# اجسمنت و تست

مهندسی عمران - نقشه‌برداری

تالیف
مهندس علیرضا آزموده اردلان
مهر ماه ۱۳۷۲

# فهرست مطالب

## فصل ۱

مروری بر جبر خطی

۱۴ـ مشتق یک فرم مربعی (Quadratic)

۱۵ـ بسط تیلور در حالت n بعدی

۱۶ـ چند خاصیت از trace یک ماتریس

۱۷ـ شبه معکوس

۱۸ـ محاسبهء معکوس یک ماتریس به روش تجزیهء چولسکی

## فصل ۲

سرشکنی کمترین مربعات (مطالب مقدماتی)

۱ـ مراحل انجام یک پروژهء نقشه‌برداری

۲ـ پردازش اولیه اطلاعات نقشه‌برداری

۳ـ علت نیاز به سرشکنی (سرشکنی مدل پارامتریک خطی)

۴ـ سرشکنی همراه با وزن

۵ـ جواب حاصل از روش کمترین مربعات و برآورد ناریب مجهولات

۶ـ ماتریس کوواریانس باقیمانده‌ها

۷ـ جواب کمترین مربعات و برآورد ماکزیمم احتمال

۸ـ جواب کمترین مربعات و برآورد می‌نیمم واریانس

۹ـ جواب کمترین مربعات مدل پارامتریک و شبه معکوس

۱۰ـ ماتریس کوواریانس کمیتهای حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک خطی

۱۱ـ درجهء آزادی

۱۲ـ برآورد واریانس وزن واحد

۱۳ـ برآورد ماتریسهای کوواریانس کمیتهای حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک خطی

۱۴ـ مدل پارامتریک غیر خطی

۱۵ـ نحوهٔ انجام تکرار در مدل پارامتریک غیر خطی

۱۶ـ سرشکنی معادلات شرط

۱۷ـ جواب حاصل از سرشکنی مدل شرط و شبه معکوس

۱۸ـ ماتریس کوواریانس کمیتهای حاصل از سرشکنی مدل شرط

۱۹ـ انتقال مشاهدات با وزن P به مشاهدات با وزن یکه (I)

**فصل ۳**

سرشکنی کمترین مربعات (مطالب تکمیلی)

۱ـ بردار مشاهدات و مؤلفه‌های آن

۲ـ چند تعریف از آنالیز تابعی

۲/۱ـ فضای خطی

۲/۱ـ فضای متریک (metric)

۲/۲ـ فضای نرم (norm)

۲/۳ـ فضای ضرب داخلی

۲/۴ـ فضای هیلبرت

۲/۵ـ فضای هیلبرت احتمال

---

۳ـ تعبیر هندسی معادلات پارامتریک

۴ـ تعبیر هندسی معادلات شرط

۵ـ سرشکنی معادلات ترکیبی

۶ـ ماتریسهای کوواریانس کمیتهای حاصل از سرشکنی مدل

ترکیبی

۷ـ تعبیر هندسی سرشکنی مدل ترکیبی

۸ـ سرشکنی مرحله به مرحله

۹ـ سرشکنی با پارامترهای وزن‌دار

۱۰ـ سرشکنی با معادلات شرط مختصات

## فصل ۴

آزمونهای آماری و تعیین فواصل اطمینان

۱ـ روشهای مختلف آماری

۲ـ فرضیهٔ آماری

۳ـ فرض صفر

۴ـ فرض مقابل

۵ـ آزمون فرضیه

۶ـ انواع خطاها در آزمون فرضیه

۷ـ آزمونهای قبل از سرشکنی کمترین مربعات

۷/۱ـ آزمون نرمان بودن تابع توزیع مشاهدات

۷/۲ـ آزمون میانگین جامعه (آزمون وجود خطای سیستماتیک)

۷/۳ـ آزمون واریانس جامعه (آزمون دقت وسیلهٔ اندازه‌گیری)

۷/۴ـ آزمون برای یافتن مشاهدات اشتباه

۸ـ تعیین فواصل اطمینان قبل از سرشکنی

۹ـ آزمونهای بعد از سرشکنی کمترین مربعات

۹/۱ـ آزمون نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات

۹/۲ـ آزمون فاکتور وریانس

۹/۳ـ آزمون برای یافتن مشاهدات اشتباه

۹/۴ـ آزمون صحت مدل ریاضی

۹/۵ـ تعیین فواصل اطمینان n بعدی

# فصل ۱

# مروری بر جبر خطی

## ۱/۱- مقدمه

ماتریس از نمادهای بسیار قدرتمندی است که در ریاضیات برای ایجاد سرعت و سهولت در بیان روابط بین مجموعه‌ای از اعداد و یا اعمال عملگرهای ( operator ) ریاضی یکسان بر روی مجموعه‌ای از اعداد بکار برده می‌شود. با استفاده از نماد ماتریسی می‌توان بدون درگیری بسیار با جزئیات و مراحل ریز محاسباتی ، به اثبات و تحلیل روابط بسیار طولانی و پیچیده پرداخت . سهولتی که خاصه در بیان دستگاه‌های معادلات خطی به صورت ماتریسی حاصل می‌گردد بسیار قابل ملاحظه است .

در سرشکنی نیز از آنجائی که بیشتر با دستگاه‌های معادلات خطی و بردارهائی از متغیرهای تصادفی سر و کار داریم . استفاده از ماتریسها و روابط مربوطه می‌توانند راحتی بسیاری را در اثبات روابط و بیان راه حلها پدید آورد . از این رو ماتریسها و بطور کلی جبر خطی را می‌توان ابزار ریاضی سرشکنی بشمار آورد .

بدین خاطر پیش از پرداختن به مبحث سرشکنی ، مروری سریع و در این حال کامل بر جبر خطی ضروری به نظر می‌رسد .

## ۱/۲ـ نماد ماتریسی و تعاریف

ماتریس (matrix) آرایشی مستطیلی از اعداد بوده که از قوانین جبری خاصی تبعیت می‌کنند . اعداد تشکیل دهندهٔ ماتریس را عناصر (elements) ماتریس نامند . مثالهای زیر چند نمونه از ماتریسهای با ابعاد مختلف هستند .

$$\underset{-}{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ ( ماتریس ۲ در ۳ )

$$\underset{-}{B}_{3x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$ ( ماتریس ۳ در ۱ )

$$\underset{-}{C}_{2x2} = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix}$$ ( ماتریس ۲ در ۲ )

به عنوان یک قرارداد ماتریسها را با حروف بزرگ زیر خط دار نشان نمی‌دهیم .

ماتریس با تعداد سطر و ستونهای برابر را ماتریس مربع ( square m. ) و ماتریس دارای تنها یک ستون را ماتریس ستونی ( column m. ) یا بردار ستونی ( c. vector ) نامیم . برای تفکیک بردار از ماتریس در روابط ریاضی ، بردارها را با حروف کوچک زیر خط دار نشان خواهیم داد .

ماتریس مربعی که تنها عناصر روی قطر اصلی آن مخالف

صفر باشد یک ماتریس قطری (diagonal m.) است . ماتریس قطری با عناصر یکسان ماتریس اسکالر (scalar m.) نامیده می‌شود . ماتریس قطری با تمام عناصر برابر واحد (۱) ماتریس یکه (indentity m.) یا ماتریس واحد (unit m.) است که با علامت اختصاری $\underline{I}$ یا $\underline{E}$ نمایش داده می‌شود . بُعد ماتریس یکه را با یک اندیس نشان می‌دهیم ، به عنوان مثال $\underline{I}_n$ به معنای ماتریس یکه ء nxn است . نمونه‌های زیر مثالهائی از ماتریسهای قطری ، اسکالر و یکه هستند .

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ( ماتریس قطری )

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ( ماتریس اسکالر )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ( ماتریس یکه )

ماتریس با تمام عناصر مساوی صفر یک ماتریس صفر (null m.) است که با حرف $\underline{0}$ نمایش داده می‌شود .

ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی آن مساوی صفر باشد ماتریس پائین مثلثی (lower triangular) ، و ماتریسی مربعی که عناصر زیر قطر اصلی آن مساوی صفر باشد بالا مثلثی

(upper triangular) نامیده می‌شود .

