰

C = تومانی ۵۰۰

توجه: می‌توانیم از یک اسکناس اصلاً انتخاب نکنیم مثل حالت BBBBB که از اسکناس ۱۰۰ و ۵۰۰ تومانی استفاده نشده است.

برای حل مساله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$ABCBC \rightarrow ABBCC \rightarrow X|XX|XX$$

زیرا ترتیب مهم نیست

با توجه به حالت بالا A را قبل از پرانتز اول و B را بین دو پرانتز و نهایتاً C را بعد از پرانتز آخر می‌آوریم بنابراین تمام حالت‌ها را می‌توان با قرار دادن دو پرانتز نمایش داد.

پس تعداد کل حالات ممکن از قرار دادن ۵ حرف X و دو پرانتز بدست می‌آید که برابر است با:

$$\binom{۳+۵-۱}{۵}=\binom{۷}{۵}=\frac{۷!}{۵!\,۲!}$$

در حالت کلی انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز با تکرار برابر است با:

$$\binom{n+r-۱}{r}$$

۲-۲ فضای نمونه و پیشامد

مجموعه تمام حالت‌های ممکن را از انجام یک آزمایش تصادفی فضای نمونه نامیدیم و آنرا با s نمایش داده‌ایم حال به معرفی پیشامد می‌پردازیم.

تعریف: هر یک از زیر مجموعه‌های فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامیم و در صورتی که نتیجه آزمایش تصادفی عضوی از پیشامد E باشد می‌گوییم پیشامد E به وقوع پیوسته است.

مثال ۱۵: تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد پیشامدهای ممکن به ازای پرتاب یک عدد تاس را بدست آورید:

حل: پرتاب یک عدد تاس منجر به شش حالت ۱ تا ۶ می‌شود که در نتیجه فضای نمونه عبارتست از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که ۶ عضو دارد اما چون هر کدام از زیر مجموعه‌های فضای نمونه می‌تواند به عنوان یک پیشامد در نظر گرفته شوند و تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه ۲^N ($n=$ تعداد اعضای مجموعه) می‌باشد بنابراین تعداد پیشامدهای ممکن $۲^۶=۶۴$ می‌باشد.

به عنوان مثال هر کدام از مجموعه‌های A ، B ، C ، D پیشامدهایی برای فضای نمونه S می‌باشند:

$A=\{\phi\}$ $D=\{۱,۲,۳\}$ $C=\{۲\}$ $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۲-۲-۱ انواع پیشامدها و اعمال روی پیشامدها

با توجه به تعریف پیشامد حالت‌های مختلفی برای پیشامدها خواهیم داشت که عبارتند از:

پیشامد ساده: پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد را پیشامد ساده می‌نامیم مثل

$E=\{(\text{خط و شیر})\}$

که در نتیجه حاصل از پرتاب دو سکه با هم می‌باشد.

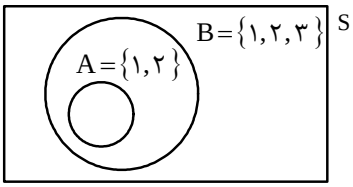
پیشامد مرکب: پیشامدی دارای دو عضو یا بیشتر را مرکب می‌نامیم مثل: $E=\{۱,۲\}$

پیشامد تهی یا محال: اگر پیشامدی دارای هیچ عضوی نباشد به آن پیشامد محال گویند.

پیشامد حتمی: پیشامدی که برابر با فضای نمونه S باشد پیشامد حتمی نامیده می‌شود مثلاً در پرتاب یک عدد تاس $E=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ پیشامد حتمی است.

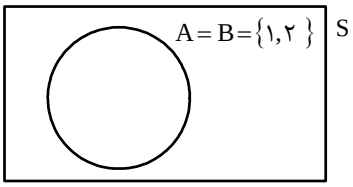
از آنجا که پیشامدها خود یک مجموعه می‌باشند می‌توان اعمالی که روی مجموعه‌ها تعریف می‌شود را روی پیشامدها نیز اعمال نمود. دو پیشامد را A و B و فضای نمونه را S در نظر می‌گیریم.

۱- هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد گوییم پیشامد A زیر پیشامد B می‌باشد و آنرا بصورت $A\subset B$ نمایش می‌دهیم. این مطلب را در شکل نیز مشاهده می‌کنید.



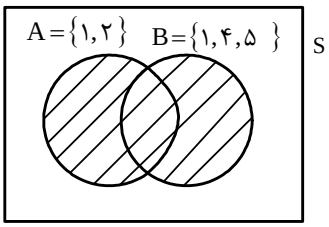
۲- هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد و بالعکس دو پیشامد را مساوی گویند.

$A=B \Leftrightarrow (A\subset B \ , \ B\subset A)$



۳- اجتماع دو پیشامد: در صورتی که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند گویند اجتماع دو پیشامد یا $A\cup B$ رخ داده است و آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:

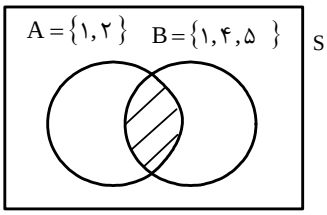
$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$



$A\cup B=\{۱,۲,۴,۵\}$

۴- اشتراک دو پیشامد: در صورتی که هر دو پیشامد A و B بصورت همزمان رخ دهند گویند اشتراک آندو یا $A \cap B$ رخ داده است.

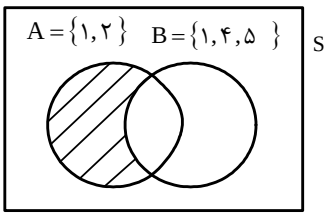
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$$



$A \cap B = \{۱\}$

۵- تفاضل دو پیشامد: اگر فقط A رخ دهد در حالی که B رخ نداده باشد گویند تفاضل دو پیشامد یا A-B رخ داده است.

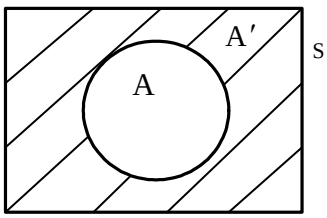
$$A - B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$$



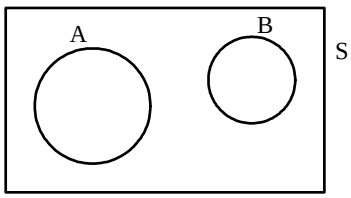
$A - B = \{۲\}$

۶- متمم یک پیشامد: A' را متمم پیشامد A در نظر می‌گیریم وقتیکه رخ دادن A' به معنی عدم وقوع A می‌باشد.

$$A' = \{x \mid x \in S \ , \ x \notin A\}$$



۷- در صورتی که دو پیشامد همزمان نتواند رخ دهند یا به عبارتی اشتراکی نداشته باشند آندو را دو پیشامد ناسازگار گوییم در این حالت $A \cap B = \phi$



۲-۳ احتمال

به هر یک از پیشامدها می‌توان عددی نسبت داد که معرف میزان احتمال وقوع آن پیشامد باشد. برای این منظور می‌بایستی از قواعدی پیروی کنیم که برای تمام پیشامدها یکی باشد با استفاده از تعریف فراوانی نسبی می‌توان به محاسبه احتمال پرداخت به این ترتیب که یک آزمایش را N مرتبه انجام می‌دهیم و تعداد دفعاتی که پیشامد A مشاهده شده را $n(A)$ در نظر می‌گیریم در این صورت فراوانی نسبی وقوع پیشامد A عبارتست از $\frac{n(A)}{N}$ که آنرا احتمال وقوع پیشامد A نامیده و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

فراوانی نسبی همواره عددی بین صفر و یک می‌باشد بنابراین مقدار احتمال نیز در این بازه می‌باشد از طرفی احتمال وقوع تمام اعضای فضای نمونه برابر ۱ می‌باشد یعنی $p(S)=۱$ از طرفی تعداد دفعات مشاهده یکی از دو پیشامد A یا B در صورتی که آندو با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند برابر است با تعداد دفعات مشاهده $A \cap B$ بنابراین $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ به شرطی که $A \cap B = \phi$

سه قلعده بدست آمده در بالا، اصول موضوعه احتمال می‌گوییم و بطور کلی احتمالات باید تابع قوانین زیر باشند:

$۱ - p(S) = ۱$

$۲ - p(A) \geq ۰ \qquad \forall \ A \subset S$

$۳ - p(A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots) = p(A_۱) + p(A_۲) + \cdots$

هر گاه $A_i \cap A_j = \phi \ ، \ \forall \ i \neq j$

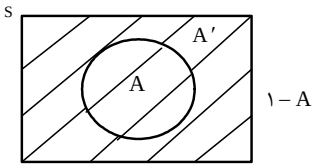
۲ . ۳ . ۱ قوانین احتمال

قبلاً با استفاده از قوانین مجموعه‌ها اعمالی را روی پیشامدها تعریف کردیم حالا با استفاده از آنها و اصول موضوعه احتمال، چندین قانون برای احتمالات بدست می‌آوریم.

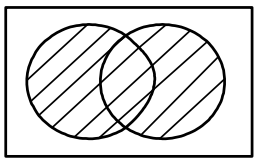
قضیه: $p(\phi) = ۰$

اثبات: $S \cup \phi = \phi$ پس بنابر اصل ۳

$$p(S \cup \phi) = p(s) + p(\phi) = ۱ + p(\phi) \quad \Rightarrow \quad ۱ + p(\phi) = ۱ \Rightarrow p(\phi) = ۰$$



با استدلالی مشابه می‌توان قضایای زیر را اثبات نمود:

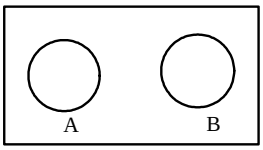


۱- $p(A') = ۱ - p(A)$

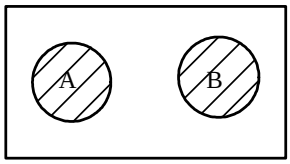
۲- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

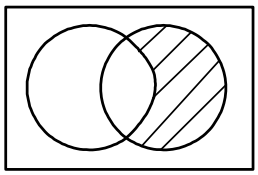
۳- اگر A و B ناسازگار باشند داریم $A \cap B = \phi$ و در نتیجه

$p(A \cup B) = ۰$



$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

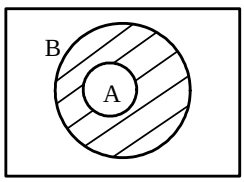




۴- $p(A \cup B) = p(B \cap A') = p(B) - p(A \cap B)$

۵- اگر $A \subset B$ انگاه:

$$\begin{cases} p(B - A) = p(B) - p(A) \\ p(A) \le p(B) \end{cases}$$



مثال ۱۶: سه سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم احتمال بدست آوردن سه شیر یا سه خط چقدر است؟

حل: پیشامد A را بدست آوردن سه شیر در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب پیشامد B را بدست آمدن سه خط

$A = \{ش و ش و ش\} \qquad B = \{خ و خ و خ\}$

از آنجا که $A \cap B = \phi$ بنابراین A و b ناسازگار هستند و در نتیجه پیشامد بدست آمدن سه شیر یا سه خط برابر است با:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

با توجه به قواعد شمارش تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با: $n(A) = ۱ , \ n(S) = ۲^۳ = ۸$

بنابراین:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

پس:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}$$

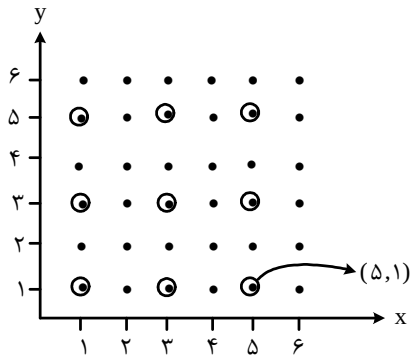
مثال ۱۷: یک جفت تاس را می‌ریزیم احتمال بدست آمدن اعدادی فرد روی هر دو تاس چقدر است؟

A={آمدن اعداد فرد بر روی دو تاس}

$n(A)=۳\times۳=۹$

سه عدد فرد بر روی تاس اول $\{۱,۳,۵\}$

در شکل روبرو اعضای مجموعه A در دوایری نشان داده شده‌اند:



تعداد کل حالات از $n(S)=۶\times۶=۳۶$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۸: یک سکه را ۵ مرتبه پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل دوبار شیر بیاید چقدر است؟

A = پیشامد اینکه حداقل ۲ بار شیر بیاید

A′ = پیشامد یا اصلاً شیر نیاید یا دقیقاً یکبار شیر بیاید $=\left\{\begin{array}{l}(\text{خ و خ و خ و خ و خ})\ \text{و}\ (\text{خ و خ و خ و خ و ش})\ \text{و}\ (\text{خ و خ و خ و ش و خ})\ \text{و}\ (\text{خ و خ و ش و خ و خ})\\(\text{خ و ش و خ و خ و خ})\ \text{و}\ (\text{ش و خ و خ و خ و خ})\end{array}\right\}$

$n(S)=۲^۵=۳۲$

$$p(A')=\frac{۶}{۳۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

$$p(A)=۱-p(A')=۱-\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

مثال ۱۹: الف) تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_n=r$ را در صورتیکه $x_i\geq ۰\ ,\ i=۱,۲,\ldots,n$ باشد را بدست آورید؟

ب) می‌خواهیم ۷ عدد بلیط را بین سه نفر تقسیم کنیم بطوریکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد مطلوبست احتمال اینکه به نفر دوم حداقل ۲ بلیط برسد؟

حل: الف) این مساله مشابه حالتیست که بخواهیم r شئی را بین n نفر تقسیم کنیم بطوریکه در این حالت به هر شخص می‌توان بیشتر از یک شئی داد و ترتیب اهمیتی ندارد در قسمت قوانین شمارش نشان دادیم که جواب چنین مساله‌ای با استفاده از رابطه $\binom{n+r-۱}{r}$ بدست می‌آید.

ب) تعداد کل حالات فضای نمونه در این حالت از حل معادله $x_i\geq ۱$ $\quad x_۱+x_۲+x_۳=۷$ در نظر گرفته شود اما برای استفاده از رابطه $\binom{n+r-۱}{r}$ باید $x_i\geq ۰$ باشد بنابراین از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_i \geq ۱ \quad \rightarrow \quad x_i - ۱ \geq ۰ \quad y_i = x_i - ۱ \quad \Rightarrow \quad y_i \geq ۰$$
$$\Rightarrow \quad x_i = y_i + ۱ \qquad y_۱ + ۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ = ۷$$
$$\Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۷ - ۳ = ۴$$

بنابراین مساله به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{cases} y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۴ \\ y_i \geq ۰ \end{cases}$$

که جواب آن عبارتست از $n(s) = \binom{۳+۴-۱}{۴} = ۱۵$

برای بدست آوردن تعداد حالات مطلوب باید مساله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷ \\ x_۱ \ , \ x_۳ \geq ۱ \\ x_۲ \geq ۲ \end{cases}$$

دوباره با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$y_۱ = x_۱ - ۱ \quad , \quad y_۳ = x_۳ - ۱ \quad , \quad y_۲ = x_۲ - ۲$$
$$\Rightarrow y_i \geq ۰$$

که در نتیجه مساله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$A: \begin{cases} y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۳ \\ y_i \geq ۰ \end{cases}$$

که جواب آن عبارتست از:

$$n(A) = \binom{۳+۳-۱}{۳} = ۱۰$$

بنابراین احتمال فوق عبارتست از:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$$

۲ . ۴ احتمال روی فضای نمونه نامتناهی

با توجه به نوع مسایل فضای نمونه می‌تواند نامتناهی باشد در این حالت مجموعه پیشامدها نیز نامتناهی خواهند بود البته احتمال پیشامدها می‌بایستی در اصول موضوعه صدق کند بطوریکه $۰ \leq p(A_i) \leq ۱ \ , \ \sum_{i=۱}^{+\infty} p(A_i) = ۱$.

مثال ۲۰: A و B به ترتیب به سوی هدفی شلیک می‌کنند A با احتمال $\frac{۱}{۲}$ و B با احتمال $\frac{۳}{۴}$ هدف را مورد اصابت قرار می‌دهند مطلوبست احتمال اینکه B زودتر از A هدف را بزند؟ (در صورتی که A اول شروع کند).

پیشامد اینکه A هدف را بزند : A' $\qquad p(A') = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

احتمال اینکه B به هدف نزند : B'

برای اینکه B زودتر هدف را مورد اصابت قرار دهد حالات زیر را خواهیم داشت:

پیشامد	$A'B$	$A'B'A'B$	$A'B'A'B'A'B'$	$\cdots$
احتمال	$\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴}$	$(\frac{۱}{۲})^۲ \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴}$	$(\frac{۱}{۲})^۳ (\frac{۱}{۴})^۲ \frac{۳}{۴}$	$\cdots$

$$p(B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

از آنجا که پیشامدها ناسازگار هستند باید احتمال اجتماع تمام پیشامدها محاسبه شود که برابرست با مجموع احتمالات هر یک از پیشامدها یعنی:

$$p(A'B\cup A'B'A'B\cup\cdots)=p(A'B)+p(A'B'A'B)+\cdots=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8}+(\frac{1}{8})^2+\cdots)=\frac{3}{8}\ \frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{7}$$

مثال ۲۱: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر مشاهده شود مطلوبست:

الف) احتمال آنکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد.

ب) احتمال آنکه حداکثر ۱۰ پرتاب لازم باشد.

حل: برای اینکه برای بار اول شیر مشاهده کنیم می‌بایستی در تمام پرتاب‌های قبلی خط مشاهده شده باشد در این صورت احتمال‌ها را می‌توان در جدول زیر خلاصه کنیم:

S	e_1 ش	e_2 ش خ	e_3 ش خ خ	e_4 ش خ خ خ	... ...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

پیشامد اینکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد: A

الف) برای اینکه تعداد زوجی پرتاب لازم باشد باید پیشامدهای $e_2, e_4, e_6, \ldots$ رخ دهند بنابراین:

$$p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

همچنین می‌توان احتمال اینکه تعداد فدی پرتاب لازم باشد را از روی $p(A)$ محاسبه نمود. چون پیشامد تعداد فردی پرتاب متمم پیشامد A می‌باشد بنابراین:

$$p(A')=1-p(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

ب) پیشامد انکه حداکثر ۱۰ پرتاب لازم باشد $=B$

برای محاسبه احتمال پیشامد B می‌بایستی مجموع ۱۰ جمله اول از جدول را بدست بیاوریم اما با استفاده از متمم این پیشامد می‌توان تعداد آنرا به راحتی محاسبه نمود:

پیشامد اینکه حداقل ۱۱ پرتاب لازم باشد $=B'$

$$p(B')=(\frac{1}{2})^{11}+(\frac{1}{2})^{12}+\cdots=\frac{(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{10}$$

$$p(B)=1-p(B')=1-(\frac{1}{2})^{10}=\frac{1023}{1024}\approx 0/999$$

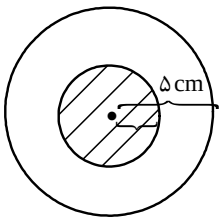
۲ . ۵ فضای نمونه پیوسته

در شرایطی می‌توان فضای نمونه را طوری تعریف نمود که بصورت یک بازه یا یک سطح در نظر گرفته شود. مثلاً $S=[1,2]$ در این حالت هر زیر بازه مثل $E=[1/5,1/75]$ می‌تواند به عنوان یک پیشامد در نظر گرفته شود. برای محاسبه احتمال پیشامد باز هم حالت مطلوب را به کل فضای نمونه در نظر می‌گیریم یعنی:

$$p(A)=\frac{\text{طول بازه } A}{\text{طول فاصله } S} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت فضای نمونه } S}$$

مثال ۲۲: تیراندازی به هدفی شلیک می‌کند که قطر آن ۱۰ سانتیمتر و قطر دایره مرکزی هدف ۲ سانتیمتر است احتمال اینکه تیر به مرکز هدف اصابت کند چقدر است؟

حل:



با توجه به شکل مساحت فضای نمونه عبارتست از: ۲۵π

و مساحت ناحیه مطلوب عبارتست از: π

بنابراین احتمال مورد نظر عبارتست از:

$$p(A)=\frac{\pi}{۲۵\pi}=\frac{۱}{۲۵}$$

مثال ۲۳: در مثال قبل احتمال اینکه تیرانداز دقیقاً مرکز هدف را بزند چقدر است؟

از آنجا که مرکز هدف یک نقطه محسوب می‌شود بنابراین مساحت آن صفر واحد می‌باشد و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر صفر خواهد بود.

