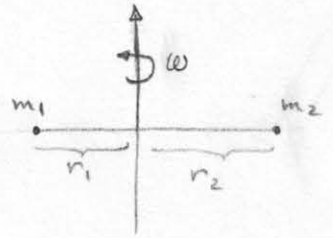
$$b_{21} = \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c r'^2 \sin\theta' \cos\theta' \sin\lambda' \, dv = \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c y' z' \, dv$$

$$b_{22} = \frac{G}{2R^3}\int_v \rho^c x' y' \, dv$$

$a_{00} = \frac{GM}{R}$ به مرکز جرم وابسته است یا جرم را بیان می‌کند (وابسته به سیستم نیست)

$\underline{a_{10}}$ ، $\underline{a_{11}}$ ، $\underline{b_{11}}$ ⟵ وابسته به مرکز ثقل است. اگر سیستم به مرکز ثقل منطبق شود این ۳ صفر می‌شوند.



$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$\begin{cases} V_1 = r_1 \omega_1 \\ V_2 = r_2 \omega_2 \end{cases}$$

رابطه سرعت زاویه‌ای با سرعت خطی

$$T = \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2\right)}_{\text{ممان اینرسی}} \omega^2$$

$$T = I \omega^2$$

در مورد زمین باید نسبت به محورها بیان شود:

$$I = \begin{bmatrix} \overset{A}{\int_v (y'^2+z'^2)\rho^c dv} & \overset{D}{-\int_v \rho^c x'y' dv} & \overset{E}{-\int_v \rho^c x'z' dv} \\ I_{yx} & \overset{B}{\int_v (x'^2+z'^2)\rho^c dv} & \overset{F}{-\int_v \rho^c y'z' dv} \\ I_{zx} & I_{zy} & \int_v (x'^2+y'^2)\rho^c dv \; \overset{C}{} \end{bmatrix}$$

تنسور اینرسی

حاصل ضرب‌های اینرسی (کوواریانس بین عناصر)

ممان‌های اصلی اینرسی

اگر تنسور اینرسی زمین موجود باشد، از طریق قطری کردن این ماتریس می‌توان زوایای دوران بین محورها با سیستم طبیعی زمین را یافت.

$$I = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

زمانی می‌توان این ماتریس را به صورت قطری نوشت که محورها، منطبق بر محورهای ماکزیمم اینرسی باشد. یعنی حاصل ضرب اینرسی صفر باشد. در این صورت این سیستم، همان سیستم طبیعی زمین خواهد بود.

$(a_{21}, b_{21}, b_{22}) = 0$

به پشت برگه توجه شود!

$$a_{00} = \frac{GM}{R} \qquad b_{00} = 0$$

$$a_{10} = \frac{GM}{R^2} z'_c \qquad b_{10} = 0$$

$$a_{11} = \frac{GM}{R^2} x'_c \qquad b_{11} = \frac{GM}{R^2} y'_c$$

$$\boxed{a_{20} = \frac{G}{R^3}\left(\frac{A+B}{2} - C\right)} \qquad b_{20} = 0$$

کرویت - فشردگی زمین

$$\boxed{a_{21} = \frac{G}{R^3} E} \qquad \boxed{b_{21} = \frac{GF}{R^3}}$$

$$\boxed{a_{22} = \frac{G}{4R^3}(B-A)} \qquad \boxed{b_{22} = \frac{G}{2R^3} D}$$

دایره بودن زمین در استوا

دلیل اینکه سیستم مختصات CT ، سیستم مختصات تقریبی برای زمین است این است که :

$$I = \begin{bmatrix} A & D & E \\ & B & F \\ & & C \end{bmatrix}$$

در این ماتریس 6 مجهول وجود دارد پس حداقل نیاز به 6 معادله داریم. درصورتی که 5 معادله برای آن نوشته شود. $(a_{20}, a_{22}, a_{21}, b_{21}, b_{22})$

a_{20}: بیضی

a_{22}: صفحه استوا

a_{21}, b_{21}, b_{22}: ارتباط محورها

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_c = \overbrace{\left(-G\int_v \frac{\rho}{l^3}\vec{l}\,dv + \omega^2 \vec{r}''\right)}^{\vec{g}} m$$

$$\downarrow$$

$$\vec{g} = -G\int_v \frac{\rho}{l^3}\vec{l}\,dv + \omega^2 \vec{r}''$$

نیروی ثقل روی مشاهدات
ژئودزی هم تأثیر گذار است

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Phi \\ g = |\vec{g}| \end{bmatrix} = F(W)$$

$$\downarrow$$

$$W = G\int_v \frac{\rho(\vec{r})}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 \vec{r}''^2$$

چون مشاهدات روی زمین است می‌توانیم از مسئله مقدار مرزی استفاده نماییم :

$$\begin{cases} \text{معادله دیفرانسیل از } W \\ r \text{ تابعی از مشاهدات} \end{cases}$$

$$\Delta W = \begin{cases} -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ -k\pi G\rho + 2\omega^2 \\ 2\omega^2 \end{cases}$$

درخارج زمین

درخارج زمین $\longrightarrow$ $\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ L = F(W, \vec{r}) \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \end{cases}$$

$$l = f(x)$$

غیرخطی است $\longrightarrow$ $l = \underbrace{f(x_0)}_{\text{مقدار اولیه}} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \delta x$

$$g = F(W, \vec{r}) = F(W, \underbrace{\lambda, \theta}_{\text{معلوم}}, \overbrace{r}^{\vec{r}})$$

$$U = U_g + U_c \longrightarrow \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

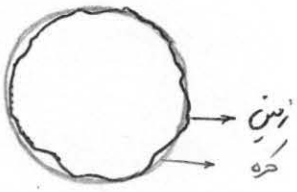
دوران برابر دوران زمین

$$\begin{cases} \Delta U_g = 0 \longrightarrow \text{فضای خارج زمین (لاپلاس)} \\ U(\lambda, \theta, r = R) = W_0 \end{cases}$$

حال نیاز به مقدار تقریبی برای W و r داریم . برای تقریب r یک جسم کروی شکل در نظر می‌گیریم.
برای تقریب W یک جسم با دوران نظیر دوران زمین و جرمی برابر جرم زمین در نظر می‌گیریم.
پس کره ی فوق پتانسیل هم تولید نمود که مقدار اولیه برای خطی سازی می‌باشد.

$$U_g(\lambda, \theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta)$$

یک کره که پتانسیل خارج از زمین را تقریب می‌زند
پتانسیل روی سطح این کره برابر با پتانسیل روی سطح زمین



باز هم مقادیر a_{nm} و b_{nm} مجهول هستند که آنها را از مسئله مقدار مرزی در کله بدست می‌آوریم.

$$U(\lambda, \theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

در رابطه ی فوق قرار می‌دهیم : $r'' = r\sin\theta$

$$U(\lambda,\theta,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda+b_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\omega^2r^2\sin^2\theta$$

$$U(\lambda,\theta,r=R)=W_0$$

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda+b_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta)+\frac{1}{2}\omega^2R^2\sin^2\theta=W_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_{nm}\cos m\lambda P_{nm}(\cos\theta)+b_{nm}\sin m\lambda P_{nm}(\cos\theta)\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^2\sin^2\theta-W_0=0$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right]=\frac{2}{3}\left[\overbrace{P_{00}(\cos\theta)}^{1}-\overbrace{P_{20}(\cos\theta)}^{\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}\cos m\lambda P_{nm}(\cos\theta)+b_{nm}\sin m\lambda P_{nm}(\cos\theta)\right]+\frac{1}{3}\omega^2R^2(P_{00}-P_{20}(\cos\theta)\ldots$$

$$\ldots-W_0P_{00}=0$$

$$+\left(\frac{1}{3}\omega^2R^2-W_0\right)P_{00}-\frac{1}{3}\omega^2R^2P_{20}(\cos\theta)$$

ضرایب هارمونیک را در روابط بالا جایگزین می‌نماییم : (تا $m=2$ را جدا می‌کنیم)

$$a_{00}P_{00}+a_{10}P_{10}+a_{11}P_{11}(\cos\theta)\cos\lambda+b_{11}P_{11}\sin\lambda+a_{20}P_{20}+a_{21}P_{21}\cos\lambda+\ldots$$

$$\ldots+b_{21}P_{21}\sin\lambda+a_{22}P_{22}\cos2\lambda+b_{22}P_{22}\sin2\lambda+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=3}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda P_{nm}+b_{nm}\sin m\lambda P_{nm})+\left(\frac{1}{3}\omega^2R^2-W_0\right)P_{00}-\frac{1}{3}\omega^2R^2P_{20}=0$$

از جملات دارای P_{00} و P_{20} فاکتور می‌گیریم :

$$\left(a_{00}+\frac{1}{3}\omega^2R^2-W_0\right)P_{00}+a_{10}P_{10}+a_{11}P_{11}\cos\lambda+b_{11}P_{11}\sin\lambda+\left(a_{20}-\frac{1}{3}\omega^2R^2\right)P_{20}+\ldots$$

$$\ldots+a_{21}P_{21}\cos\lambda+b_{21}P_{21}\sin\lambda+a_{22}P_{22}\cos2\lambda+b_{22}P_{22}\cos2\lambda+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=3}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda P_{nm}(\cos\theta)+b_{nm}\sin m\lambda P_{nm}(\cos\theta)=0$$

$a_{00}+\frac{1}{3}\omega^2R^2-W_0=0$

$a_{10}=0$

$a_{11}=0$

$b_{11}=0$

$a_{20}-\frac{1}{3}\omega^2R^2=0$

$a_{21}=0$

$b_{21}=0$

$a_{22}=0$

$b_{22}=0$

$\left.\begin{array}{l}a_{nm}=0\\ b_{nm}=0\end{array}\right\}\ n\geqslant3$

از صفر بودن این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب صفرند چون هارمونیک‌های کروی مستقل خطی هستند.

$$\begin{cases} a_{00} + \frac{1}{3}\omega^2 R^2 - W_0 = 0 \\ a_{20} - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{00} = W_0 - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 \\ a_{20} = \frac{1}{3}\omega^2 R^2 \end{cases}$$

$$U(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

$P_{00}=1$

$$\boxed{U(\lambda,\theta,r) = \left(\frac{R}{r}\right)a_{00} + \left(\frac{R}{r}\right)^3 a_{20}P_{20} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (P_{00} - P_{20})}$$

مهم : پتانسیلی که در نهایت پتانسیل زمین را تقریب می‌زند

$$U(\lambda,\theta,r) = \left(\frac{R}{r}\right)\cdot\frac{GM}{R} + \left(\frac{R}{r}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\omega^2 R^2 P_{20} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (P_{00} - P_{20})$$

$$U(\lambda,\theta,r) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{3}\omega^2\frac{R^5}{r^3}P_{20} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (\overset{=1}{P_{00}} - P_{20})$$

$$\boxed{U(\theta,r) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \frac{1}{3}\omega^2 r^2\left[\left(\frac{R}{r}\right)^5 - 1\right]P_{20}(\cos\theta)}$$

پتانسیل W را در خارج زمین تقریب می‌زند.

تقارن دورانی دارد
تابع λ نیست

در این معادله همچنان مقدار R مجهول است.

$$\begin{cases} a_{00} = W_0 - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 \\ a_{20} = \frac{1}{3}\omega^2 R^2 \end{cases}$$

$(GM, W_0, \omega, a_{20})$ ← J_{20} ← خازنده ای برای فشردگی

اگر این چهار پارامتر معلوم باشند R بدست می‌آید ← پارامترهای بنیادی ژئودتیک

$$\begin{cases} \frac{GM}{R} - W_0 + \frac{1}{3}\omega^2 R^2 = 0 \\ a_{20} - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 = 0 \end{cases}$$

رابطه‌ی a_{20} و J_{20} :

$$U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

چون این ضرایب دارای معنای فیزیکی هستند معمولاً دارای واحد هم می‌باشند ← گاهی ما نمی‌خواهیم واحد داشته باشند :

$$U_g = \left(\frac{R}{r}\right)a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

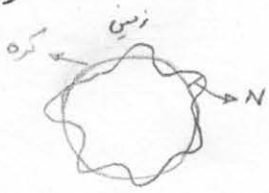
$$U_g = \frac{GM}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

$$U_g = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n \left[\underbrace{\left(\frac{-a_{nm}\cdot R}{GM}\right)}_{J_{nm}}\cos m\lambda + \underbrace{\left(\frac{-b_{nm}\cdot R}{GM}\right)}_{k_{nm}}\sin m\lambda\right] P_{nm}(\cos\theta)\right.$$

اندیس‌های ضرایب بالا هستند فقط واحد ندارند.

حال با داشتن پارامترهای بنیادی ژئوئید یک می‌توان R را بدست آورد:

$$J_{20} = -\frac{a_{20}\cdot R}{GM} \longrightarrow a_{20} = -\frac{J_{20}\cdot GM}{R}$$



$$W_0 = 62636855.80 \pm 0.5 \quad m^2/s^2$$

$$\omega = 7.292115\times10^{-5} \pm 10^{-12} \quad rad/s$$

$$GM = 398600.4418 \pm 0.0008 \quad km^3/s^2$$

$$J_{20} = 108263\times10^{-8}$$

R که از این روابط بدست می‌آید

اثبات سوال امتحانی

شعاع کره‌ای را به ما می‌دهد که بهترین انطباق را دارد و

جدایی از ژئوئید

$$\iint N^2\, ds \longrightarrow Min$$

مجموع مربعات جدایی از ژئوئید کمینه است

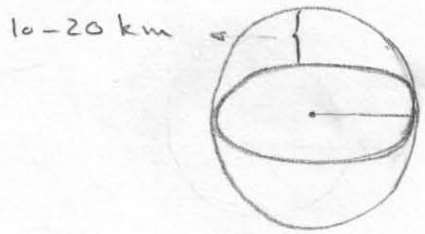
در ژئوئیدی N مربوط به a و f است و چون در کره فشردگی صفر است پس فقط مربوط به a می‌شود.

ضمناً از رابطه‌ی $\iint f^2+n^2\, ds$ استفاده نمی‌کنیم چون فقط مربوط به فشردگی است که کره فشردگی ندارد.

به این ترتیب شعاع کره‌ای که با روابط بالا بدست می‌آید برابر است با:

$$R = 6370991.248 \pm$$

$$\pm 0.053\ m$$



کره‌ای که به این روش بر زمین (بیضوی شکل) منطبق می‌شود:

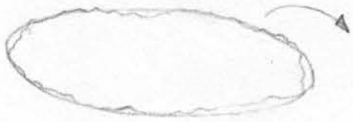
یعنی ارتفاع ژئوئید برای قطبین چیزی در حدود 15 km می‌شود.

در استوا انطباق خوبی دارد ولی در قطبین نه.

$$g = F(W,r) = F(U,R) + \frac{\partial F}{\partial W}(W-U) + \frac{\partial F}{\partial r}(r-R) + \overset{(20km)^2}{(r-R)^2}$$

در خطی‌سازی نمی‌توان از درجات دو به بالا صرف‌نظر نمود، چون اختلاف بین کره و بیضوی بسیار زیاد است.

لذا باید زمین را با یک بیضوی تقریب زد.