## ۱/۳ـ جمع ، ضرب و ترانهی ماتریس

ماتریسها را تنها هنگامی می‌توان با هم جمع کرد که تعداد سطر و ستونهای برابر داشته باشد . در این حالت آنها را جمع شونده (comfortable for addition) نامند .

مجموع دو ماتریس $\underline{A}$ و $\underline{B}$ ماتریسی است مانند $\underline{C}$ با تعداد سطر و ستونهای برابر آنها که هر عنصر آن مجموع دو عنصر نظیر در ماتریسهای $\underline{A}$ و $\underline{B}$ است . یعنی :

$$\underline{C}_{n\times m} = \underline{A}_{n\times m} + \underline{B}_{n\times m}$$

بطوریکه

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{cases} i = 1 \ldots n \\ \text{و} \\ j = 1 \ldots n \end{cases}$$

جمع دو ماتریس دارای خواص ذیل است :

جابجائی ( commutative )

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

شرکت پذیری ( associative )

$$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$$

اگر ماتریسی را n بار با خودش جمع کنیم ماتریسی حاصل می‌شود که هر یک از عناصر آن n برابر ماتریس اولیه است . این عمل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم .

$$\underline{B} = n\,\underline{A}$$

بطوری که :

$$b_{ij} = na_{ij}$$

ضرب یک اسکالر در یک ماتریس را ضرب اسکالر (scalar multiplication) ، نامیده و حاصل آن ضرب تمام عناصر ماتریس در آن اسکالر است. بنابر بر این ضرب فوق یک ضرب اسکالر است.

در حالت کلی n می‌تواند هر عدد صحیح مثبت یا منفی باشد. اگر در ضرب اسکالر n مساوی 1- باشد ، در آن صورت

$$\underline{B} = -\underline{A}$$

$\underline{B}$ را قرینه یا منفی (nagative) $\underline{A}$ گوییم . حال می‌توانیم تفاضل (subtraction) دو ماتریس را به صورت جمع یکی با منفی دیگری تعریف کنیم .

ضرب دو ماتریس $\underline{A}$ و $\underline{B}$ $(\underline{A}.\underline{B})$ هنگامی قابل تعریف خواهد بود که ستونهای $\underline{A}$ برابر تعداد سطرهای $\underline{B}$ باشد. در این صورت $\underline{A}$ و $\underline{B}$ را قابل ضرب شدن (conformable for multiplication) گویند.

فرض کنید $\underline{C}$ حاصلضرب دو ماتریس قابل ضرب شدن $\underline{A}$ و $\underline{B}$ باشد $(\underline{C}=\underline{A}.\underline{B})$ در این صورت عنصر (i,j) آن $(c_{ij})$ برابر مجموع حاصلضرب عناصر سطر i ام $\underline{A}$ در ستون j ام $\underline{B}$ خواهد بود ، یعنی :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} . b_{kj}$$

m تعداد ستونهای $\underline{A}$ و سطرهای $\underline{B}$ است .

ضرب ماتریسی دارای خواص ذیل است .

$$\underline{A}\,(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{C}$$ (توزیع پذیری) (distributive)

$$(\underline{A} + \underline{B})\,\underline{C} = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$$ (توزیع پذیری) (distributive)

$$\underline{A}\,(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\,\underline{C}$$ (شرکت پذیری) (associative)

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$ (I ماتریس یکه است)

و در حالت کلی بر خلاف ضرب اعداد حقیقی فاقد خواص ذیل است :

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$$ عدم وجود جابجائی (not commutative)

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{C} \not\Longrightarrow \underline{B} = \underline{C}$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{0} \not\Longrightarrow \underline{A} = \underline{0} \text{ یا } \underline{B} = \underline{0}$$

اگر $\underline{A}$ و $\underline{B}$ ماتریسهای مربع و $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$ باشد، در آن صورت آنها را ماتریسهای جابجا شونده نامند .

اگر $\underline{A}$ یک ماتریس مربع و $\underline{D}$ یک ماتریس قطری باشد :

۱ـ $\underline{D}\,\underline{A}$ باعث ضرب هر سطر $\underline{A}$ در عنصر قطری متناظر با آن در $\underline{D}$ خواهد شد .

۲ـ $\underline{A}\,\underline{D}$ باعث ضرب هر ستون $\underline{A}$ در عنصر قطری متناظر با آن در $\underline{D}$ می‌شود .

ماتریسی که از تعویض جای سطرها با ستونهای یک ماتریس حاصل شود را ترانهاده (transpose) ماتریس اول نامند . به عنوان مثال ترانهاده ماتریس $\underline{A}$ را با $\underline{A}^T$ یا $\underline{A}'$ نشان می‌دهیم .

اگر $\underline{B} = \underline{A}^T$

آنگاه $b_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m & (m = \underline{A} \text{ تعداد ستونهای}) \\ j = 1, 2, \ldots, n & (n = \underline{A} \text{ تعداد سطرهای}) \end{cases}$$

ترانهی دارای خواص ذیل است .

$$(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$$

$$(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$$

$$(n\underline{A})^T = n\,\underline{A}^T$$

$$(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\,\underline{A}^T$$

ماتریسی که برابر ترانهاده‌اش باشد ، ماتریس متقارن (symmetric) نامیده می‌شود . به عنوان مثال $\underline{A}$ یک ماتریس متقارن است .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

[چون $(\underline{A}^T = \underline{A})$ یا $a_{ij} = a_{ji}$ ]

اگر $\underline{A}$ یک ماتریس مربع دلخواه باشد در آن صورت $(\underline{A}\underline{A}^T)$ و $(\underline{A} + \underline{A}^T)$ متقارن خواهند بود .

برای هر ماتریس ماتریس دلخواه $\underline{A}$ و ماتریس متقارن $\underline{B}$ ، حاصلضربهای ذیل متقارن‌اند :

$$\begin{bmatrix} \underline{A}\,\underline{A}^T \\ \underline{A}^T\underline{A} \\ \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^T \\ \underline{A}^T\underline{B}\,\underline{A} \end{bmatrix}$$

ماتریس که ترانهادهٔ آن برابر معکوس آن ماتریس باشد (یعنی $\underline{A}^T = -\underline{A}$) ، پادمتقارن (skew symmetric) خوانده می‌شود .

هر ماتریس مربع را می‌توان به حاصل جمع یک ماتریس متقارن و پادمتقارن تجزیه کرد.

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\underbrace{(\underline{A} + \underline{A}^T)}_{\text{متقارن}} + \frac{1}{2}\underbrace{(\underline{A} - \underline{A}^T)}_{\text{پادمتقارن}}$$

## ۱/۴- دترمینان ، معکوس و ماتریسهای متعامد

برای هر ماتریس مربع ($\underline{A}$) می‌توان یک عدد از طریق دستوری که ذکر خواهد شد بدست آورد، که به آن مقدار دترمینان (diterminant) ماتریس اطلاق می‌گردد . دترمینان $\underline{A}$ را بصورت $\det(\underline{A})$ یا $|\underline{A}|$ نشان می‌دهیم .

اگر $\underline{A}$ یک ماتریس مربع nxn باشد ، دترمینان آن به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$|\underline{A}| = (\pm a_{1i}\, a_{2j} \,.\,.\,.\, a_{nk})$$

مجموع فوق برای !n جملهٔ حاصل از جایگشت (permutation) i, j, . . . ,k نوشته می‌شود ( i, i, . . . ,k اعداد صحیح ۱ تا n هستند ) . در این مجموع جملات با تعداد تعویضها زوج با علامت مثبت و با تعداد تعویضهای فرد با علامت منفی وارد خواهند شد ( منظور از تعویض حالتی است که اندیس بزرگتر پیش از اندیس کوچکتر قرار می‌گیرند ) .

دترمینان یک ماتریس را می‌توان به صورت دیگر نیز بدست آورد . اگر سطر i ام و ستون j ام ماتریس مربع ($\underline{A}$ (nxn را حذف کنیم ، دترمینان ماتریس (n-1)x(n-1) حاصل ، کهاد (minor) عنصر

$a_{ij}$ نامیده می‌شود $|M_{ij}|$ . کهاد همراه با علامت ( علامتی که به صورت زیر تعریف می‌شود ) را همسازه (cofactor) عنصر $a_{ij}$ گوئیم .