۲ . ۶ احتمال شرطی

در بسیاری از مواقع می‌دانیم که پیشامد A رخ داده و می‌خواهیم احتمال رخ دادن پیشامد B را مشروط بر اینکه A رخ داده است بدست بیاوریم در این حالت می‌بایستی از تعاریف احتمال شرطی استفاده کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲۴: یک تاس طوری طراحی ششده است که احتمال آمدن هر عدد متناسب با آن عدد می‌باشد در این صورت:

الف) احتمال رخ دادن یک عدد زوج را بیابید.

ب) اگر بدانیم عدد حاصل از پرتاب کوچکتر یا مساوی با عدد ۴ می‌باشد احتمال آمدن یک عدد فرد را بیابید.

ابتدا احتمال هر عدد را محاسبه می‌کنیم با توجه به اینکه احتمال آمدن هر عدد باید متناسب با آن عدد باشد معادله زیر را داریم:

$$x+۲x+۳x+۴x+۵x+۶x=۱$$

که در آن x احتمال آمدن عدد ۱ می‌باشد.

$$۲۱x=۱ \quad \rightarrow \quad x=\frac{۱}{۲۱}$$

بنابراین:

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

توجه کنید که مجموع احتمالات برابر ۱ می‌باشد.

الف) پیشامد رخ دادن عدد زوج $= A$

$$A=\{۲,۴,۶\}$$

$$p(A)=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۴}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱۲}{۲۱}$$

ب) در این حالت مجموعه فضای نمونه محدود می‌باشد به $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ زیرا می‌دانیم عدد بدست آمده کوچکتر یا مساوی با ۴ می‌باشد. از طرفی چون احتمال آمدن هر عدد متناسب با همان عدد است پس مدل احتمال روی این فضای نمونه جدید عبارتست از:

$$x+۲x+۳x+۴x=۱ \quad \rightarrow \quad ۱۰x=۱ \quad \rightarrow \quad x=\frac{۱}{۱۰}$$

S	۱	۲	۳	۴
احتمال	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۴}{۱۰}$

(پیشامد رخ دادن عدد فرد به شرط وقوع B) = C

بنابراین احتمال وقوع یک عدد فرد به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد عبارتست از:

$$p(C)=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

در حالت کلی تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف: احتمال وقوع پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A که آنرا با نماد $P(B|A)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{p(A)} \quad , \quad P(A)\neq ۰$$

مثال ۲۵: با استفاده از تعریف احتمال مثال ۲۴ (ب) را محاسبه می‌کنیم.

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ پیشامد وقوع عددی کوچکتر از ۴

$B=$ پیشامد رخ دادن عددی فرد $=\{۱,۳,۵\}$

$$P(A)=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}+\frac{۴}{۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

$$A\cap B=\{۱,۳\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}=\frac{۴}{۲۱}$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۱۰}{۲۱}}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

ملاحظه می‌کنید که در این حالت دیگر نیازی به محاسبه جدول احتمالات میانی نمی‌باشد.

مثال ۲۶: در جعبه‌ای ۵ مهره به رنگ آبی و ۴ مهره به رنگ قرمز موجود می‌باشند از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم اگر بدانیم دو مهره از سه مهره به رنگ آبی می‌باشند احتمال اینکه مهره سوم به رنگ قرمز باشد چقدر است؟

$A=$ پیشامد اینکه دو مهره از سه مهره آبی باشند

$B=$ پیشامد اینکه یک مهره از سه مهره قرمز باشد

$A\cap B=$ پیشامد اینکه دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} \qquad P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}}}{\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}}$$

۷ . ۲ قانون ضرب احتمال

در صورتی که فرمول $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\,P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A)$$

در نتیجه فرمول کلی زیر را بدست می‌آوریم:

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

این رابطه در حالتی که دو پیشامد A وb بتوانند بصورت همزمان رخ دهند به کار می‌رود و به آن قانون ضرب احتمال می‌گوییم.

مثال ۲۸: جدول زیر احتمال شاغل بودن مردان و زنان را در یک جامعه آماری نشان می‌دهد:

مثلاً در جدول احتمال اینکه شخص مرد باشد ۰/۵۷ و احتمال اینکه مرد باشد و شاغل هم باشد ۰/۵۲ می‌باشد.

		M مرد	F زن	جمع
E	شاغل	۰/۵۲	۰/۴۱	۰/۹۳
U	بیکار	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۷
	جمع	۰/۵۷	۰/۴۳	۱/۰۰

با توجه به جدول به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر از جامعه فوق یک نفر انتخاب کنیم و بدانیم شاغل است احتمال اینکه مرد باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نفر انتخابی از جامعه فوق شاغل باشد؟

ج) اگر نفر انتخابی مرد باشد احتمال اینکه شاغل باشد چقدر است؟

حل:

الف) تعریف می‌کنیم:

U = پیشامد اینکه نفر انتخابی بیکار باشد

E = پیشامد اینکه نفر انتخابی شاغل باشد

M = پیشامد اینکه نفر انتخابی مرد باشد

F = پیشامد اینکه نفر انتخابی زن باشد

بنابراین مقدار $P(E|M)$ را می‌خواهیم:

با توجه به جدول داریم: $P(E\cap M)=۰/۵۲$

$$P(M) = P(M\cap E)+P(M\cap U)=۰/۵۲+۰/۰۵=۰/۵۷$$

ب) پس:

$$P(E|M)=\frac{P(E\cap M)}{P(M)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۵۷}=۰/۹۱$$

$$P(E)=P(E\cap M)+P(E\cap F) = ۰/۵۲+۰/۴۱ = ۰/۹۳$$

ج) $P(M|E)=\frac{P(M\cap E)}{P(E)}=\frac{۰/۵۲}{۰/۹۳}=۰/۵۶$

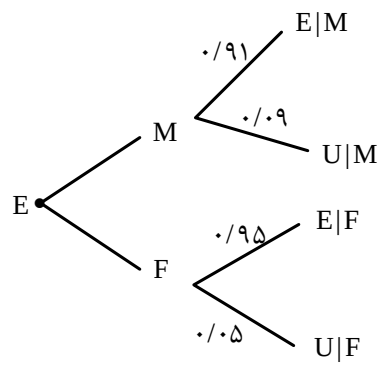
مثال ۲۹: فرض کنید در مثال قبل تنها اطلاعات زیر را در اختیار داشته باشیم:

$P(M)=۰/۵۷$ $\quad P(E|M)=۰/۹۱$ $\quad P(U|M)=۰/۰۹$

$P(F)=۰/۴۳$ $\quad P(E|F)=۰/۹۵$ $\quad P(U|F)=۰/۰۵$

در اینصورت مقادیر $P(E)$ و $P(M|E)$ را محاسبه کنید.

حل: احتمالات داده شده را می‌توان به صورت درختی در نظر گرفت در این صورت داریم:



که طبق قانون ضرب احتمال:

$$P(E)=P(E\cap M)+P(E\cap F)=P(E|M)\,P(M)+P(E|F)\,P(F)$$
$$=۰/۹۱\times۰/۵۷+۰/۹۵\times۰/۴۲=۰/۹۳$$
$$P(M|E)=\frac{P(M\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E|M)\times P(M)}{P(E\cap M)+P(E\cap F)}$$
$$=\frac{P(E|M)\,P(M)}{P(E|M)\,P(M)+P(E|F)\,P(F)}=\frac{۰/۹۱\times۰/۵۷}{۰/۹۱\times۰/۵۷+۰/۹۵\times۰/۴۳}=\frac{۰/۵۲}{۰/۹۳}=۰/۵۶$$

۸ . ۲ پیشامدهای مستقل

رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ را در نظر بگیرید، اگر تحت شرایطی مقدار $P(A\cap B)$ برابر $P(A)\times P(B)$ شود خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

به عبارتی احتمال وقوع A به شرط B برابر با احتمال وقوع A می‌باشد و این یعنی دانستن اینکه پیشامد B رخ داده است هیچ اطلاعاتی در مورد رخ دادن پیشامد A بدست نمی‌دهد بنابراین می‌توان گفت دو پیشامد از یکدیگر مستقل هستند و تعریف زیر را خواهیم داشت»

تعریف: دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مثال ۳۰: در یک ایستگاه مترو احتمال اینکه قطار به موقع در ایستگاه قرار داشته باشد ۰/۹ می‌باشد مطلوبست:

الف) احتمال اینکه قطار سه روز متوالی به موقع در ایستگاه باشد.

ب) احتمال اینکه قطار در روز سوم برای بار دوم دیر کند.

حل:

الف) ابتدا پیشامد زیر را تعریف می‌کنیم:

$A =$ احتمال اینکه قطار در روز iام به موقع در ایستگاه قرار داشته باشد

در این صورت می‌توان پیشامدهای $A_۱, A_۲, A_۳$ را زا یکدیگر مستقل در نظر گرفت زیرا پیشامد اینکه قطار امروز دیر کند به پیشامد اینکه قطار فردا هم دیر کند ارتباطی ندارد بنابراین با توجه به فرمول استقلال داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱) \times P(A_۲) \times P(A_۳) = ۰/۹ \times ۰/۹ \times ۰/۹ = ۰/۷۲۹$$

ب) پیشامد زیر را تعریف می‌کنیم:

$A'_i =$ پیشامد اینکه قطار در روز iام دیر کند

$$P(A'_i) = ۱ - P(A_i) = ۱ - ۰/۹ = ۰/۱$$

برای اینکه قطار در روز سوم برای بار دوم دیر کند می‌بایستی در دو روز قبل حداقل یکبار دیر کرده باشد. احتمال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$P[(A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳) \cup (A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)] =$$

$$= P(A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳) + P(A_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳)$$

$$= P(A'_۱)\ P(A_۲)\ P(A'_۳) + P(A_۱)\ P(A'_۲)\ P(A'_۳)$$

$$= ۰/۱ \times ۰/۹ \times ۰/۱ + ۰/۹ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = ۰/۰۱۸$$

استقلال سه پیشامد: سه پیشامد A ، B و C را مستقل از یکدیگر می‌نامیم اگر داشته باشیم:

۱- $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

۲- $P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$

۳- $P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$

۴- $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

پیشامدهای ناسازگار و مستقل: به تفاوت‌های پیشامدهای ناسازگار و مستقل توجه کنید:

- اگر دو پیشامد ناسازگار باشند: نمی‌توانند همزمان رخ دهند، احتمال اشتراک آنها صفر می‌باشد، احتمال اجتماع آنها برابر مجموع احتمالات هر یک می‌باشد.

- اگر دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند: هر دو می‌توانند همزمان رخ دهند، احتمال اشتراک آنها برابر با حاصل ضرب احتمالات آنهاست، احتمال اجتماع آنها کوچکتر یا مساوی با مجموع احتمالات هر یک می‌باشد.

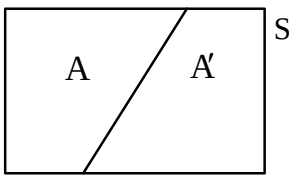
* توجه کنید که اگر دو پیشامد بخواهند بصورت همزمان هم ناسازگار باشند و هم مستقل در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = ۰ \\ P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \end{cases} \Rightarrow \quad P(A(\ P(B) = ۰ \quad \Rightarrow \quad P(A) = ۰ \quad \text{یا} \quad P(B) = ۰$$

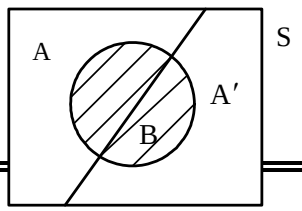
۹ . ۲ فرمول احتمال بینر و فرمول تفکیک احتمال

فرمول احتمال بینر روش ساده‌تری برای محاسبه احتمالات شرطی در حالتی که اطلاعات کمی در مورد مساله داریم ارایه می‌کند که در ذیل نحوه بدست آوردن آنرا شرح می‌دهیم:

فرض کنید فضای نمونه S را به دو پیشامد A و A' که متمم آن می‌باشد تقسیم کنیم به صورت شکل زیر:



حال برای حل مسئله در حالت کلی پیشامد B را در این فضا طوری در نظر می‌گیریم که با A و A' اشتراک داشته باشد:



می‌خواهیم احتمال A به شرط وقوع B را محاسبه کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad ۱-۱$$

از روی شکل می‌توان به راحتی احتمال وقوع B را محاسبه نمود.

$$B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$$

$$P(B) = P(A\cap B) + P(A'\cap B)=P(A)\,P(B|A) + P(A')\,P(B\mid A') \qquad ۱-۲$$

به فرمول فوق فرمول تفکیک احتمال گویند که حالت کلی‌تر آنرا در ادامه بدست می‌آوریم.

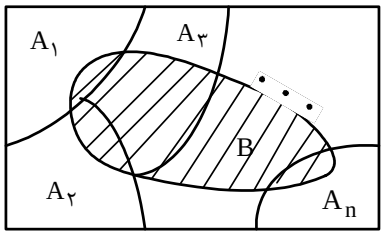
$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B\mid A) \qquad ۱-۳$$

$$۱-۱,۱-۲,۱-۳ \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(A)\,P(B|A) + P(A)\,P(B|A')} \qquad ۱-۴$$

رابطه ۴-۱ به فرمول بنیر معروف است.

برای بدست آوردن حالت کلی‌تر روابط ۲-۱ و ۴-۱ فرض کنید فضای نمونه به پیشامدهای $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ طوری تقسیم شده باشد که به ازای هر $i\neq j$ داشته باشیم $A_i\cap A_j=\phi$ و $S=\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$.

مطابق شکل زیر:



در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم فضای نمونه S به n پیشامد $A_۱$ تا A_n افراز شده است. و پیشامد B نیز پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشد در این صورت داریم:

$$B = B(B\cap S)=B\cap(\bigcup_{۱}^{n} A_i) = (B\cap A_۱)\cup(B\cap A_۲)\cup\cdots\cup(B\cap A_n)$$

که در این رابطه پیشامدهای $(B\cap A_۱)$, $(B\cap A_۲)$, $\cdots$ $(B\cap A_n)$ دو به دو ناسازگارند.

بنابراین داریم:

$$P(B) = P(B\cap A_۱) + P(B\cap A_۲) + \cdots + P(B\cap A_n) = P(A_۱)\,P(B|A_۱) + P(A_۲)\,P(B|A_۲)$$

$$+\cdots + P(A_n)\,P(B|A_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)$$

این رابطه فرمول تفکیک احتمال یا فرمول احتمال کل نامیده می‌شود. به همین ترتیب برای $P(A_i|B)$ داریم:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,P(B\cap A_i)}{\sum_{i=۱}^{n} P(A_i)\,P(B\cap A_i)}$$

به این رابطه فرمول احتمال بینر می‌گوییم.

مثال ۳۱: احتمال افزایش قیمت سهام یک شرکت خصوصی در بورس در طول ۲ ماه مهر و آبان برابر ۰/۶ و احتمال سقوط قیمت سهام آن در طول این ۲ ماه برابر ۰/۳ است. همچنین اگر قیمت سهام شرکت در طول یکی از این دو ماه افزایش و در ماه دیگر کاهش پیدا کند در این صورت احتمال

اینکه در ماه اول قیمت سهام افزایش پیدا کند برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. مطلوبست احتمال اینکه قیمت سهام شرکت در ماه دوم هم افزایش پیدا کند به شرطی که در ماه اول افزایش پیدا کرده باشد.

حل: برای فضای نمونه ۴ حالت زیر را داریم:

$$S\{(I , I) , (D , D) , (I , D) , (I , D)\}$$

افزایش قیمت سهام: I

کاهش قیمت سهام: D

توجه: برای سادگی حالت ثابت ماندن قیمت سهام در نظر نمی‌گیریم.

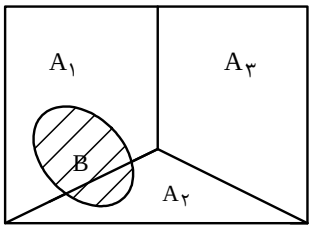
مثلاً $(I-D)$ یعنی قیمت سهام در ماه اول افزایش و در ماه دوم کاهش یافته است. حال پیشامدهای زیر را تعریف می‌نیم:

$A_۱ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر ماه افزایش پیدا می‌کند $=\{(I , I)\}$

$A_۲ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در یک ماه افزایش و در یک ماه کاهش داشته باشد $=\{(I , D) , (D , I)\}$

$A_۳ =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر دو ماه کاهش داشته باشد $=\{(D , D)\}$

$B =$ پیشامد اینکه قیمت سهام در هر ماه اول افزایش داشته باشد



$P(A_۱|B) =$ (افزایش در ماه اول | افزایش در ماه دوم) $P =$ (افزایش در ماه اول | افزایش در ماه دوم) P. بنابراین می‌بایستی مقدار احتمال $P(A_۱|B)$ را محاسبه کنیم با توجه به فرمول بینر داریم:

$$P(A_۱|B) = \frac{P(A_۱)\,P(B|A_۱)}{P(A_۱)\,P(B|A_۱) + P(A_۲)\,P(B|A_۲) + P(A_۳)\,P(B|A_۳)}$$

$$P(A_۱) = ۰/۶ \quad , \quad P(B|A_۱)=۱ \quad , \quad P(B|A_۲) = \frac{۱}{۲} , \quad P(B|A_۳) = \frac{P(B\cap A_۳)}{P(A_۳)} P(A_۳) = \frac{۰}{P(A_۳)} = ۰$$

بنابراین داریم:

$$P(A_۱|B) = \frac{۰/۶ \times ۱}{۰/۶ \times ۱ + ۰/۱ \times \frac{۱}{۲} + ۰} = ۰/۹۲۳$$

به نام خدا

فصل سوم

متغیر های تصادفی و توابع توزیع

Jalase 1 – sco 1

تعریف متغیر تصادفی

نتایج حاصل از یک آزمایش تصادفی را به صورت های مختلفی می توان بیان نمود . مثلا شیر یا خط را با نمواد 1 و -1 نیز نمایش داد . از آنجا که این اعداد در آزمایش به صورت تصادفی ظاهر می شوند ، می توان آنها را با یک متغیر تصادفی مثل x نمایش داد . با استفاده از متغیر تصافی تفسیر نتایج حاصل از آزمایش های تصادفی ساده تر می شود .