اگر از بیضوی به جای کره استفاده کنیم جدایی 100 m می‌شود

مسئله در سیستم مختصات بیضوی حل شود ← چون می‌خواهیم از جداسازی متغیرها حل کنیم، از سیستم مختصات ژاکوبی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \Delta U_g(\lambda,\beta,u) = 0 \\ U_g(\lambda,\beta,u) = \Lambda(\lambda)\,T(\beta)\,H(u) \end{cases}$$

حل به عهده دانشجو ← سوال امتحانی

معادله دیفرانسیل ذرات وابسته

$$\text{I}\quad \Lambda'' + C_2\Lambda = 0$$

$$\text{II}\quad -\frac{d^2T}{d\beta^2} + tg\,\beta + \left(C_1 - \frac{C_2}{\cos^2\beta}\right)T = 0$$

$$\text{III}\quad (u^2+E^2)H'' + 2uH' + \left(C_2\frac{E^2}{u^2+E^2} - C_1\right)H = 0$$

(I) $\cos m\lambda$, $\sin m\lambda$

جوابها (II) $P_{nm}(\sin\beta)$, $\cancel{Q_{nm}(\sin\beta)}$ → چون پتانسیل کراندار است

(III) $P_{nm}(i\frac{u}{E})$, $Q_{nm}(i\frac{u}{E})$ → شبیه جوابهای معادله سوم در حالت کروی

جواب برای خارج بیضوی r^{n}

جواب برای داخل بیضوی $r^{-(n+1)}$

همان شروط برای اینجا هم برقرار است :

$$\begin{cases} \Lambda(\lambda+2\pi)=\Lambda(\lambda) \\ |\Lambda(\lambda)|<\infty \\ |T(\beta)|<\infty \\ |H(u)|<\infty \\ \lim_{u\to\infty} H(u)\to 0 \end{cases}$$

$$U_g(\lambda,\beta,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Q_{nm}(i\frac{u}{E})\left[a_{nm}\cos m\lambda+b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta) \quad ?$$

$$U_g(\lambda,\beta,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{Q_{nm}(i\frac{u}{E})}{Q_{nm}(i\frac{b}{E})}\left[a_{nm}\cos m\lambda+b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta)$$

هارمونیک های بیضوی / کروی

تشکیل سیستم پایه می دهند - مستقل خطی

$$\begin{cases} \cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \\ \sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \end{cases}$$

هارمونیک های کروی سطحی با وزن واحد برهم عمودند.

$$\iint_{\lambda\,\theta} Y_{nm}(\lambda,\theta)\cdot Y_{kl}(\lambda,\theta)\,(1)\,ds = N_m M_n$$

وزن واحد

$$\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

اختلاف با کره

$$\begin{cases} \cos m\lambda\, P_{nm}(\sin\beta) \\ \sin m\lambda\, P_{nm}(\sin\beta) \end{cases}$$

هارمونیک های بیضوی سطحی عمود هستند امّا نه با وزن واحد.

$U(\lambda,\theta,r=R)=W_0$ کروی

$U(\lambda,\beta,u=b)=W_0$ بیضوی

$$\int_{\lambda}\int_{\beta} Y_{nm}(\lambda,\beta)\cdot Y_{kl}(\lambda,\beta)\cdot W(\beta)\,ds$$

وزندار

ص 422

بیضوی به عنوان سطح مرجع مولد میدان ثقل نرمال

درحالت کروی داشتیم :

$$U(\theta,r)=\frac{GM}{r}+\frac{1}{3}\omega^2 r^2\sin^2\theta+\frac{1}{6}r^2\omega^2\left[\left(\frac{R}{r}\right)^5-1\right]P_{20}(\cos\theta)$$

$$l=f(x)=f(x_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)+\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2}$$

if $x\to x_0$ از توان دوم صرف نظر می کنیم.

$W\to u$

$r\to R$

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{GM}{R}}_{a_{00}}-W_0+\underbrace{\frac{1}{3}\omega^2R^2}_{a_{20}}=0 \\ a_{20}=\frac{1}{3}\omega^2R^2 \end{cases} \Longrightarrow R$$

برای بدست آوردن R نیاز به چهار پارامتر بنیادی ژئودتیک بود . امّا پس از محاسبه اختلاف کره با زمین در حد چند کیلومتر بود که از توان دوم $(r-R)^2$ در سری تیلور نمی توانیم صرف نظر کنیم . بنابراین به سراغ بیضوی می رویم .

بیضوی به عنوان سطح مرجع مولد میدان ثقل نرمال

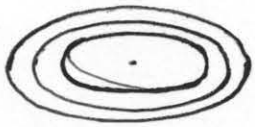
$$\begin{cases} \Delta U_g = 0 \\ U(\lambda,\beta,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \dfrac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta) + \cdots \end{cases}$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 \left(= \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta\right)$$

$$r''^2 = x^2 + y^2 \qquad \begin{cases} x = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\sin\lambda \end{cases}$$

$$r''^2 = (u^2+E^2)\cos^2\beta$$

در تمام بیضوی‌هایی که از این خانواده انتخاب می‌شود، خروج از مرکزیت ظاهری برابر است (E).



$$U(\lambda,\beta,u=b) = W_0$$

$E^2 = a^2 - b^2$

$a^2 = E^2 + b^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta) + \frac{1}{2}\omega^2 a^2\cos^2\beta = W_0$$

$$\begin{cases} \text{I} \quad a_{00} - W_0 + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 = 0 \\ \text{II} \quad a_{20} = \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \end{cases} \Longrightarrow \{a, b\}$$

از حل این معادلات بدست می‌آید:
در کره مجهول R بود اما در اینجا مجهول a و b هستند.

بیضوی‌ای که از این رابطه بدست می‌آید دارای ویژگی زیر است:

$$\{W_0, J_{20}, GM, \omega\} \longrightarrow \iint N^2 ds \longrightarrow \text{Min}$$

(Best Fitting)

اثبات سوال امتحانی

$$a_{00} = \frac{GM}{E}\,\text{arctg}\left(\frac{E}{b}\right)$$: در بیضوی

$$a_{00} = \frac{GM}{R}$$: در کره $(a \to b)$

پس در رابطه‌ی I بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{GM}{E}\,\text{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - W_0 + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 = 0$$

اما در مورد رابطه‌ی II نیاز است که a_{20} بیضوی بدست آید. یعنی ابتدا رابطه‌ی بین a_{20} کروی و بیضوی مشخص گردد:

$$a_{20}^{(E)\,\text{بیضوی}} = \frac{\sqrt{5}}{8E}\left[\left(3\frac{b^2}{E^2}+1\right)\text{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\frac{b}{E}\right] \times \left[6\sqrt{5}\frac{R^2}{E^2}a_{20}^{(S)\,\text{کروی}} + 2R\,a_{00}^{(S)\,\text{کروی}}\right]$$

ص ۱۵۱ کتاب اثبات این روابط آمده است. (ضرایب هارمونیک‌های بیضوی و کروی)

بنابراین روابط بالا به صورت زیر بدست می‌آیند و a و b بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \text{I} \quad \dfrac{GM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{E}{b}\right) - W_0 + \dfrac{1}{3}\omega^2 a^2 = 0 \\[2ex] \text{II} \quad \dfrac{\sqrt{5}}{4}\cdot\dfrac{GM}{E}\left[\left(3\dfrac{b^2}{E^2}+1\right)\mathrm{arctg}\left(\dfrac{E}{b}\right) - 3\dfrac{b}{E}\right]\times\left[-3\dfrac{R^2}{E^2}J_{20}+1\right] + \dfrac{1}{8\sqrt{5}}\omega^2 a^2 = 0 \end{cases}$$

چیزی که از مشاهده به دست می‌آید

دو معادله - دو مجهول (a, b) - چهار مشاهده $\{W_0, GM, J_{20}, \omega\}$

دوباره یک بیضوی تعریف شود و مشاهدات تبدیل گردد.

چون W_0 با زمان تغییر می‌کند نیاز است که هر چند سال یکبار دوباره این مسئله حل شود یا W_0 با پارامتر با ثبات تری عوض شود.

چیزی که در جامعه‌ی ژئودزی استفاده می‌شود (کاربردی‌تر) این پارامترها هستند : $\{a, GM, J_{20}, \omega\}$

که از مشاهدات ژئودزی ماهواره‌ای بدست می‌آید.

اما این پارامترها دیگر بیضوی Best Fitting را نمی‌دهند برای بدست آوردن این بیضوی باید از همان W_0 استفاده نمود.

$\{a, GM, J_{20}, \omega\} \rightarrow a, b$

$\{W_0, GM, J_{20}, \omega\} \rightarrow$ Best Fitting

$$U(\lambda,\beta,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta) \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta$$

$$U(\lambda,\beta,u) = \frac{Q_{00}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{00}\left(i\frac{b}{E}\right)}a_{00} + \frac{Q_{20}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{20}\left(i\frac{b}{E}\right)}a_{20}P_{20}(\sin\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta$$

$$Q^*_{nm}\left(\frac{u}{E}\right) = i^{n+1}Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)$$

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{arccotg}\,x = -i\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$$

برای اینکه از شر عدد موهومی خلاص شویم :

$$U(\lambda,\beta,u) = \frac{Q^*_{00}\left(\frac{u}{E}\right)}{Q^*_{00}\left(\frac{b}{E}\right)}a_{00} + \frac{Q^*_{20}\left(\frac{u}{E}\right)}{Q^*_{20}\left(\frac{b}{E}\right)}a_{20}P_{20}(\sin\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta$$

$$a_{00} = \frac{GM}{E}\,\mathrm{arctg}(E/b)$$

$$Q_{00}\left(i\frac{u}{E}\right) = -i\,\mathrm{arctg}(E/u) \rightarrow Q^*_{00}\left(\frac{u}{E}\right)$$

$$Q_{00}\left(i\frac{b}{E}\right) = -i\,\mathrm{arctg}(E/b)$$

$$Q_{20}\left(i\frac{u}{E}\right) = i\left[\left(3\frac{u^2}{E^2}+1\right)\mathrm{arctg}(E/u) - 3\frac{u}{E}\right]$$

$$Q_{20}\left(i\frac{b}{E}\right) = i\left[\left(3\frac{b^2}{E^2}+1\right)\mathrm{arctg}(E/b) - 3\frac{b}{E}\right]$$

$$U(\lambda,\beta,u) = \frac{\mathrm{arctg}(E/u)}{\mathrm{arctg}(E/b)}\cdot\frac{GM}{E}\,\mathrm{arctg}(E/b) + \frac{\left[3\left(\frac{u^2}{E^2}\right)+1\right]\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\frac{u}{E}}{\left[3\left(\frac{b^2}{E^2}\right)+1\right]\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\frac{b}{E}} \cdots$$

$$\cdots \overbrace{\left(\frac{1}{3}\omega^2 a^2\right)}^{a_{20}} P_{20}(\sin\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta$$

در سیستم مختصات بیضوی

$$U(\cancel{\lambda},\beta,u) = \frac{GM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{\left(3\left(\frac{u^2}{E^2}\right)+1\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\,u/E}{\left(3\left(\frac{b^2}{E^2}\right)+1\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\,b/E}\,P_{20}(\sin\beta)\cdots$$

تابع λ نیست

$$\cdots + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\,\underbrace{\cos^2\beta}_{\frac{2}{3}\left(\underbrace{P_{00}}_{\text{یک}} - P_{20}\right)}$$

در سیستم مختصات کروی:

$$U(\lambda,\theta,r) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta + \frac{1}{6}\omega^2\left[\left(\frac{R}{r}\right)^5 - 1\right] P_{20}(\cos\theta)$$

در بیضوی:

$$U(\underbrace{\beta,u}_{\text{تابع } \lambda \text{ نیست}}) = \frac{GM}{E}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) + \left[\frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{\left(3\frac{u^2}{E^2}+1\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\frac{u}{E}}{\left(3\frac{b^2}{E^2}+1\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\frac{b}{E}} - \frac{1}{3}\omega^2(u^2+E^2)\right] P_{20}(\sin\beta)$$

Somigliana-Pizzetti

$$\cdots + \frac{1}{3}\omega^2(u^2+E^2)$$

بنا به مقدار اولیه داریم:

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \end{cases} \longrightarrow g = F(W,u) = F(U,b) + \left.\frac{\partial F}{\partial W}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} \overbrace{(W-U)}^{T} + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} \overbrace{(u-b)}^{N}$$

$$l = f(x) \sim g$$

$$l_0 = f(x_0) \sim \gamma_0$$

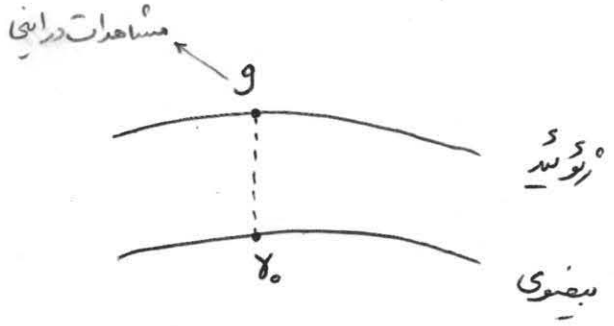
$$\underbrace{l - f(x_0)}_{\text{معلوم}} = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}}_{\text{معلوم}} \underbrace{(x - x_0)}_{\text{بدست می‌آید}}$$

$f(x_0) = \gamma_0 = |\nabla U|_{u=b}$ شتاب ثقل نرمال در سطح بیضوی $(u=b)$

$|\nabla U|$: شتاب ثقل

$\vec{g} = \nabla \vec{W}$: بردار شتاب ثقل واقعی (ژئوئید)

$\vec{\gamma} = \nabla \vec{U}$: بردار شتاب ثقل نرمال (بیضوی)



مرز ژئوئید است و مشاهدات در آن انجام گرفته

$$\Delta g = g - \gamma_0$$

آنومالی جاذبه

مشاهدات واقعی در سطح ژئوئید $f(x)$

مشاهدات تقریبی در سطح بیضوی $f(x_0)$

$$l = f(x)$$

$$l = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \delta x$$

$$\underbrace{l - f(x_0)}_{\delta l} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \delta x$$

باید حساب شوند

$$l = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

$f = |\nabla\ |\ ,\ x_0 = U \longrightarrow f(x_0) = |\nabla U|_{u=b}$

$g = |\nabla W|$

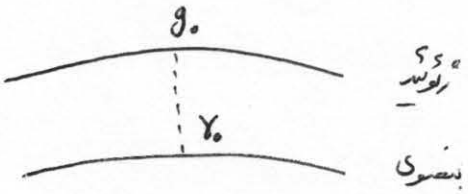
$x \quad W$

$x_0 \quad U$ → مقدار تقریبی برای W

$x - x_0 = W - U = T \longrightarrow N = \frac{T}{\gamma_0}$ فرمول دوم برنز

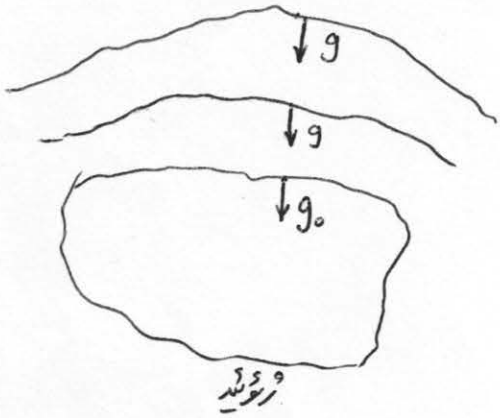
شتاب ثقل واقعی $\vec{g} = \nabla W \Rightarrow |\vec{g}| = g$

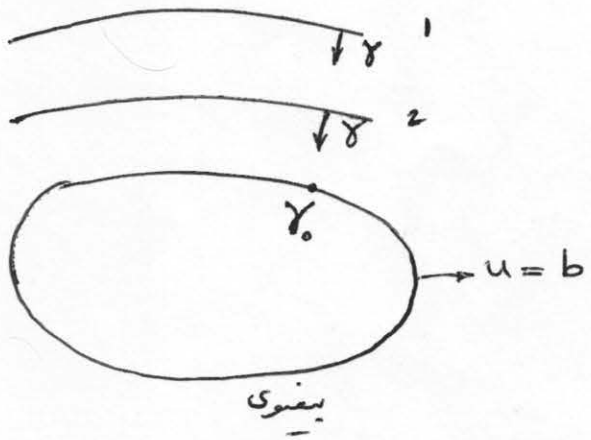
شتاب ثقل نرمال $\vec{\gamma} = \nabla U \Rightarrow |\vec{\gamma}| = \gamma$



ژئوئید یکی از سطوح همپتانسیل میدان ثقل واقعی که منطبق بر سطح متوسط آبهای آزاد است.

سطح بیضوی یکی از سطوح همپتانسیل میدان ثقل نرمال است که ژئوئید را تقریب می‌زند ← فقط یک بیضوی وجود دارد





$f(x_0)$

$$\gamma_0 = |\nabla U|_{u=b}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{h_\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{h_r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$h_\lambda \to r\sin\theta$, $h_\theta \to r$, $h_r \to 1$

گرادیان در سیستم مختصات کروی (λ, θ, r)

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\sin\lambda \\ z = u\sin\beta \end{cases}$$

$$h_\lambda = \sqrt{(u^2+E^2)\cos^2\beta}$$

$$h_\beta = \sqrt{(u^2+E^2)\sin^2\beta}$$

$$h_u = \frac{\sqrt{u^2+E^2\sin^2\beta}}{\sqrt{u^2+E^2}}$$

گرادیان در سیستم مختصات بیضوی (λ, β, u)

$$\vec{\gamma} = \vec{\nabla} U = \left(\frac{1}{h_\lambda}\cdot\frac{\partial U}{\partial\lambda}, \frac{1}{h_\beta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\beta}, \frac{1}{h_u}\cdot\frac{\partial U}{\partial u}\right)$$

$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = 0 \longrightarrow$ وابسته به λ نمی‌باشد.