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \quad |M_{ij}|$$

مقدار دترمینان ماتریس $\underline{A}$ برابر مجموع حاصلضرب عناصر یک سطر یا ستون آن در همسازه‌های مربوط به همان سطر یا ستون است .

$$|\underline{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, c_{ik}$$

به عنوان مثال از طریق این دستور دترمینان یک ماتریس مربع بصورت زیر بدست می‌آید .

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

که برابر مقداری است که از دستور قبلی بدست می‌آید .

دترمینان دارای خواص زیر است .

۱- $|\underline{A}^T| = |\underline{A}|$

۲- (این خاصیت به حاصلضرب $|\underline{A}\ \underline{B}| = |\underline{A}|\ |\underline{B}|$ n ماتریس قابل تعمیم است)

۳- دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن است .

۴- دترمینان یک ماتریس دارای بردار صفر برابر صفر است.

۵- اگر یک سطر یا ستون یک دترمینان مضربی از سطر یا ستون دیگر آن باشد ، دترمینان ماتریس مساوی صفر است.

۶- اگر یک سطر یا ستون یک دترمینان در یک اسکالر ضرب شود ، مقدار دترمینان آن نیز در آن عدد ضرب خواهد شد .

۷- اگر $\underline{A}$ را بتوان به یک فرم بالا مثلثی تجزیه کرد (رجوع شود به بخش ۵) ، بطوری که $\underline{A}1, \underline{A}2, \ldots, \underline{A}n$ ماتریسهای مربع روی قطر اصلی باشند ، در آن صورت :

$$|\underline{A}| = |\underline{A}1| \cdot |\underline{A}2| \cdot \ldots \cdot |\underline{A}n|$$

اگر دترمینان ماتریسی برابر صفر باشد ، به آن ماتریس مجرد (singular) گفته می‌شود . ماتریسهای با دترمینان مخالف صفر غیر مجرد (non-singular) هستند .

اگر $\underline{A}$ و $\underline{B}$ دو ماتریس مربعی باشند که در مورد آنها داشته باشیم :

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$$

در آن صورت $\underline{B}$ را معکوس $\underline{A}$ نامیده و می‌نویسیم ، $\underline{B}=\underline{A}^{-1}$ (و یا برعکس) . تنها ماتریسهای غیر مجرد دارای معکوس‌اند (علت این مطلب بعد از ذکر دستور محاسبهٔ معکوس روشن خواهد شد) .

روشهای مختلف محاسبهٔ معکوس ماتریس بخش اصلی ریاضیات ماتریسها را تشکیل می‌دهند . جزئیات این روشها را می‌توانید به عنوان مثال در فصل هفتم مرجع ۱ ملاحظه فرمائید . ما در اینجا تنها به ذکر چند روش به عنوان نمونه خواهیم پرداخت .

اگر $\underline{A}$ یک ماتریس مربع nxn باشد ، ماتریسی که از جایگزین کردن $a_{ij}$ با همسازهٔ $c_{ji}$ حاصل می‌گردد ماتریس الحاقی (adjoint) $\underline{A}$ نامیده شده و بصورت $adj(\underline{A})$ نوشته می‌شود .

رابطهٔ بین معکوس و ماتریس الحاقی به قرار زیر است .

$$\underline{A}^{-1} = \frac{adj(A)}{|\underline{A}|}$$

معکوس ماتریس دارای خواص زیر می‌باشد .

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$$

$$(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$$

$$(k\,\underline{A})^{-1} = \frac{1}{k}\,\underline{A}^{-1}$$

$$|\underline{A}^{-1}| = |\underline{A}|^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}$$

$$(\underline{A}^{T})^{-1} = (\underline{A}^{-1})^{T}$$

( A و B ماتریسهای مربع غیر مجرد هستند )

اگر معکوس ماتریس ~~ماتریس~~ $\underline{A}$ برابر ترانهاده‌ء آن باشد ( $\underline{A}^{-1}=\underline{A}^{T}$ ) در آن صورت $\underline{A}$ متعامد (orthogonal) خوانده می‌شود .

با توجه به تعریف معکوس یک ماتریس در مورد ماتریس متعامد می‌توان نوشت :

$$\underline{A}\,\underline{A}^{T} = \underline{A}^{T}\underline{A} = \underline{I}$$

ستونهای یک ماتریس متعامد از بردارهائی تشکیل شده که بر یکدیگر متعامد بوده و طولشان برابر واحد است.

همچنین اگر M یک ماتریس متعامد باشد ، در آن صورت :

$$|M| = \pm 1$$

هنگامیکه $|M|=1$ ، M را ماتریس متعامد ویژه (proper) و در حالت $|M|=-1$ ، آنرا ماتریس متعامد غیر ویژه (improper) می‌نامیم .

حاصلضرب دو ماتریس متعامد ، ماتریسی متعامد است.

هر ماتریس را می‌توانیم متشکل از تعدادی بردار سطری یا ستونی بدانیم . در یک ماتریس متعامد حاصلضرب این بردارها در خودشان برابر یک و در بردارهای دیگر تشکیل دهنده‌ء آن ماتریس برابر صفر است . یعنی :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix}$$ ( یک ماتریس متعامد )

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos Q \\ \sin Q \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} -\sin Q \\ \cos Q \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_1^T \underline{x}_2 = \underline{x}_2^T \underline{x}_1 = 0$$

$$\underline{x}_1^T \underline{x}_1 = \underline{x}_2^T \underline{x}_2 = 1$$

## ۱/۵- تجزیهٔ ماتریسها

یک ماتریس را می‌توان متشکل از اجزاء کوچکتری دانست ، که به آنها زیر ماتریس (submatrix) گویند . یک ماتریس به شیوه‌های گوناگونی قابل تجزیه به زیر ماتریسهای کوچکتر است . به عنوان مثال ماتریس $\underline{A}$ ، را می‌توان به دو ماتریس $\underline{A}_{-1}$ و $\underline{A}_{-2}$ تجزیه کرد .

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{array}\right] = \left[\underline{A}_{-1} \quad \underline{A}_{-2}\right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{\underline{A}_{-1}} \quad \underbrace{\quad}_{\underline{A}_{-2}}$$

اگر دو ماتریس $\underline{A}$ و $\underline{B}$ قابل ضرب شدن باشند ، تجزیهٔ آنها بگونه‌ای که زیر ماتریسهای حاصل قابل ضرب شدن باشند میسر است . برای این منظور لازم است که در حاصل ضرب $\underline{A}\underline{B}$ تعداد ستونهای موجود در زیر ماتریسهای ماتریس $\underline{A}$ دقیقاً مساوی تعداد سطرهای زیر ماتریسهای ماتریس $\underline{B}$ باشد . به عنوان مثال در حاصلضرب ذیل ضرب دو ماتریس قابل تبدیل به ضرب زیر ماتریسهای آنها است.

$$\underline{A}\,\underline{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\underline{A}_{-1} \quad \underline{A}_{-2}\right] \left[\begin{array}{c} \underline{B}_{-1} \\ \underline{B}_{-2} \end{array}\right]$$

$$= \underline{A}_{-1}\,\underline{B}_{-1} + \underline{A}_{-2}\,\underline{B}_{-2}$$

مسلماً در هر حال می‌توان دو ماتریس را به صورتهای مختلفی تجزیه کرد ، که زیر ماتریسهای حاصل نیز قابل ضرب شدن باشند . نکتهٔ قابل توجه در ضرب ماتریسهای تجزیه شدهٔ مشابه بودن قاعدهٔ ضرب آنها با دو ماتریس در یکدیگر است .

دستور ترانهی یک ماتریس تجزیه شده دقیقاً مانند اعمال این دستور به یک ماتریس است منتها با این تفاوت که خود زیر ماتریسها نیز بایستی ترانهاده شوند .

مثال :

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T \\ \underline{A}_2^T \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس مربع و غیر مجردی را تجزیه کرده باشیم ( به شرط آنکه زیر ماتریسهای روی قطر اصلی غیر مجرد باشند ) معکوس ماتریس را می‌توان بر حسب زیر ماتریسهای آن بدست آوریم . برای رسیدن به فرمول این عمل یک ماتریس مربع مانند $\underline{A}$ که متشکل از چهار زیر ماتریس است را نظر می‌گیریم و آنگاه ماتریسی مانند $\underline{B}$ را بگونه‌ای می‌یابیم که در شرط زیر (تعریف معکوس) صدق کند .