تعریف :

یک متغیر تصادفی ، تابعی است از فضای نمونه به زیر مجموعه ای ناتهی از اعداد حقیقی که آن را با حروف بزرگ مانند X,Y,... نمایش می دهیم .

برای نمایش برد یک متغیر تصادفی یا مجموعه مقادیری که متغیر اختیار می کند ، از حروف کوچک مثل x,y,... استفاده می کنیم .

مثال 1 :

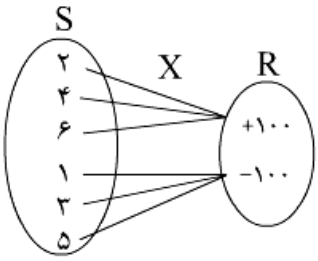
در یک بازی شخصی تاسی را می ریزد ، اگر عدد زوج بیاورد 100 تومان به او می دهیم و اگر عدد فرد بیاورد 100 تومان از او می گیریم . اگرمتغیر تصادفی x در آمد شخص در نظر گرفته شود ، مقادیر آن را بدست آورید .

حل :

ابتدا فضای نمونه را بدست می آوریم .

$$S = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ \}$$

همان طور ی می بینید با توجه به نمودار زیر فضای نمونه S تحت تابع x به یک زیر مجموعه از R متشکل از دو عضو 100+ و 100- برده شده است .



عدد 100+ را برای دریافت و 100- را برای پرداخت پول در نظر می گیریم .

$$X : S \rightarrow R$$

$X(۲) = ۱۰۰$ $\quad$ $X(۱) = -۱۰۰$

$X(۴) = ۱۰۰$ $\quad$ $X(۳) = -۱۰۰$

$X(۶) = ۱۰۰$ $\quad$ $X(۵) = -۱۰۰$

از آنجا کع احتمال هر یک از اعداد 1 تا 6 برابر $\frac{1}{6}$ می باشد داریم :

$$A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ \}$$

$$P(X = ۱۰۰) = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{ ۱ ، ۳ ، ۵ \}$$

$$P(X = -۱۰۰) = P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حال می توانیم میانگین درآمد شخص را پس از تکرار بازی به دفعات محاسبه کنیم

X	۱۰۰	−۱۰۰
P	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{۱۰۰ \times \frac{۱}{۲} + -۱۰۰ \times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}} = ۰$$

با توجه به $\bar{X} = 0$ می توان نتیجه گرفت که شخص با تکرار بازی پولی به دست نمی آورد .

Jalase 1 – sco 2

انواع متغیر های تصادفی

متغیر های تصادفی عموما بر 2 دسته می باشند :

1. گسسته : متغیر هایی که برد آن یا مجموعه مقادیری که اختیار می کند ، به صورت از هم جدا و یا شمارش پذیر از اعداد حقیقی باشند .
2. مقادیری اختیار می کند ، که در مجموعه ای پیوسته یا شمارش ناپذیر از اعداد حقیقی قرار دارند .

توجه :

همان طور که در فصل قبل اشاره کردیم احتمال وقوع هر عضو منفرد از مجموعه ای پیوسته برابر صفر می باشد . این مطلب برای متغیر های تصادفی پیوسته نیز برقرار می باشد . یعنی احتمال برابر بودن مقدار یک متغیر تصادفی پیوسته x بت هر عنصر منفرد از فضای برد آن برابر صفر می باشد .

مثال 2 :

در یک جعبه 22 مهره موجود می باشد که هر مهره دارای یکی از شماره های 1و 2و 3و4 و5 و6 می باشد . در ضمن به تعداد عدد نوشته شده بر روی هر مهره از همان مهره درون جعبه موجود می باشد . یک مهره از جعبه خارج می کنیم . اگر متغیر تصادفی x شماره مهره خارج شده باشد ، مطلوبست مقادیر احتکالی که متغیر x به خود می گیرد .

حل :

با توجه به صورت مثال یک مهره با شماره یک خواهیم داشت ، 2مهره با شماره 2 و به همین ترتیب 6 مهره با شماره 6 داریم . فضای نمونه مقادیری که x اختیار می کند :

$S_X = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ \}$

در نتیجه تابع احتمال به صورت زیر بدست می آید :

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

مثلا $P(x=6)= \frac{6}{21}$ است .

می توانیم به ازای هر مقدار x احتمال آن را به فرم $P_X(x)$ نشان داد که به آن تابع احتمال متغیر تصادفی x گوییم .

تعریف : تابع احتمال متغیر تصادفی x ، تابعی است که از یک متغیر حقیقی x که با $P_X(x)$ نمایش داده می شود:

$$P_X(x) = P(X = x)$$

هر تابع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته x باید در شرایط زیر صدق کند .

۱) $P_X(x) \geq ۰$, به ازای هر X

۲) $\sum_{\text{برد } X} P_X(x) = ۱$,

Jalase 1 – sco 3

توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته

اگر $P_X(x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته x باشد ، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\forall x \in R \quad ; \quad F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$$

مثال 4 :

تابع توزیع را برای متغیر تصادفی که در مثال قبل حل شد را بدست آورید .

حل :

با توجه به جدول احتمالات متغیر تصادفی x داریم :

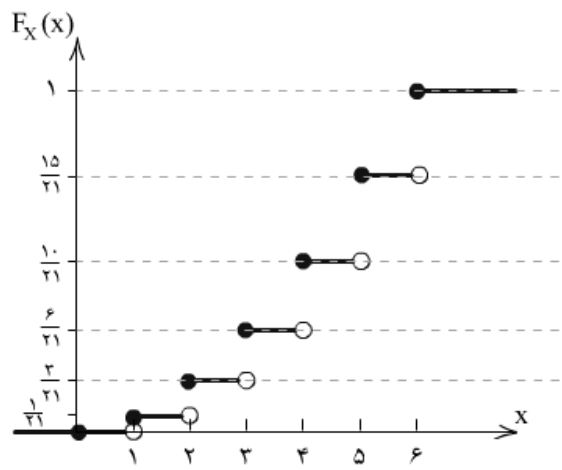
X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

$$F_X(۱) = P(X \le ۱) = \frac{۱}{۲۱}$$

$$F_X(۲/۵) = P(X \le ۲/۵) = \sum_{t \le ۲/۵} P_X(t) = P_X(۱) + P_X(۲) = \frac{۳}{۲۱}$$

به ازای هر $x \prec 0$ مقدار تابع توزیع برابر صفر می باشد . داریم :

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۰ & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۲۱} & ۱ \le x < ۲ \\ \frac{۳}{۲۱} & ۲ \le x < ۳ \\ \frac{۶}{۲۱} & ۳ \le x < ۴ \\ \frac{۱۰}{۲۱} & ۴ \le x < ۵ \\ \frac{۱۵}{۲۱} & ۵ \le x < ۶ \\ ۱ & ۶ \le x \end{cases}$$



همان طور که مشاهده می شود تعریف تابع توزیع متغیر تصادفی x مشابه تعریف فراوانی تجمعی نسبی تعریف شده در فصل 1 است . مقدار فراوانی تجمعی قبل از 1 برابر 0 از 1 تا نزدیک 2 ، $\frac{1}{21}$ الی آخر است .

Jalase 2 – sco 1

خواص توابع توزیع

توابع توزیع دارای خواص مشترکی می باشند . که با توجه به تعریف آنها بدست می آید . این خصوصیات در مسائل قبل نیز مشاهده می شوند که عبارتند از :

۱) $\forall x \in R \quad ; \quad ۰ \le F_X(x) \le ۱$

۲) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = ۰ \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = ۱$

$F_X(-\infty) = ۰ \qquad F_X(\infty) = ۱$

۳) توابع توزیع همواره صعودی (غیر اکید) می باشد .

$$\forall a \le b \quad \rightarrow \quad F_X(a) \le F_X(b)$$

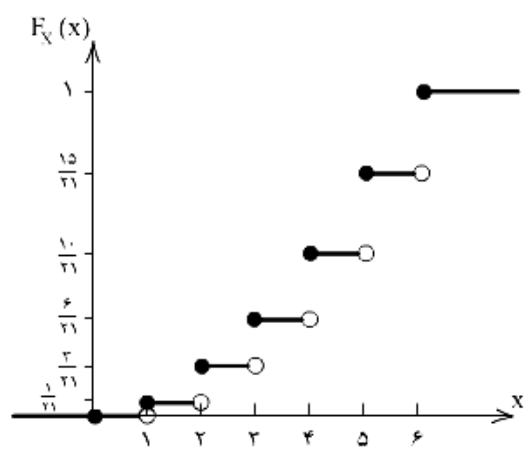
۴) تابع توزیع $F(x)$ در تمام نقاط حداقل از سمت راست ، پیوسته می باشد .

$$\lim_{h \to ۰^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Jalase 2 – sco 2

همواره از روی یک تابع توزیع متغیر تصادفی می توان مقادیر احتمال را محاسبه نمود .
به عنوان مثال اگر بخواهیم در مثال قبل مقدار $P(x=4)$ را محاسبه کنیم ، با توجه به گسسته بودن متغیر تصادفی x داریم :

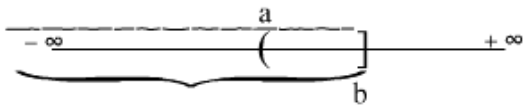
$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۰ & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۲۱} & ۱ \le x < ۲ \\ \frac{۳}{۲۱} & ۲ \le x < ۳ \\ \frac{۶}{۲۱} & ۳ \le x < ۴ \\ \frac{۱۰}{۲۱} & ۴ \le x < ۵ \\ \frac{۱۵}{۲۱} & ۵ \le x < ۶ \\ ۱ & ۶ \le x \end{cases}$$



$$P(X = ۴) = \lim_{h \to ۰} P(۴ - h < x \le ۴) \qquad ۱-۳$$

در این صورت $P(x=4)$ را خواهیم داشت . برای محاسبه $P(a \prec x \le b)$ به صورت زیر عمل می کنیم .

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$$



توجه : برای سادگی در نوشتن می توان اندیس x را از تابع $F_X(x)$ حذف نمود و نوشت $F(x)$. البته اگر به شرطی که بدانیم با متغیر تصادفی x کار می کنیم . بنابراین :

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

و داریم :

$$P(X = ۴) = \lim_{h \to ۰} P(۴ - h < x \le ۴) \qquad ۱-۳$$

$$\lim_{h \to ۰} [\, F(۴) - F(۴ - h) \,] = F(۴) - \lim_{h \to ۰} F(۴ - h)$$

که $\lim_{h \to 0} F(4-h)$ برابر حد چپ تابع F_X در نقطه 4 می باشد و با $F(4^-)$ نمایش می دهیم .

حال با توجه به ضابطه تابع F_X :

$$F(۴^-) = \frac{۶}{۲۱}$$

و داریم :

$$P(X = ۴) = F(۴) - F(۴^-) = \frac{۱۰}{۲۱} - \frac{۶}{۲۱} = \frac{۴}{۲۱}$$

درستی حاصل عبارت بالا از روی تابع احتمال $P_X(x)$ نیز آشکار است .

Jalase 2 – sco 3

در حالت کلی می توان رابطه زیر را نوشت :

$$P(X = b) = F(b) - F(b^-)$$

مقدار $P(x=b)$ برابر با میزان جهش نمودار تابع F_X در نقطه b می باشد . همچنین تمامی حالات دیگر را با توجه به فرمول بالا و تعریف تابع توزیع می توان بدست آورد.

۱) $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

۲) $P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$

۳) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a) = F(b^-) - F(a)$

۴) $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$

۵) $P(X > a) = ۱ - P(X \le a) = ۱ - F(a)$

۶) $P(X < a) = F(a^-)$

حد چپ تابع توزیع در نقطه a

Jalase 2 – sco 4

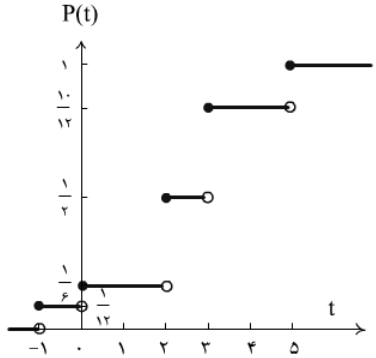
مثال 5 :

تابع توزیع برای متغیر تصادفی گسسته T به صورت زیر است . تابع احتمال آن را بدست بیاورید و نمودار آن را رسم کنید.

$$F(t) = \begin{cases} ۰ & t < -۱ \\ \frac{۱}{۱۲} & -۱ \le t < ۰ \\ \frac{۱}{۶} & ۰ \le t < ۲ \\ \frac{۱}{۲} & ۲ \le t < ۳ \\ \frac{۱۰}{۱۲} & ۳ \le t < ۵ \\ ۱ & ۵ \le t \end{cases}$$

حل:

ابتدا نمودار تابع توزیع را رسم می کنیم .



مقادیری که تابع احتمال $P(T=t)$ می پذیرد ، در نقاط انفصال تابع $F(t)$ رخ می دهد . زیرا در نقاط دیگر مثل T=1 داریم :

$$P(T=۱) = P(۱ \le T \le ۱) = F(۱) - F(۱^-) = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶} = ۰$$

مقدار P(t) را در نقطه انفصال تابع توزیع F(t) به دست می آوریم :

$$P(T=-۱) = F(-۱) - F(-۱^-) = \frac{۱}{۱۲} - ۰ = \frac{۱}{۱۲}$$

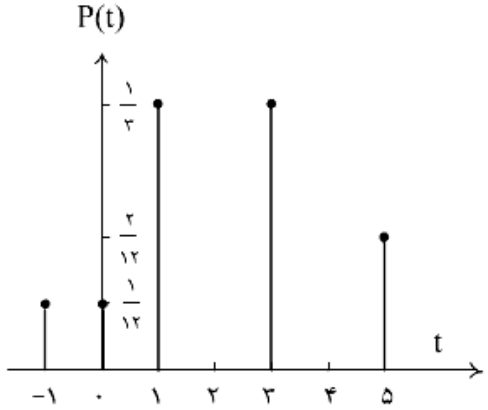
$$P(T=۰) = F(۰) - F(۰^-) = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$P(T=۲) = F(۲) - F(۲^-) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(T=۳) = F(۳) - F(۳^-) = \frac{۱۰}{۱۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(T=۵) = F(۵) - F(۵^-) = ۱ - \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$$

نمودار احتمال P(t) شبیه به نمودار میله ای است .



Jalase 3 – sco 1

توابع چگالی

برای متغیر تصادفی گسسته X تابع چگالی که به فرم $f_X(x)$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود :

$$f_X(x) = P(X = x) \qquad \text{X عدد حقیقی}$$

به عبارت دیگر تابع چگالی همان تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X می باشد که در رابطه زیر صدق کند :

$$F_X(x) = \sum_{\text{برد } X} f_X(x)$$

در برخی از کتاب ها به جای تابع احتمال برای متغیر های تصادفی گسسته مفهوم تابع چگالی را که دقیقا همان تعریف را دارد به کار می برند .

Jalase 3 sco 2

توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته

قبل از هر چیز به مثال زیر توجه کنید :

مثال :

فرض کنید مدت زمان توقف اتوبوس در ایستگاه و قبل از حرکت به صورت تصادفی 0 الی 15 دقیقه باشد . در این صورت متغیر تصادفی X را مدت زمان تأخیر حرکت اتوبوس پس از 5 دقیقه تعریف می کنیم . مطلوب است احتمال لین که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد .

حل :

در این مثال با یک فضای نمونه پیوسته مواجه ایم که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد :

$S = \{ ۵ \le x \le ۱۵ \}$

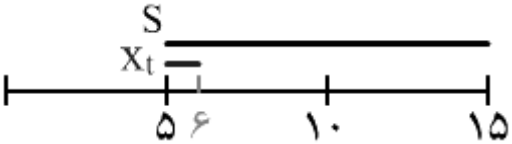
نمایش تابعی متغیر تصادفی X عبارت است از $x_t = t - 5$ و $(t \in S)$ که میزان تأخیر حرکت اتوبوس را نشان می دهد .

به این ترتیب می توان احتمال این که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد را محاسبه نمود .

احتمال این که $5 \le x_t \le 6$ باشد برابر است با طول بازه ی $[5,6]$ تقسیم بر طول بازه $[5,15]$.

$$\frac{[۵ ، ۶]}{[۵ ، ۱۵]} = ۰/۱$$

لازم به تذکر است که در این جا تابع احتمال یک فاصله پیشامد مورد نظر به طول فاصله فضای نمونه ، تعریف شده است .



حال با توجه به این مثال به تعریف تابع چگالی ، تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته می پردازیم .

فرض کنید x = متغیر تصادفی پیوسته باشد در این حالت نیز تعاریف تابع توزیع و چگالی در مورد متغیر x صدق می کند . با این تفاوت که در این حالت برای بدست آوردن تابع توزیع با توجه به پیوسته بودن از انتگرال گیری به جای جمع بستن روی تابع چگالی استفاده می کنیم .

داریم :

$$F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx$$

که $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته x است .
از این رابطه می توان تابع چگالی را بر حسب تابع توزیع بدست آورد ، به کمک مشتق گیری یعنی

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

به عبارتی با مشتق گرفتن از تابع توزیع مقدار چگالی به دست می آید . با توجه به تعاریف می توان خواص زیر را توابع توزیع و چگالی متغیر تصادفی پیوسته x بدست آورد.

Jalase 3 – sco 3

1- برای هر $x \in R$ ، داریم $f_X(x) \geq 0$.

توجه کنید که در حالت پیوسته $f_X(x)$ الزاما کوچکتر یا مساوی یک نمی باشد زیرا همان طور که قبلا اشاره کردیم مقدار تابع احتمال برای متغیر تصادفی در یک نقطه صفر می باشد و احتمالات می بایستی در این حالت در یک بازه محاسبه شوند .

-2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = ۱$$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی x در یک بازه به این ترتیب عمل می کنیم :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

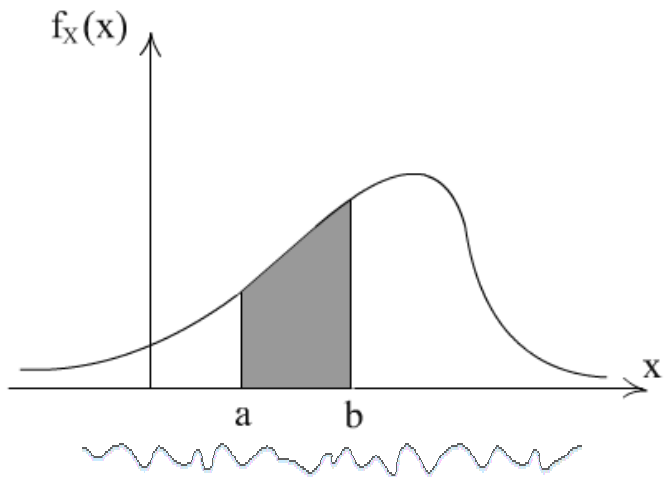
$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

از طرفی در حالت پیوسته احتمال این که x برابرعدد دیگری باشد صفر می باشد . بنابراین می توان نوشت:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

از لحاظ هندسی احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی پیوسته x در بازه a تاb برابر است با سطح زیر منحنی تابع چگالی از a تا b . مطابق شکل زیر :



Jalase 4 – sco 1

مثال :

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x به صورت زیر می باشد :

$$f_X(x) = \begin{cases} x & ۰ \le x \le ۱ \\ c - x & ۱ \le x \le ۲ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید .

ب) تابع توزیع متغیر تصادفی x را بدست آورید .