وقتی مشتق می‌گیریم یکی به مرتبه‌ی m اضافه می‌شود

$$\frac{\partial U}{\partial\beta} = \left[\frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{\left[3\left(\frac{u}{E}\right)^2+1\right]\operatorname{arctg}\frac{E}{u} - 3\frac{u}{E}}{\left[3\left(\frac{b}{E}\right)^2+1\right]\operatorname{arctg}\frac{E}{b} - 3\frac{b}{E}} - \frac{1}{3}\omega^2(u^2+E^2)\right]\frac{\partial P_{20}(\sin\beta)}{\partial\beta}$$

q, q_0, $P_{21}(\sin\beta)$

۵۰

رابطه‌ی $U(\beta,u)$ را خلاصه می‌کنیم:

$$\frac{GM}{E}\cdot\frac{-E/u^2}{1+E^2/u^2}$$

$$U(\beta,u)=\frac{GM}{E}\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right)+\left[\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{q}{q_0}-\frac{1}{3}\omega^2(u^2+E^2)\right]P_{20}+\frac{1}{3}\omega^2(u^2+E^2)$$

حال از این رابطه نسبت به u مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial U}{\partial u}=-\frac{GM}{u^2+E^2}+\left[\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{dq/du}{q_0}-\frac{2}{3}\omega^2u\right]P_{20}+\frac{2}{3}\omega^2u$$

این رابطه را تعریف می‌کنیم:

$$q'=-\frac{u^2+E^2}{E}\cdot\frac{dq}{du}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u}=\frac{-GM}{u^2+E^2}+\left[-\frac{1}{3}\omega^2a^2\cdot\frac{E}{u^2+E^2}\cdot\frac{q'}{q}-\frac{2}{3}\omega^2u\right]P_{20}+\frac{2}{3}\omega^2u$$

مشتق‌های گرفته شده را در رابطه‌ی $\vec{\gamma}$ جایگذاری می‌کنیم (گرادیان):

$$\vec{\gamma}=\frac{1}{h_\lambda}\cdot\frac{\partial u}{\partial\lambda}\vec{e}_\lambda+\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial U}{\partial\beta}\vec{e}_\beta+\frac{1}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\vec{e}_u$$

$$\vec{\gamma}_0=\underbrace{0\,\vec{e}_\lambda+0\,\vec{e}_\beta}_{\substack{\text{روی سطح بیضوی}\\(u=b)}}+\left\{\frac{\sqrt{u^2+E^2}}{\sqrt{u^2+E^2\cdot\sin^2\beta}}\left[\frac{-GM}{u^2+E^2}+\left[\frac{-1}{3}\omega^2a^2\frac{E}{u^2+E^2}\cdot\frac{q'}{q_0}-\frac{2}{3}\omega^2u\right]\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots P_{20}(\sin\beta)+\frac{2}{3}\omega^2u\right]\right\}_{u=b}\vec{e}_u$$

$E^2=a^2-b^2$

b را در این رابطه جایگذاری می‌کنیم:

$$\vec{\gamma}_0=\frac{a}{\underbrace{\sqrt{b^2+E^2\cdot\sin^2\beta}}_{a^2-b^2}}\left[-\frac{GM}{a^2}-\left[\frac{1}{3}\omega^2\cancel{a^2}\cdot\frac{E}{\cancel{a^2}}\frac{q_0'}{q_0}+\frac{2}{3}\omega^2b\right]P_{20}+\frac{2}{3}\omega^2b\right]\vec{e}_u$$

$$\gamma_0=\frac{a}{\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}}\left[\frac{GM}{a^2}+\left[\frac{1}{3}\omega^2E\frac{q_0'}{q_0}+\frac{2}{3}\omega^2b\right]P_{20}-\frac{2}{3}\omega^2b\right]$$

$$\gamma_0=\frac{GM}{a\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}}\left[1+\left[\frac{1}{3}\frac{\omega^2a^2b}{GM}\cdot\frac{E}{b}\frac{q_0'}{q_0}+\frac{2}{3}\frac{\omega^2a^2b}{GM}\right]P_{20}-\frac{2}{3}\frac{\omega^2a^2b}{GM}\right]$$

$\times\frac{b}{b}$

$$\frac{E}{b}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=e'$$

خروج از مرکزیت ثانویه

پارامتر رئودیک: $m=\dfrac{a^2b\omega^2}{GM}$

$$\gamma_0 = \frac{GM}{a\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}\underbrace{\left[1+\left[\frac{1}{3}me'\frac{q_0'}{q_0}+\frac{2}{3}m\right]P_{20}-\frac{2}{3}m\right]}_{①}$$

$$P_{20}(\sin\beta) = \frac{3}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{2}(\sin^2\beta+\cos^2\beta) = \sin^2\beta - \frac{1}{2}\cos^2\beta$$

$$① \left(\frac{1}{3}me'\frac{q_0'}{q_0}+\frac{2}{3}m\right)\left(\sin^2\beta - \frac{1}{2}\cos^2\beta\right) + \left(1-\frac{2}{3}m\right)\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}me'\frac{q_0'}{q_0}+\cancel{\frac{2}{3}m}+1-\cancel{\frac{2}{3}m}\right)\sin^2\beta + \left(-\frac{1}{3}m-\frac{1}{6}me'\frac{q_0'}{q_0}+1-\frac{2}{3}m\right)\cos^2\beta$$

$$\gamma_0 = \frac{GM}{a\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}}\left[\left(1+\frac{1}{3}me'\frac{q_0'}{q_0}\right)\sin^2\beta + \left(1-m-\frac{1}{6}me'\frac{q_0'}{q_0}\right)\cos^2\beta\right]$$

حالت‌های خاص:

استوا $\beta=0^\circ$: $\frac{GM}{ab}\left[\left(1-m-\frac{1}{6}me'\frac{q_0'}{q_0}\right)\right] = \gamma_a$

قطب $\beta=90^\circ$: $\frac{GM}{a^2}\left[1+\frac{1}{3}me'\frac{q_0'}{q_0}\right] = \gamma_b$

در رابطه‌ی بالا جایگذاری می‌کنیم :

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_b\sin^2\beta + b\gamma_a\cos^2\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}}$$ Somigliana

با توجه به رابطه‌ی β و φ داریم :

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a\cos^2\varphi + b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} = \gamma_a\frac{\cos^2\varphi + \frac{b\gamma_b}{a\gamma_a}\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}$$

(چون GPS به ما φ و λ را می‌دهد)

فشردگی : $f = \frac{a-b}{a} = 1-\frac{b}{a}$

فشردگی جاذبی : $f^* = \frac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\gamma_b}{\gamma_a}-1$

$$\gamma_0 = \gamma_a\frac{\cos^2\varphi + (1-f)(1+f^*)\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1-f)^2\sin^2\varphi}}$$

فرمول کاسینی : $\gamma_0 = \gamma_a\left(1+f^*\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\right)$

$$\begin{cases}\beta_1 = -f+\frac{5}{2}m+\frac{1}{2}f^2-\frac{26}{7}fm+\frac{15}{4}m^2\\ \beta_2 = -\frac{1}{2}f^2+\frac{5}{2}fm\end{cases}$$

$$\gamma \doteq 978.049\,(1+0.0052884\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)$$ کاسینی - 1930

$$\gamma \doteq 978.03\,(1+0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)$$ کاسینی - 1967

(GM, ω, a, J_2) - 1980

GRS 80 بیضوی مرجع فیزیکال ژئودزی که هنوز هم مورد استفاده است.

$$\gamma_0 = \gamma_a\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\sin^{2n}\varphi\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^2 + k$$

$$a_4 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{2}e^2 k$$

$$\vdots$$

$$k = \frac{b\gamma_b}{a\gamma_a} - 1$$

$$\gamma_0 = 978.03267715\,(1 + 0.0052790414\sin^2\varphi + 0.0000232718\sin^4\varphi + 0.000000\sin^6\varphi)$$

تنش سیستم مختصات در حل معادله $\Delta U_g = 0$

جواب $\Delta U_g = 0$ در سیستم مختصات بیضوی:

$$U_g = \frac{GM}{E}\operatorname{arctg}\frac{E}{u} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{\left[\left(1+3\frac{u^2}{E^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\frac{u}{E}\right]}{\left[\left(1+3\frac{b^2}{E^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\frac{b}{E}\right]} P_{20}$$

جواب $\Delta U_g = 0$ در سیستم مختصات کروی:

$$\text{(I)}\quad U_g(\lambda,\theta,r) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left[J_{nm}\cos m\lambda + k_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)\right]$$

در سیستم مختصات کروی:

$$U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

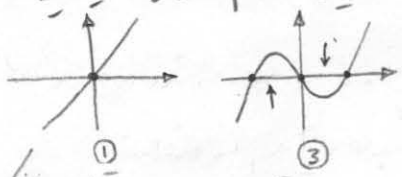
در سیستم مختصات بیضوی:

$$U_g(\lambda,\beta,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\sin\beta)$$

آیا به یک رابطه با فرم بسته می‌رسیم؟

چون تابع λ نیست باید کاری کنیم تا جملات دارای λ در رابطه (I) حذف شوند؛ لذا $m=0$ (Zonal) در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به توزیع یکنواخت جرم جملات فرد نیز حذف می‌گردد. (توجه شود، قسمت فرد حذف می‌شود چون در هارمونیکهای فرد به دلیل توزیع یکنواخت جرم دو طرف یکدیگر را خنثی می‌کنند.)

$$U_g(\theta,r) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n} J_{2n}\cdot P_{2n}(\cos\theta)\right]$$



λ ندارد ← تقارن دورانی ← فقط هارمونیکهای زوج زونال

J_{n0} : J_{10} J_{20} J_{30} ...

بنابراین در حل معادله $\Delta U_g = 0$ در سیستم مختصات کروی برای یک بیضوی به یک سری رسیدیم که تا بی‌نهایت ادامه دارد. (فرم بسته نیست)

اثبات در ص ۱۹۰-۱۸۸ _ سوال امتحانی

$$U_g(\beta,u) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \left[\left(\frac{R}{r}\right)^5 - 1\right](P_{00} - P_{20})$$

در حل معادله $\Delta U_g = 0$ در سیستم مختصات بیضوی برای یک بیضوی به یک رابطه به فرم بسته رسیدیم.

قضیه ی کلارو

ارتباط فشردگی هندسی و جاذبی

استوا $\gamma_a = \frac{GM}{ab}\left[1 - m - \frac{1}{6} e' m \frac{q_0'}{q_0}\right]$

قطب $\gamma_b = \frac{GM}{a^2}\left[1 + \frac{m}{3} e' \frac{q_0'}{q_0}\right] = \frac{GM}{a^2} + \frac{GM}{a^2}\left[\frac{1}{3} m e' \frac{q_0'}{q_0}\right]$

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

$$f = \frac{a-b}{a}$$

$$\boxed{f + f^* = \frac{a-b}{a} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\omega^2 b}{\gamma_a}\left[1 + \frac{e'}{2} \cdot \frac{q_0'}{q_0}\right]}$$

$$q = \left[\left(1 + 3\left(\frac{u}{E}\right)^2\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\frac{u}{E}\right]$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{E}{u}\right) = \frac{E}{u} - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E}{u}\right)^5 - \cdots$$

بسط

$$q_0 = \left[\left(1 + 3\left(\frac{b}{E}\right)^2\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{E}{b}\right) - 3\frac{b}{E}\right]$$

$$q' = -\frac{u^2 + E^2}{E} \frac{dq}{du}$$

$$q = \left[\left(1 + 3\frac{u^2}{E^2}\right)\left[\frac{E}{u} - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E}{u}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{E}{u}\right)^7 + \cdots\right] - 3\frac{u}{E}\right]$$

$$= \cancel{\frac{E}{u}} - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E}{u}\right)^5 - \cdots + \cancel{3\frac{u}{E}} - \cancel{\frac{E}{u}} + \frac{3}{5}\left(\frac{E}{u}\right)^3 - \cdots - \cancel{3\frac{u}{E}}\Big]$$

$$q = 2\left[\frac{1}{3\times 5}\left(\frac{E}{u}\right)^2 - \frac{2}{5\times 7}\left(\frac{E}{u}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$\boxed{q_0 = q\big|_{u=b} = \frac{2}{15} e'^3\left[1 - \frac{6}{7} e'^2 \cdots\right]} \quad , \quad \boxed{q_0' = \frac{2}{5} e'\left(1 - \frac{3}{7} e'^2 \cdots\right)}$$

$$\frac{E}{b} = e'$$

$$\boxed{f + f^* = \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 b}{\gamma_a}\left(1 + \cancel{\frac{9}{35} e'^2}\right)}$$

$$\frac{e'}{2} \frac{q_0'}{q} = 3\left(1 + \frac{3}{7} e'^2 + \cdots\right)$$

چون e'^2 ها کوچک هستند، صرفنظر می کنیم

$$\boxed{f + f^* = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 b}{\gamma_a}} \longrightarrow \text{(clairut)}$$

رابطه ی ساده شده

$$l = f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)$$

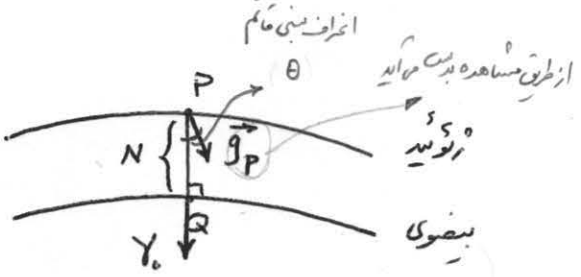
$$g = F(W,U) = F(U,b) + \frac{\partial F}{\partial W}\Big|_{\substack{W=U\\u=b}}\overbrace{(W-U)}^{T} + \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\substack{W=U\\u=b}}\overbrace{(u-b)}^{N}$$

$$\boxed{g = \gamma_0 + \frac{\partial F}{\partial W}\Big|_{\substack{W=U\\u=b}} T + \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\substack{W=U\\u=b}} N}$$

یک معادله

چون در این معادله دو مجهول داریم

باید یکی از متغیرها را برحسب دیگری بدست آوریم : رابطه‌ی بین (N و T)



فرمول دوم برتز

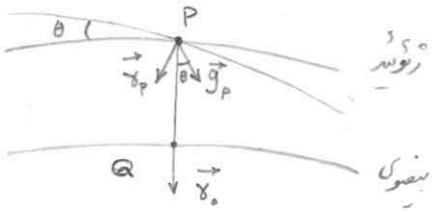
T می‌تواند بیانگر اختلاف داشته باشد.

دور بودن میدان ثقل نرمال از میدان ثقل واقعی

$$\Delta\vec{g} = \vec{g} - \vec{\gamma}_0$$

$$\Delta g = |\vec{g} - \vec{\gamma}_0 \cos\theta| \simeq g - \gamma_0$$

به دلیل کوچک بودن θ



$$\vec{\delta g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P$$

$$= \nabla W - \nabla U$$

$$= \nabla(W-U) = \nabla T$$

بردار نوسان جاذبه

$$g = -\frac{\partial W}{\partial H}$$

در راستای بردار شتاب ثقل واقعی

$$\gamma_0 = -\frac{\partial U}{\partial h}$$

در راستای بردار شتاب ثقل نرمال

$$\delta g = -\frac{\partial W}{\partial H} + \frac{\partial U}{\partial h} \doteq -\frac{\partial W}{\partial H} + \frac{\partial U}{\partial H} \doteq -\frac{\partial}{\partial H}\overbrace{(W-U)}^{T} \Rightarrow \boxed{\delta g \doteq -\frac{\partial T}{\partial H}}$$

روی بیضوی مولد پتانسیل

$$W_P = U_P + T_P = U_Q + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial h}\Big|_Q}_{-\gamma_0} N_P + T_P \Rightarrow 0 = -\gamma_0 N_P + T_P$$

$$U_P = U_Q + \frac{\partial U}{\partial h}\Big|_Q N$$

$$\boxed{N_P = \frac{T_P}{\gamma_0}}$$

فرمول دوم برتز

روی ژئوئید

این معادله با فرض برابر بودن پتانسیل واقعی و مقدار پتانسیل بیضوی می‌باشد ← ضمناً فرض شده $W = W_0$ است (یعنی پتانسیل معلوم فرض شده)

$$g = \gamma_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial W}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} T + \left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} N$$

$$\boxed{g = \gamma_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial W}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} T + \left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{\substack{W=U\\u=b}} \frac{T}{\gamma_0}}$$

معادله‌ی بالا!