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

(با فرض $|\underline{A}_{11}| \neq \underline{0}$ و $|\underline{B}_{22}| \neq \underline{0}$ )

با بکار بردن قاعدهٔ ضرب ماتریسها و بدست آوردن زیر ماتریسهای $\underline{B}$ از دستگاه چهار معادله چهار مجهولی حاصل به نتایج ذیل خواهیم رسید .

$$\underline{B}_{11} = \underline{A}_{11}^{-1} + \underline{A}_{11}^{-1}\,\underline{A}_{12}\,\underline{B}_{22}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}^{-1}$$

$$\underline{B}_{12} = -\,\underline{A}_{11}^{-1}\,\underline{A}_{12}\,\underline{B}_{22}$$

$$\underline{B}_{21} = -\,\underline{B}_{22}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}^{-1}$$

$$\underline{B}_{22} = (\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}^{-1}\,\underline{A}_{12})^{-1}$$

## ۱/۶ـ حل دستگاههای معادلات خطی

### الف ) مرتبهٔ یک ماتریس

با حذف تعدادی از سطرها و ستونهای یک ماتریس ، یک زیر ماتریس کوچکتر بدست می‌آید . مرتبه (یا rank) یک ماتریس ( در حالت کلی غیر مربع ) ، درجهٔ بزرگترین زیر ماتریس مربع و غیر مجرد آن است . روش عملی تعیین مرتبهٔ یک ماتریس تبدیل آن به فرم کانونی است . برای تبدیل یک ماتریس به فرم کانونی آن، از اَعمالِ سطر یا ستونیِ مقدماتی (primary row or column operations) استفاده می‌گردد . این اعمال عبارتند از :

۱ـ تعویض مکان دو سطر (یا ستون) ماتریس با یکدیگر .

۳- جمع یک سطر (یا ستون) ماتریس با ضریب دلخواهی از سطر (یا ستون) دیگر آن.

ماتریسی از طریق یک عمل مقدماتی بدست می‌آید معادل (equivalent) ماتریس اولیه نامیده می‌شود، چون مرتبهٔ آن تغییر نمی‌یابد. به عنوان نمونه مرتبهٔ ماتریس ذیل را بدین صورت بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

با کم کردن دو برابر سطر اول از دوم و جمع سطر اول با سوم:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

تفاضل سطر دوم جدید از سطر سوم جدید:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس فوق، چون

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

پس مرتبهٔ این ماتریس دو است. اما به همین ترتیب با ادامهٔ اعمال سطر مقدماتی می‌توان این ماتریس را به فرم کانونی آن تبدیل کرد، که به فرم زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (فرم کانونی ماتریس ماتریس اولیه)

در مورد مرتبهٔ یک ماتریس می‌توان قضایای ذیل را برشمرد:

۱- مرتبهٔ یک ماتریس مستطیلی کوچکتر یا مساوی بعد کوچکتر آن است.

۲- مرتبهٔ حاصلضرب چند ماتریس کوچکتر یا مساوی کوچکترین مرتبهٔ ماتریسهای ضرب شده است.

۳- ضرب یک ماتریس در یک ماتریس غیر مجرد، مرتبهٔ ماتریس را تغییر نمی‌دهد (مرتبهٔ ماتریس حاصل برابر مرتبهٔ ماتریس اولیه است).

۴- اگر $\underline{A}$ ماتریسی $m \times k$ و $\underline{B}$ $k \times n$ بوده و مرتبهٔ هر دو ماتریس $k$ باشد، در آن صورت مرتبهٔ $\underline{AB}$ برابر $k$ است.

۵- مرتبهٔ $\underline{A}^T\underline{A}$ و $\underline{A}\underline{A}^T$ برابر مرتبهٔ $\underline{A}$ است ($\underline{A}$ ماتریسی دلخواه است).

۶- مرتبهٔ حاصلجمع دو ماتریس کوچکتر یا مساوی مجموع مرتبه‌های آنها است.

## ب) دستگاه‌های معادلات خطی در نماد ماتریسی

یک دستگاه $m$ معادلهٔ $n$ مجهولی را می‌توان به صورت زیر

نوشت .

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

در معادلهٔ فوق $a_{ij}$ ها و $b_i$ ها معلوم و $x_j$ مجهول اند .

این دستگاه را در نماد ماتریسی بصورت زیر نوشته می‌شود .

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

که در آن:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ را ماتریس ضرائب ، $\underline{x}$ را بردار مجهولات و $\underline{b}$ را بردار مقادیر ثابت می‌نامیم .

از کنار هم گذاشتن ماتریس ضرائب و بردار مقادیر ثابت ماتریسی حاصل می‌شود که به آن ماتریس بسط داده شده (augmented) گفته گویند ، به صورت زیر .

$$\left[ \underline{A} \ \middle| \ \underline{b} \right]$$

اگر بردار مقادیر ثابت مساوی صفر باشد دستگاه را همگن (homogeneous) و در غیر این صورت غیر همگن (non-h.)

می‌نامیم .

ج ) دستگاه‌های معادلات ناسازگار

اگر مرتبهٔ ماتریس ضرائب برابر مرتبهٔ ماتریس بسط داده شده باشد ، دستگاه سازگار (consistent) خوانده می‌شود .

بنابراین دستگاه‌های همگن همواره سازگارند . برعکس اگر مرتبهٔ ماتریس ضرائب و ماتریس بسط داده شده یکی نباشد دستگاه ناسازگار (in-c.) است . دستگاه ناسازگار فاقد جواب است . یعنی نمی‌توان مقادیری برای مجهولات یافته که در همهٔ معادلات صدق کنند .

د ) دستگاه‌های با جواب منحصر به فرد

اگر مرتبهٔ ماتریس ضرائب برابر تعداد مجهولات باشد ، دستگاه جواب منحصر به فرد خواهد داشت . بنابراین برای آنکه یک دستگاه جواب منحصر به فرد داشته باشد بایستی ماتریس ضرائب غیر مجرد باشد ($|\underline{A}| = 0$) . در این حالت جواب دستگاه از رابطه زیر بدست می‌آید .

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

در حالتی که ماتریس ضرائب مستطیلی است ، یعنی تعداد معادلات بیشتر از مجهولات است . رسیدن به جواب منحصر به فرد مستلزم آن است که $\underline{A}^T \underline{A}$ غیر مجرد باشد . در این حالت جواب دستگاه از رابطهٔ زیر بدست می‌آید .

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{b}$$

با این روش بعداً به هنگام بحث در مورد روش کمترین مربعات بیشتر آشنا خواهید شد .

هـ ) دستگاه‌های با بینهایت جواب

اگر مرتبهٔ ماتریس ضرائب کمتر از تعداد مجهولات باشد ، دستگاه بینهایت جواب خواهد داشت .

مطالب گفته شده در مورد تعداد جوابهای دستگاه‌های معادلات خطی را می‌توان در جدول ذیل خلاصه کرد .

| نام دستگاه | جواب | مرتبهٔ ماتریس $\underline{A}$ | مرتبهٔ ماتریس $[\underline{A}\ \underline{b}]$ | بردار ثابت $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| غیر همگن-ناسازگار | ندارد | هرچه باشد | مخالف مرتبهٔ $\underline{A}$ | $\underline{b} \neq \underline{0}$ |
| غیر همگن-سازگار | منحصر بفرد | مساوی تعداد مجهولات | برابر مرتبهٔ $\underline{A}$ | $\underline{b} \neq \underline{0}$ |
| غیر همگن-سازگار | بینهایت | کمتر از تعداد مجهولات | برابر مرتبهٔ $\underline{A}$ | $\underline{b} \neq \underline{0}$ |
| همگن-سازگار | منحصر بفرد | برابر تعداد مجهولات | برابر مرتبهٔ $\underline{A}$ | $\underline{b} = \underline{0}$ |
| همگن-سازگار | بینهایت | کمتر از تعداد مجهولات | برابر مرتبهٔ $\underline{A}$ | $\underline{b} = \underline{0}$ |

## ۱/۶/۱- روش گوس (Gauss Method) برای حل دستگاه‌های معادلات خطی

در این روش با اِعمالِ اَعمالِ سطریِ مقدماتی ، ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌شود . این اَعمال بر روی بردار طرف راست معادله نیز اعمال می‌گردد . سپس مجهولات از انتها یکی پس از دیگری از حل معادلات سادهٔ حاصل ، بدست می‌آیند .