ج) احتمال $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$ را یکبار با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ و یکبار با استفاده از تابع توزیع $F_X(x)$ در نقطه x محاسبه کنید .

حل :

الف) برای بدست آوردن متغیر c می دانیم مساحت زیر منحنی f_X یعنی تابع چگالی می بایستی برابر واحد باشد . بنابراین :

$$\int_x f_X(x)dx = ۱ \quad \Rightarrow \quad \int_۰^۲ f_X(x)dx = \int_۰^۱ x\,dx + \int_۱^۲ (c - x)dx =$$

$$= \frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۱ + (cx - \frac{x^۲}{۲})\Big|_۱^۲ = \frac{۱}{۲} + (۲c - ۲) - c + \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲c - ۲ - c + \frac{۱}{۲} = c - ۱$$

$$\Rightarrow \quad c - ۱ = ۱ \quad \Rightarrow \quad c = ۲$$

Jalase 4 – sco 2

ب) مقدار تابع توزیع f_X را محاسبه می کنیم . می دانیم :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

برای حل می بایستی این مقدار را در چهار حالت $x \prec 0$ و $0 \le x \prec 1$ و $1 \le x \prec 2$ و $2 \le x$.

اگر $x < ۰$ $\Rightarrow$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{۰} f_X(t)dt = ۰$

اگر $۰ \le x < ۱$ $\Rightarrow$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{۰} f_X(t)dt + \int_{۰}^{x} t\,dt$

$$= ۰ + \frac{t^۲}{۲}\Big|_{۰}^{x} = \frac{x^۲}{۲}$$

اگر $۱ \le x < ۲$ $\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{۰} f_X(t)dt + \int_{۰}^{۱} f_X(t)dt + \int_{۱}^{x} f_X(t)dt$

$$= ۰ + \int_{۰}^{۱} t\,dt + \int_{۱}^{x} (۲ - t)dt =$$

$$= ۰ + \frac{t^۲}{۲}\Big|_{۰}^{۱} + (۲t - \frac{t^۲}{۲})\Big|_{۱}^{x}$$

$$= ۰ + \frac{۱}{۲} + (۲x - \frac{x^۲}{۲}) - (۲ - \frac{۱}{۲}) =$$

$$= ۰ + \frac{۱}{۲} + ۲x - \frac{x^۲}{۲} - ۲ + \frac{۱}{۲} = ۲x - \frac{x^۲}{۲} - ۱$$

اگر $۲ \le x$ $\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{۰} f_X(t)dt + \int_{۰}^{۱} f_X(t)dt + \int_{۱}^{۲} f_X(t)dt + \int_{۲}^{x} f_X(t)dt =$

$$\Rightarrow F_X(x) = ۰ + \int_{۰}^{۱} t\,dt + \int_{۱}^{۲} (۲ - t)dt + \Big|_{۲}^{x} f_X(t)dt$$

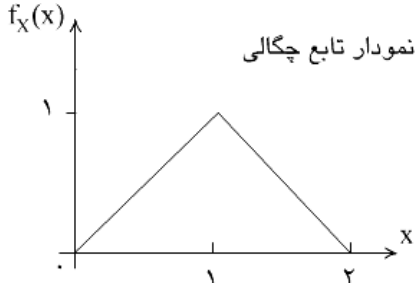
$$= ۰ + \frac{t^۲}{۲}\Big|_{۰}^{۱} + (۲t - \frac{t^۲}{۲})\Big|_{۱}^{۲} + ۰$$

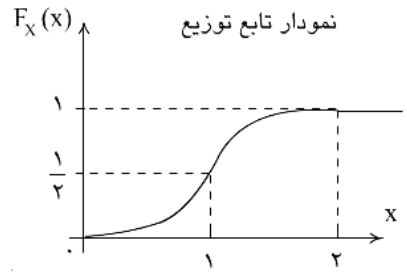
$$= \frac{۱}{۲} + (۴ - ۲) - (۲ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

بنابراین ضابطه تابع توزیع $F_X(x)$ برابر است با :

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{x^۲}{۲} & ۰ \le x < ۱ \\ ۲x - \frac{x^۲}{۲} - ۱ & ۱ \le x < ۲ \\ ۱ & ۲ \le x \end{cases}$$

حال به نمودار دو تابع چگالی و توزیع توجه کنید :
نمودار تابع چگالی به صورت یک مثلث که قاعده پایینی آن بر روی محور x ها حدفاصل 0 تا 2 است ، می باشد .





Jalase 4 – sco 3

ج) ابتدا مقدار $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ بدست می آوریم .

$$P(\frac{۱}{۲} \le X \le \frac{۳}{۲}) = \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} f_X(t)dt = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} t\,dt + \int_{۱}^{\frac{۳}{۲}} (۲ - t)dt$$

و این به خاطر این است که ضابطه تعریف تابع چگالی از 1 تا $\frac{3}{2}$ با $\frac{1}{2}$ تا 1 متفاوت است .

$$= \frac{t^۲}{۲}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱} + (۲t - \frac{t^۲}{۲})\Big|_{۱}^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۸} + (۳ - \frac{۹}{۸}) - (۲ - \frac{۱}{۲})$$

$$= ۲ - \frac{۱۰}{۸} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

مجدادا مقدار $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع توزیع $F_X(x)$ که در بند ب محاسبه شده است بدست می آوریم.

$$P(\frac{۱}{۲} \le X \le \frac{۳}{۲}) = F_X(\frac{۳}{۲}) - F_X(\frac{۱}{۲})$$

$$= ۳ - \frac{۹}{۸} - ۱ - \frac{۱}{۸} = ۲ - \frac{۱۰}{۸} = \frac{۳}{۴}$$ تابع توزیع

ملاحظه ی کنید که مقدار احتمال از هر دو راه حل برابر است:

$$= ۲ - \frac{۱۰}{۸} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$ تابع چگالی

Jalase4 - sco 4

مثال :

متغیر تصادفی پیوسته x دارای تابع توزیع $F_X(x)$ با ضابطه زیر می باشد :

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ c - e^{-ax} & x \ge ۰ \quad , \quad a > ۰ \end{cases}$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید ؟

ب) تعیین کنید متغیر a چه مفادیری می تواند بگیرد ، به شرطی که $F_X(x)$ همچنان تابع توزیع باقی بماند .

ج) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x را بدست بیاورید .

د) مقادیر احتمال $P(x \le 1)$ و $P(0 \le x \le 2)$ و $P(x \ge \ln 10)$ را بدست آورید .

ه) به ازای چع مقداری از متغیر y مقدار $P(x \le y) = \frac{1}{2}$ می باشد ؟

حل :

می دانیم شرط این که تابعی مثل $F_X(x)$ تابع توزیع باشد برابر است با :

۱ – $۰ \le F_X(x) \le ۱ \quad \forall x$

۲ – $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = ۰ \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = ۱$

۳ – $F_X(a) \le F_X(b) \quad \forall a \le b$

۴ – $\lim_{h \to ۰} F_X(x+h) = F_X(x) \quad \forall x$

پس از آن باقی شروط را بررسی می کنیم .

۱ – $\lim_{x \to +\infty} c - e^{-ax} = c - \lim_{x \to +\infty} e^{-ax} = c \rightarrow c = ۱$

اگر $x < ۰$ آنگاه $F_X(x) = ۰$ می باشد ، که در نتیجه شرط برقرار است .

اگر $x \geq ۰$ آنگاه $F_X(x) = ۱ - e^{-ax}$ داریم :

اگر $x \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq e^{-ax} \leq ۱ \rightarrow -۱ \leq e^{-ax} < ۰ \rightarrow ۱ - ۱ \leq e^{-ax} < ۱$

$$\rightarrow ۰ \leq ۱ - e^{-ax} < ۱ \rightarrow ۰ \leq F_X(x) \leq ۱$$

$$\forall x \leq y \Rightarrow e^{-ax} \geq e^{-ay} \rightarrow -e^{-ax} \leq -e^{-ay}$$

$$\Rightarrow ۱ - e^{-ax} \leq ۱ - e^{-ay} \rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$

Jalase 4 – sco 5

همچنین به ازای هر $x \geq 0$ تابع e^{-ax} پیوسته می باشد . بنابراین تابع $1-e^{-ax}$ نیز حداقل از سمت راست پیوستگی دارد و در نقطه x=0 داریم :

$$\lim_{x \to ۰^+} ۱ - e^{-ax} = F_X(۰) = ۰$$

بنابراین تابع در نقطه 0 پیوسته می باشد . با توجه به برقراری هر 4 شرط می توانیم بگوییم $F_X(x)$ با ضابطه زیر یک تابع توزیع احتمال می باشد .

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - e^{-ax} & x \geq ۰ \end{cases}$$

ب) از آنجایی که تابع $F_X(x)$ مستقل از مقدار a در شرایط تابع توزیع صدق می کند ، بنابراین به ازای همه مقادیر $a \succ 0$ تابع $F_X(x)$ نیز تابع توزیع می باشد .

ج) برای بدست آوردن تابع چگالی $f_X(x)$ کافی است از تابع توزیع مشتق بگیریم به این ترتیب که :

اگر $x < ۰$ $\quad F'_X(x) = ۰$

اگر $x \geq ۰$ $\quad F'_X(x) = ۰ - (-a)\, e^{-ax} = ae^{-ax}$

توجه کنید که تابع توزیع در نقطه x=0 پیوسته می باشد . اما تابع در این نقطه مشتق ندارد زیرا مشتق چپ و راست در x=0 با هم برابر نمی باشند .

مشتق چپ در صفر $\Rightarrow$ $x < ۰ \rightarrow F'_X(۰) = ۰$

مشتق راست در صفر $\Rightarrow$ $x \geq ۰ \rightarrow F'_X(۰) = ae^{-a(۰)} = a$

بنابراین تابع چگالی احتمال برابر است با :

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

Jalase 4 – sco 6

د)

$$P(x \le ۱) = F_X(۱) = \int_{-\infty}^{۱} f_X(x)dx = ۱ - e^{-a}$$

$$P(۰ \le x \le ۲) = F_X(۲) - F_X(۰) = ۱ - e^{-۲a} - (۱ - ۱) = ۱ - e^{-۲a}$$

$$P(x \ge Ln۱۰) = ۱ - P(x < Ln۱۰) = ۱ - F_X(Ln۱۰) =$$

$$= ۱ - ۱ + e^{-aLn۱۰} = e^{Ln۱۰^{-a}} = ۱۰^{-a} = \frac{۱}{۱۰^{a}}$$

ه) به فرم زیر عمل می کنیم :

$$P(X \le y) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \quad ۱ - e^{-ay} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲} = e^{-ay} \rightarrow Ln\frac{۱}{۲} = -ay \rightarrow y = \frac{-۱}{a} Ln\frac{۱}{۲}$$

فصل چهارم

امید ریاضی

۴-۱ با توجه به مطالب فصل اول می‌دانیم که اگر مقادیر $x_1 \cdots x_n$ را از یک جامعه آماری داشته باشیم میانگین آنها را با $\bar{x}=\frac{\sum_{1}^{n} f_i x_i}{\sum_{1}^{n} f_i}$ نمایش می‌دهیم حال فرض کنید مقادیر $x_1 \cdots x_n$ مقادیری باشند که متغیر تصادفی گسسته X با مقدار احتمال $f(xi)$ بخود می‌گیرد. در این صورت امید ریاضی متغیر تصادفی X را همان میانگین مقادیر $x_1 \cdots x_n$ با فراوانی $f(xi)$ در نظر می‌گیریم و با $E[X]$ یا μ_x به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$E[X]=\sum_{x\text{ برد}} f(xi)\, x_i$$

توجه کنید که در این حالت $\sum_{x\text{ برد}} f_i=1$ زیرا $f(xi)$ خود تابع احتمال متغیر تصادفی X می‌باشد. با توجه به مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که امید ریاضی در واقع همان میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X است یعنی اگر تحت شرایط یکسان یک آزمایش را با توجه به مقادیر احتمال متغیر تصادفی X تکرار کنیم انتظار داریم چه مقداری از متغیر تصادفی X را مشاهده کنیم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

۴-۲ مثال ۸: یک شرکت بیمه انواع اتومبیل‌ها را بیمه بدنه می‌کند. فرض کنید در طول یک سال ۲۰ درصد افراد هیچگاه تصادف نکنند، ۳۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱۰۰ هزار تومان برای بیمه، ۴۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱ میلیون تومان برای بیمه و ۱۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱۰ میلیون تومان برای بیمه داشته باشند. در این صورت انتظار داریم شرکت بیمه بطور متوسط در طول یک سال چه هزینه‌ای را برای بیمه بدنه اتومبیل‌ها پرداخت کند؟

حل: ابتدا متغیر تصادفی X را احتمال تصادف اتومبیل‌ها و مقادیر آنرا برابر با هزینه تقبل شده توسط شرکت بیمه در نظر می‌گیریم بنابر این داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۰/۲ & x=x_1=۰ \\ ۰/۲ & x=x_2=۱۰۰/۰۰۰ \\ ۰/۴ & x=x_3=۱/۰۰۰/۰۰۰ \\ ۰/۱ & x=x_4=۱۰/۰۰۰/۰۰۰ \end{cases}$$

حال امید ریاضی متغیر تصادفی X را که برابر است با مقدار متوسط هزینه پرداخت شده توسط شرکت بیمه، محاسبه می‌کنیم:

$$E[X]=\sum_{1}^{4} f(xi)\, x_i = ۰/۲\times ۰ + (۱۰۰/۰۰۰)\, ۰/۳ + (۱/۰۰۰/۰۰۰)\, ۰/۴ + (۱۰/۰۰۰/۰۰۰)\, ۰/۱$$

$$=۳۰/۰۰۰+۴۰۰/۰۰۰+۱/۰۰۰/۰۰۰=۱/۴۳۰/۰۰۰$$

به این ترتیب شرکت بیمه می‌بایستی سالانه مبلغ ۱/۴۳۰/۰۰۰ تومان را به ازای بیمه بدنه اتومبیل‌ها پرداخت کند.

۴-۳ مثال ۹: فرض کنید در مثال قبل شرکت بیمه تعداد ۱۰۰ اتومبیل را بیمه بدنه کرده باشد در این صورت حداقل قیمت پیشنهادی شرکت برای هر اتومبیل چقدر باشد تا شرکت ضرر کند؟

حل: توجه کنید که با توجه به مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی X که در مثال قبل درست آمد می‌دانیم شرکت سالانه ۱/۴۳۰/۰۰۰ تومان هزینه می‌کند. با تقسیم این مبلغ بر تعداد اتومبیل‌ها میزان هزینه به ازای هر اتومبیل بدست می‌آید که برابر است با:

میزان هزینه سالانه هر اتومبیل $\frac{۱/۴۳۰/۰۰۰}{۱۰۰}=۱۴/۳۰۰$

حال برای آنکه شرکت ضرر ندهد می‌بایستی به ازای بیمه بدنه هر اتومبیل حداقل مبلغ ۱۴/۳۰۰ تومان را دریافت کند.

۴-۴ برخی از خواص امیر ریاضی

از آنجا که امید ریاضی بر پایه میانگین $\overline{X}$ تعریف شده است خواص بدست آمده برای میانگین در مورد امید ریاضی نیز برقرار است که عبارتند از:

۱- $E[ax]=aE[X]$ مقدار ثابت A

۲- $E[x+b]=E[X]+b$ مقدار ثابت B

و در حالت کلی: $E[ax+b]=aE[X]+b$

۴-۵ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی

تا بحال امید ریاضی را بر حسب متغیر تصادفی X محاسبه کردیم اما می‌توان آنرا بر حسب تابعی مثل $X^۲$، $۳X-۲$، محاسبه نمود به این ترتیب می‌توان طیف وسیعتری از مسائل را حل نمود. برای محاسبه امید ریاضی بر حسب تابعی مثل $g(X)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E[g(x)]=\sum_{x\ \text{برد}} g(x)\, f_x(x)$$

به عنوان مثال $E[X]$ در واقع همان $E[g(x)=x]$ می‌باشد.

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی X نیز با قرار دادن $g(X)=(X-\mu_x)^۲$ بدست می‌آید و داریم:

$$\delta_X^۲=E\left[(X-\mu_x)^۲\right]$$

و انحراف معیار متغیر تصادفی X با جذر از $\delta_X^۲$ بدست می‌آید $\delta_X=\sqrt{\delta_X^۲}$ می‌توان نشان داد که $\delta_X^۲$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta_X^۲=E\left[X^۲\right]-E^۲[X]$$

اثبات:

$$\delta_X^۲=E\left[(X-E[X])^۲\right]=E\left[X^۲-۲XE[X]+E^۲[X]\right]$$

$$=E\left[X^۲\right]-E[۲XE[X]]+E^۲[X]$$

$$=E\left[X^۲\right]-E[۲E[X]]E[X]+E^۲[X]$$

$$E\left[X^۲\right]-E^۲[X]$$

۴-۶ گشتاورها

اگر امید ریاضی را بر حسب تابع $g(X)=(X-a)^k$ محاسبه کنیم به آن گشتاور مرتبه kام حول a گویند به عبارتی:

گشتاور مرتبه k ام حول a $=E[(X-a)^k]$

همچنین اگر $a=\overline{x}$ به آن گشتاور مرتبه kام مرکزی گویند و اگر $a=۰$ باشد به آن گشتاور مرتبه kام حول صفر گویند. که آنرا با m_k نمایش می‌دهند.

گشتاور مرتبه kام مرکزی $=E[(X-\overline{X})^k]$

m_k = حول صفر = گشتاور مرتبه kام $=E[(X^k]$

۴-۷ مثال ۱۰: مقادیر $m_۱$ و $m_۲$ را بر حسب μ_X و $\delta_X^۲$ بدست بیاورید:

حل:

$$m_1 = E\left[X^1\right] = \mu_X$$

$$m_2 = E\left[X^2\right] = \delta_X^2 + \mu_X^2$$

بنابراین با داشتن مقادیر گشتاورهای مرتبه اول و دوم می‌توان مقادیر امید ریاضی و واریانس را بدست آورد. همچنین با داشتن مقادیر سایر گشتاورهای مرتبه سوم به بعد نیز می‌توان اطلاعاتی در مورد متغیر تصادفی X بدست آورد.

۴-۸ تابع مولد گشتاورها

تابع مولد گشتاورها برای متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف می‌شود و با $m_X(t)$ نمایش داده می‌شود:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$$

$m_X(t)$ را به این دلیل تابع مولد گشتاورها می‌نامیم که با k بار مشتق گیری از آن نسبت به t و قرار دادن $t=0$ مقدار گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X بدست می‌آید.

به عنوان مثال با یکبار مشتق گیری نسبت به t داریم: (با فرض اینکه بتوان ترتیب اعمال مشتق‌گیری و امیدگیری را جابجا نمود)

$$m_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} E\left[e^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] = E\left[X e^{tX}\right]$$

با قرار دادن $t=0$ داریم:

$$m_X^{(1)}(0) = E\left[X e^{0X}\right] = E[X] = m_1$$

که همان گشتاور مرتبه اول یا μ_X می‌باشد. به همین ترتیب با K بار مشتق‌گیری داریم:

$$m_X^{(k)}(t) = E\left[\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right] = E\left[X^k e^{tX}\right]$$

و در $t=0$ خواهیم داشت:

$$m_X^{(k)}(0) = E\left[X^k\right]$$

که همان گشتاور مرتبه kام متغیر X می‌باشد.