معادله دیفرانسیل بنیادی ژئودزی فیزیکی :

$$g_P = \gamma_P + \delta g_P$$

$$\gamma_P = \gamma_0 + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_Q N$$

$$g_P = \gamma_0 + \delta g_P + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_Q N$$

به همان معادله‌ی بالا رسیدیم

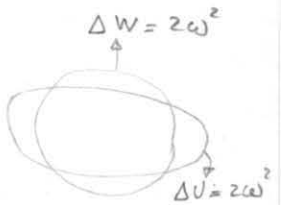
$$\boxed{g_P = \gamma_0 - \frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma_0}\cdot\left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_Q T_P} \longrightarrow g = |\nabla W|_0$$

فرم خطی شده

$$\boxed{\Delta g = g_P - \gamma_0 = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial h}\cdot T}$$

معادله دیفرانسیل بنیادی ژئودزی فیزیکی

$$\begin{cases}\Delta W = 2\omega^2\\ g = |\nabla W|\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\Delta T = 2\omega^2 - \overbrace{\Delta U}^{2\omega^2} = 0\\ \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \boxed{\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h}}\cdot T\end{cases}$$



داده‌ی مرزی خطی

شرط مرزی خطی برای $\underline{T}$

$$\Delta W = 2\omega^2 \Rightarrow \Delta(U+T) = 2\omega^2$$

$$\Delta U + \Delta T = 2\omega^2$$

عدد ثابت نیست

$$C_1 V + C_2 \frac{\partial V}{\partial n}$$

اگر این ثابت شود تبدیل به یک مسئله روبین می‌شود
اما در حال حاضر این مقدار متغیر است

اختیاری سطح واقعی

اختیاری سطح زمین

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2\omega^2 + k\pi\rho G + 2Jg \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\omega^2 + 2J\gamma$$

جلسه بعد :

$$g = |\nabla W|$$

$$l = f(x) = f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}\delta x$$

$$g_P = |\nabla(U+T)| = (\nabla U_P + \nabla T_P)$$

اندازه ≡ قدر مطلق

$$= |\vec{\gamma}_P + \nabla T_P| = \left[\gamma_P^2 + (\nabla T)^2 + 2\gamma_P\cdot\nabla T\right]^{1/2} = \gamma_P\left[1 + 2\frac{\vec{\gamma}_P}{\gamma_P^2}\nabla T + \frac{(\nabla T)^2}{\gamma_P^2}\right]^{1/2}$$

$\sqrt{1+x}$ با توجه به بسط به سری تیلور

$x<1$

$$= \gamma_P\left(1 + \frac{\gamma_P}{\gamma_P^2}\cdot\nabla T + \frac{1}{2}\cancel{\frac{(\nabla T)^2}{\gamma_P^2}} + \cdots\right) \Rightarrow \boxed{g_P \doteq \gamma_P + \frac{\vec{\gamma}_P}{|\gamma_P|}\nabla T}$$

نرمال جاذبه

به دلیل کوچک بودن ∇T از این عبارت صرف نظر می‌کنیم

بردار شتاب ثقل نرمال (خط شاقولی نرمال)

بردار گرادیان در راستای $\vec{\gamma}$

مشتق سوئی

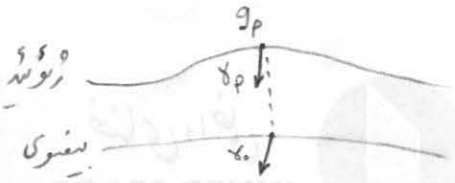
$\vec{\gamma}$ در هر نقطه بر این مماس است.

$$\frac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}\cdot\nabla T = -\frac{\partial T}{\partial h} \doteq -\frac{\partial T}{\partial H}$$

تغییرات ارتفاع به سمت بالا
جهت $\vec{\gamma}$ به سمت پایین

$$g_P \doteq \gamma_P - \frac{\partial T}{\partial H}$$

همان نوسان جاذبه



ارتفاع ژئوئید ← چون با مشاهده روی زمین N را داریم.

γ_P را نمی‌توانیم حساب کنیم، یک N اضافه می‌کنیم و از بسط به سری تیلور γ_P آن را بدست می‌آوریم:

$$\gamma_P = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

$$g_P = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N - \frac{\partial T}{\partial H} \Rightarrow g_P - \gamma_0 = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

روی بیضوی چون مولفه اول و دوم معلوم است و مؤلفه سوم معلوم نیست γ_P معلوم نیست

$$\boxed{\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N} \quad *$$

فرم خطی شده‌ی : $g = |\nabla(U+T)|$

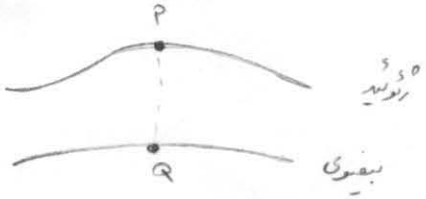
در این رابطه N و T مجهول هستند پس یک معادله با دو مجهول وجود دارد.

برای اضافه کردن یک مشاهده از فرمول دوم برنز استفاده می‌کنیم:

نمی‌توانیم حساب کنیم

$$W = U + T \longrightarrow W_P = U_P + T_P$$

بسط به سری تیلور : $U_P = U_Q + \frac{\partial U}{\partial h} N$



$$W_P = U_Q + \frac{\partial U}{\partial h}\Big|_Q N + T_P = W_0 - \gamma_Q N + T_P$$

معادله دیفرانسیل بنیادی فیزیکال ژئودزی (خطی شده)

فرمول دوم برنز $\boxed{N = \frac{T_P}{\gamma_0}} \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{\Delta g \doteq -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T}$

c_2 c_1

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \end{cases} \xrightarrow{W = U+T} \begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial h}\cdot T \end{cases}$$

در ظاهر این رابطه مانند مسئله نوع سوم (روبین) می‌باشد ولی اینجا c_1 و c_2 اعداد ثابت نیستند چون اگر نقطه تغییر کند γ نیز تغییر می‌کند.

$$\begin{cases} \Delta V = f \\ c_1 V + c_2 \frac{\partial V}{\partial n} \end{cases}$$

$$\Delta W = \Delta(U+T) = 2\omega^2$$

$$= \underbrace{\Delta U}_{2\omega^2} + \Delta T = 2\omega^2 \Rightarrow \Delta T = 0$$

$$\Delta W = \begin{cases} -4\pi G\rho + 2\omega^2 & \text{داخل} \\ -k\pi G\rho + 2\omega^2 & \text{روی} \\ 2\omega^2 & \text{خارج} \end{cases} \qquad \Delta U = \begin{cases} -4\pi G\rho^c + 2\omega^2 & \text{داخل} \\ -2\pi G\rho^c + 2\omega^2 & \text{روی} \\ 2\omega^2 & \text{خارج} \end{cases}$$

برای خارج زمین مورد نظر ماست

هدف رسیدن به این رابطه است: $\frac{1}{\gamma_0}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial h} = ?$ می‌خواهیم این را ساده کنیم.

در فضای خارج زمین (تصحیح هوای آزاد)

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2Jg \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \cancel{4\pi G\rho} - 2\omega^2 - 2J^N g$$

فرمول اول برنز

$J^N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) \longleftarrow$ انحنا $\left(k = \frac{1}{r}\right)$ میانگین انحنای سطوح نرمال

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} = \frac{a}{\left[1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi\right]^{1/2}} = \frac{a^2}{\left[a^2-a^2\sin^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right]^{1/2}}$$

$$a^2(1-\sin^2\varphi)+b^2(1-\cos^2\varphi) = a^2\cos^2\varphi + b^2 - b^2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{a^2}{\left[b^2+(a^2-b^2)\cos^2\varphi\right]^{1/2}} = \frac{a^2}{b}\cdot\frac{1}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{N} = \frac{b}{a^2}(1+e'^2\cos^2\varphi)^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{M} = \frac{b}{a^2}(1+e'^2\cos^2\varphi)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a^2}(1+e'^2\cos^2\varphi)^{1/2} \qquad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} \xrightarrow{f=\frac{a-b}{a}} \text{بسط به سری تیلور} : e'^2 \doteq 2f$$

$$\frac{1}{N} \doteq \frac{b}{a^2}(1+2f\cos^2\varphi)^{1/2} = \frac{b}{a^2}(1+f\cos^2\varphi+\cdots)$$

$$\frac{1}{M} \doteq \frac{b}{a^2}(1+2f\cos^2\varphi)^{3/2} = \frac{b}{a^2}(1+3f\cos^2\varphi+\cdots)$$

$$J^N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}\right) = \frac{b}{a^2}(1+2f\cos^2\varphi+\cdots)$$

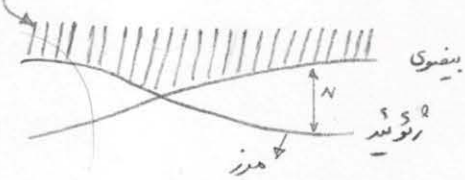
$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} = -2\omega^2 - \frac{2\gamma b}{a^2}(1+2f\cos^2\varphi+\cdots) \qquad m = \frac{a^2b\omega^2}{GM} = \frac{a\omega^2}{\gamma} \Rightarrow \omega^2 = \frac{m\gamma}{a}$$

یکی سوال کرد!

توجه: $\Delta W = \Delta U + \Delta T \Rightarrow \Delta T = \Delta W - \Delta U = 0$

این رابطه مربوط به جایی است که جرم نداشته باشیم. یعنی این قسمت

خارج از مرز هر دو که بدون جرم هستند.



چون اختلاف این دو نسبت به شعاع ناچیز است از این مقدار صرف نظر می‌کنیم.

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

$$\Delta U = -4\pi G\rho^c + 2\omega^2$$

$$\Delta T = \Delta(W-U) = -4\pi G(\rho-\rho^c) \longrightarrow \boxed{\Delta T = -4\pi G\,\delta\rho}$$

در اصل مقدار صحیح ΔT این رابطه است اما به دلیل کوچک بودن مقدار از آن صرف نظر می‌شود

$\delta\rho$ در جایی صفر است که چگالی هر دو دقیقاً برابر باشد ← یعنی در خارج از زمین

داخل زمین

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

$$W = G\iiint \frac{\rho}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

خارج زمین

$$\Delta W = 2\omega^2$$

$$W = G\iiint \frac{\rho}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

جواب در هر دو حالت یکسان است.

بنابراین نوشتن $-4\pi G\rho$ در جواب تأثیری ندارد.

از طرفی چون $\Delta T = \Delta W - \Delta U$ پس جمله‌ی $\frac{1}{2}\omega^2 r''^2$ را ندارد.

$$\boxed{T = G\iiint \frac{\delta\rho}{l}\,dv}$$

ادامه صفحه قبل

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2m\gamma}{a} - \frac{2\gamma b}{a^2}\left(1+2f\cos^2\varphi+\cdots\right)$$

$$= -\frac{2\gamma}{a}\left[m+\frac{b}{a}\left(1+2f\cos^2\varphi+\cdots\right)\right] \qquad f=\frac{a-b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=1-f$$

$$= -\frac{2\gamma}{a}\left[m+(1-f)\left(1+2f\cos^2\varphi+\cdots\right)\right]$$

از جملات با درجه بالاتر از f صرفنظر میکنیم

$$= -\frac{2\gamma}{a}\left[m+1+2f\cos^2\varphi-f\right]$$

$$= -\frac{2\gamma}{a}\left(1+m+f\cos 2\varphi\right) \Rightarrow \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial h} = -\frac{2}{a}\left(1+m+f\cos 2\varphi\right)$$

تابع موقعیت نقطه است لذا ثابت نیست.

$$\boxed{\begin{cases}\Delta T = 0\\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial H} - \dfrac{2}{a}\left(1+m+f\cos 2\varphi\right).T\end{cases}}$$

گرادیان پوانکاره - پری : کاربرد در سیستم های ارتفاعی

واقعی $\dfrac{\partial g}{\partial H} = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2Jg$

نرمال $\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\omega^2 - 2J^N\gamma$

$$\xrightarrow[\text{فرض پوانکاره - پری در خارج از زمین}]{Jg \doteq J^N\gamma} \frac{\partial g}{\partial H} \doteq \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho$$

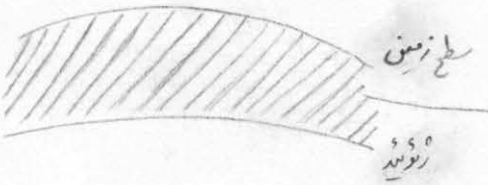
-0.3086 mGal/m

در فضای خارج بیضوی

با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد

$\rho = 2.67\ g/cm^3$

$G = 6.67 \times \cdots$



تغییرات شتاب ثقل در فضای داخل زمین $\dfrac{\partial g}{\partial H} \doteq 0.0848$ mGal/m

انحنای راستای خط شاقولی :

مؤلفه‌های خط شاقولی واقعی

نصف النهار

$$\delta\xi = -\int_A^B \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\,dH$$

قائم اولیه

$$\delta\eta = -\int_A^B \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\,dH$$

در راستای شتاب ثقل واقعی

مؤلفه‌های خط شاقولی نرمال

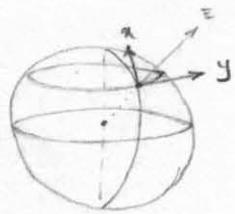
$$\delta\xi^N = -\int_A^B \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x}\,dH$$

$$\delta\eta^N = -\int_A^B \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial y}\,dH$$

در راستای شتاب ثقل نرمال

سیستم LA (دست چپی)

تقریبی از فرمول کاسینی : $\gamma = \gamma_a\left(1+f^*\sin^2\varphi\right)$



تابع λ نیست پس صفر است

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial (R\cos\varphi.\lambda)} = \frac{1}{R\cos\varphi}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow \delta\eta^N = 0$$

در راستای قائم اولیه

یعنی تصویری از خط شاقولی نرمال در این راستا نداریم.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial (R.\varphi)} = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = \frac{2\gamma_a.f^*}{R}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\gamma_a.f^*}{R}\sin 2\varphi \Rightarrow$$

در راستای نصف النهاری

ادامه در صفحه بعد

فرورفتگی جاذبه - معلوم

$$\delta\xi^N = -\int_A^B \frac{f^*}{R}\sin 2\varphi\, dH = -0.17''\sin 2\varphi\,\Delta H_{AB}$$

انحنای خط شاقولی

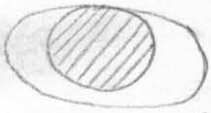
ادامه‌ی بحث - بعد از خطی سازی چه کنیم؟

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial H} - \dfrac{2}{a}(1+m+f\cos 2\varphi)\,T \end{cases}$$

در شرط مقدار مرزی پارامترها ثابت نیستند

از این به بعد مسئله را به صورت محلی حل می‌کنیم - یعنی کره‌ای که منطقه‌ی مورد نظر را به بهترین شکل تقریب می‌زند طوری انتخاب می‌کنیم که حجم کره برابر با حجم بیضوی باشد.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \Rightarrow \boxed{R = \sqrt[3]{a^2 b}}$$



به این کره یک پتانسیل هم نسبت می‌دهیم (غیر دورانی)

پتانسیل کره : $U = \dfrac{GM}{r} \Rightarrow \gamma = \dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{-GM}{r^2}$

حال می‌توانیم سیستم مختصات کروی را جایگزین سیستم مختصات بیضوی کنیم:

عوض کردن سیستم مختصات تأثیری در مسئله ندارد. فقط حل آن را ساده‌تر یا پیچیده‌تر می‌نماید.