## ۱/۶/۲- روش گوس - جردن (Gauss-Jordan Method) برای حل دستگاه‌های معادلات خطی

در این روش اَعمالِ سطریِ مقدماتی تا تبدیل ماتریس ضرائب به ماتریس یکه ادامه می‌یابد (کلیهٔ اَعمالِ مقدماتی بر بردار سمت راست تساوی نیز وارد می‌گردند). به این ترتیب نهایتاً بردار سمت راست تساوی مقدار عددی مجهولات خواهد شد.

## ۱/۷- انتقال خطی

تساوی ماتریسی زیر یک انتقال خطی (linear transformation) است.

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$$

$\underline{A}$ ماتریس و $\underline{x}$ و $\underline{y}$ بردارند. در این رابطه به ماتریس $\underline{A}$ ماتریس انتقال (transformation m.) می‌گویند. این انتقال را به دو شکل می‌توان تعبیر کرد. یکی آنکه $\underline{x}$ و $\underline{y}$ دو بردار در یک سیستم مختصات بوده و ماتریس $\underline{A}$ تبدیل کنندهٔ $\underline{x}$ به $\underline{y}$ است. تعبیر دیگر آن است که این دو بردار در واقع یک بردارند در دو سیستم مختصات مختلف و ماتریس $\underline{A}$ نشان دهندهٔ ارتباط بین این دو سیستم مختصات می‌باشد.

اگر ماتریس انتقال مربع و غیر مجرد باشد، به انتقال انتقال تصویر شونده (projective t.) گفته می‌شود، و انتقال معکوس آن نیز وجود خواهد داشت. یعنی:

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{y}$$

انتقالات تصویر شونده انواع مختلفی دارند که ذیلا بدانها خواهیم پرداخت .

الف ) انتقال متعامد

در این انتقال طول بردارها تغییر پیدا نمی‌کنند . پس اگر $\underline{x} = \underline{A}\,\underline{y}$ یک انتقال متعامد باشد در آن صورت :

$$\underline{x}^T\underline{x} = \underline{y}^T\underline{y}$$

اما از طرفی به جای $\underline{x}$ در تساوی فوق می‌توان مقدار مساوی آن یعنی $\underline{A}\,\underline{y}$ قرار داد ،

$$(\underline{A}\,\underline{y})^T(\underline{A}\,\underline{y}) = \underline{y}^T\underline{y}$$

یا

$$(\underline{y}^T\underline{A}^T)(\underline{A}\,\underline{y}) = \underline{y}^T(\underline{A}^T\underline{A})\,\underline{y} = \underline{y}^T\underline{y}$$

از تساوی اخیر می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\underline{A}^T\underline{A} = \underline{I}$$

یعنی در انتقال متعامد معکوس ماتریس انتقال برابر ترانهادهٔ آن است . از این خاصیت می‌توان در بررسی متعامد بودن یک انتقال استفاده کرد .

ماتریسی که دارای خاصیت فوق باشد (ترانهادهٔ آن با معکوسش برابر باشد ) ماتریس متعامد (orthogonal matrix) نامیده می‌شود ، که بیشتر با آن آشنا شدیم .

دو نوع انتقال متعامد وجود دارد ، دوران (rotation) و انعکاس (reflection) .

ب) انعکاس

انعکاس انتقال متعامدی است که دترمینان ماتریس انتقال آن مساوی ۱- است ($|A| = -1$) به اینگونه ماتریسها ماتریسهای improper می‌گویند . ماتریس این انتقال قطری و دارای یک عنصر ۱- و مابقی ۱ است . نکتهٔ قابل ذکر آنکه هر ماتریس متعامد improper را می‌توان از حاصل ضرب یک ماتریس انعکاس و یک ماتریس دوران بدست آورد .

ماتریس ذیل مثالی از یک ماتریس انعکاس است .

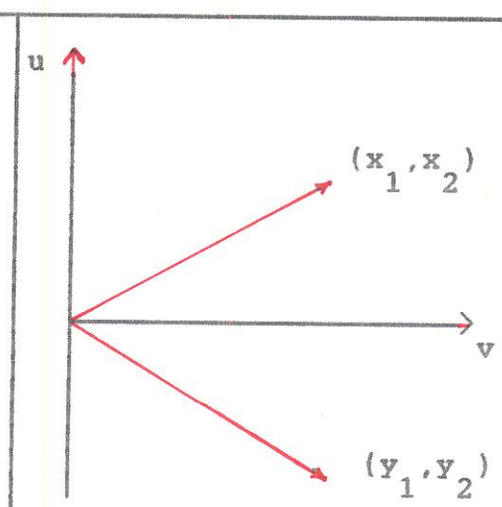
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

دو تعبیر ذکر شده برای انتقال خطی ، در مورد انعکاس در دو شکل ذیل نشان داده شده‌اند .

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$$

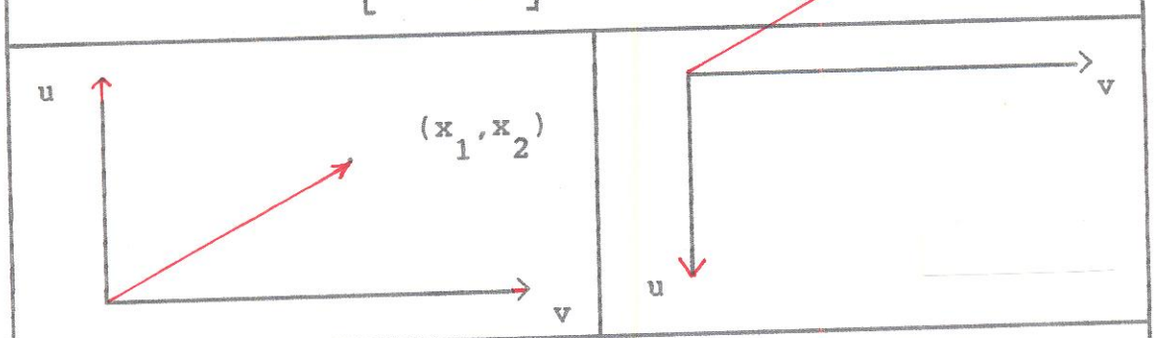
$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$




شکل ۱ : سیستم مختصات ثابت و بردار انعکاس یافته است .
( انتقال یک بردار در یک سیستم مختصات )

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$




شکل ۲ : بردار ثابت و سیستم مختصات انعکاس یافته است .
( انتقال یک بردار از سیستمی به سیستم دیگر )

ج) دوران

دوران یک ماتریس متعامد proper است. $\underline{R}$ مثالی از یک ماتریس دوران دو بعدی است .

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix}$$

این ماتریس باعث دوران بردارها در یک سیستم مختصات به اندازهٔ زاویهٔ Q در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌گردد . این عمل معادل دوران سیستم مختصات به اندازهٔ زاویهٔ Q در جهت عقربه‌های ساعت است .

دوران در جهت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت نامیده و ماتریس این دوران را به $\underline{R}(Q)$ نشان می‌دهیم .