۴-۹ امید ریاضی برای متغیر تصادفی پیوسته

برای متغیر تصادفی پیوسته X امید ریاضی به جای جمع بستن روی مقادیر $x f_X(x)$ با انتگرال‌گیری روی این مقادیر بدست‌می‌آید بصورت زیر:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

همینطور داریم:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

به همین ترتیب برای محاسبه گشتاورها و توابع مولد برای متغیر تصافی پیوسته X از رابطه فوق در فرمول استفاده می‌شود.

۴-۱۰ مثال: فرض کنید برای متغیر تصادفی X مقدار تابع مولد گشتاور برابر با $m_X(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ باشد در این صورت مقدار گشتاور مرتبه kام حول مبدأ یا $E[X^K]$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم مشتق مرتبه Kام تابع مولد گشتاور نسبت به t در نقطه صفر برابر با $E\left[X^K\right]$ می‌باشد بنابراین:

$$E\left[X^K\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)\Big|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = \frac{t e^t - e^t + 1}{t^2}$$

ملاحظه می‌کنید که مشتق مرتبه اول در نقطه $t=0$ موجود نمی‌باشد به همین ترتیب سایر مشتقات مراتب بالاتر نیز در نقطه $t=0$ موجود نمی‌باشند اما این به معنی عدم وجود $E[X^K]$ نمی‌باشد.

در مواقعی که مشتق در نقطه $t=0$ موجود نباشد می‌توان از قضیه زیر برای بدست آوردن گشتاور kام حول مبدأ استفاده کرد.

قضیه: گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X حول مبدأ برابر است با ضریب $\frac{t^k}{k!}$ در بسط تیلور تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X:

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[X^K\right] \frac{t^k}{k!}$$

حال با استفاده از قضیه فوق مجدداً مقدار $E[X^K]$ را در مثال قبل محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم: $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ بنابراین:

$$m_X(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{E\left[X^K\right]} \frac{t^k}{k!}$$

بنابراین ملاحظه می‌کنید که ضریب $\frac{t^k}{k!}$ در بسط غوق برابر $\frac{1}{k+1}$ می‌باشد یعنی: $E[X^K] = \frac{1}{1+k}$.

۴-۱۱ مثال: تابع مولد گشتاور متغیر تصافی X برابر است با $m_X(t) = \frac{1}{1-t}$ مطلوبست محاسبه μ_X ، δ_X^2 و $E[X^K]$.

حل: در این مثال مقدار مشتق مرتبه Kام $\frac{1}{1-t}$ در نقطه $t=0$ موجود می‌باشد اما محاسبه آن مشکل می‌باشد بنابر این برای راحتی از بسط تیلور استفاده می‌کنیم:

$$m_X(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{t^k}{k!}$$

بنابراین $E[X^K] = k!$.

حال مقادیر μ_X و δ_X^2 برابرند با:

$$\mu_X = E[X] = 1! = 1$$

$$\delta_X^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] = 2! - 1 = 1$$

۴-۱۲ مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

مطلوبست :

الف) محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی X.

ب) محاسبه μ_X ، δ_X^2 و گشتاور مرتبه kام حول مبدأ و حول میانگین

حل: الف:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}\,dt = -e^{-\frac{1}{2}}\Big|_{0}^{x} = -e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

بنابراین:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ب) ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه می‌کنیم:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{x(t-\frac{1}{2})}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(t-\frac{1}{2})} e^{x(t-\frac{1}{2})}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2(t-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1-2t}$$

به شباهت بین تابع مولد گشتاور در ایم مثال و مثال قبل توجه کنید.

$$\mu_x = E[X] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-2t}\right)\Big|_{t=0} = 2$$

$$\delta_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-2t}\right)\Big|_{t=0} = 8-4=4$$

برای محاسبه گشتاور مرتبه kام حول میانگین داریم:

$E[(X-\mu_X)^K] =$ گشتاور مرتبه kام حول میانگین

برای محاسبه $E[(X-\mu_X)^K]$ از تابع مولد گشتاور حول میانگین که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم:

$$m_{X-\mu_X}(t) = E[e^{t(X-\mu_X)}]$$

حال توجه کنید که:

$$m_{X-\mu_X}(t) = E\left[e^{tX-t\mu_x}\right] = E\left[e^{tX} e^{-t\mu_x}\right] = e^{-t\mu_x} E\left[e^{tX}\right] = e^{-t\mu_x} m_X(t)$$

بنابراین رابطه کلی زیر بین گشتاور مرتبه kام حول مبدأ و میانگین موجود است:

$$m_{X-\mu_X}(t) = e^{-t\mu_x} m_X(t)$$

حال به راحتی می‌توان $m_{X-\mu_X}(t)$ را با توجه به مقدار $m_X(t)$ بدست آورد داریم:

$$m_{X-\mu_X}(t) = e^{-2t} \frac{1}{1-2t}$$

بنابراین مقدار گشتاور مرتبه kام حول میانگین برابر است با مشتق مرتبه kام $m_{X-\mu_X}(t)$ نسبت به t در نقطه $t = 0$.

مقدار $E[X^K]$ برابر است با:

$$m_X(t) = \frac{۱}{۱-۲t} = ۱+۲t+(۲t)^۲+(۲t)^۲ = \sum_{k=۰}^{\infty}(۲t)^k$$

$$= \sum_{k=۰}^{\infty} ۲^k k!\left(\frac{t^k}{k!}\right) \quad \Rightarrow \quad E[X^K] = ۲^K K!$$

۱۳-۴ مثال: تابع توزیع متغیر تصادفی X بصورت زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ & ۰ \le x < ۱ \\ -۱+۲x-\frac{۱}{۲}x^۲ & ۱ \le x < ۲ \\ ۱ & x \ge ۲ \end{cases}$$

مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) μ_X و $\delta_X^۲$

حل: الف)

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{اگر} \quad x < ۰ \quad f(x)=۰$$

$$\text{اگر} \quad ۰ \le x < ۱ \quad \Rightarrow \quad f(x) = ۲-x$$

$$x \ge ۲ \quad \Rightarrow \quad f(x)=۰$$

بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ \le x < ۱ \\ ۲-x & ۱ \le x < ۲ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ب)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_۰^۱ x^۲\,dx + \int_۱^۲ x(۲-x)\,dx =$$

$$\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۱ + \left(x^۲-\frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_۱^۲ = \frac{۱}{۳}+\left(۴-\frac{۸}{۴}\right)-\left(۱-\frac{۱}{۳}\right) = ۱$$

$$E\left[X^۲\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^۲ f(x)\,dx = \int_۰^۱ x^۳\,dx + \int_۱^۲ x^۲(۲-x)\,dx =$$

$$\frac{x^۴}{۴}\Big|_۰^۱ + \left(\frac{۲x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}\right)\Big|_۱^۲ = \frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱۶}{۳}-\frac{۱۶}{۴}\right)-\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۷}{۶}$$

$$\delta_X^۲ = E\left[X^۲\right] - E^۲[X] = \frac{۷}{۶} - ۱ = \frac{۱}{۶}$$

فصل پنجم

۵-۱ متغیرهای تصادفی دو و چند بعدی

فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم می‌دانیم هر کدام از دو متغیر به هر عضو فضای نمونه S مقداری حقیقی و منحصر به فرد نسبت می‌دهند همینطور به ازای هر کدام از X و Y یک تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ خواهیم داشت.

اگر بخواهیم احتمال وقوع همزمان مقادیر برد هر یک از متغیرهای X و y را بصورت یک تابع احتمال نشان دهیم، متغیر تصادفی $Z=(X,Y)$ را متغیر تصادفی دو بعدی با تابع احتمال $f_{X,Y}(x,y)$ معرفی می‌کنیم.

متغیر تصادفی دو بعدی تمامی خواص متغیرهای یک بعدی را دارا می‌باشد همینطور خواص زیر برای تابع چگالی احتمال آن برقرار است:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x \ , \ Y=y)$$

برای متغیر تصادفی دو بعدی گسسته:

$$۱- \quad ۰ \le f_{X,Y}(x,y) \le ۱ \quad \forall x,y$$

$$۲- \quad \sum_{\text{برد } Y} \sum_{\text{برد } X} f_{X,Y}(x,y) = ۱$$

برای متغیر تصادفی دو بعدی پیوسته:

$$۱- \quad f_{X,Y}(x,y) \ge ۰ \quad \forall x,y$$

$$۲- \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = ۱$$

$$۳- \quad P(a \le x \le b \ , \ c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) \, dx\, dy$$

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: یک عدد تاس را که بر روی سه وجه آن عدد ۱ و بر روی سه وجه دیگر عدد ۲ حک شده است را دو بار پرتاب می‌کنیم و متغیرهای X و y را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$X =$ مجموع دو عدد ظاهر شده $= \{۲,۳,۴\}$

$Y =$ تفاضل دو عدد ظاهر شده $= \{-۱,۰,۱\}$

بنابراین متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) را می‌توان به این ترتیب تعریف نمود:

زوج مرتب نمایش دهنده مجموع و تفاضل دو عدد ظاهر $=(X,Y)$ شده در دو بار پرتاب تاس.

چند عضو فضای نمونه S عبارتند از: $= \{(۲,-۱) \ , (۲,۰) \ , (۲,۱) \ ,(۲,-۱) \ , \ \dots\}$

به این ترتیب تابع احتمال دو بعدی $f_{X,Y}(x,y)$ بصورت زیر می‌باشد:

۵-۳

Y \ X	۲	۳	۴
-۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰

به عنوان مثال مقادیر احتمال بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{X,Y}(x=۲ \ , \ y=-۱) = ۰$$

برای اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر با عدد ۲ باشد باید بر روی تاس در پرتاب اول عدد ۱ و در پرتاب دوم عدد ۱ ظاهر شده باشد. بنابراین احتمال این حالت برابر صفر می‌باشد.

اما برای حالت $(۲,۰)$ این احتمال برابر است با:

$$f_{X,Y}(x=۲\ ,\ y=۰) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

برای آنکه مجموع ۲ باشد می‌بایستی در پرتاب اول عدد ۱ و در پرتاب دوم عدد ۱ ظاهر شده باشد بنابراین احتمال اینکه در پرتاب اول عدد ظاهر شود برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد و چون ظاهر شدن عدد ۱ در پرتاب دوم مستقل از پرتاب اول است بنابراین احتمال ظاهر شدن ۱ در هر پرتاب برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

از روی تابع چگالی احتمال دو بعدی در این مثال می‌توان مقدار تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را مستقل از Y محاسبه کنیم که آنرا تابع احتمال حاشیه‌ای یا کناری X می‌نامیم. که جمع بستن روی مقادیر Y در هر سطر بدست می‌آید به عبارتی:

$$f_X(x) \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

Y \ X	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
−۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	

به همین ترتیب تابع چگالی احتمال Y نیز با جمع بستن روی مقادیر X در جدول بدست می‌آید که به آن تابع احتمال حاشیه‌ای برای Y گویند.

$$f_Y(y) \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

۴-۵ برای نمونه $f_X(x)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(۲) = f(۲,-۱) + f(۲,۰) + f(۲,۱) = ۰ + \frac{۱}{۴} + ۰ = \frac{۱}{۴}$$

$$f_X(۳) = f(۳,-۱) + f(۳,۰) + f(۳,۱) = \frac{۱}{۴} + ۰ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$f_X(۴) = f(۴,-۱) + f(۴,۰) + f(۴,۱) = ۰ + \frac{۱}{۴} + ۰ = \frac{۱}{۴}$$

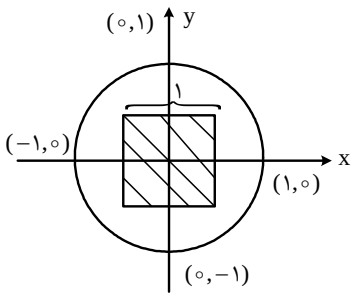
بنابراین:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & x=۲ \\ \frac{۱}{۲} & x=۳ \\ \frac{۱}{۴} & x=۴ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

صحت مقادیر $f_X(x)$ را با استفاده از تعریف متغیر تصادفی X نیز می‌توان بررسی نمود مثلاً $f_X(۳)$ یعنی عدد ظاهر شده در پرتاب اول تاس ۱ و در پرتاب دوم ۲ بوده است یا عدد ظاهر شده در پرتاب اول ۲ و در پرتاب دوم ۱ بوده است که احتمال آن برابر است با:

$$f_X(۲) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۵-۵ مثال ۲: از درون دایره واحد یک نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) را طول و عرض نقطه انتخاب شده در نظر می‌گیریم مطلوبست محاسبه تابع چگالی احتمال دو بعدی $f_{X,Y}(x,y)$ و با استفاده از آن احتمال اینکه نقطه انتخاب شده درون مربع واحد قرار بگیرد را محاسبه کنید. همچنین تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای X و Y را محاسبه کنید.



حل: با توجه به شکل روبرو مقدار تابع چگالی را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حال مقدار مجهول C را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^{2\pi} c\,r\,d\theta\,dr \quad\Rightarrow\quad c\pi=1 \quad\rightarrow\quad c=\frac{1}{\pi}$$

بنابراین تابع چگالی احتمال دو متغیر $f_{X,Y}(x,y)$ برابر است با:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

برای آنکه نقطه انتخابی درون مربع واحد باشد باید داشته باشیم:

$$-\frac{1}{2}\le +x\le\frac{1}{2} \qquad , \qquad -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$$

مقدار احتمال با انتگرال‌گیری روی $f_{X,Y}(x,y)$ در بازه فوق بدست می‌آید:

$$p\left(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\,dx\,dy=\frac{1}{\pi}$$

توجه کنید که مقدار $\frac{1}{\pi}$ برابر با مساحت مربع تقسیم بر مساحت کل دایره می‌باشد که در فصل دوم نیز به این روش محاسبه می‌شد.

۵-۶ برای محاسبه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای متغیر X در حالت پیوسته به جای جمع بستن روی مقادیر Y از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم به عبارتی:

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}(y)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-x^2}-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

به همین ترتیب مقدار $f_Y(y)$ نیز بدست می‌آید:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}(x) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-y^2-(-\sqrt{1-y^2})}\right) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۵-۷ ۱.۱.۴ تابع توزیع دو متغیره

تابع توزیع دو متغیره نیز کاملاً مشابه حالت یک متغیه بدست می‌آید به این ترتیب که:

$$F_{X,Y}(t_1, t_2) = p(x \le t_1, y \le t_2) \qquad \forall (t_1, t_2) \in R^2$$

حال اگر X و Y گسسته باشند تابع توزیع با جمع بستن روی X و Y تا (t_1, t_2) بدست می‌آید و اگر X و Y پیوسته باشند با انتگرال‌گیری تا (t_1, t_2).

حل: با توجه به تعریف داریم:

Y \ X	۲	۳	۴
-1	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱

با توجه به تابع توزیع می‌توان مقدار

احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۴ و تفاضل دو عدد ظاهر شده کمتر از ۰ باشد را بدست آورد که برابر است با $f_{X,Y}(4,0)$:

$$p(x \le 4, y \le 0) = F_{X,Y}(4,0) = \frac{3}{4}$$

۵-۸ ۲.۱.۴ امید ریاضی و گشتاورها برای توابع چگالی دو متغیره

همانند توابع چگالی یک متغیره امید ریاضی و توابع مولد گشتاورهای توام X و Y به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

برای متغیرهای گسسته X و Y:

$$E[g(X,Y)] = \sum_{\text{برد } Y} \sum_{\text{برد } X} g(X,Y)\, f_{X,Y}(x,y)$$

برای متغیرهای پیوسته X و Y:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی (X,Y):

$$m_{X,Y}(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

توجه کنید که در این حالت نیز با گرفتن مشتق‌های پاره‌ای از تابع مولد گشتاور (X,Y) نسبت به t_1, t_2 و قرار دادن $(t_1, t_2) = (0,0)$ مقدار $i\,j$امین گشتاور توام (X,Y) بدست می‌آید. بصورت زیر:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} m_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} E\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] = E\left[x e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

به همین ترتیب:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} m_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[Y e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

با ادامه دادن روند فوق در نهایت داریم:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i_{t_1}\ \partial^j_{t_2}} m_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[X^i\ Y^j\ e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

با قرار دادن $(t_1,t_2)=(0,0)$ گشتاورهای (X,Y) بدست می‌آیند که عبارتند از:

$$m_{ij} = E\left[X^i\ Y^J\right] \qquad i,j = 0,1,2,\ldots$$

(i و j هر دو با هم صفر نمی‌باشند)

توجه کنید که m_{0j} و m_{i0} همان گشتاورهای متغیرهای تصادفی X و Y به تنهایی می‌باشند یعنی:

$$m_{i0} = E[X^i]$$
$$m_{0j} = E[y^j]$$

همینطور:

$$m_{11} = E[X,Y]$$
$$m_{10} = E[X] \qquad m_{02} = E[Y^2]$$
$$m_{01} = E[Y] \qquad m_{21} = E[X^2 Y],\ \ldots$$

۹-۵ مثال ۴: برای مثال ۲ مقدار مورد انتظار برای X ، Y و مجموع طول و عرض مشاهده شده را بدست بیاورید:

حل: طبق تعریف $E[X]$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \frac{1}{\pi} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr = \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 \sin\theta \int_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}(0-0) = 0$$

البته از آنجا که بازه انتگرال‌گیری متقارن بوده و تابع نیز فرد می‌باشد می‌توانستیم بدون محاسبه انتگرال نیز صفر بودن جواب را بدست بیاوریم.

مقدار $E[X]$ نیز همانند $E[X]$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \frac{1}{\pi} dy\, dx = 0$$

باز هم به علت تقارن و فرد بودن تابع انتگرال فوق صفر می‌باشد.

۱۰-۵ حال مقدار $E[X+Y]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (X+Y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x\, f_{X,Y}(x,y) + y\, f_{X,Y}(x,y)]\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{X,Y}\, dy = E[X] + E[Y] = 0 + 0 = 0$$

توجه کنید که از مثال فوق می‌توان به این نتیجه رسید که $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ و در حالت کلی اگر $G(X)$ و $H(Y)$ به ترتیب توابعی از X و Y باشند داریم:

$$E[G(X)+H(Y)]=E[G(X)]+E[H(Y)]$$

همچنین توجه کنید که برای محاسبه $E[G(X)]+H(Y)]$ نیازی به دانستن تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی X و Y نمی‌باشد بلکه تنها با داشتنن توابع چگالی کناری $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ می‌توان آنرا محاسبه نمود.