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial r} + \underbrace{\left(\dfrac{1}{\gamma}\cdot\dfrac{\partial \gamma}{\partial r}\right)}_{-\frac{2}{r}}\cdot T \end{cases}$$

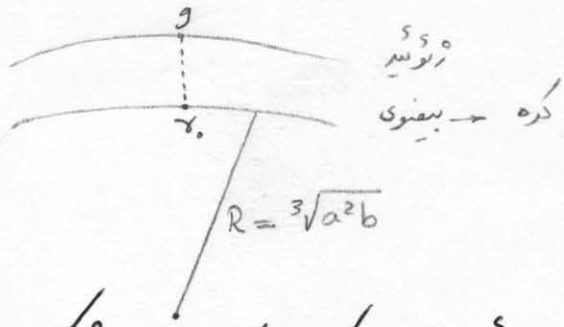
در سیستم مختصات کروی

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^3} = \frac{-2\gamma}{r} \Longrightarrow \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2}{r}$$

Δg یک پارامتر کرنلی ← تابع دو متغیر (مثل فاصله)

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}\cdot T$$

شرط مرزی در سیستم مختصات کروی (ژئوئید)



با تقریبی می‌توان مشاهدات روی ژئوئید را هم از روی مشاهدات روی بیضوی یا کره داشت.

مسئله تبدیل به یک مسئله‌ی روبین شد که پیش از این خطی نیز شده بود:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\cdot T \end{cases}$$

حال باید T را بدست بیاوریم تا: $N = \dfrac{T}{\gamma_0}$

از شرط مرزی برای تعیین ضرایب a و b استفاده می‌شود

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta)$$

جواب معادله دیفرانسیل در سیستم مختصات کروی

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\theta)$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}\cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) + b_{nm}\sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)\right]}_{T_n}$$

T_n : هارمونیک‌های کروی سطحی T

$$\boxed{T = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot T_n}$$

روی سطح کره انگار T را برحسب هارمونیک‌های کروی بسط داده‌ایم ← تشکیل سیستم پایه

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}\cdot T$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot T_n$$

جواب در هر نقطه از فضاست اما T_n مجهول است.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot T_n$$

$$\frac{2}{r}T = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot T_n$$

چون در معادله لاپلاس صدق می‌کند یک کمیت هارمونیک است.

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n-1)}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot T_n$$

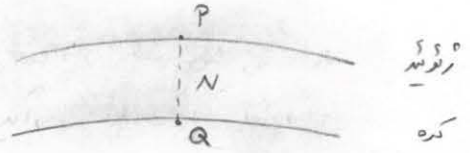
$$r\cdot\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n$$ کمیت هارمونیک

خود Δg در فضای خارج کره یک کمیت هارمونیک نیست ← در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند.

روی کره ≡ ژئوئید

$$\boxed{\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{R}\cdot T_n}$$

روی کره $R = r$



T_n از این رابطه به دست می‌آید، در رابطه‌ی بالا گذاشته می‌شود. T برای هر نقطه‌ی فضا به دست می‌آید.

T روی ژئوئید باید تعیین شود ← داشتن مقدار مجهول روی مرز

از حل مسئله مقدار مرزی به دنبال به دست آوردن T در فضای خارج کره هستیم.

$$\frac{T}{\gamma_0} = N$$

چون Δg تابعی روی کره (تقریبی از ژئوئید) است می‌توانیم آن را به سری هارمونیک‌های کروی بسط دهیم:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a'_{nm}\cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) + b'_{nm}\sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)\right]$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a'_{nm}\cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) + b'_{nm}\sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)\right]}_{\Delta g_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{n-1}{R}\right)\left[a_{nm}\cos m\lambda\, P_{nm} + \dots + b_{nm}\sin m\lambda\, P_{nm}\right]$$

Δg : هارمونیک‌های کروی سطحی Δg_n

می‌خواهیم T_n را برحسب Δg به دست آوریم:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{R}T_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Delta g_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{R}T_n \Rightarrow \boxed{\Delta g_n = \frac{n-1}{R}T_n}$$

مشاهدات

$$\begin{pmatrix} a'_{nm} \\ b'_{nm}\end{pmatrix} = \frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint \Delta g\, P_{nm}(\cos\theta')\begin{pmatrix}\cos m\lambda' \\ \sin m\lambda'\end{pmatrix} ds \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} a'_{nm} = \dfrac{n-1}{R}a_{nm} \\ b'_{nm} = \dfrac{n-1}{R}b_{nm}\end{cases} \text{II} \Rightarrow T_n = \frac{R}{n-1}\Delta g_n \quad \text{III}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود.

Δg مشاهدات روی کره
↓ I
a'_{nm}, b'_{nm} — Δg_n
↓ II
a_{nm}, b_{nm} — T_n
↓ III
T_n
↓ از رابطه بالا
T برای کل فضا

ضرایب a'_{nm} و b'_{nm} را در Δg قرار دهیم با استفاده از قوانین جمع

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n$$

ارتباط Δg با هارمونیک‌ها

$$\Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} \left[a'_{nm} \cos m\lambda \, P_{nm}(\cos\theta) + b'_{nm} \sin m\lambda \, P_{nm}(\cos\theta) \right]$$

هارمونیک تابع بر حسب خود تابع

روی سطح کره مشاهده شده

$$\boxed{\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g \cdot P_n(\cos\psi)\, ds}$$

ارتباط Δg با هارمونیک‌ها

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot \frac{R}{4\pi} \cdot \frac{2n+1}{n-1} \iint \Delta g \, P_n(\cos\psi)\, ds$$

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{2n+1}{n-1} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)\, ds$$

این رابطه در $n=1$ تعریف نمی‌شود.

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot \frac{R}{n-1} \Delta g_n \xrightarrow{r=R} T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1} R$$

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \cdot P_n(\cos\psi)\, ds$$

روی سطح کره

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} T_n = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n$$

چون $n=1$ تعریف نمی‌شود، T_0 و T_1 را جدا می‌کنیم:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} T_n$$

$$T = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{n-1}\right) \Delta g_n$$

$$T = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \cdot \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g \cdot P_n(\cos\psi)\, ds$$

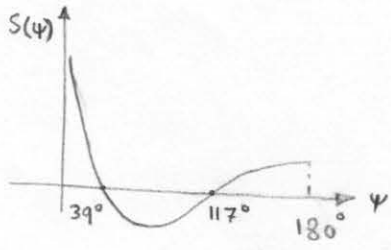
$$\boxed{T = T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\, ds} \quad (*)$$

T روی سطح کره که می‌توان با آن N را محاسبه نمود.

بازه انتگرال‌گیری روی سطح کره است

$$T = T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)}_{S(\psi)}\, ds$$

$S(\psi)$: کرنل استوکس (حاصل یک عدد است.)



$$T = T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \, S(\psi)\, ds$$

$$\cos\psi = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda - \lambda')$$

$$\boxed{N = \frac{T}{\gamma_0}}$$

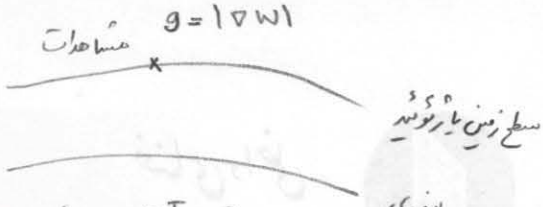
رابطه‌ی (*) مقدار T را روی یک نقطه به مختصات (λ, θ) روی سطح کره می‌دهد

برای هر مشاهده Δg روی این سطح نیز موقعیتی مانند (λ', θ') وجود دارد. ψ فاصله هر نقطه از موقعیت T است.

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \\ W = U + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta(U+T) = 2\omega^2 \\ g = |\nabla(U+T)| \end{cases}$$

این رابطه در هر نقطه از فضا برقرار است

مشاهده روی ژئوئید است اما معادله برای همه جا برقرار است.



$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} - \frac{2}{a}(1 + m + f\cos 2\varphi).T \end{cases}$$

نقطه‌ی شروع فیزیکال ژئودزی از زمان استوکس تبدیل Δg های روی سطح کره به T بود.

به پشت برگه توجه شود!

با درنظر گرفتن یک کره به جای بیضوی به صورت محلی و هم حجم :

مسئله روبین

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \end{cases} \quad r = R \Rightarrow \boxed{\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{R}\right) T_n} \quad \text{(I)}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n \longrightarrow \text{هارمونیک های سطحی } T$$

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{(n-1)}{r} . T_n \longrightarrow \text{روی ژئوئید}$$

مشاهده : Δg

مجهولات : T یا T_n

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n \quad \text{(II)}, \quad \Delta g_n = \sum_{m=0}^{n} (a'_{nm} \cos m\lambda + b'_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\varphi)$$

چون تابع Δg روی ژئوئید (سطح کره) تعریف شده می‌توان آن را به سری هارمونیک‌های سطحی کروی بسط داد.

از این طریق رابطه‌ای بین هارمونیک‌های Δg_n و Δg بدست می‌آید :

$$\boxed{\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g \, P_n(\cos\psi) \, ds}$$

$$\text{(I)}, \text{(II)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{R} . T_n \Rightarrow \boxed{T_n = \frac{R}{n-1} \Delta g_n}$$

اما مشکل این رابطه $n=1$ است یعنی T_1 را نمی‌توان محاسبه نمود.

$$T = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} T_n = T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n$$

$$= T_0 + T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} . \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g \, P_n(\cos\psi) \, ds$$

چون سری یک سری همگرای یکنواخت است، می‌توان جای $\iint$ و $\sum$ را عوض کرد.

$$= T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)}_{S(\psi)} ds$$

تابع / کرنل استوکس $S(\psi)$

با جایگذاری در رابطه T_n

$$T = T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g . S(\psi) \, ds$$

این رابطه جواب معادله $\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} . T$ است.

$$= -R \Delta g_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g . S(\psi) \, ds$$

با جایگذاری در رابطه Δg_n

$$\Delta g_0 = \frac{1}{4\pi} \iint \Delta g \, ds$$

هارمونیک صفرم : میانگین تابع Δg روی سطح کره

$$N \xleftarrow{\text{دوم بزنر}} T \xleftarrow{(***)} T_n \xleftarrow{(**)} \Delta g_n \xleftarrow{(*)} \overset{\text{مشاهدات}}{\Delta g}$$

$$(*) \quad \Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g \cdot P_n(\cos\psi)\, ds$$

$$(**) \quad T_n = \frac{R}{n-1} \Delta g_n$$

$$(***) \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot T_n$$

فرمول دوم بزنر $\quad N = \dfrac{T}{\gamma_0}$

$$T = W - U$$

هارمونیک درجه صفرم : میانگین تابع

$$T_0 = W_0 - U_0 = \frac{GM}{R} - \frac{GM^N}{R} = \frac{G\,\delta M}{R} = 0$$

اگر جرم زمین و بیضوی دقیقاً یکسان باشد، می‌توان از هارمونیک درجه صفرم صرف نظر کرد.

$$T_1 = W_1 - U_1 = 0$$

هارمونیک های درجه یکم : مرکز ثقل سیستم های مختصات

پس اگر مرکز ثقل زمین و بیضوی دقیقاً بر هم منطبق باشند از هارمونیک درجه یکم هم می‌توان صرف نظر نمود.

پس با دو فرض بالا می‌توان از جملات T_0 و T_1 صرفنظر کرد:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds$$

انتگرال استوکس

از رابطه دوم برتر

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds$$

ارتفاع ژئوئید نسبت به یک بیضوی که هم جرم با زمین و هم مرکز ثقل با آن است :

اما خواهیم دید که اگر زمین و بیضوی هم مرکز ثقل هم نباشند، باز هم می‌توان از T_1 صرفنظر کرد :

برای حالت غیر ایده آل :

$$T = \frac{G\,\delta M}{R} + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds$$

چون این رابطه جواب معادله Δg است انگار از این رابطه $\left(\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T\right)$ انتگرال گرفتیم، رسیدیم به T

پس T_1 ثابت انتگرال - حال T_1 را چند در نظر بگیریم؟

$$\begin{cases} \Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{R} T_n \\ \Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n \end{cases} \qquad \Delta g_n = \frac{n-1}{R} T_n$$

T_1 در این رابطه صفر می‌شود، پس ثابت انتگرال در بالا صفر است.

T_1 هر مقداری داشته باشد روی مشاهده تأثیری ندارد.

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{R} T_n = -\frac{T_0}{R} + \frac{T_2}{R} + \cdots$$

$n = 1 \Rightarrow T_1 = 0$

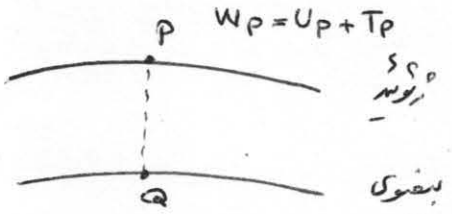
$$T = \frac{G\,\delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds \Rightarrow N = \frac{G\,\delta M}{R\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds$$

$$N = N_0 + \underset{\text{صفر}}{N_1} + \sum_{n=2}^{\infty} N_n$$

$$W_P = U_P + T_P \quad , \quad U_P = U_Q + \left.\frac{\partial U}{\partial h}\right|_Q \cdot N$$

$$W_P = U_Q - \gamma_Q N + T_P \Rightarrow N = \frac{T_P - W_P + U_Q}{\gamma_0}$$

$$\delta W = W_0 - U_0$$



از آنجایی که چهار پارامتر از طریق مشاهدات بدست می‌آیند پس دارای خطا هستند، بنابراین δW به وجود می‌آید.

(GM, ω_0, a, J^2)

$$\boxed{N = \frac{T - \delta W}{\gamma_0}}$$

از این پس باید از این رابطه برای N استفاده نمود ← فرمول برنز تعمیم یافته

پس با توجه به فرمول بریز تعمیم یافته روابط را بازنویسی می‌کنیم :

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

معادله دیفرانسیل بنیادی تعمیم یافته

$$\boxed{\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma_0}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial h}(T - \delta W)}$$

روی کره :

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}(T - \delta W)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T + \frac{2}{R}\delta W$$

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \underbrace{\Delta g - \frac{2}{R}\delta W}_{\Delta g'} = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T \end{cases}$$

چون مقداری ثابت است

چون پتانسیل در روی تمام بیضوی ثابت است پس U_0 ثابت است

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n - \frac{2}{R}\delta W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{R} T_n \Rightarrow \Delta g_0 + \Delta g_1 + \cdots - \frac{2}{R}\delta W = -\frac{T_0}{R} + \frac{T_2}{R} + \cdots$$

$$\begin{cases} \Delta g_0 - \frac{2}{R}\delta W = -\frac{T_0}{R} \\ \Delta g_2 = -\frac{T_2}{R} \\ \vdots \end{cases}$$

$-\frac{2}{R}\delta W$ را کنار Δg_0 می‌نویسیم چون ثابت است. به میانگینی که داشتیم یک مقدار ثابت اضافه کردیم.

به تمام Δg ها مقدار ثابتی اضافه می‌کنیم و هیچ تأثیری روی T نمی‌گذارد.

$$T = \frac{G\delta M}{R} + \underbrace{\frac{R}{4\pi}\iint \Delta g' \cdot S(\psi)\cdot ds}_{\frac{R}{4\pi}\iint \Delta g \cdot S(\psi) ds} \longrightarrow \frac{R}{4\pi}\iint \left(\Delta g - \frac{2}{R}\delta W\right) S(\psi)\, ds$$

$$\boxed{N = \overbrace{\frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0}}^{N_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds}$$

اضافه کردن این مقدار ثابت روی T تأثیری ندارد ولی روی N تأثیرگذار است چون δW روی N از قبل تأثیر گذاشته

جرم برابر با جرم زمین نیست و پتانسیل آن با پتانسیل روی بیضوی اندکی اختلاف دارد. (δW)

اگر اختلاف جرم صفر باشد این صفر

اگر اختلاف پتانسیل صفر باشد این صفر

این اختلافها در اثر خطای اندازه‌گیری به وجود آمده‌اند.

$$N_0 = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0}$$

با روشهایی می‌توان N_0 را روی زمین مشاهده کرد

$$\Delta g_0 = \frac{2}{R}\delta W - \frac{G\delta M}{R^2}$$

میانگین Δg های سطح کره

دو معادله و دو مجهول $(\delta M, \delta W)$

$$G\delta M = R(R\Delta g_0 + 2\gamma_0 N_0)$$

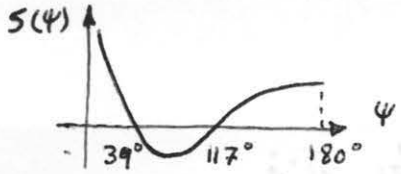
یک فاصله‌ی روی زمین اندازه‌گیری - انتقال روی بیضوی این بدست می‌آید

$$\delta W = R\Delta g_0 + \gamma_0 N_0$$

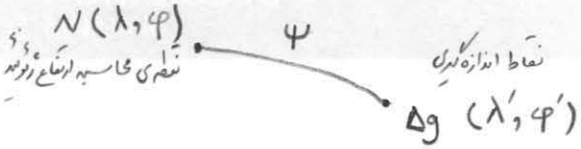
میانگین Δg ها

اگر بخواهیم ارتفاع ژئوئید در یک نقطه را بیابیم باید Δg روی کل زمین را داشته باشیم.