## د) انتقال اسکالر

انتقال اسکالر (scalar) انتقالی است که تنها باعث تغییر طول یک بردار می‌گردد . این انتقال دارای ماتریسی به فرم زیر است .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k\,\underline{I}$$

## هـ) انتقال affine

کلیهء انتقالهای تصویر شونده‌ای که نه متعامد باشند و نه اسکالر affine نامیده می‌شوند . اثر یک انتقال affine از طریق یک انتقال متعامد به اضافهء یک انتقال اسکالر ایجاد می‌شود . اما از آنجائی که اثر یک انتقال affine بر روی بردارهای متفاوت فرق می‌کند ، یک انتقال متعامد و یک انتقال اسکالر یکسان جایگزین آن نخواهد بود ، و این دو را می‌بایست برای هر بردار جداگانه حساب کرد . به عنوان مثال ماتریس $\underline{A}$ ، ماتریس یک انتقال affine است .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

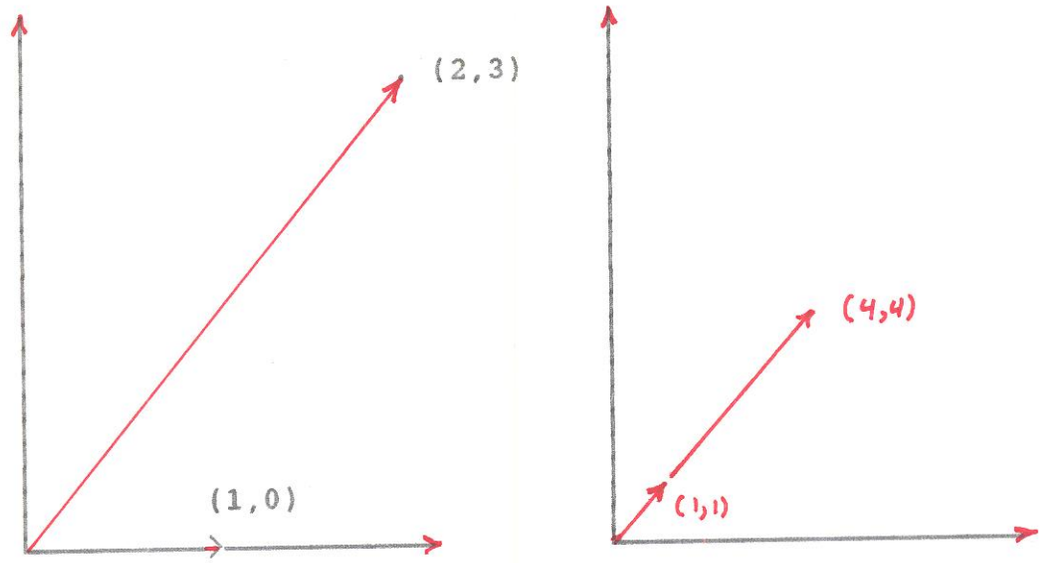
اثر این انتقال بر روی دو بردار $\underline{x}_1$ و $\underline{x}_2$ عبارتست از :

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_1 = \underline{A}\,\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_2 = \underline{A}\ \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

همانگونه که ملاحظه می‌گردد اثر آن بر روی دو بردار متفاوت است.




اثر این انتقال بر روی بردار اول مشابه یک دوران به اندازهٔ $Q = \tan^{-1}(3/2)$ و افزایش طول به اندازهٔ $k = 13$ و بر روی بردار دوم مشابه یک کشیدگی به اندازهٔ $k = 4$ است . بنابر این اثر آن بر روی بردار اول مشابه یک دوران و یک انتقال اسکالر و بر روی بردار دوم مشابه تنها یک انتقال اسکالر آن هم با اندازه‌ای متفاوت است . نوع خاصی از انتقال affine انتقالی است که ماتریس انتقال آن متقارن است . مانند :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

این انتقال نیز بر روی بردارهای مختلف اثر متفاوتی برجای می‌گذارد .

## و ) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

یکی از مسائل مطرحه در ارتباط با انتقالات ، یافتن برداری مانند $\underline{x}$ است که ماتریس انتقال $\underline{A}$ تنها طول آنرا تغییر داده و بر جهت آن اثر نگذارد . یعنی

$$\underline{A}\,\underline{x} = k\,\underline{x} \qquad (۱)$$

معادلهٔ ماتریسی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت .

$$(\underline{A} - k\,\underline{I})\,\underline{x} = \underline{0} \qquad (۲)$$

که یک دستگاه معادلات همگن است . همانگونه که در بخش دستگاه‌های معادلات خطی ذکر شد ، این دستگاه در صورتی جوابی غیر از جواب بدیهی صفر خواهد داشت که $(\underline{A} - k\,\underline{I})$ مجرد باشد ، یعنی :

$$|\underline{A} - k\,\underline{I}| = \underline{0}$$

این معادله ، معادلهٔ مشخصه (charactristic equation) خوانده می‌شود .

$$b_n(-k)^n + b_{n-1}(-k)^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$$

که در آن :

$b_n = 1$

$b_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (مجموع کهادهای اصلی مرتبهٔ یک ماتریس $\underline{A}$)

$\vdots$

$b_{n-r} =$ مجموع کهادهای اصلی مرتبهٔ r ماتریس $\underline{A}$

$\vdots$

$b_0 = |\underline{A}|$

ریشهٔ چند جمله‌ای فوق مقادیر ویژهٔ (eigenvalue) ماتریس A

نامیده می‌شوند. برای هر مقدار ویژه برداری می‌توان یافت که در رابطهٔ (۱) صدق کند. به این بردارها، بردارهای ویژه (eigen-vectors) نامیده می‌شوند.

اگر ماتریس $\underline{A}$ متقارن باشد، در آن صورت:

۱ـ مقادیر ویژهٔ آن حقیقی اند.

۲ـ بردارهای ویژهٔ آن دو بدو متعامدند.

قضیه: برای هر ماتریس متقارن مانند $\underline{A}$، ماتریس دورانی مانند $\underline{R}$ را می‌توان یافت، بطوری که $\underline{R}^T \underline{A}\, \underline{R}$ قطر باشد.

به عنوان مثال معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس متقارن $\underline{A}$ را بدست می‌آوریم.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{A} - k\,\underline{I}| = \begin{vmatrix} (5-k) & 3 \\ 3 & (5-k) \end{vmatrix} = (5-k)^2 - 9 = 0$$

یا

$$k^2 - 10\,k + 16 = 0$$

که دارای دو جواب $k1 = 8$ و $k2 = 2$ است. 8 و 2 مقادیر ویژهٔ $\underline{A}$ هستند.

برای هر مقدار $ki$ یک بردار غیر صفر $\underline{x}$ وجود خواهد داشت که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند. این بردار بردار ویژه (e.vector) متناظر با $ki$ اطلاق می‌گردد. به عنوان مثال برای $k1 = 8$ داریم:

$$(\underline{A} - k\,\underline{I})\,\underline{x} = \left[ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

در این معادله چون مرتبهٔ ماتریس ضرائب کمتر از تعداد مجهولات است ، یکی از مجهولات را به دلخواه انتخاب کرده مجهول دوم را بدست می‌آوریم . مثلا با انتخاب $x_1 = c_1$ برای $x_2$ مقدار $c_1$ بدست می‌آید . به همین ترتیب برای مقدار ویژهٔ دیگر نیز می‌توان بردار ویژه بدست آورد . این بردارها بردارهائی خواهند بود که ماتریس $\underline{A}$ تنها طول آنها را تغییر می‌دهد .

غالباً مقدار دلخواه $c_1$ بگونه‌ای انتخاب می‌گردد که طول بردار برابر واحد شود (normalized شود ). به عنوان مثال برای اینکه بردار ویژهٔ x1 چنین خاصیتی داشته باشد ، کافی است ضریب c1 را بگونه‌ای بدست می‌آوریم که در شرط ذیل صدق کند .

$$\underline{x}^T \underline{x} = 1$$

$$\underline{x}_1^T \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1^2 + c_1^2$$

$$\Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

و

$$\underset{-}{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

دقیقا مشابه این عمل در مورد بردار ویژهٔ دیگر ($\underset{-}{x}_2$) قابل اجرا است . بردارهای ویژه‌ای که به طریق بدست می‌آیند ، علاوه بر دارا بودن خاصیت تعامد دارای طول واحدند . به این گونه بردارها اصطلاحا بردارهای ارتو نرمال (orthonormal) گفته می‌شود .

بنابر آنچه که قبلا به عنوان تعریف بردارهای ویژه ذکر شد می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} \underset{-}{A}\,\underset{-}{x}_1 = k_1 \underset{-}{x}_1 \\ \underset{-}{A}\,\underset{-}{x}_2 = k_2 \underset{-}{x}_2 \end{cases}$$

معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\underset{-}{A} \underbrace{\left[ \underset{-}{x}_1 \;\middle|\; \underset{-}{x}_2 \right]}_{\underset{-}{E}} = \left[ \underset{-}{x}_1 \;\middle|\; \underset{-}{x}_2 \right] \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}_{\underset{-}{D}}$$

یا

$$\underset{-}{A}\,\underset{-}{E} = \underset{-}{E}\,\underset{-}{D} \qquad (۳)$$

از طرفی چون ستونهائی که ماتریس $\underset{-}{E}$ را تشکیل می‌دهند ، ارتونرمال‌اند ، ماتریس E یک ماتریس متعامد است . یعنی

$$\underset{-}{E}^{T} = \underset{-}{E}^{-1}$$

بنابر از این تساوی (۳) نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد .

$$\underline{E}^T \underline{A}\ \underline{E} = \underline{D}$$

یا

$$\underline{E}^{-1} \underline{A}\ \underline{E} = \underline{D}$$

در قالب الفاظ تساوی فوق را چنین می‌توان بیان داشت که : اگر یک ماتریس را به صورت فوق در ماتریس حاصل از بردارهای ویژهٔ آن ضرب کنیم ، حاصل ماتریس قطری خواهد بود که عناصر روی قطر اصلی آن بردارهای ویژهٔ ماتریس مورد نظر اند .