۵-۱۱ ۲۰۴ کوواریانس یا همپراشی

برای مقایسه میزان وابستگی میان دو متغیر تصادفی X و Y از شاخصی به نام کوواریانس یا همپراشی X و Y استفاده می‌کنیم. که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{X,Y}=COV(X,Y)=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

توجه کنید که مقدار $COV(X,Y)$ در صورتی مثبت خواهد بود که اگر X بزرگتر از میانگینش باشد آنگاه Y نیز چنین باشد به عبارتی اگر X و Y هر دو هم جهت با یکدیگر افزایش یا کاهش داشته باشند مقدار کوواریانس مثبت خواهد بود

$$X\uparrow\ ,\ Y\uparrow\ \Rightarrow\ Sign\ (cov(X,Y))=+۱$$
$$X\downarrow\ ,\ Y\downarrow\ \Rightarrow\ Sign\ (cov(X,Y))=+۱$$

به همین ترتیب اگر $(X-\mu_x)$ و $(Y-\mu_y)$ با احتمال زیاد دارای علامت مخالف باشند یا به عبارتی X و Y در خلاف جهت هم باشند یعنی با افزایش یکی دیگری کاهش پیدا کند یا بلعکس در این صورت کوواریانس X و Y منفی خواهد بود:

$$X\uparrow\ ,\ Y\downarrow\ \Rightarrow\ sign\ (cov(X,Y))=-۱$$
$$X\downarrow\ ,\ Y\uparrow\ \Rightarrow\ sign\ (cov(X,Y))=-۱$$

مقدار کوواریانس را از رابطه زیر که ساده‌تر می‌باشد نیز می‌توان بدست آورد:

$$cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

اثبات:

$$cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY-\mu_X Y-\mu_X\mu_Y]$$
$$=E[XY]-\mu_X E[Y]-\mu_Y E[X]+\mu_X\mu_Y$$
$$=E[XY]-\mu_X\mu_Y-\mu_Y\mu_X=E[XY]-\mu_X\mu_Y$$

۵-۱۲ با استفاده از رابطه فوق خواص متعددی را می‌توان برای کوواریانس بدست آورد که عبارتند از:

$$۱-\ cov(X,Y)=var(X)=\delta_X^۲$$

اثبات:

$$cov(X,Y)=E[X.X]-E[X]E[X]=E[X^۲]-E^۲[X]=\delta_X^۲$$

$$۲-\ cov(X,Y)=cov(Y,X)$$

اثبات:

$$cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=E[YX]-E[Y]E[X]=cov(Y,X)$$

$$۳-\ cov(X,Y)=۰$$ (C مقدار ثابت)

اثبات:

$$cov(X,Y)=E[X.C]-E[X]E[C]=CE[X]-CE[X]=۰$$

$$۴-\ cov(ax\pm b,cy\pm d)=ac\ cov(X,Y)$$ (a , b , c , d مقادیر اثبات)

اثبات:

$$cov(ax+b,cy+d)=E[(ax+b)(cy+d)]-E[ax+b]E[cy+d]$$
$$=E[acxy+adx+bcy+bd]-(aE[X]+b)(cE[Y]+d)$$
$$=acE[XY]+adE[X]+bcE[Y]+bd-acE[X]E[Y]-adE[X]-bcE[Y]-bd$$

$$ac\,E[XY]-ac\,E[X]\,E[Y]=ac\,(E[XY]-E[X]\,E[Y])=ac\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

بنابراین تغیر مبدأ تاثیری روی مقدار کوواریانس ندارد اما تغیر مقیاس بر روی مقدار کوواریانس موثر می‌باشد.

۵- $\mathrm{cov}(X,Y\pm Z)=\mathrm{cov}(X,Y)\pm\mathrm{cov}(X,Y)$ (متغیرهای تصادفی X , Y , Z)

اثبات:

$$\mathrm{cov}(X,Y\pm Z)=E[X(Y\pm Z)]-E[X]\,E[Y\pm Z]$$
$$=E[XY\pm XZ)]-E[X]\left[E[Y]\pm E[Z]\right]$$
$$=E[XY]\pm E[XZ)]-E[X]\left[E[Y]\pm E[X]\,E[Z]\right]$$
$$=E[XY]-E[X]\;E[Y]\pm(E[XZ)\pm E[X]\,E[Z])$$
$$=\mathrm{cov}(X,Y)\pm\mathrm{cov}(X,Z)$$

۱۳-۵ ۱.۲.۴ ضریب همبستگی خطی بین X و Y

مقدار کوواریانس نیز همانند واریانس به مقیاس متغیرهای تصادفی X و y وابسته است این مطلب را در خواص کوواریانس نیز نشان دادیم. به عبارتی ممکن است برای یک قانون احتمال، مقدار کوواریانس بسیار بیشتر از دیگری باشد، اما نمی‌توان گفت تمایل تغیر کردن X و Y با یکدیگر در حالت اول بیشتر از حالت دوم می‌باشد مشابه ایم مطلب را در فصل اول نیز برای واریانس دو جامعه آماری داشتیم که برای حل آن از ضریب تغیرات استفاده نمودیم. در اینجا برای بدست آوردن معیاری دقیق برای مقایسه میزان تمایل تغیرات همزمان دو متغیر C و Y از ضریب همبستگی خطی استفاده می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود و با $f_{X,Y}$ نمایش داده می‌شود:

$$f_{X,Y}=\mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X},\ \frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)=\frac{\delta_{XY}}{\delta_X\ \delta_Y}$$

همچنین با ساده نمودن رابطه فوق داریم:

$$\mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X},\ \frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)=E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)\right]-E\left[\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right]\ E\left[\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right]$$

با توجه به اینکه متغیر تصادفی $\frac{X-\mu_X}{\delta_X}$ برمال شده می‌باشد بنابراین امید ریاضی آن برابر صفر می‌باشد یعنی: $E\left[\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right]=E\left[\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right]=0$

بنابراین داریم: $f_{X,Y}=E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)\right]$

۱۴-۵ حال نشان می‌دهیم که مقدار $f_{X,Y}$ همواره بین ۱ و ۱- قرار دارد یعنی $\left|f_{X,Y}\right|\le 1$.

اثبات: دو متغیر تصادفی w و z و مقدار متغیر a را در نظر بگیرید در این صورت متغیر تصادفی $T=(aw-z)^2$ را تعریف می‌کنیم. به ازای هر a مقادیر متغیر تصادفی T همواره مثبت است بنابراین امید ریاضی آنها نیز مثبت می‌باشد یعنی داریم: $E[(aw-z)^2]$.

$$\Rightarrow\quad E[a^2w^2-2awz+z^2]\ge 0$$
$$\Rightarrow\quad a^2E[w^2]-2aE[wz]+E[z^2]\ge 0\qquad ;\forall a$$

حال چون به ازای هر a نامساوی فوق برقرار می‌باشد می‌توان قرار داد $a=\frac{E[wz]}{E[w^2]}$.

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{E^{۲}[wz]}{E^{۲}[w^{۲}]} E[w^{۲}] - ۲ \frac{E^{۲}[wz]}{E[w^{۲}]} + E[z^{۲}] \geq ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{E^{۲}[wz]}{E[w^{۲}]} + E[z^{۲}] \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{E^{۲}[wz]}{E[w^{۲}]\,E[z^{۲}]} \leq ۱$$

حال به جای متغیرهای تصادفی w و z قرار می‌دهیم: $w = X - \mu_X \;,\; Z = y - \mu_Y$.

داریم:

$$\frac{E^{۲}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{E\left[(X-\mu_X)^{۲}\right] E\left[(Y-\mu_Y)^{۲}\right]} \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_{XY}^{۲}}{\delta_X^{۲}\,\delta_Y^{۲}} \leq ۱$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}^{۲} \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad |\rho_{XY}| \leq ۱$$

۵-۱۵ توجه کنید که در اثبات فوق اگر حالت تساوی در نامساوی $E[(aw-z)^{۲}]$ رخ دهد داریم: $E[T] = E[(aw-z)^{۲}] = ۰$

اما متغیر تصادفی T همواره مثبت است بنابراین میانگین آن تنها زمانی صفر می‌باشد که تمام مقادیری که T قبول می‌کند برابر صفر باشند به عبارت دقیقتر متغیر تصادفی T با احتمال ۱ برابر صفر می‌باشد یعنی:

$$p(T=۰) = ۱ \quad \Rightarrow \quad p((aw-z^{۲}) = ۰) = ۱$$
$$\Rightarrow \quad p(aw-z = ۰) = ۱$$
$$\Rightarrow \quad p(aw = z) = ۱$$
$$\Rightarrow \quad p(Y-\mu_Y = a(X-\mu_X)) = ۱$$
$$\Rightarrow \quad p(Y = ax + \mu_Y - a\mu_X) = ۱$$

۵-۱۶ بنابراین با احتمال صددرصد متغیر تصادفی Y برابر با $ax - \mu_Y - a\mu_X$ می‌باشد و این نشان می‌دهد که از مقادیر قابل استفاده به (X,Y) تنها مقادیری که روی یک خط راست به معادله $Y = ax - \mu_Y - a\mu_X$ قرار دارند می‌توانند احتمال مثبت داشته باشد. به همین دلیل است که می‌گوییم ضریب همبستگی خطی میزان وابستگی خطی بین دو متغیر X و Y را نشان می‌دهد.

هر چه مقدار $P_{X,Y}$ به عدد ۱ یا ۱- نزدیک‌تر باشد، متغیرهای X و Y تمایل بیشتری به متغیر مستقیم یا معکوس با یکدیگر خواهند داشت و اگر $P_{X,Y} = ۰$ باشد، بدین معنی است که متغیرهای X و Y به صورت خطی به یکدیگر وابسته نمی‌باشند. مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است برای دو متغیر X و Y داشته باشیم $P_{X,Y} = ۰$ اما در عین حال دو متغیر کاملاً به یکدیگر وابسته باشند.

۵-۱۷ مثال ۵: متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی Y را برابر $X^{۲}$ تعریف می‌کنیم در این صورت:

الف) $f_Y(y)$ را محاسبه کنید.

ب) ρ_{XY} را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اینکه $Y=X^{۲}$ داریم:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = p(X^{۲} \le y) = p(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

حال می‌بایستی تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست بیاوریم:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-۲}^{x} \frac{۱}{۴}\,dx = \frac{۱}{۴}(x+۲)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x \le -۲ \\ \frac{۱}{۴}(x+۲) & -۲ \le x \le ۲ \\ ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

بنابراین تابع توزیع Y برابر است با:

$$F_Y(y) = \frac{۱}{۴}(\sqrt{y}+۲) - \frac{۱}{۴}(-\sqrt{y}+۲) = \frac{۱}{۲}\sqrt{y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & y < ۰ \\ \frac{\sqrt{y}}{۲} & ۰ \le y \le ۴ \\ ۱ & ۴ < y \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از $F_Y(y)$ تابع چگالی Y را بدست می‌آوریم.

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۴\sqrt{y}} & ۰ \le y \le ۴ \\ ۰ & \text{سایر} \end{cases}$$

۵-۱۸ ب: برای محاسبه ρ_{XY} به مقادیر $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ نیاز داریم زیرا :

$$\rho_{XY} = \frac{\delta_{XY}}{\delta_X\,\delta_Y} = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\delta_X\,\delta_Y}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-۲}^{۲} \frac{۱}{۴} x\,dx = ۰$$

به دلیل فرد بودن تابع $\frac{۱}{۴}x$ در بازه $[-۲\,,\,۲]$ مقدار انتگرال صفر می‌باشد.

$$E[Y] = \int_{۰}^{۴} y\,\frac{۱}{۴}\,\frac{۱}{\sqrt{y}}\,dx = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳}y^{\frac{۲}{۳}}\right)\Big|_{۰}^{۴} = \frac{۸}{۶}$$

$$E[XY] = E[XX^{۲}] = E[X^{۳}] = \int_{-۲}^{۲} x^{۳}\,\frac{۱}{۴}\,dx = ۰$$

به این ترتیب مقدار ρ_{XY} برابر است با:

$$\underbrace{\delta_{XY}}_{\text{کوواریانس}} = ۰ - \underbrace{\frac{۸}{۶}}_{\text{دوم}} \times ۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\rho_{XY}}_{\text{اول}} = ۰$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار ρ_{XY} صفر می‌باشد و این به معنی عدم وابستگی دو متغیر X و Y نمی‌باشد بلکه به معنی عدم وابستگی خطی آندو است به وضوح X و Y بصورت توانی $(Y=X^{۲})$ به یکدیگز وابسته‌اند.

مثال ۶: نشان دهید ضریب همبستگی خطی با اعمال تغیر مبدأ و مقیاس روی متغیرهای تصادفی X و Y بدون تغیر باقی می‌ماند؟

حل: برای این منظور می‌بایستی ثابت کنیم:

$$\rho_{ax+b,\,cy+d} = \rho_{XY}$$

اثبات:

$$\rho_{ax+b,\,cy+d} = \frac{\operatorname{cov}(ax+b, cy+d)}{\sqrt{\operatorname{var}(ax+b)\operatorname{var}(cy+d)}} = \frac{ac\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{a^{۲}\operatorname{var}(X)\,c^{۲}\operatorname{var}(Y)}}$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \rho_{X,Y}$$

۵-۲۰ مثال ۷: در مثال ۱ مقدار $\operatorname{var}(۳x-۲y+۱)$ را محاسبه کنید:

در مثال ۱ جدول احتمالات دو متغیره بصورت زیر بدست آمد:

Y \ X	۲	۳	۴	
−۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	

می‌دانیم: $\operatorname{var}(X) = \operatorname{cov}(X,X)$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\operatorname{var}(۳X-۲Y+۱) = \operatorname{var}(۳X-۲Y) = \operatorname{cov}(۳X-۲Y, ۳X-۲Y)$$
$$= \operatorname{cov}(۳X,۳X) + \operatorname{cov}(۲Y,۲Y) - ۱۲\operatorname{cov}(X,Y)$$
$$= ۹۷\operatorname{var}(X) + ۴۷\operatorname{var}(Y) - ۱۲\operatorname{cov}(X,Y)$$

بنابراین می‌بایستی مقادیر $\delta_X^{۲}$, $\delta_Y^{۲}$, δ_{XY} را از روی جدول محاسبه کنیم:

$$E[X] = \frac{۱}{۴}\times ۲ + \frac{۱}{۲}\times ۳ + \frac{۱}{۴}\times ۴ = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} + ۱ = ۳$$

$$E[Y] = \frac{۱}{۴}(-۱) + \frac{۲}{۴}\times ۰ + \frac{۱}{۴}\,۱ = ۰$$

$$E[X^{۲}] = \frac{۱}{۴}\times ۴ + \frac{۱}{۲}\times ۹ + \frac{۱}{۴}\times ۱۶ = ۱ + \frac{۹}{۲} + ۴ = \frac{۱۹}{۲}$$

$$E[Y^{۲}] = \frac{۱}{۴}\times ۱ + \frac{۲}{۴}\times ۰ \times \frac{۱}{۴}\times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$\operatorname{var}(X) = E[X^{۲}] - E^{۲}[X] = \frac{۱۹}{۲} - ۹ = \frac{۱}{۲}$$

$$\operatorname{var}(Y) = E[Y^{۲}] - E^{۲}[Y] = \frac{۱}{۲} - ۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$E[XY] = (۳\times -۱)\times\frac{۱}{۴} + (۳\times ۱)\times\frac{۱}{۴} \times (۴\times ۰)\times\frac{۱}{۴} \times (۳\times ۰)\times\frac{۱}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = ۰$$

$$\Rightarrow \operatorname{var}(۳X-۲Y+۱) = ۹\times\frac{۱}{۲} + ۴\,\frac{۱}{۲} - ۰ = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

فصل ششم

۶-۱-۱

۱.۶ برخی توابع توزیع گسسته

در فصل قبل با چگونگی بدست آوردن توابع توزیع و چگالی آشنا شدید در این فصل قصد داریم چند تابع چگالی و توزیع خاص را مورد بررسی قرار دهیم. بسیاری از آزمایش‌های تصادفی با وجود اینکه ظاهراً متفاوت می‌باشند اما از ماهیت یکسانی برخوردار می‌باشند و از یک الگو پیروی می‌کنند به همین دلیل است که بررسی توابع چگالی و توزیع آنها مهم می‌باشد.

۱.۱.۶ متغیر تصادفی برنولی و دو جمله‌ای

اگر برای یک آزمایش تصادفی تنها دو نتیجه موفقیت و شکست امکان‌پذیر باشد به آن آزمایش، آزمایش برنولی می‌گوییم و احتمال موفقیت را با p و شکست را با q نمایش می‌دهیم. مثلاً پرتاب یک سکه یک آزمایش برنولی است که دو حالت ممکن را در پی دارد. می‌توانیم آمدن شیر را موفقیت و آمدن خط را شکست در نظر بگیریم. بدیهیست که در این حالت $p=\frac{۱}{۲}$, $q=۱-p=\frac{۱}{۲}$.

۶-۱-۲

یک متغیر تصادفی برنولی عبارتست از تعداد پیروزی (۰ یا ۱ بار) در یک مرتبه انجام آزمایش برنولی. به این ترتیب تابع چگالی برای متغیر تصادفی برنولی X بصورت زیر خواهد بود:

$$f_X(x)=\begin{cases} p & x=۱ \\ q & x=۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی برنولی را با نماد $B(۱,p)$ نمایش می‌دهیم که در آن عدد ۱ نمایش دهنده یکبار انجام آزمایش است. تابع چگالی متغیر تصادفی برنولی را بصورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$f_{(x)}=p^x\ q^{۱-x} \qquad x=۰\,,۱$$
$$=۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

حال امید، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی برنولی را بدست می‌آوریم:

$$E[X]=۱\times p+۰\times q=p$$
$$E[X^۲]=۱^۲\times p+۰^۲\times q=p$$

پس:

$$var(x)=E[x^۲]-E^۲[X]=p-p^۲=p(۱-p)=pq$$

به همین ترتیب:

$$m_X(t)=E[e^{tx}]=pe^{t\times ۱}+qe^{t\times ۰}=pe^t+q$$

۶-۲

مثال ۱: شخصی ۵ بلیط می‌فروشد که یکی از آنها قلابی است از وی یک بلیط خریداری می‌نیم، قرار می‌دهیم:

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر بلیط اصلي‌را خريداري كرده باشيم} \\ ۰ & \text{اگر بلیط قلابی‌را خریداری کرده باشیم} \end{cases}$$

در این صورت تابع چگالی متغیر تصادفی X را بدست آورید. و $E[X]$, $var[X]$ را بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه متغیر تصادفی X دو حالت موفقیت و شکست را نشان می‌دهد بنابراین از متغیر تصادفی برنولی پیروی می‌کند. حالت مقدار احتمال p و q را محاسبه می‌کنیم:

$p =$ احتمال اینکه بلیط اصلی خریداری شود $= \frac{۴}{۵}$

$q = ۱ - p = \frac{۱}{۵}$

بنابراین تابع چگالی برابر است با:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۵} & x = ۱ \\ \frac{۱}{۵} & x = ۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$E[X] = p = \frac{۴}{۵}$

$var[X] = pq = \frac{۴}{۵}\frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۲۵}$

عدد $E[X] = \frac{۴}{۵}$ نشان می‌دهد که اگر از شخصی مورد نظر مثلاً ۱۰۰ عدد بلیط خریداری کنیم باید انتظار داشته باشیم $۱۰۰ \times \frac{۴}{۵} = ۸۰$ عدد از بلیط‌ها اصلی باشند.