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$



$S(\psi)$: نسبت به مبدأ یعنی جایی که می‌خواهیم ارتفاع ژئوئید را حساب کنیم محاسبه می‌شود.

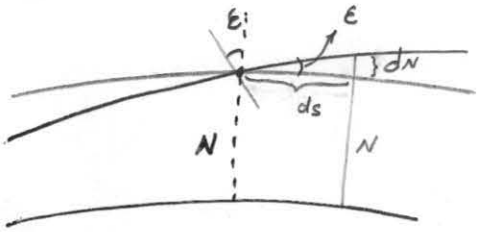


فرم بسته‌ی تابع استوکس :

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln\left(\sin\psi/2 + \sin^2\psi/2\right)$$

$$N = \frac{GSM}{R\gamma_0} - \frac{SW}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds$$

فرمولهای وینینگ - ماینز :



ژئوئید

قراردادی (ربطی به جهت ندارد)

(شیب ژئوئید نسبت به بیضوی) زاویه انحراف قائم

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}$$

بیضوی

روی کره به شعاع R

در راستای نصف النهاری $\xi = -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{dN}{R.d\varphi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial\varphi}$

در راستای قائم اولیه $\eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial N}{\partial\lambda}$

$$\xi = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds\right) = -\frac{1}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi}\, ds$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma_0\cos\varphi}\iint \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda}\, ds$$

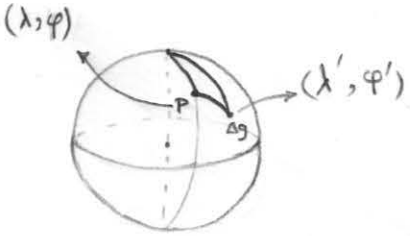
$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi} = \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

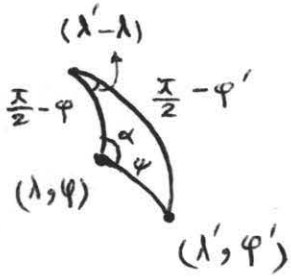
$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda} = \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$$

$$\xi = -\frac{1}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\, ds$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma_0\cos\varphi}\iint \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\, ds$$

از این رابطه نسبت به φ و λ مشتق می‌گیریم





$$\cos\psi = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g\, S(\psi)\, ds$$

قاعده سینوسها :

$$\frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi'} \Rightarrow \sin(\lambda'-\lambda)\cos\varphi' = \sin\alpha\sin\psi$$

از رابطه $\cos\psi$ مشتق می‌گیریم:

$$-\sin\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda'-\lambda)$$

$$-\sin\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \cos\varphi \underbrace{\cos\varphi' \sin(\lambda'-\lambda)}_{\sin\alpha \sin\psi} \Rightarrow -\cancel{\sin\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \cos\varphi \sin\alpha \cancel{\sin\psi}$$

با توجه به قاعده سینوسها

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\sin\alpha \cos\varphi}$$

$$\sin\psi \cos\alpha = \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda'-\lambda) \rightarrow \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\cos\alpha}$$

روابط وینینگ - مایننز (برای ξ و η)

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \frac{ds(\psi)}{d\psi} \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} ds$$

$$\frac{ds(\psi)}{d\psi} = -\frac{\cos(\psi/2)}{2\sin^2(\psi/2)} + 8\sin\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} - 3\frac{1-\sin(\psi/2)}{\sin\psi} + \cdots$$

$$\cdots + 3\sin\psi \ln\left[\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right]$$

ابتدا هدف تعیین W بود. که از این روابط بدست می‌آید. اما همتر از آن اختلاف W با میدان پتانسیل نرمال است. یعنی محاسبهٔ N، ξ و η.

$$W = U + T$$

در ژئودزی این سه پارامتر برای ما اهمیت دارند

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n$$

در هر نقطه در فضای خارج زمین

$$W = U(\lambda, \theta, r) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cdot T_n$$

$$\begin{cases} N = \dfrac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g\, S(\psi)\, ds \\ \xi = \dfrac{1}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \dfrac{ds(\psi)}{d\psi} \cos\alpha\, ds \\ \eta = \dfrac{1}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \dfrac{ds(\psi)}{d\psi} \sin\alpha\, ds \end{cases}$$

کاربرد: بهمراه GPS برای محاسبه ارتفاع ارتومتریک (کارهای عمرانی)

کاربرد: انتقال زوایا به روی بیضوی - اکتشافات زلزله

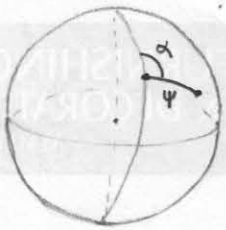
برای محاسبه‌ی این انتگرالها مشکلاتی وجود دارد. یکی اینکه انتگرالها روی سطح بسته باید باشد و به صورت پیوسته. حال آنکه اندازه‌گیری‌ها و مشاهدات به صورت گسسته روی ژئوئید می‌باشد. پس انتگرال باید به صورت گسسته (یا سیگما) صورت گیرد. مشکل بعدی این است که $\frac{3}{4}$ کره‌ی زمین آب است که در این سطح وسیع داده شتاب ثقل دقیق قابل دستیابی نیست. همچنین در همان $\frac{1}{4}$ خشکی‌ها نیز کمبود داده‌ها باعث عدم بسته شدن ژئوئید شده است.

البته این کمبود با داشتن داده‌های ماهواره‌ای ثقل سنجی کاهش یافته است. اما از آنجا که ماهواره‌های گرانسنجی قادر به سنجش طول موجهای کوتاه نیستند این مشکل همچنان باعث بسته نشدن ژئوئید است.

بسط به سری‌های موینکهای کروی

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} N_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{l} N_n}_{\text{طول موجهای بلند (از مشاهدات ماهواره‌ای)}} + \underbrace{\sum_{n=l+1}^{\infty} N_n}_{\text{طول موجهای کوتاه (از مشاهدات زمینی)}}$$

حال انتگرال های فوق را در چه سیستم مختصاتی حل نماییم؟ حل این انتگرال جزو سرفصل ها نیست اما سیستم مختصات هم است.



در سیستم مختصات قطبی: مشکل در انتگرال وجود دارد. در حوالی قطب اندازه گیری ($\psi=0$): $S(\psi) \longrightarrow \infty$

بنابراین سیستم مختصات را عوض می کنیم تا مشکل سینگولاریتی برطرف گردد.

$$\Delta g(\lambda', \varphi') \xrightarrow{\text{تبدیل}} \Delta g(\psi, \alpha)$$

λ'	φ'	Δg	ψ	α
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-

بانک اطلاعاتی

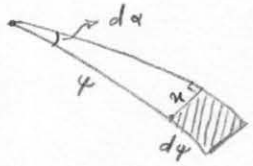
ψ: با توجه به رابطه ی $\cos\psi = \sin\varphi$ ...

α: با توجه به روابط ژئودزی II

N در سیستم مختصات قطبی

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha)\, S(\psi) \boxed{\sin\psi \, d\alpha \, d\psi}$$

چون $d\alpha \to 0$



$$\frac{\sin(d\alpha)}{x} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin\psi}$$

$$x = \sin\psi \cdot d\alpha$$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} \cdots$$

این عبارت در فرم بسته تابع $S(\psi)$ در $\psi=0$ سینگولار می شود

به این ترتیب پس از ضرب کردن، سینگولاریتی از بین می رود:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \cdot S(\psi) \underbrace{\sin\psi}_{2\sin\psi/2 \cos\psi/2} \, d\psi \, d\alpha$$

$$= \frac{R}{2\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha)\, d\alpha \right)}_{\bar{\Delta g}(\psi)} S(\psi) \sin(\psi)\, d\alpha$$

$\bar{\Delta g}(\psi)$: میانگین Δg ها

$$= \frac{R}{\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \bar{\Delta g}(\psi) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} S(\psi) \sin\psi \right)}_{F(\psi)} d\psi$$

$F(\psi)$: دیگر سینگولاریتی ندارد

$$= \frac{R}{\gamma_0} \int_{\psi=0}^{\pi} \bar{\Delta g}(\psi) \cdot F(\psi)\, d\psi$$

حسن: سینگولاریتی $S(\psi)$ از بین می رود.

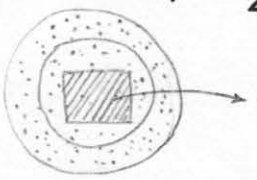
عیب: چون قطب در هر نقطه وابسته به مختصات در آن نقطه است و با تغییر نقطه محاسباتی باید همه ی Δg ها را به سیستم با مبدأ جدید منتقل کرد لذا حجم محاسبات بسیار زیاد است.

در سیستم مختصات کروی:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \Delta g(\lambda', \varphi') \cdot S(\psi) \cos\varphi' \, d\lambda' \, d\varphi'$$

حسن: سیستم مختصات کروی همان سیستم مختصات داده های ماست.

عیب: سینگولاریتی از بین نمی رود.



داخلی ترین بخش

در عمل منطقه ی مورد مطالعه به سه بخش تقسیم می شود. در داخلی ترین بخش از داده های با طول موج کوتاه به صورت مشاهدات زمینی استفاده می کنیم که به دلیل گسسته بودن اطلاعات، انتگرال به سری تبدیل می شود. در این بخش، سیستم مختصات قطبی مناسب تر خواهد بود. اما در دو بخش بیرونی تر و بیرونی از طول موج های بلند و داده های ماهواره ای استفاده شده که سیستم مختصات کروی برای آنها مناسب تر است.

تصحیحات جاذبی :

مشاهدات روی زمین ولی فرض کردیم روی ژئوئید
براین اساس مسئله را خطی نمودیم

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = \nabla |W| \end{cases}$$

بیضوی

$$x = x_0 + \delta x$$

$$W = U + T \rightarrow \Delta(U+T) = 2\omega^2$$

$$g = |\nabla(U+T)| \rightarrow \begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial H} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot T \end{cases}$$

بیضوی

$$N = \frac{T}{\gamma_0}$$

کره

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{2}{r} T \end{cases}$$

برای هر نقطه از فضا این رابطه برقرار است
برای هر دو سطح هم پتانسیل میدان ثقل واقعی و نرمال

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n$$

T_1: ثابت انتگرال ← هرمقداری باشد روی Δg تأثیر ندارد

اگرهم مرکز ثقل اگرهم جرم

روی ژئوئید

$$T = T_0 + T_1 + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g \cdot S(\psi)\, ds = \frac{G\delta M}{R} + \cancelto{0}{T_1} + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g\, S(\psi)\, ds$$

$$T = \frac{G\delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g\, S(\psi)\, ds \rightarrow N = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g\, S(\psi)\, ds$$

$$\Delta g_n = \frac{n-1}{R} T_1$$

$$N = \frac{T - \delta W}{\gamma_0}$$

$$\begin{cases} \Delta g = -\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{2}{r} T + \dfrac{2}{R} \delta W \\ \Delta T = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \underbrace{\Delta g + \dfrac{2}{R} \delta W}_{\Delta g'} = -\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{2}{r} T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta T = 0 \\ \Delta g' = -\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{2}{r} T \end{cases}$$

$$T = \frac{G\delta M}{R} + \frac{R}{4\pi} \underbrace{\iint \Delta g'\, S(\psi)\, ds}_{\iint (\Delta g + \frac{2}{R}\delta W) S(\psi)\, ds}$$

$$\iint \Delta g\, S(\psi)\, ds + \cancelto{0}{\frac{2}{R} \iint \delta W\, S(\psi)\, ds}$$

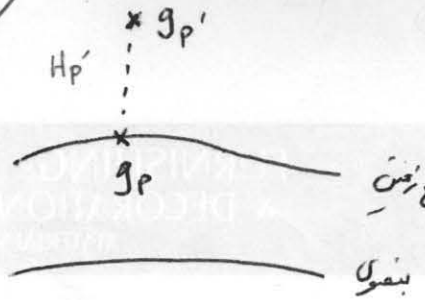
اگر به مسئله مقدار ثابتی اضافه یا کم شود تأثیری روی T ندارد.

$$N = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g\, S(\psi)\, ds$$

ولی N را تغییر می دهد.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} ds$$

انتگرال وینینگ - مایتز



انتظار ما از $\Delta g = g - \gamma_0$ مقداری نزدیک به صفر (مثبت یا منفی) است اما این اتفاق عملاً نمی‌افتد.

تصحیحات جاذبی : در برخی موارد مشاهدات از طریق هوابرد انجام می‌شود. بنابراین باید آنها را به روی سطح زمین انتقال داد که این مهم از طریق گرادیان هوای آزاد میسر می‌شود.

از بسط به سری تیلور به دست می‌آید:

$$g_{P'} = g_P + \frac{\partial g}{\partial H} H_{P'}$$

(تغییرات شتاب ثقل نسبت به ارتفاع در هوای آزاد یعنی جایی که جرم وجود ندارد)

تصحیح هوای آزاد — گرادیان هوای آزاد

$$g_P = g_{P'} - \frac{\partial g}{\partial H} H_{P'}$$

یادآوری: Δg را برای اینجا می‌خواستیم:

$$\oiint (\Delta g)\, S(\psi)\, ds$$

$$g_P = g_{P'} + \delta g^{FA} \longrightarrow \boxed{\delta g^{FA} = \pm 0.3086 \left(\frac{mgal}{m}\right) H}$$

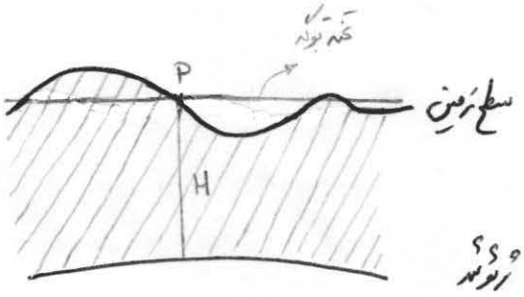
از زمین دور : تصحیح منفی
به زمین نزدیک : تصحیح مثبت

$$\Delta g^{FA} = g_P - \gamma_0 = \underbrace{g_{P'}}_{\text{محل مشاهده}} + \delta g^{FA} - \gamma_0$$

آنومالی جاذبهٔ هوای آزاد

این روابط مربوط به هوای آزاد است یعنی جایی که جرم وجود ندارد. اگر جرم وجود داشته باشد ابتدا آن را حذف می‌نماییم سپس نقطه را روی ژئوئید منتقل می‌کنیم.

میزان جاذبه‌ی بخش جرمی بالای ژئوئید را حساب می‌کنیم و آن را حذف می‌نماییم.



* چرا ابتدا باید تکلیف جرم مشخص شود؟ چون مسئله $\Delta T = 0$ برای خارج ژئوئید بود یعنی جایی که جرم وجود نداشت و مشاهدات روی ژئوئید (مقدوری) انجام می‌پذیرفت.