$\underline{E}$ همان ماتریس دورانی است که پیشتر در قضیه‌ای به وجود آن اشاره شد .

<u>حاصلضرب مربعی</u>

حاصلضربی به صورت زیر را که در آن $\underline{A}$ یک ماتریس مربع و $\underline{x}$ یک بردار باشد را حاصلضرب مربعی یا فرم مربعی (Quadratic form) می‌نامیم .

$$k = \underline{x}^T \underline{A}\ \underline{x}$$

حاصلضربهای مربعی را بر حسب مقادیر ویژهٔ ماتریس $\underline{A}$ به کلاسهای مختلفی تجزیه می‌کنند . این طبقه‌بندی در جدول زیر خلاصه شده است.

| کلاس | $k = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x}$ | مقادیر ویژهء $\underline{A}$ |
|---|---|---|
| اکیدا مثبت (positive definte) | مثبت برای هر $\underline{x}$ | تماما مثبت |
| اکیدا منفی (negative definte) | منفی برای هر x | تماما منفی |
| اکیدا نیمه مثبت (pos. semi def.) | مثبت یا صفر برای هر x | تماما مثبت یا صفر |
| اکیدا نیمه منفی (neg. semi def.) | منفی یا صفر برای هر x | تماما منفی یا صفر |
| نامشخص (indefinite) | برای بعضی x ها مثبت و برای بعضی منفی | مثبت و منفی |

با مساوی مقدار ثابت قرار دادن یک فرم مربعی ،در حالت کلی معادلهء یک مقطع مخروطی بدست می‌آید .

## ۱/۸ـ مشتق از یک ماتریس

فرض کنید عناصر ماتریس $\underline{A}$ توابعی از x و مشتق پذیر باشند. مانند،

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{bmatrix}$$

مشتق ماتریس $\underline{A}$ نسبت به x ماتریسی است که هر عنصر آن مشتق عنصر نظیرش در ماتریس $\underline{A}$ نسبت به x است. مثلا،

$$\frac{d\underline{A}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{d\,a_{11}(x)}{dx} & \frac{d\,a_{12}(x)}{dx} \\ \frac{d\,a_{21}(x)}{dx} & \frac{d\,a_{22}(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

## ۱/۹ـ مشتق حاصل ضرب دو ماتریس

اگر داشته باشیم :

$$\underline{A} = \underline{B}\,\underline{C}$$

طبق تعریف ضرب ماتریسها عنصر i و j ماتریس $\underline{A}$ برابر است با :

$$a_{ij} = \sum_k b_{ik} c_{kj}$$

اگر عناصر ماتریس $\underline{B}$ و $\underline{C}$ توابعی از x باشند، بنابر تعریف مشتق داریم :

$$\frac{d}{dx} a_{ij} = \frac{d}{dx} \sum_k b_{ik} c_{kj}$$

$$= \sum_k \frac{d}{dx} b_{ik} c_{kj}$$

$$= \sum_k \left[ \frac{d}{dx} (b_{ik}) c_{kj} + b_{ik} \frac{d}{dx} (c_{kj}) \right]$$

$$= \underbrace{\sum_k \left[ \frac{d}{dx} (b_{ik}) c_{kj} \right]}_{\text{عنصر i و j ماتریس}} + \underbrace{\sum_k \left[ b_{ik} \frac{d}{dx} (c_{kj}) \right]}_{\text{عنصر i و j ماتریس}}$$

$$\frac{d\underline{B}}{dx} \underline{C} \qquad \underline{B} \frac{d\underline{C}}{dx}$$

در نتیجه :

$$\frac{d\underline{A}}{dx} = \frac{d\,\underline{B}\underline{C}}{dx} = \frac{d\,\underline{B}}{dx} \underline{C} + \underline{B} \frac{d\,\underline{C}}{dx} \qquad (۵)$$

اگر $\underline{C}$ غیر مجرد باشد (معکوس داشته باشد) می‌توان چنین نوشت:

$$\underline{B} = \underline{A}\,\underline{C}^{-1}$$

اما با توجه به (۵) داریم:

$$\frac{d\,\underline{B}}{dx} \underline{C} = \frac{d\underline{A}}{dx} - \underline{B} \frac{d\,\underline{C}}{dx}$$

$$\frac{d\,\underline{B}}{dx} = \frac{d\underline{A}}{dx} \underline{C}^{-1} - \underline{B} \frac{d\,\underline{C}}{dx} \underline{C}^{-1} \qquad (۶)$$

نکتهٔ قابل توجه آنکه نتایج (۵) و (۶) تشابه بسیاری با مشتق حاصل ضرب و تقسیم توابع یک متغیری دارند.

۱/۱۰ـ مشتق از یک تابع اسکالر n متغیری ، نسبت به برداری از متغیرهای آن:

$$y=F(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n) \qquad , \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

۱/۱۱ـ مشتق از یک تـــــابع برداری n متغیری مستقل ،نسبت به بردار مجهولات آن:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots ,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots ,x_n) \end{bmatrix} \qquad , \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\underline{y}}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

## ۱/۱۲ـ مشتق از یک تابع اسکالر n متغیری، حاصل از حاصلضربی به فرم ذیل نسبت به بردار مجهولات آن :

$$y = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{b}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = ?$$

$\underline{A}$ را به n بردار سطری تجزیه میکنیم :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1\, \underline{b} \\ \vdots \\ \underline{a}_n\, \underline{b} \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

و همچنین :

$$y = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{b} = [x_1 , \cdots , x_n] \begin{bmatrix} \underline{a}_1\, \underline{b} \\ \vdots \\ \underline{a}_n\, \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \underline{a}_1 \underline{b} + \cdots + x_n \underline{a}_n \underline{b} \qquad (۸)$$

با توجه به (۸) و (۷):

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \left[ \underline{a}_1 \underline{b} \cdots\cdots \underline{a}_n \underline{b} \right] = (\underline{A}\,\underline{b})^T = \underline{b}^T \underline{A}^T$$

## ۱/۱۳ـ مشتق از یک تابع اسکالر از n متغییر، حاصل از حاصلضربی به فرم ذیل نسبت به بردار مجهولات

$$y = \underline{b}^T \underline{A}\,\underline{x}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_1 \qquad \cdots\cdots \qquad \underline{a}_m$$

$$\underline{b}^T \underline{A} = \underline{b}^T \left[ \underline{a}_1 \cdots\cdots \underline{a}_m \right] = \left[ \underline{b}^T \underline{a}_1 \cdots\cdots \underline{b}^T \underline{a}_m \right]$$

$$y = \underline{b}\,\underline{A}\,\underline{x} = \left[ \underline{b}^T \underline{a}_1 \cdots \underline{b}^T \underline{a}_m \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \underline{b}^T \underline{a}_1 x_1 + \cdots + \underline{b}^T \underline{a}_m x_m$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \left[ \underline{b}^T \underline{a}_1 \cdots \underline{b}^T \underline{a}_m \right] = \underline{b}^T \underline{A}$$

## ۱/۱۴ـ مشتق یک فرم مربعی (Quadratic Form):

$$y = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x}$$ ( A ماتریس متقارن است )

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \underline{x}^T \underline{A}^T + \underline{x}^T \underline{A} = 2\, \underline{x}^T \underline{A}$$