۳-۶ ۲.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای

اگر یک آزمایش برنولی را n بار بطور مستقل انجام دهیم و متغیر تصادفی X را برابر با تعداد پیروزی‌ها در این n بار انجام آزمایش در نظر بگیریم، در این صورت متغیر تصادفی X را دو جمله‌ای می‌نامیم.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌بایستی مقادیری که X قبول می‌کند و مقدار احتمال آنرا بدست بیاوریم. از آنجا که متغیر تصادفی دو جمله‌ای تعداد پیروزی‌ها در n بار از انجام مستقل آزمایش برنولی می‌باشد بنابراین تعداد پیروزی‌ها می‌تواند هر یک از مقادیر ۰ تا n باشد و احتمال اینکه x بار پیروز و در $n-x$ بار آزمایش باقیمانده شکست بخوریم با توجه به استقلال آزمایشها برابر است با:

$$(p.\underbrace{p\ldots p}_{\text{بار } x})\,(q.\underbrace{q\ldots q}_{\text{بار } n-x}) = p^x q^{n-x}$$

اما این مساله که در کدام یک از n آزمایش پیروز شویم نیز مهم است. با توجه به قواعد شمارشی به $\binom{n}{x}$ صریق می‌توان در n آزمایش پیروز شد

بنابراین تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای X برابر است با:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مجموعه n متغیر تصادفی برنولی باشند در این صورت با توجه به تعریف متغیر تصادفی دو جمله‌ای X عبارتست از:

$$X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$$

متغیر تصادفی دو جمله‌ای را بصورت $X \sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم که شامل دو پارامتر می‌باشد:

$p =$ احتمال پیروزی

$n =$ تعداد آزمایشها

به این تریتب متغیر تصادفی برنولی حالت خاصی از متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر $n=۱$ می‌باشد.

حال به محاسبه مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌پردازیم.

برای محاسبه $E[X]$ توجه می‌کنیم که متغیر تصادفی دو جمله‌ای X برابر است با مجموع نتایج حاصله از n بار انجام مستقل آزمایش برنولی بنابراین:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$var(X) = VAR(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

به همین ترتیب:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right] - E\left[e^{t(\sum_{i=1}^{n} X_i)}\right] = E\left[e^{tX_1 + tX_2 + \cdots + tX_n}\right]$$

$$= E\left[e^{tX_1}\, e^{tX_2} \ldots e^{tX_n}\right] = E\left[e^{tx_1}\right] E\left[e^{tx_2}\right] \cdots E\left[e^{tx_n}\right]$$

$$= (pe^t + q)\,(pe^t + q) \underbrace{\cdots}_{\text{بار } n} (pe^t + q) = (pe^t + q)^n$$

۵-۶ مثال ۲: اگر در مثال ۱ تعداد ۱۰ بلیط از فروشنده خریداری می‌کنیم و متغیر X را تعداد بلیط‌های اصلی در نظر بگیریم. مطلوبست:

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X.

ب) رسم نمودار تابع چگالی X.

ج) مقدار مد.

د) امید و واریانس متغیر X.

حل: الف) در این مساله می‌بایستی یک آزمایش برنولی را ۱۰ مرتبه بصورت مستقل تکرار کنیم بنابراین X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌باشد و تابع چگالی آن عبارتست از:

$$X \sim B(10, \frac{4}{5})$$

$$f_X(x) = \binom{10}{x} (\frac{4}{5})^x (\frac{1}{5})^{10-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

حال مقدار احتمال را به ازای $x = 0, \ldots, 10$ بدست می‌اوریم:

$$f_X(x=0) = \binom{10}{0} (\frac{4}{5})^0 (\frac{1}{5})^{10} = \frac{1}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=1) = \binom{10}{1} (\frac{4}{5})^1 (\frac{1}{5})^9 = 10\,\frac{4}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=2) = \binom{10}{2} (\frac{4}{5})^2 (\frac{1}{5})^8 = 45\,\frac{4^2}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=3) = \binom{10}{3} (\frac{4}{5})^3 (\frac{1}{5})^7 = 120\,\frac{4^3}{5^{10}} = 0/0007$$

$$f_X(x=3) = \binom{10}{3} (\frac{4}{5})^3 (\frac{1}{5})^7 = 120\,\frac{4^3}{5^{10}} = 0/0007$$

$$f_X(x=۴) = \binom{۱۰}{۴} (\frac{۴}{۵})^۴ (\frac{۱}{۵})^۶ = ۲۱۰ \frac{۴^۴}{۵^{۱۰}} = ۰/۰۰۵۵$$

$$f_X(x=۵) = \binom{۱۰}{۵} (\frac{۴}{۵})^۵ (\frac{۱}{۵})^۵ = ۲۵۲ \frac{۴^۵}{۵^{۱۰}} = ۰/۰۲۶$$

$$f_X(x=۶) = \binom{۱۰}{۶} (\frac{۴}{۵})^۶ (\frac{۱}{۵})^۴ = ۲۱۰ \frac{۴^۶}{۵^{۱۰}} = ۰/۰۸۸$$

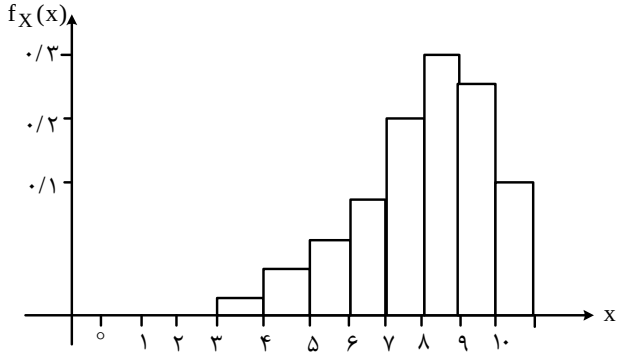
$$f_X(x=۷) = \binom{۱۰}{۷} (\frac{۴}{۵})^۷ (\frac{۱}{۵})^۳ = ۱۲۰ \frac{۴^۷}{۵^{۱۰}} = ۰/۲$$

$$f_X(x=۸) = \binom{۱۰}{۸} (\frac{۴}{۵})^۸ (\frac{۱}{۵})^۲ = ۴۵ \frac{۴^۸}{۵^{۱۰}} = ۰/۳$$

$$f_X(x=۹) = \binom{۱۰}{۹} (\frac{۴}{۵})^۹ (\frac{۱}{۵})^۱ = ۱۰ \frac{۴^۹}{۵^{۱۰}} = ۰/۲۶۸$$

$$f_X(x=۱۰) = \binom{۱۰}{۱۰} (\frac{۴}{۵})^{۱۰} (\frac{۱}{۵})^۰ = ۱ \frac{۴^{۱۰}}{۵^{۱۰}} = ۰/۱$$

ب) حال نمودار مستطیلی تابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت زیر بدست می‌آید:



توجه کنید که $\sum_{x=۰}^{۱۰} \binom{۱۰}{x} (\frac{۴}{۵})^x (\frac{۱}{۵})^{۱۰-x} = ۱$ می‌باشد.

ج) از فصل دوم به یاد دارید که مد مقداری از X است که به ازای آن تابع چگالی ماکزیمم می‌شود. از روی نمودار به وضوح پیداست که مد متغیر تصادفی X برابر با: $x=۸$ می‌باشد. یعنی به ازای هر بار خرید ۱۰ عدد بلیط از فروشنده به احتمال زیاد (۰/۳) ۸ میانه توزیع نیز می‌باشد زیرا $x=۸$ اولین نقطه‌ایست که در آن مقدار تابع توزیع بزرگتر یا مساوی با $\frac{۱}{۲}$ می‌شود یعنی: $F_X(x=۸) \geq \frac{۱}{۲}$.

د)

$$E[X] = np = ۱۰ \times \frac{۴}{۵} = ۸$$

$$var(X) = npq = ۱۰ \frac{۴}{۵} \frac{۱}{۵} = \frac{۸}{۵}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار امید ریاضی X برابر ۸ می‌باشد به همین دلیل است که در مثال ۱ نشان دادیم که اگر ۱۰۰ بلیط از فروشنده دریافت کنیم به طور متوسط $۱۰۰ \times \frac{۴}{۵} = ۸۰$ عدد از آنها اصلی می‌باشند.

۱-۷-۶ ۱.۲.۶ مد توزیع دو جمله‌ای

در مثال قبل برای بدست آوردن مد از تابع چگالی استفاده نمودیم اما می‌توان مقدار مد را بدون استفاده از تابع چگالی و تنها با داشتن مقادیر پارامترهای توزیع دو جمله‌ای بدست آورد. می‌دانیم متغیر تصادفی دو جمله‌ای گسسته می‌باشد از طرفی چون تابع چگالی به ازای مقدار مد بیشترین مقدار را قبول می‌کند بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(x_M) \geq f(x_M - ۱) & (۱) \\ f(x_M) \geq f(x_M + ۱) & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{x_M} p^{x_M} q^{n-x_M} \geq \binom{n}{x_M+۱} p^{x_M+۱} q^{n-(x_M+۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{x_M!(n-x_M)!} \geq \frac{n!}{(x_M+۱)!(n-(x_M+۱))!} pq^{-۱}$$

$$x_M + ۱ \geq (n - x_M)\, pq^{-۱} \quad \Rightarrow \quad x_M + x_M\, pq^{-۱} \geq npq^{-۱} - ۱$$

$$\Rightarrow x_M \geq np - ۱ + p \quad \Rightarrow \quad x_M \geq p(n+۱) - ۱$$

۲-۷-۶ به همین ترتیب از رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$x_M \leq (n+۱)p$$

در نتیجه داریم:

$$p(n+۱) - ۱ \leq x_M \leq p(n+۱)$$

حال اگر $(n+۱)p$ عددی صحیح باشد $p(n+۱)-۱$ نیز عددی صحیح است و هر دو مد متغیر تصادفی X می‌باشند در غیر این صورت بین دو عدد $(n+۱)p$ و $p(n+۱)-۱$ تنها یک عدد صحیح وجود دارد که آن عدد مد توزیع دو جمله‌ای می‌باشد.

مثال ۳: مد تغیر تصادفی دو جمله‌ای در مثال قبل را بدون استفاده از تابع چگالی بدست آورید.

حل: X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n=۱۰$, $p=\frac{۴}{۵}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$\frac{۴}{۵}(۱۰+۱) - ۱ \leq x_M \leq \frac{۴}{۵}(۱۰+۱)$$

$$۷ + \frac{۱}{۵} \leq x_M \leq ۸ + \frac{۱}{۵} \quad \Rightarrow \quad x_M = ۸$$

۱-۸-۶ ۳.۶ متغیر تصادفی هندسی (نوع اول)

اگر متغیر تصادفی X برابر باشد با تعداد شکستها قبل از رسیدن به اولین پیروزی در انجام آزمایشهای مستقل برنولی، در این صورت به آن متغیر تصادفی هندسی از نوع اول می‌گوییم. به عنوان مثال تعداد دفعات پرتاب یک سکه برای بدست آوردن اولین شیر یا تعداد دفعات شلیک به هدف تا قبل از اولین برخورد گلوله با هدف، نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی هندسی نوع اول می‌باشند.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی هندسی نوع اول توجه می‌کنیم که X مقادیر $۰, ۱, \cdots$ را قبول می‌کند و از آنجا که در آخرین آزمایش پیروز می‌شویم بنابراین در x آزمایش قبل شکست خورده‌ایم که به دلیل استقلال آزمایشها، احتمال آن برابر است q^x و برای اینکه در آزمایش بعدی پیروز شویم می‌بایستی احتمال p (پیروزی) را در عدد q^x ضرب کنیم بنابراین:

$$f_X(x) = pq^x \qquad x = ۰, ۱, \ldots$$

$$۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

حال امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی هندسی نوع اول را محاسبه می‌کنیم:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX}\, pq^x = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX}\, p\,(qe^t)^x = \frac{p}{1-qe^t}$$

برای بدست آوردن امید ریاضی و واریانس از تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم:

$$E[X] = M'_X(t)\,|_{t=0} = \frac{pqe^t}{(1-qe^t)^2}\,|_{t=0} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$E[X^2] = M''_X(t)\,|_{t=0} = \frac{pqe^t(1-qe^t)^2 + 2qe^t\,(1-qe^t)\,pqe^t}{(1-qe^t)^4}\,|_{t=0} = \frac{qp+q^2}{p^2}$$

پس:

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{pq+q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

۶-۹ مثال ۴: شخصی به هدفی شلیک می‌کند. گلوله با احتمال $\frac{3}{5}$ به هدف برخورد می‌کند اگر متغیر تصادفی X را تعداد شلیکها قبل از مورد اصابت قرار دادن هدف در نظر بگیریم. مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) احتمال اینکه در شلیک ۷ام هدف را بزند.

ج) به طور متوسط چند بار شلیک قبل از اینکه هدف مورد اصابت قرار بگیرد لازم است.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی X محاسبه کنید.

حل: الف) متغیر تصادفی X هندسی از نوع اول می‌باشد و با پارامتر $p = \frac{3}{5}$ بنابراین تابع چگالی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^x \qquad x = 0, 1, \ldots$$

$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب) برای اینکه در شلیک ۷ام هدف را بزند می‌بایستی ۶ شلیک ناموفق داشته باشیم بنابراین:

$$f(x=6)\ \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^6 = 0/002$$

ج) برای بدست آوردن متوسط تعداد شلیکها قبل از زدن بایستی امید ریاضی متغیر تصادفی X را بدست آوریم:

$$E[X] = \frac{q}{p} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

بنابراین شخص می‌بایستی بیشتر اوقات پس از یک شکست هدف را بزند.

د)

$$var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{10}{9}$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1-qe^t} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{5}e^t} = \frac{3}{5-2e^t}$$

۶-۱۰ ۱.۳.۶ متغیر تصادفی هندسی (نوع اول)

متغیر تصادفی X را تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی در آزمایش‌های مستقل برنولی در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی هندسی نوع دوم است.برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی هندسی نوع دوم ابتدا توجه می‌کنیم که حداقل یک آزمایش برای رسیدن به اولین پیروزی مورد نیاز است، احتمال اینکه در آزمایش xام پیروز شویم برابر است با احتمال اینکه در $x-۱$ آزمایش قبلی شکست خورده و در آزمایش آخر پیروز شویم که اولی با احتمال $q^{x-۱}$ و دومی با احتمال p رخ می‌دهد. نتیجه تابع چگالی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = p\,q^{x-۱} \qquad x = ۱, ۲, \ldots$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

توجه کنید که بین متغیر تصادفی هندسی نوع اول و دوم رابطه مستقیمی برقرار است، از آنجا که متغیر تصادفی هندسی نوع دوم تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی است بنابراین می‌بایستی در تمام آزمایشها شکست بخوریم غیر آزمایش آخر. اگر Y یک متغیر هندسی نوع دوم باشد و X یک متغیر هندسی نوع اول، رابطه $Y = X + ۱$ بین ایندو برقرار می‌باشد. با کمک این رابطه می‌توان به راحتی امید، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر هندسی نوع دوم را از روی نوع اول بدست آورد:

$$E[Y] = E[X+۱] = E[X] + ۱ = \frac{q}{p} + ۱ = \frac{۱}{p}$$

$$var(Y) = var(X+۱) = var(X) = \frac{q}{p^۲}$$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{tY+t}] = e^t\,E[e^{tX}] = e^t\,\frac{p}{۱-q\,e^t}$$

مثال ۵: متغیر تصادفی Y را تعداد شلیکها برای رسیدن به اولین اصابت گلوله به هدف در مثال قبل در نظر می‌گیریم:

مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) احتمال اینکه در کمتر یا مساوی با دئ آزمایش هدف مورد اصابت گلوله قرار گیرد.

ج) متوسط تعداد شلیکها برای زدن هدف.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y.

حل: الف) Y یک متغیر تصادفی هندسی نوع دوم است بنابراین تاع چگالی آن بصورت زیر می‌باشد:

$$f_Y(y) = \frac{۳}{۵}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{y-۱} \qquad y = ۱, ۲, \ldots$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب) برای اینکه در کمتر یا مساوی با دو آزمایش هدف مورد اصابت قرار گیرد می‌بایستی احتمال $f(y=۱) + f(y=۲)$ را محاسبه کنیم:

$$f(y=۱) + f(y=۲) = \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^۰ + \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^۱ = \frac{۳}{۵}\left(۱ + \frac{۲}{۵}\right) = \frac{۲۱}{۲۵} = ۰/۸۴$$

ج)

$$E[Y] = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶$$

به همین ترتیب:

د)

$$\mathrm{var}(Y) = \frac{q}{p^{۲}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۱۰}{۹}$$

$$m_Y(t) = \frac{\frac{۳}{۵} e^t}{۱ - \frac{۲}{۵} e^t} = \frac{۳ e^t}{۵ - ۲ e^t}$$

۱-۱۲-۶ ۴.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی (نوع اول)

اگر متغیر تصادفی X تعداد شکستها قبل از رسیدن به kامین پیروزی در تکرار مستقل آزمایشهای برنولی در نظر گرفته شود به آن متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی از نوع اول می‌گوییم.

توجه کنید که اگر $k=۱$ باشد متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول همان متغیر تصادفی هندسی نوع اول می‌باشد. برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول توجه کنید که در آزمایش آخر پیروزی kام رخ می‌دهد.بنابراین در آزمایشهای قبلی $k-۱$ بار پیروزی و x بار شکست رخ داده است یعنی از بین $x+k-۱$ آزمایش می‌بایستی $k-۱$ بار پیروز شویم که احتمال آن $p^{k-۱}$ می‌باشد و احتمال اینکه x بار شکست بخوریم هم مهم است که به $\binom{x+k-۱}{x}$ طریق ممکن است. نهایتاً در آخرین آزمایش هم با احتمال p پیروز می‌شویم که همان kامین پیروزی است. به همین ترتیب با ضرب موارد فوق تابع چگالی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = \binom{x+k-۱}{x} q^x p^k \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

رابطه‌ای مشابه رابطه بین متغیر تصادفی برنولی و دو جمله‌ای ما بین متغیر تصادفی هندسی نوع اول و متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول موجود است. فرض کنید یک آزمایش را که متغیر تصادفی مربوط به آن از متغیر تصادفی هندسی نوع اول می‌باشد، k بار تکرار کنیم و نتایج حاصله را با یکدیگر جمع کنیم در این صورت تعداد شکستها قبل از رسیدن به kامین پیروزی را بدست می‌آوریم که همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول باشد و $X_۱, X_۲, \ldots X_K$ متغیرهای تصادفی هندسی نوع اول باشند داریم:

$$Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_K$$

با استفاده از رابطه فوق امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول را محاسبه می‌کنیم:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=۱}^{k} X_i\right] = \sum_{i=۱}^{k} E[X_K] = \sum_{i=۱}^{k} \frac{q}{p} = k\frac{q}{p}$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=۱}^{k} X_i\right) = \sum_{i=۱}^{k} \mathrm{var}(X_i) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{q}{p^{۲}} = k\frac{q}{p^{۲}}$$

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t\sum_{۱}^{k} X_i}\right] = E\left[e^{tX_۱} e^{tX_۲} \ldots e^{tX_K}\right]$$

$$E[e^{tX_۱}]\, E[e^{tX_۲}] \ldots E[e^{tX_K}] =$$

$$= \left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)\left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)\cdots\left(\frac{p}{۱-qe^t}\right) = \left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)^k$$

۱۳-۶ مثال ۶: متغیر تصادفی X را تعداد دفعات به خطا رفتن گلوله قبل از اصابت ۳امین بار گلوله به هدف در مثال ۴ در نظر می‌گیریم، مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) احتمال اینکه پس از ۲ بار خطا رفتن گلوله برای سومین بار به هدف بزنیم.

ج) متوسط تعداد خطا رفتن گلوله قبل از اصابت سوم به هدف.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X.