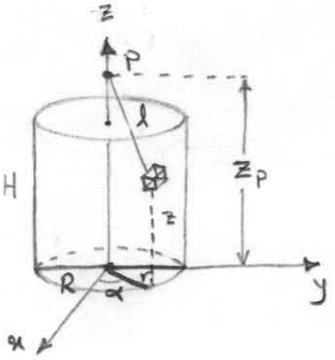
حذف جرم در دو مرحله انجام می‌پذیرد :

① اثر تخته بوگه ← جاذبه تخته بوگه

② اثر توپوگرافی (بالا یا پایین ارتفاع نقطه)

محاسبه اثر جرم

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases}$$



اثر جاذبه این استوانه بر نقطه P
(حل از طریق انتگرال سه‌گانه)

$$W = G \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{l}\, dv$$

$rdrd\alpha dz$
سیستم مختصات استوانه‌ای

$$l^2 = (z_P - z)^2 + r^2$$

$$W_P = G\rho_0 \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{R} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{r\,d\alpha\,dr\,dz}{\sqrt{(z_P - z)^2 + r^2}}$$

برای سادگی، دانسیته ثابت در نظر گرفته می‌شود $\left(\rho_0 = 2.67 \frac{g}{cm^3}\right)$

① پتانسیل استوانه را به دست می‌آوریم:

جواب انتگرال :

$$W_P = \pi G \rho_0 \Big[(Z_P - H)^2 - Z_P^2 - (Z_P - H)\sqrt{R^2 + (Z_P - H)^2} + Z_P\sqrt{R^2 + Z_P^2} + \cdots$$

② اثر جاذبه حاصل از استوانه در نقطه P را می‌یابیم.

$$g = -\frac{\partial W}{\partial h} \longrightarrow \delta g = -\frac{\partial W}{\partial Z_P}$$

③ نقطه را به روی سطح استوانه منتقل می‌نماییم $(Z_P = H)$

$$\cdots + R^2 \ln\left(\frac{Z_P + \sqrt{R^2 + Z_P^2}}{Z_P - H + \sqrt{R^2 + (Z_P - H)^2}}\right)\Big]$$

$$\delta g = -2\pi G \rho_0 \left[H + R - \sqrt{R^2 + H^2} \right] = -2\pi G \rho_0 \left[H + R - R\sqrt{1 + H^2/R^2} \right] =$$

$$-2\pi G \rho_0 \left[H + R - R\left(1 + \frac{1}{2}\frac{H^2}{R^2} + \cdots\right) \right] = -2\pi G \rho_0 \left[H + R - R\left(\frac{-1}{2}\frac{H^2}{R} + \cdots\right) \right]$$

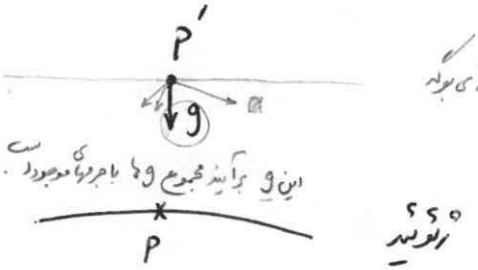
همگی در مخرج R دارند

④ برای محاسبه اثر بوگه $R \to \infty$

$$\delta g = -2\pi G \rho_0 \left[H - \frac{1}{2}\frac{H^2}{R} + \cdots \right] =$$

$$\boxed{\delta g^{SB} = -2\pi G \rho_0 H \doteq -0.1119 \left(\frac{mgal}{m}\right) \cdot H}$$

این تصحیح همواره منفی است. جرم‌های پایین تخته بوگه $\vec{g}$ را به سمت خود می‌کشند. یعنی بردار $\vec{g}$ که همواره به سمت مرکز است حاصل برآیند اجرام پایین تخته بوگه می‌باشد. بنابراین اگر اثرات این اجرام حذف شود از عدد روی گرادیمتر کم می‌شود.



آنومالی ساده بوگه

$$\Delta g^{SB} = g_P - \gamma_0 = g_{P'} + \delta g^B + \delta g^{FA} - \gamma_0$$

از گرادیمتر

$$g_P = g_{P'} - 0.1119\, H + 0.3086\, H$$

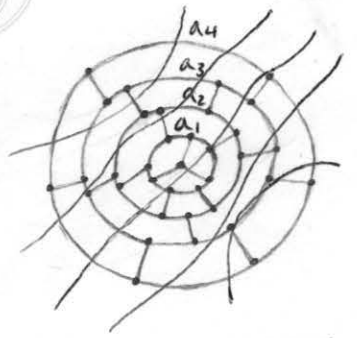
حذف اثر توپوگرافی :

① از یک نقشه‌ی توپوگرافی استفاده می‌کنیم و نقطه را روی آن مشخص می‌نماییم.

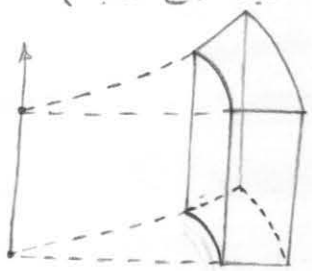
② یک تمپلیت به این شکل با دوایر متحدالمرکز می‌سازیم. روی یک کاغذ پوستی این شکل را با مقیاس نقشه می‌کشیم. این فرآیند کاملاً تجربی است (انتخاب تعداد دوایر و نقاط)

③ با استفاده از منحنی میزان‌ها به نقاط تقاطع ارتفاع می‌دهیم. (بازه تغییرات ارتفاع محدود باشد)

④ اثر جاذبه را با انتگرال نیوتن محاسبه می‌کنیم.



زوایا معلوم - فواصل معلوم - ارتفاع‌ها معلوم



شعاع دایره نقطه تقاطع — زاویه‌ای که از مرکز دارد — نقشه توپوگرافی

$$W = G\rho_0 \int_0^{\Delta\alpha}\int_0^{\Delta\alpha}\int_0^{\Delta H}$$

جواب نهایی حاصل از انتگرال‌ها :

توپوگرافی — شعاع دوایر

$$\delta g_i^{T} = \Delta\alpha \cdot G \cdot \rho_0 \left[\sqrt{a_i^2 + \Delta H_i^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + \Delta H_i^2} + a_{i+1} - a_i \right]$$

$$\delta g^T = \sum_{i=1}^{n} \delta g_i^T$$

اثر این نحس همواره باعث کاهش مقدار اندازه‌گیری می‌شود. لذا باید اضافه شود.

این تصحیح همواره مثبت است:

وقتی تخته را در نظر می‌گیریم اثر این نحس اضافه حذف می‌شود. لذا الان باید اضافه شود.

$$\Delta g^{FA} = g_{P'} + \delta g^{FA} - \gamma_0$$ آنومالی هوای آزاد

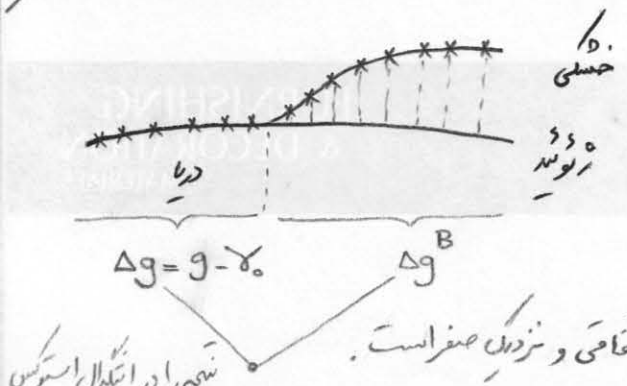
$$\Delta g^{SB} = g_{P'} + \delta g^{FA} + \delta g^B - \gamma_0$$ آنومالی ساده بوگه

$$\Delta g^{B} = g_{P'} + \delta g^{FA} + \delta g^B + \delta g^T - \gamma_0$$ آنومالی کامل بوگه

$$N = \frac{G\delta M}{R\cdot\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g^B\, S(\psi)\, ds$$

انجام تصحیحات جاذبه به دو دلیل : براساس فرض مسئله

① مشاهدات روی ژئوئید است.
② خارج ژئوئید هیچ جرمی نباشد.
} سطح مرجع مسئله ژئوئید است.



یک مسئله خطی شده در هر شکنی: $\delta l = A\,\delta x$ ($l = f(x)$) ← انتظار ما رفتاری اتفاقی و نزدیک صفر است.

مسئله بنیادی ژئودزی (تابعی از T)

انتظار برای مقادیر خطی شده $g = |\nabla W| \Rightarrow \Delta g = AT$ نیز رفتاری اتفاقی است اما چنین نمی‌شود.

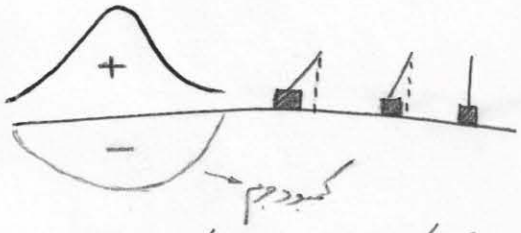
نتیجه را در انتگرال استوکس یا انتگرال وینینگ-مایز قرار می‌دهیم تا ع و η بدست آید

در دریا Δg به صورت سیستماتیک (و نه اتفاقی) $\Delta g = g - \gamma_0 > 0$ در دریا $g > \gamma_0$ ← جرم بیشتر

در خشکی Δg به صورت سیستماتیک $\Delta g^B = \underbrace{g + \delta g^{FA} + \delta g^B + \delta g^T}_{g'} - \gamma_0 < 0$ در خشکی $g' < \gamma_0$ ← جرم کمتر

نتیجه اینکه پوسته‌ی زمین در یک تعادل به سر می‌برد که به آن تعادل ایزوستازی گویند.

به نوعی یعنی در کوهستان در زیر ژئوئید جرم کمتر و در دریا دانسیته بالاتر است.



توجه: در یک منطقه‌ی کوهستانی، طبیعی است که وقتی به کوهستان (توده جرم) نزدیک می‌شویم خط شاقولی دستگاه به سمت آن کشیده شود. اما برخلاف تصور هیچ تغییری در زاویه خط شاقولی نداریم. یعنی جرم کوهستان تأثیری بر خط شاقولی ندارد یا به عبارت دیگر زیر کوهستان کمبود جرم وجود داشته که این اثر را خنثی نموده است. وقتی جرم را حذف می‌کنیم باعث می‌شود این کمبود جرم نمایان و Δg منفی شود.

وقتی Δg^B حاصل از بالا را در رابطه قرار دهیم:

$$N = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g^B S(\psi)\, ds$$

$N = 400m - 500m$ ؛ بازه تغییرات N چهار تا پنج برابر انتظار می‌شود.

اثر ایزوستازی مانند قطب مثبت و منفی آهنربا است. وقتی قطب مثبت حذف می‌شود، جسمی که در میدان قرار دارد به سمت قطب منفی کشیده می‌شود. بنابراین برای اینکه تغییر نکند، قطب منفی نیز باید حذف شود.

برای مدلسازی تعادل ایزوستازی:
① مدل پرات - هایفورد
② مدل ایری - هیسکانن
③ مدل وینینگ - مایز
} در کارهای ژئودینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرند.

توجه شود کفایتاً به این نتیجه خواهیم رسید که اصلاً نیازی به حذف اثرات جرمی نیست چون خود پوسته در حالت تعادل است. فقط کافی است مشاهدات را به روی ژئوئید منتقل کنیم.

$$g + \delta g^{FA} + \underbrace{\delta g^{SB} + \delta g^B + \delta g^I}_{\text{تقریباً صفر}} - \gamma_0 = \Delta g^I$$

$$\Delta g^I \doteq \Delta g^{FA} = g + \delta g^{FA} - \gamma_0$$

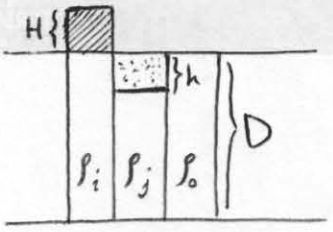
پس $N = \frac{G\delta M}{R\gamma_0} - \frac{\delta W}{\gamma_0} + \frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint \Delta g^I S(\psi)\, ds$

شبکه و در منطقه

Δg^B فقط به دانسیته وابسته است ولی Δg^{FA} فقط به ارتفاع . چرا؟ سوال امتحان

← اکتشافات معدنی چون تغییرات جانبی را می‌دهد.

① تعادل ایزوستازی با استفاده از مدل پرات - هایفورد :



سطح دریا

ستونهای مجزایی که در یک عمق ثابت به سطح ماگما فشار وارد می‌آورد.

چون فشارها برابر است

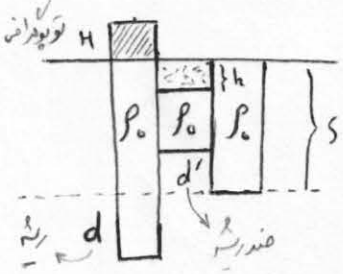
عمق ثابت ولی دانسیته متفاوت

$$D\rho_0 = (D+H)\rho_i \Rightarrow \boxed{\rho_i = \frac{D}{D+H}\rho_0}$$

$$D\rho_0 = \rho_j (D-h) + h \cdot \rho_{w_{\text{آب}}} \Rightarrow \boxed{\rho_j = \frac{D\rho_0 - h\rho_w}{D-h}}$$

مشاهدات

در یک منطقه کوهستانی $\rho_i < \rho_0$ ← اختلاف این دو مقدار اثر ایزوستازی را می‌دهد.



② تعادل ایزوستازی با استفاده از مدل ایری - هیسکانن :

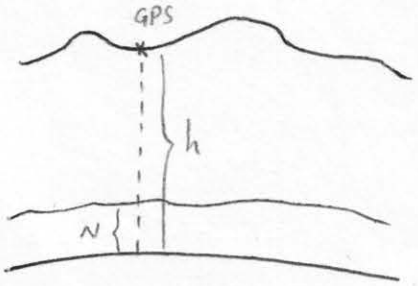
دانسیته‌ی پوسته ثابت فرض می‌شود (مانند یخی که در آب شناور است، پوسته در ماگما شناور است)

براساس قاعده ارشمیدس بدست می‌آید.

$$\begin{cases} d = 4.45\,H & \text{ارتفاع کوهستان} \\ d' = 2.73\,h & \text{عمق اقیانوس} \end{cases}$$

ریشه به خاطر منطقه کوهستانی است. وقتی اثر H را برمی‌داریم باید اثر ریشه را نیز برداریم تا ژئوئید جابه‌جا نشود (مثل یخی که قسمت بالایش را بریده‌ایم)

در بعضی از قسمتهای زمین مدل اول برقرار است و در برخی از قسمتها مدل دوم . برخی عوارض با اولی توجیه می‌شوند و برخی با دومی . در مورد مسئله‌ی ما مدل دوم توجیه بهتری ارائه می‌دهد.



سطح زمین

ژئوئید

بیضوی

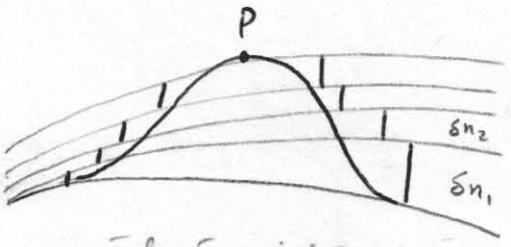
سیستم های ارتفاعی :

ارتفاع ارتومتریک : مورد استفاده در کارهای عمرانی

$$h_{GPS} - N = H^{\circ}$$

چرا [ارتفاع] ژئوئید را تعیین می‌کنیم؟

① ترازیابی هندسی :

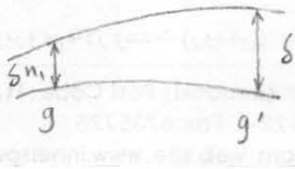


سطوح همپتانسیل (موازی نیستند)

عیب : اگر از مسیرهای مختلف ترازیابی را انجام دهیم مقادیر مختلفی برای نقطه P بدست می‌آید. چون در ترازیابی ارتفاع سطوح هم پتانسیل اندازه‌گیری می‌شود. یعنی ارتفاع ترازیابی به مسیر وابسته است : $\oint \delta n\, dn \neq 0$

کمیتی که دیفرانسیل کامل نیست.

در ترازیابی مسیر بسته نیز نباید به مقادیر ثابت برسیم.