## ۱/۱۵ـ بسط تیلور در حالت n بعدی :

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_u) \end{bmatrix}$$

بسط y حول $\underline{x}^0$ :

$$\left( \underline{x}^{0\,T} = \left[ x_1^0 \cdots x_u^0 \right] \right)$$

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1^0, \cdots, x_u^0) \\ \vdots \\ f_n(x_1^0, \cdots, x_u^0) \end{bmatrix}}_{\underline{y}^0} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}}_{\underline{A}'} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_u - x_u^0 \end{bmatrix}}_{(\underline{x} - \underline{x}^0)} + \cdots$$

$$= \underline{y}^{0} + \underline{A}\,(\underline{x} - \underline{x}^{0}) + \cdots$$

## ۱/۱۶ـ چند خاصیت از Trace

$$Tr(\underline{A}^{T}) = Tr(\underline{A})$$

$$Tr(k\,\underline{A}) = k\,Tr(\underline{A})$$

$$Tr(\underline{A}+\underline{B}) = Tr(\underline{A})+Tr(\underline{B})$$

$$Tr(\underline{A}\,\underline{B}) = Tr(\underline{B}\,\underline{A})$$

$$Tr(\underline{A}^{T}\underline{B}) = Tr(\underline{A}\,\underline{B}^{T})$$

$$Tr(\underline{R}^{-1}\underline{A}\,\underline{R}) = Tr(\underline{A})$$

$$\frac{\partial\, Tr(\underline{A}\,\underline{B})}{\partial\,\underline{A}} = \frac{\partial\, Tr(\underline{B}\,\underline{A})}{\partial\,\underline{A}} = \underline{B}$$

$$\frac{\partial\, Tr(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^{T})}{\partial\,\underline{A}} = (\underline{B} + \underline{B}^{T})\,A^{T}$$

$$\frac{\partial\, Tr(\underline{A}^{T}\underline{B}\,\underline{A})}{\partial\,\underline{A}} = \underline{A}^{T}(\underline{B} + \underline{B}^{T})$$

$$\frac{\partial\, Tr(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^{T}\underline{C})}{\partial\,\underline{A}} = \underline{B}\,\underline{A}^{T}\underline{C} + \underline{C}^{T}\underline{B}^{T}\underline{A}^{T}$$

## دو اثبات در مورد مشتق از تریس (trace) یک ماتریس :

الف)

$$\frac{d\,Tr(\underline{B}\,\underline{C}_1\,\underline{B}^T)}{d\,\underline{B}} = ?$$

$\underline{B}$ یک ماتریس uxn و $\underline{C}_1$ یک ماتریس (nxn) و متقارن است .

برای تعیین جواب مشتق $\underline{B}$ را بصورت ذیل تجزیه می‌کنیم :

$$\underline{B}_{uxn} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_u \end{bmatrix}$$

حال ضرب ماتریسها را بر اساس $\underline{B}$ تجزیه شده بدست می‌آوریم :

$$\underline{B}\,\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_u \end{bmatrix} \qquad \underline{C}_1 = \begin{bmatrix} \underline{b}_1\,\underline{C}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_u\,C_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{C}_1\,\underline{B}^T = \begin{bmatrix} \underline{b}_1\,\underline{C}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_u\,\underline{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T & \cdots & b_u^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{b}_1\,\underline{C}_1\,\underline{b}_1^T & \cdots & \underline{b}_1\,\underline{C}_1\,\underline{b}_u^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{b}_u\,\underline{C}_1\,\underline{b}_1^T & \cdots & \underline{b}_u\,\underline{C}_1\,\underline{b}_u^T \end{bmatrix}$$

$$Tr(\underline{B}\,\underline{C}_1\underline{B}^T) = \underline{b}_1\,\underline{C}_1\,\underline{b}_1^T + \cdots + \underline{b}_u\,\underline{C}_1\,\underline{b}_u^T$$

حال بر اساس قاعده‌ای که برای مشتقات برداری تعریف کرده‌ایم مقدار مشتق تریس فوق را بدست می‌آوریم :

$$\frac{d\,Tr\,(\underline{B}\,\underline{C}_1\,\underline{B}^T)}{d\,\underline{B}} = \left[\frac{d\,(\underline{b}_1\,\underline{C}_1\,\underline{b}^T)}{d\,\underline{b}_1} \;\cdots\; \frac{d\,\underline{b}_u\,\underline{c}_1\,\underline{b}_n^T}{d\,\underline{b}_u}\right]$$

$$= \left[\,2\,\underline{C}_1\,\underline{b}_1^T \;\cdots\; 2\,\underline{C}_1\,\underline{b}_u^T\,\right] \qquad = 2\,\underline{C}_1\,\underline{B}^T$$

---

ب)

$$\frac{d\,Tr\,(\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{K})}{d\,\underline{B}} = ?$$

ابتدا $\underline{B}$ و $\underline{K}$ را بصورت زیر تجزیه می‌کنیم :

$$\underline{B}_{uxn} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1\,(1xn) \\ \vdots \\ \underline{b}_u\,(1xn) \end{bmatrix} \qquad , \qquad \underline{k} = \left[\,\underline{k}_1 \;\cdots\; \underline{k}_u\right]$$

حال ضرب ماتریسها را بر اساس ماتریس های تجزیه شده بدست می‌آوریم :

$$\underline{B}\;\;\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1\;\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{b}_u\;\underline{A} \end{bmatrix}_{uxn}$$

$$\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{-1}\,\underline{A}\,\underline{k} & \cdots & \underline{b}_{-1}\,\underline{A}\,\underline{k}_{-u} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{b}_{-u}\,\underline{A}\,\underline{k} & \cdots & \underline{b}_{-u}\,\underline{A}\,\underline{k}_{-u} \end{bmatrix}$$

$$Tr(\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{K}) = \underline{b}_{-1}\,\underline{A}\,\underline{k}_{-1} + \cdots + \underline{b}_{-u}\,\underline{A}\,\underline{k}_{-u}$$

$$\frac{d\,Tr(\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{K})}{d\,\underline{B}} = [\underline{A}\,\underline{k}_{-1} \cdots \underline{A}\,\underline{k}_{-u}] = \underline{A}\,\underline{k}$$

## ۱/۱۷ـ شبه معکوس

برای هر ماتریس دلخواه مثل $\underline{A}$ ماتریسی مانند $\underline{A}^{-}$ می‌توان یافت بطوری که :

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-}\underline{A} = \underline{A} \qquad \text{(i)}$$

به این ماتریس معکوس فراگیر (Generallized inverse) $\underline{A}$ گفته می‌شود . اگر این معکوس علاوه بر شرط (i) در شروط ذیل نیز صدق کند به آن شبه معکوس (Pseudo inverse) اطلاق می‌گردد که ماتریسی منحصر به فرد است .

$$\underline{A}^{-}\underline{A}\,\underline{A}^{-} = \underline{A} \qquad \text{(ii)}$$

$$(\underline{A}\,\underline{A}^{-})^{T} = \underline{A}\,\underline{A}^{-} \qquad \text{(iii)}$$

$$(\underline{A}^{-}\underline{A})^{T} = \underline{A}^{-}\underline{A} \qquad \text{(iv)}$$

## ۱/۱۸- محاسبهٔ معکوس یک ماتریس
## به روش
## تجزیهٔ چولسکی
## (Choleski Decomposition)

این روش ، که نسبت به روشهای دیگر محاسبهٔ معکوس از سرعت و دقت بسیار بالائی برخوردار است ، تنها برای ماتریسهای اکیداً مثبت و متقارن صادق است . اساس این روش بر امکان تجزیهٔ یک ماتریس اکیداً مثبت به صورت ذیل استوار است.

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{L}^T$$ ( $\underline{L}$ یک ماتریس پائین مثلثی است )

پس از این تجزیه محاسبه معکوس A صرفاً به یافتن معکوس $\underline{L}$ محدود خواهد شد ، چون

$$A^{-1} = (\underline{L}\,\underline{L}^T)^{-1} = (\underline{L}^T)^{-1}\,\underline{L}^{-1} = (\underline{L}^{-1})^T\,\underline{L}^{-1}$$

آلگوریتم یافتن معکوس به روش Choleski شامل سه مرحله است :

۱) تجزیهٔ ماتریس به فرم $\underline{L}\,\underline{L}^T$

۲) محاسبهٔ معکوس ماتریس پایین مثلثی $\underline{L}$

۳) انجام ضرب $(\underline{L}^{-1})^T\underline{L}^{-1}$