حل: الف) متغیر تصادفی X از تالع چگالی دو جمله‌ای منفی نوع اول پیروی می‌کند بنابراین تابع چگالی آن با $p = \frac{۳}{۵}$ و $k = ۳$ برابر است با:

$$f_X(x) = \binom{x+۳-۱}{x} (\frac{۲}{۵})^x (\frac{۳}{۵})^۳$$

ب):

$$f(x=۲) = \binom{۴}{۲} (\frac{۲}{۵})^۲ (\frac{۳}{۵})^۳ = ۰/۲$$

ج):

$$E[X] = K\frac{q}{p} = ۳\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = ۲$$

یعنی بطور متوسط پس از ۲ بار خطا رفتن گلوله باید بتوان هدف را مورد اصابت قرار داد.

همچنین:

د)

$$var(X) = k\frac{q}{p^۲} = ۳\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳۰}{۹}$$

به همین ترتیب:

$$m_X(t) = (\frac{p}{۱-qe^t})^k = (\frac{\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۲}{۵}e^t})^۳$$

۶-۱۴ ۵.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی (نوع دوم)

متغیر تصادفی X را برابر با تعدد آزمایشهای لازم برای رسیدن به kامین پیروزی در تکرار مستقل آزمایشهای برنولی در نظر می‌گیریم. در این صورت متغیر تصادفی X را دو جمله‌ای منفی نوع دوم می‌نامین.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم ابتدا توجه کنید که تفاوت اصلی آن با متغیر تصادفی دو جمله‌ای نوع اول در این است که در نوع اول تعداد k بار پیروزی در محاسبه مقادیری که متغیر تصادفی قبول می‌کند در نظر گرفته نمی‌شود بنابراین اگر Y یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم باشد و X نوع اول رابطه زیر بین این دو متغیر تصادفی برقرار است:

$$Y = X + K \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$
$$y = k, k+۱, k+۲, \ldots$$

بنابراین تابع چگالی Y نیز با تغیر X به $Y-K$ در تالع چگالی دو جمله‌ای منفی نوع اول بدست می‌آید:

$$f_X(x) = \binom{x+k-۱}{x} q^x p^k \xrightarrow{x=y-k} f_Y(y) = \binom{y-۱}{y-k} q^{y-k} p^k$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \binom{y-۱}{k-۱} q^{y-k} p^k \qquad y = k, k+۱, k+۲, \ldots$$

اگر $X_۱, X_۲, \ldots X_K$ مجموعه k متغیر تصادفی هندسی نوع دوم باشند و Y یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم باشد رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_K$$

هر متغیر تصادفی X_i برابر است با تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی، حال اگر نتایج حاصل از k آزمایش تصادفی هندسی نوع دوم را با یکدیگر جمع کنیم تعداد آزمایشهای لازم برای رسیدن به kامین پیروزی بدست می‌آید. که همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی می‌باشد.

حال با توجه به رابطه فوق مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم بدست می‌آوریم:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{k} X_k\right] = \sum_{1}^{k} E[X_k] = \sum_{1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

$$var(X) = var(\sum_{1}^{k} X_k) = \sum_{1}^{k} var(X_k) = \sum_{1}^{k} \frac{q}{p^2} = K\frac{q}{p^2}$$

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t\sum_{1}^{k} X_K}\right] = E\left[e^{tX_1}\ e^{tX_2}\ \cdots\ e^{tX_K}\right]$$

$$= E[e^{tX_1}]\,E[e^{tX_2}]\ \cdots\ E[e^{tX_K}]$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\ \cdots\ \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$$

مثال ۷: اگر در مثال ۴ Y را تعداد دفعات شلیک گلوله برای اصابت ۳ امین بار گلوله به هدف در نظر بگیریم مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی Y.

ب) احتمال اینکه پس از ۵ بار شلیک برای سومین بار هدف را بزنیم.

ج) متوسط تعداد شلیک برای اصابت سه بار گلوله به هدف.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y.

حل: الف) متغیر تصادفی Y از توزیع دو جمله‌ای منفی نوع دوم پیروی می‌ند بنابراین تابع چگالی آن بصورت زیر خواهد بود:

$$f_Y(y) = \binom{y-1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{y-3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 \qquad y = 3, 4, 5, \ldots$$

ب) می‌بایستی $f(y=5)$ را بدست بیاوریم:

$$f(y=5) = \binom{5-1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{5-3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0/2$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار $f(y=5)$ با مقدار $f(x=2)$ در مثال قبل برابر می‌باشد زیرا رابطه $Y=X+3$ بین دو متغیر تصادفی X و Y در این دو مثال وجود دارد.

ج):

$$E[Y] = \frac{k}{p} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$$

یعنی بطور متوسط از هر ۵ بار شلیک به هدف می‌وان انتظار داشت که ۳ بار گلوله به هدف اصابت کند.

$$var(Y) = \frac{kq}{p^2} = 3\,\frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{30}{9}$$

د):

$$m_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k = \left(\frac{\frac{3}{5}e^t}{1-\frac{2}{5}e^t}\right)^3$$

۶.۶ ۶-۱۷-۱ متغیر تصافی فوق هندسی

فرض کنید ظرفی حاوی N توپ می‌باشد، که M تای آنها سفید می‌باشند. می‌خواهیم یک نمونه nتایی از این ظرف به تصادف و بدون جاگذاری خارج کنیم متغیر تصادفی X را تعداد توپهای سفیدی که در نمونه nتایی موجود می‌باشند در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی فوق هندسی نامیده می‌شود.

توجه کنید که در متغیر تصادفی فوق هندسی هر بار یک عدد توپ از ظرف خارج می‌کنیم که در اولین مرتبه، احتمال سفید بودن توپ $p = \frac{M}{N}$ می‌باشد، اما چون توپها را بدون جاگذاری خارج می‌کنیم در دومین انتخاب احتمال سفید بودن توپ به نتیجه آزمایش اول وابسته است به عبارت دقیقتر در انتخاب m توپ از ظرف، که هر انتخاب یک آزمایش برنولی است، بدلیل انتخاب توپها برون جاگذاری آزمایشها از یکدیگر مستقل نمی‌باشند.

اگر توپها را با جایگذاری انتخاب می‌کردیم در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $p = \frac{M}{N}$, n می‌بوده.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی فوق هندسی فرض می‌نیم از n توپ انتخاب شده x تای آنها سفید باشند در این صورت x می‌تواند عددی بین ۰ تا M باشد. انتخاب n توپ از N توپ به $\binom{N}{n}$ طریق ممکن است. همینطور سفید بودن x توپ به $\binom{M}{x}$ طریق و مابقی به $\binom{N-M}{n-x}$ طریق ممکن است در نتیجه احتمال $p(X=x)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = p(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

۶-۱۷-۲ از $\binom{M}{x}$ نتیجه می‌شود که $0 \le x \le M$ و از $\binom{N-M}{n-x}$ نتیجه می‌شود که:

$$0 \le n-x \le N-M \quad \Rightarrow \quad n+M-N \le x \le n$$

نهایتاً بازده زیر برای مقادیری که متغیر تصادفی X قبول می‌کند بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 0 \le x \le M \\ n+M-N \le x \le n \end{cases} \Rightarrow \text{Max}(0, n+M-N) \le x \le \text{Min}(M, n)$$

متغیر تصادفی فوق هندسی X را با نماد $X \sim HG(N,M,n)$ نمایش می‌دهیم.

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی فوق هندسی برابر است با:

$$E[X] = n\frac{M}{N}$$

$$\text{var}(X) = n\frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

۶-۱۸ مثال ۸: در یک چاپخانه از هر ۵۰ برگ چاپ شده ۵ برگ بدلیل کیفیت نامناسب چاپ به دور ریخته می‌شود. برای کنترل کیفیت از هر ۵۰ برگ ۳ برگ کنترل می‌شود و اگر حداقل یک برگ کیفیت نامناسبی داشته باشند آنگاه سایر برگها نیز کنترل می‌شوند. احتمال اینکه مسوول کنترل کیفیت مجبور باشد هر ۵۰ برگ را کنترل کند چقدر می‌باشد؟

حل: متغیر تصادفی X را تعداد برگهای بدون کیفیت در یک نمونه ۳ تایی در نظر می‌گیریم. در این صورت X متغیر تصادفی فوق هندسی با پارامترهای $X \sim HG(50,5,3)$ می‌باشد.

$$p(X=x)=\frac{\binom{۵}{x}\binom{۴۵}{۳-x}}{\binom{۵۰}{۳}} \qquad ۰\le x\le ۳$$

برای اینکه مجبور باشیم هر ۵۰ برگ را کنترل کنیم باید حداقل یک برگ انتخابی کیفیت نامناسبی داشته باشند که احتمال آن برابر است با: $p(x\ge ۱)$.

$$p(X\ge ۱)=۱-p(X=۰)=۱-\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴۵}{۳}}{\binom{۵۰}{۳}}=۱-۰/۷۲۳=۰/۲۷۶$$

متوسط تعداد برگهای با کیفیت نامناسب در نمونه عبارتست از:

$$E[X]=n\frac{M}{N}=۳\frac{۵}{۵۰}=۰/۳$$

همچنین:

$$var(X)=۳\frac{۵}{۵۰}\left(\frac{۵۰-۵}{۵۰}\right)\left(\frac{۵۰-۳}{۵۰-۱}\right)=۰/۲۵$$

۱۹-۶ ۱.۶.۶ تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دو جمله‌ای

اگر در متغیر تصادفی فوق هندسی مقدار N در مقایسه با n بسیار بزرگ باشد، آنگاه دیگر انتخاب توپها بدون جاگذاری و با جاگذاری تقریباً معادل یکدیگر می‌باشند به همین ذلیل به جای محاسبه تابع احتمال فوق هندسی می‌توانیم از تابع احتمال دو جمله‌ای استفاده کنیم که در این حالت از پارامترهای n , $p=\frac{M}{N}$ استفاده می‌کنیم. در حالت کلی می‌بایستی شروط $N\to\infty$, $\frac{n}{N}\to ۰$ برقرار باشند تا بتوان از توزیع دو جمله‌ای استفاده نمود.

مثال ۹: در یک شهر از میان ۱۰/۰۰۰ خانوار ۴۰۰۰ خانوار دارای فرزند پسر می‌باشند اگر یک نمونه ۵ تایی انتخاب کنیم احتمال اینکه دارای فرزند پسر نباشند چقدر است؟

حل: چون نسبت $\frac{۵}{۱۰/۰۰۰}$ به صفر میل می‌کند و ۱۰۰۰۰ عدد بزرگی محسوب می‌شود می‌توان از تقریب توزیع فوق هندسی به دو جمله‌ای استفاده نمود:

$$p=\frac{M}{N}=\frac{۴۰۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۲}{۵} \quad , \quad q=\frac{۳}{۵} \quad , \quad n=۵ \quad \Rightarrow \quad X\sim B(۵,\frac{۲}{۵})$$

پس:

$$p(X=x)=\binom{۵}{x}\left(\frac{۲}{۵}\right)^x\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۵-x} \qquad x=۰,۱,۲,\dots,۵$$

$$=۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

احتمال اینکه فرزند پسری نداشته باشند برابر است با: $p(X=۰)$.

$$p(X=۰)=\binom{۵}{۰}\left(\frac{۲}{۵}\right)^۰\left(\frac{۳}{۵}\right)^۵=۰/۰۷$$

۲۰-۶ ۷.۶ متغیر تصادفی پواسون

در بعضی از آزمایشها تعداد دفعات رخ دادن پیشامدی را می‌توان بدست آورد ولی تعداد دفعات عدم رخ دادن آنرا نمی‌توان بدست آورد مثلاً تعداد دفعاتی که در طول شبانه روز تلفن یک شرکت زنگ می‌زند شمرد ولی تعداد دفعاتی که تلفن زنگ نمی‌زند را نمی‌توان شمرد. همینطور تعداد خودروهای وارد شده به پمپ بنزین در مقایسه با خودروهای عبوری.

متغیر تصادفی X را به این صورت تعریف می‌کنیم:

X■ تعداد موفقیتها در یک فاصله پیوسته (زمان ، طول)

پارامتر متغیر تصادفی پواسون λ می‌باشد که برابر است با میانگین تعداد موفقیتها در طول یک بازه پیوسته. برای اینکه X متغیر تصادفی پواسون باشد می‌بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

۱- در طول فاصله زمانی بسیار کوتاه احتمال رخ دادن یک موفقیت فقط متناسب با طول بازه زمانی باشد و بستگی به تعداد موفقیتها در خارج از فاصله زمانی نداشته باشد.

۲- احتمال روی دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه تقریباً برابر صفر باشد.

۳- تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی مشخص روی می‌دهد از تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی دیگر رخ می‌دهد مستقل باشد.

توجه کنید که در شروط بالا منظور از فاصله زمانی هر بازه پیوسته مثل طول یا یک ناحیه مشخص می‌باشد.

تابع احتمال متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ بصورت زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور عبارتند از:

$$E[X] = \lambda$$

$$var(X) = \lambda$$

$$m_X(t) = e^{-\lambda(۱-e^t)}$$

معمولاً پارامتر λ به صورت $\lambda = rt$ در نظر گرفته می‌شود که در آن t طول بازه مورد نظر و r نرخ وقوع پیشامد در بازه مربوطه است.

مثال ۱۰: یک تایپیست به طور متوسط در هر ۲ صفحه ۵ غلط تایپی دارد مطلوبست:

الف) احتمال اینکه در یک صفحه اصلاً غلط تایپی نداشته باشد؟

ب) احتمال اینکه حداقل ۳ غلط تایپی در ۲ صفحه داشته باشد؟

حل: الف) در یک صفحه ۲/۵ غلط به طور متوسط موجود می‌باشد بنابراین $\lambda = ۲/۵ \times ۱$ و داریم:

$$f_X(x) = \frac{(۲/۵)^x e^{-۲/۵}}{x!}$$

برای اینکه اصلاً غلط تایپی نداشته باشیم بایستی $f(x=۰)$ را بدست بیاوریم:

$$f(x=۰) = \frac{(۲/۵)^۰ e^{-۲/۵}}{۰!} = e^{-۲/۵} = ۰/۰۸$$

ب) در این حالت $\lambda = ۵$ می‌باشد و داریم:

$$f_X(x) = \frac{۵^x e^{-۵}}{x!}$$

$$p(X \geq ۳) = ۱ - (p(X=۰) + p(X=۱) + p(X=۲))$$

$$= ۱ - (۰/۰۰۶ + ۰/۰۳ + ۰/۰۷۵) = ۰/۸۸۹$$

۶ . ۷ . ۱ مد توزیع پواسون

مد توزیع پواسون همانند توزیع دو جمله‌ای بدست می‌آید یعنی:

$$\begin{cases} f(x_M) \geq f(x_M - ۱) & (۱) \\ f(x_M) \geq f(x_M + ۱) & (۲) \end{cases}$$

از (۱) نتیجه می‌شود:قرار دادن $x_M = \hat{x}$

$$\frac{\lambda^{\hat{x}}\ e^{-\lambda}}{\hat{x}!} \geq \frac{\lambda^{\hat{x}-۱}\ e^{-\lambda}}{(\hat{x}-۱)!} \Rightarrow \quad x \leq \lambda$$

به همین نسبت از رابطه (۲) بدست می‌آید $\lambda - ۱ \leq x$ در نتیجه: $\lambda - ۱ \leq x \leq \lambda$

حال اگر λ عددی صحیح باشد λ , $\lambda - ۱$ هر دو مد می‌باشند و اگر λ عددی صحیح نباشد بین λ و $\lambda - ۱$ عددی صحیح موجود است که مد می‌باشد.

مثال ۱۱: برای مثال قبل مقدار مد را برای بند الف و ب محاسبه کنید؟

الف) $\lambda = ۲/۵$, $\lambda - ۱ = ۱/۵$ بنابراین مد برابر است با $x_M = ۲$.

ب) $\lambda = ۵$, $\lambda - ۱ = ۴$ بنابراین مد برابر است با $x_M = ۵ , ۴$.

۶ . ۷ . ۲ تقریب توزیع دو جمله‌ای بوسیله توزیع پواسون

فرض کنید در توزیع دو جمله‌ای $n \to \infty$, $p \to ۰$ می‌توان به جای محاسبه احتمال با استفاده از تابع احتمال دو جمله‌ای از تابع احتمال پواسون استفاده نمود. در این حالت توزیع دو جمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = n\,p$ تقریب می‌زنیم.

توجه کنید که برای بدست آوردن مقدار λ امید ریاضی تابع پواسون را با امید ریاضی تابع احتمال دو جمله‌ای برابر قرار می‌دهیم که در نتیجه $\lambda = n\,p$ خواهد شد.

مثال ۱۲: در طول یک روز تعداد ۱۰۰/۰۰۰ خودرو از جلوی پمپ بنزین عبور می‌کند که تعداد ۱۰۰ خودرو وارد پمپ بنزین می‌شوندو مطلوبست احتمال اینکه در طول روز حداقل ۵۰ خودرو وارد پمپ بنزین شوند؟

حل: با محاسبه p داریم: $p = \frac{۱۰۰}{۱۰۰/۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ که عددی بسیار کوچک می‌باشد و چون n مقداری بزرگ می‌باشد می‌توان از تقریب توزیع دو جمله‌ای به پواسون استفاده نمود:

$$\lambda = n\,p = ۱۰۰/۰۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۱۰۰$$

$$f_X(x) = \frac{۱۰۰^x\ e^{-۱۰۰}}{x!}$$

$$p(X \geq ۵۰) = ۱ - p(X < ۵۰) \sim ۰/۹۹۹$$

۸ . ۶ ۶-۲۴ توزیع یکنواخت

متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت می‌باشد اگر احتمال رخ دادن هر یک از نقاط $x = ۱ , x = ۲ , \ldots , x = n$ با یکدیگر برابر باشد. تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت برابر است با:

$$f_X(x) = \frac{۱}{n} \qquad x = ۱ , ۲ , \ldots , n$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

امید، واریانس و تابع گشتاور توزیع یکنواخت عبارتند از:

$$E[X] = \sum_{۱}^{n} x\ \frac{۱}{n} = \frac{۱}{n}\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right) = \frac{n+۱}{۲}$$

به همین ترتیب:

$$E[X^{۲}] = \sum_{۱}^{n} x^{۲}\ \frac{۱}{n} = \frac{۱}{n}\left(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}\right) = \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

پس:

$$var(X) = E[X^{۲}] - E^{۲}[X] = \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶} - \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{n^{۲}-۱}{۱۲}$$

$$m_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=۱}^{n} \frac{e^{tx}}{n} = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n} (e^{t})^{x} = \frac{۱}{n}\, e^{t}\ \left(\frac{۱-e^{nt}}{۱-e^{t}}\right)$$

مثال ۱۳: یک تاس را پرتاب می‌کنیم X را متغیر تصادفی نتیجه حاصل از پرتاب در نظر می‌گیریم مطلوبست:

الف) تابع چگالی احتمال X.

ب) احتمال آمدن عدد زوج.

ج) امید، واریانس و تابع مولد گشتاور X.

حل: الف) X یک متغیر تصادفی یکنواخت است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{۱}{۶} \qquad x = ۱, ۲, \ldots, ۶$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب):

$$p(X = \text{عددی زوج}) = p(X=۲) + p(X=۴) + p(X=۶) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$E[X] = \frac{۶+۱}{۲} = ۳/۵$$

ج):

$$var(X) = \frac{۳۶-۱}{۱۲} = ۲/۹۱$$

$$m_X(t) = \frac{e^{t}(۱-e^{۶t})}{۶(۱-e^{t})}$$