$dW = -g\,dn_1$

$dW = -g'\,dn_2$

حسن : واحد برحسب m

اختلاف پتانسیل سطوح همپتانسیل ثابت ولی فاصله هندسی آنها متفاوت است. تغییر نقطه به نقطه g (به دلیل تغییرات دانسیته درونی) باعث موازی نشدن سطوح همپتانسیل می‌شود.

$$dW = -g\,dn$$

$$g\,dn_1 = g'\,dn_2 \Rightarrow dn_1 = \frac{g'}{g}\,dn_2 \Rightarrow g'/g \neq 1 \Rightarrow dn_1 \neq dn_2$$

② عدد ژئوپتانسیل : سیستم ارتفاعی برمبنای پتانسیل

کاهش پرش نقطه بالاتر است

$$W_0 - g_1\delta n_1 - g_2\delta n_2 - \cdots - g_n\delta n_n = W_P$$

یعنی همراه با دهنه‌ی ترازیابی، شتاب ثقل (g) هم اندازه‌گیری شود. کمیت $g.dn$ دیفرانسیل کامل است.

$$\oint g\,dn = 0$$

$$C_P = W_0 - W_P = \sum g_i\,\delta n_i$$

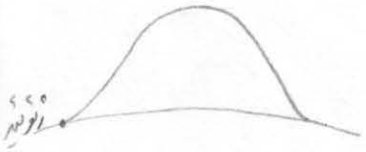
عدد ژئوپتانسیل

$$\Delta C_{AB} = C_B - C_A = \int_A^B g\,dn \Rightarrow \Delta C_{AB} \doteq \sum_{i=A}^{B} g_i\,\delta n_i$$

اختلاف عدد ژئوپتانسیل

حسن : مستقل از مسیر

عیب : واحد برحسب m^2/s^2 (واحد پتانسیل) ← به درد کارهای عملی نمی‌خورد - تصور هندسی از آن وجود ندارد.



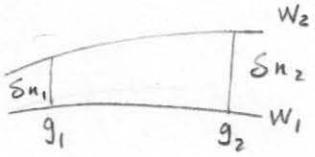
GPS

$$h = H^\circ + N$$

اگر ژئوئید را داشته باشیم نیاز به شبکه ارتفاعی نداریم.

نقطه‌ای در کنار دریا به عنوان ارتفاع ژئوئید در نظر می‌گیرند و آن را به سایر نقاط منتقل می‌نمایند.

① ترازیابی هندسی اختلاف ارتفاع دو سطح همپتانسیل را می‌دهد.



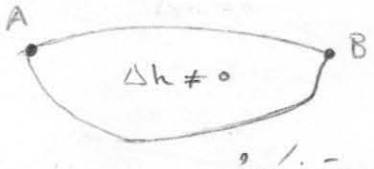
در تمام نقاط یکسان

$$dW = W_2 - W_1$$

به دلیل تغییرات چگالی و در نتیجه g، سطوح همپتانسیل برابر نیستند.

$$dW = -g\,\delta n \Rightarrow dW = -g_1\delta n_1 = -g_2\delta n_2$$

$$\delta n_2 = \frac{g_1}{g_2} \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} \neq 1 \Rightarrow \delta n_2 \neq \delta n_1$$



$$\oint dn \neq 0 \longrightarrow$$ دیفرانسیل کامل نیست - وابسته به مسیر

② سیستم جایگزین مبتنی بر پتانسیل (اختلاف پتانسیل) برای استقلال از مسیر

از ژئوئید دور می‌شویم از پتانسیل کم می‌شود.

پتانسیل ژئوئید

$$W_P = W_0 - \oint g\,dn$$

چون عدد پتانسیل بسیار بزرگ است، مقدار W_0 را از تمام مشاهدات حذف می‌کنیم ← نمادی برای ارتفاع نقطه

عدد ژئوپتانسیل

$$C_P = \overline{W_0 - W_P} = \int g\,dn$$

عددی در حدود ۱۰ برابر ارتفاع نقطه

در اینجا هم مسیرهای مختلف اعداد مختلف را می‌دهند ولی اختلاف فاحش نیست.

$$\Delta C_{AB} = C_B - C_A = \sum_{i=A}^{B} g_i\,\delta n_i$$

$$dW = -\underbrace{g}_{\text{حدود ۱۰}} \cdot \underbrace{\delta n}_{\text{اختلاف ارتفاع}} \quad \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

پس برای اصلاح، اگر ارتفاع برحسب عدد ژئوپتانسیل را بر کمیتی با واحد $\frac{m}{s^2}$ تقسیم کنیم، مشکل واحد نیز مرتفع می‌شود.

واحد شتاب

در سیستم ارتفاعی دینامیک سطوح همپتانسیل با هم موازیند.

③ ارتفاع دینامیک ← حسن: مستقل از مسیر - واحد برحسب m

$$H_P^D = \frac{C_P}{\gamma_0}$$

γ_0 به ازای $\varphi = 45^\circ$ را بیابیم (در نیم کره شمالی). عدد ژئوپتانسیل را بر آن تقسیم کنیم.

به صورت قراردادی ← می‌تواند هر عددی باشد.

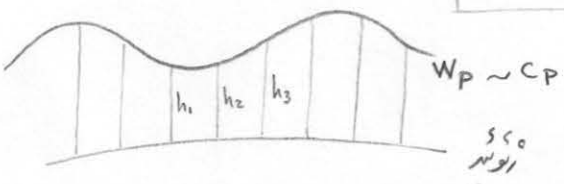
$$\Delta H_{AB}^D = H_B^D - H_A^D = \frac{C_B}{\gamma_0} - \frac{C_A}{\gamma_0} = \frac{C_B - C_A}{\gamma_0} = \frac{\Delta C_{AB}}{\gamma_0} = \frac{1}{\gamma_0}\int_A^B g\,dn$$

چون اندازه‌گیری‌ها به صورت گسسته است : $\Delta H_{AB}^D \simeq \frac{1}{\gamma_0}\sum_{i=A}^{B} g_i\,\delta n_i = \frac{1}{\gamma_0}\sum_{i=A}^{B}(g_i - \gamma_0 + \gamma_0)\,\delta n_i$

$$= \sum_{i=A}^{B}\left(\frac{g_i - \gamma_0 + \gamma_0}{\gamma_0}\right)\delta n_i = \underbrace{\sum_{i=A}^{B}\delta n_i}_{\text{مجموع اندازه‌گیری‌ها شبکه تراز یابی}} + \underbrace{\sum_{i=A}^{B}\left(\frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0}\right)\delta n_i}_{DC_{AB}}$$

$$\boxed{\Delta H_{AB}^D = \sum \delta n_i + DC_{AB}}$$

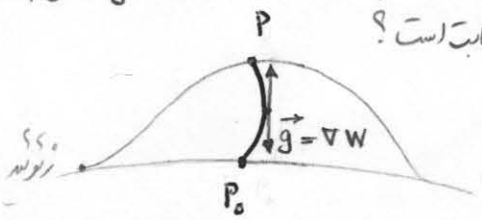
Dynamic Correction



عیب: تمام نقاط روی سطح همپتانسیل دارای ارتفاع دینامیک یکسانی خواهند بود.

ما می‌خواهیم هم خاصیت فیزیکی و هم خاصیت هندسی عوارض را داشته باشیم.

به عنوان مثال ممکن است سطح همپتانسیلی از دو نقطه روی سطح توپوگرافی عبور کند (بالا و پایین کوه). می‌دانیم که آب روی سطح همپتانسیل حرکت نمی‌کند (خاصیت فیزیکی) امّا همواره آب از بالا به پایین کوه جاری می‌شود (خاصیت هندسی). به عبارت دیگر ممکن است آب در سطحی ساکن باشد (یعنی روی سطح همپتانسیل قرار داشته باشد) ولی آیا از نظر هندسی نیز ارتفاع آن سطح از ژئوئید ثابت است؟



④ ارتفاع اورتومتریک ← حسن: مستقل از مسیر - واحد برحسب m - معنای هندسی

فاصله یک نقطه از ژئوئید در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه

برای تمرین

معادله پارامتریک یک خم : $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

ارتفاع اورتومتریک : $H_P^O = \int_{P_0}^{P} |\underbrace{\dot{\vec{\alpha}}(t)}_{\text{مشتق}}|\,dt = \int_{P_0}^{P} g\,dt = -\int_{P_0}^{P}\frac{dW}{g} = -\frac{1}{\bar{g}_P}\int_{P_0}^{P} dW$

میانگین در طول خط شاقولی

ادامه در پایین

معادله خم مماس بر یک خم : $\dot{\vec{\alpha}}(t) = -\nabla W = -\vec{g}$ به صورت قراردادی به سمت بالا مثبت

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial W}{\partial z}\cdot dz = \overbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)}^{\vec{g}}\overbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)}^{\dot{\vec{\alpha}}(t)}dt$$

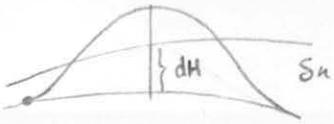
$$= \vec{g}\cdot(-\vec{g})\,dt \rightarrow \boxed{g\,dt = -\frac{dW}{g}}$$

$$H_P^O = -\frac{1}{\bar{g}_P}(W_P - W_0) = \frac{W_0 - W_P}{\bar{g}_P} = \frac{C_P}{\bar{g}_P}$$

شتاب ثقل

در اینجا عدد ژئوپتانسیل تقسیم بر میانگین در هر نقطه می‌شود، اما در ارتفاع دینامیک کل شبکه تقسیم بر یک عدد می‌شد.

$$H_A^\circ = \frac{C_A}{\bar{g}_A}$$

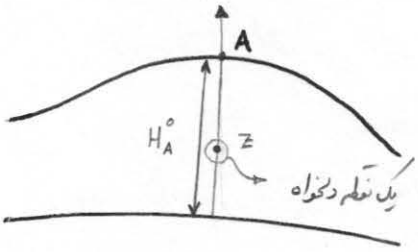


اختلاف پتانسیل در هر جا ثابت

$$H_A^\circ = -\frac{1}{\bar{g}_A}\int_0^A \overset{g\,dH}{dW} = \frac{1}{\bar{g}_A}\int_0^A g\,dH \Rightarrow \boxed{\bar{g}_A = \frac{1}{H_A^\circ}\int_0^A g\,dH}$$

میانگین شتاب ثقل نقطه A در امتداد خط شاقولی

$g(z)\,dz$



این یک تعبیر برای $\bar{g}$ می‌باشد. امّا در عمل $\bar{g}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

از بسط به سری تیلور بدست می‌آید: مشتق دوم بسیار ناچیز می‌شود

$$g(z) = g + \frac{\partial g}{\partial z}(H_A^\circ - z)$$

یادآوری - تصحیح پوانکاره - پری

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2Jg$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = -2\omega^2 - 2\gamma J^N$$

فرض تصحیح: $Jg = \gamma J^N$

$$\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 4\pi G\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}_{-0.3086} + 4\pi G\underbrace{\rho}_{\rho = 2.67}}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial z} = -0.0848 \ \text{mgal/m}}$$

$$g(z) = g + 0.0848\,(H_A^\circ - z)$$

بستگی به جهت دارد (بالا به پایین یا پایین به بالا)

به سمت مرکز می‌رویم، مقدار g افزایش می‌یابد

در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$\bar{g}_A = \frac{1}{H_A^\circ}\int_0^A [g + 0.0848\,(H_A^\circ - z)]\,dz$$

(انگار $z = \frac{H_A^\circ}{2}$)

$\bar{g}$ در نصف ارتفاع: $\bar{g}$

$$\bar{g}_A = g + 0.0424\,H_A^\circ$$

مشاهده روی زمین — نصف مقدار فوق

$$\boxed{\bar{g} = g - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} + 4\pi G\rho\right)H_A^\circ}$$

$$\bar{g} = g + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}H_A^\circ$$

$$\boxed{H_A^\circ = \frac{C_A}{g + 0.0424\,H_A^\circ}}$$

ارتفاع اورتومتریک هلمرت

تشکیل یک معادله درجه دوم می‌دهیم و از حل آن دو مقدار برای H_A° پیدا می‌کنیم. یکی از این مقادیر بسیار بی‌ربط بوده و دیگری چیزی در نزدیکی سایر ارتفاع‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد. همچنین می‌توان ارتفاع حاصل از ترازیابی مستقیم را در رابطه قرار دهیم تا ارتفاع اورتومتریک بدست آید.

$$\Delta H_{AB}^\circ = H_B^\circ - H_A^\circ = \sum_{i=A}^{B} \delta n_i + OC_{AB}$$

$$\Delta H_{AB}^D = H_B^D - H_A^D = \sum_{i=A}^{B} \delta n_i + \underbrace{DC_{AB}}_{\sum\left(\frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0}\right)\delta n_i}$$

$$H_A^\circ = \frac{C_A}{\bar{g}_A}, \quad H_B^\circ = \frac{C_B}{\bar{g}_B}$$

$$H_A^D = \frac{C_A}{\gamma_0}, \quad H_B^D = \frac{C_B}{\gamma_0}$$

برای محاسبه Orthometric Correction

$$\frac{H_A^0}{H_A^D} = \frac{\gamma_0}{\bar{g}_A} \qquad H_A^0 = \frac{\gamma_0}{\bar{g}_A} H_A^D$$

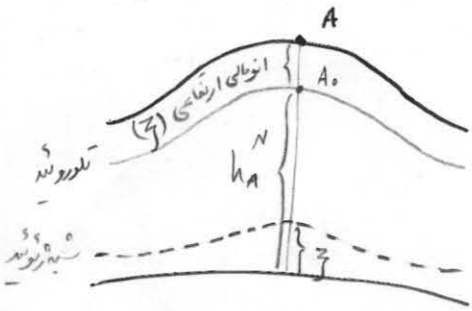
$$\frac{H_B^0}{H_B^D} = \frac{\gamma_0}{\bar{g}_B} \qquad H_B^0 = \frac{\gamma_0}{\bar{g}_B} H_B^D$$

$$\Rightarrow \Delta H_{AB}^0 = \frac{\gamma_0}{\bar{g}_B} H_B^D - \frac{\gamma_0}{\bar{g}_A} H_A^D + \underbrace{H_A^D - H_A^D + H_B^D - H_B^D}_{\text{اضافه و کم می کنیم}}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{AB}^0 = H_B^D - H_A^D + \left(1 - \frac{\gamma_0}{\bar{g}_A}\right) H_A^D - \left(1 - \frac{\gamma_0}{\bar{g}_B}\right) H_B^D$$

$$\Delta H_{AB}^0 = \sum_{i=A}^{B} \delta n_i + \underbrace{DC_{AB} + \left(1 - \frac{\gamma_0}{\bar{g}_A}\right) H_A^D - \left(1 - \frac{\gamma_0}{\bar{g}_B}\right) H_B^D}_{OC_{AB}}$$

$W_A = U_A + T_A$



مشکل همه ی سیستم های ارتفاعی قبل استفاده از ژئوئید به عنوان سطح مبنا می باشد که بدست آوردن آن براساس تایدگیج مشکل است. (تایدگیج سطح متوسط آب دریا را می دهد و نه ژئوئید)

⑤ ارتفاع نرمال :

ژئوئید سطح مبنا نیست و بیضوی جایگزین آن شده (بیضوی ای که مولد بردار ثقل نرمال است)

تلوروئید : مکان هندسی نقاطی که پتانسیل ثقل نرمال (U_A) در آن نقاط با پتانسیل ثقل واقعی نظیرش (W_A) بیضوی روی زمین با هم برابرند.

$$H_A^N = \frac{C_A}{\bar{\gamma}_A}$$

ارتفاع نرمال : فاصله ی تلوروئید تا بیضوی یا فاصله سطح زمین تا شبه ژئوئید در راستای خط شاقولی نرمال

مبدأ: شبه ژئوئید / بیضوی

$$\bar{\gamma}_A = \gamma_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial h} H_A^N = \gamma_0 - 0.1543\, H_A^N \qquad -0.3086$$

$\bar{\gamma}$ در نصف ارتفاع : $\bar{\gamma}$

در حالت قبل از γ_0 استفاده شد چون از مشاهدات بدست می آمد در اینجا γ_0 موجود است.

$$\boxed{H_A^N = \frac{C_A}{\gamma_0 - 0.1543\, H_A^N}}$$

توجه: شبه ژئوئید هیچ مفهوم فیزیکی (مانند ژئوئید) ندارد؛ صرفاً یک پارامتر هندسی است و سطح همپتانسیل محسوب نمی شود.

$$\Delta H_{AB}^N = H_B^N - H_A^N = \sum \delta n_i + NC_{AB}$$

زمانی دو سیستم اورتومتریک و نرمال با هم یکی می شوند که ژئوئید و بیضوی بر هم منطبق گردند. یعنی: $T = 0$

$$W_A = U_A + T_A \xrightarrow{T=0} U_{A_0} = W_A$$

حسن: بیضوی تعیین شده و محل آن مشخص است (البته گاهی عدم انطباق با واقعیت وجود دارد)