فیزیکال

استاد: دکتر صفری

درس ژئودزی فیزیکی:

جلسه‌ی اول: ۹۲/۶/۲۵

یک تعریف عام و ساده: "ژئودزی فیزیکی علمی است که تأثیر عوامل و پدیده‌های فیزیکی (به طور خاص تأثیر فیزیک زمین) را بر مشاهدات بررسی می‌کند.

از جمله این عوامل عبارتند از: ۱- انکسار (پدیده‌ی شکست نور) = تأثیر بسیار زیادی بر مشاهدات دارد و روش‌های مدل سازی و اعمال آن را می‌دانیم.

۲- میدان مغناطیسی = تأثیر ناچیزی دارد و اکثراً می‌توان از آن صرف نظر کرد.

۳- نیروی کوریولیس (نیروی اینرسیال / ظاهری*) = چون فقط تحت شرایط خاص وجود دارد اکثراً با مساعد کردن شرایط اندازه‌گیری از ایجاد آن جلوگیری می‌شود. اما مثلاً در مورد ثقل سنجی که ابزار اندازه‌گیری ما در platform متحرک قرار دارد باید اثر این نیرو را اعمال کرد.

۴- $\boxed{\text{نیروی گریز از مرکز}}$ (نیروی ظاهری) = با $\vec{f_c}$ نمایش داده می‌شود. چرا ظاهری؟! حرکت قطار را در نظر بگیرید. شخصی که درون قطار است، وقتی قطار می‌پیچد، احساس می‌کند نیرویی او را به طرف بیرون پرتاب می‌کند. اما ناظر خارجی چنین نیرویی نمی‌بیند، فقط می‌بیند که هنگام تغییر مسیر قطار، شخص تمایل داشته به حرکت مستقیم الخط خود ادامه دهد.

✓ این نیرو را باید حتماً در نظر بگیریم چون مشاهدات ما روی زمین انجام می‌شود. (مثل شخصی که درون قطار است و اگر بخواهیم معادلات حرکت را برای او بنویسیم باید این نیرو را هم لحاظ کنیم.)

۵- $\boxed{\text{نیروی جاذبه}}$ = با $\vec{f_g}$ نمایش داده می‌شود. مثلاً اگر دستگاه را تراز کنیم به عددی می‌رسیم که ناشی از میدان (اصلاح) جاذبه‌ای است که ما در نظر گرفتیم با میدان جاذبه‌ی واقعی.

✓ این نیرو را حتماً باید در نظر بگیریم.

*. نیروی ظاهری = نیرویی است که وجود خارجی ندارد و فقط برای برقراری معادلات ریاضی اضافه می‌شود.

نکته‌ای در مورد نیروی کوریولیس : در یک سیستم اینرسیال قوانین نیوتن مثلاً $\vec{F} = m\vec{a}$ صدق می‌کند اما در سیستم غیراینرسیال خیر و نیاز به یک ترم تصحیح دارد.

$$\vec{F} = m\vec{a} + \boxed{\text{تصحیح}}$$

← نیروی کوریولیس : این نیرو وجود خارجی ندارد و فقط برای برقراری معادلات ریاضی اضافه می‌شود.

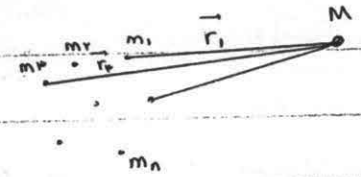
می‌توانیم با این استدلال که وسیله اندازه‌گیری مشاهدات ما نسبت به یک سیستم اینرسیال ثابت است، از آن صرف‌نظر کنیم.

در درس فیزیک ما به بررسی دو نیروی گریز از مرکز و جاذبه می‌پردازیم.

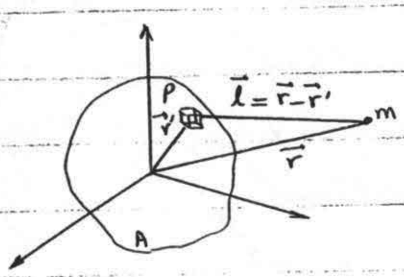
نیروی جاذبه : $\vec{f}_g$:

فرض کنیم جسم نقطه مبدا سیستم مختصات است.

$$\vec{f}_g = -\frac{GMm}{|r|^3}\vec{r} \qquad G = ۶٫۶۷۴\times ۱۰^{-۱۱}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}$$



$$\vec{f}_g = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{Mm_i}{|r_i|^3}\vec{r}_i$$



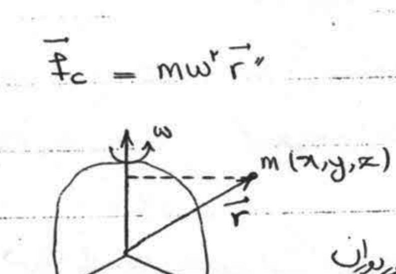
* در تمام نقاط جسم A، دانسیته باید معلوم باشد.

$$\vec{f}_g = \underbrace{\left(-G\iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\vec{l}\,dv\right)}_{\vec{a}_g = \text{شتاب جاذبه}} m$$

در مقایسه با $\vec{F} = m\vec{a}$:

نیروی گریز از مرکز : $\vec{f}_c = m\omega^2 \vec{r}''$ $\vec{r}''$: فاصله از محور دوران

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$\vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}$ با فرض اینکه محور دوران محور z باشد.

$|r''| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{f}_c = m\omega^2 \vec{r}'' = m\vec{a}_c$

$\vec{a}_c =$ شتاب گریز از مرکز

$\vec{f}_{\text{ثقل}} = \vec{f}_g + \vec{f}_c$

* هدف درس ژئودزی فیزیکال مطالعه‌ی نیروی ثقل و تأثیرات آن روی مشاهدات است.

$$\vec{f} = \left(-G\iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\,\vec{l}\,dv\right)m + m\omega^2 r''$$

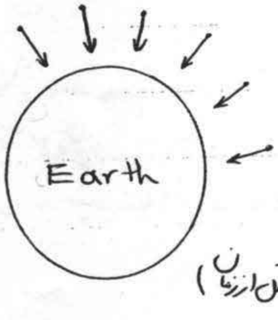
$$= \underbrace{\left(-G\iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\,\vec{l}\,dv + \omega^2 r''\right)}_{g \,\equiv\, \text{شتاب ثقل}} m$$

نقش یک ضریب مقیاس را دارد.

$\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_c$

رابطه‌ی فوق یک مشکل اساسی دارد: ما دانسیته‌ی زمین را با تقریب می‌شناسیم. دانسیته زمین به صورت شعاعی از مرکز زمین به سمت بیرون کم می‌شود (از ۱۳٫۵ به ۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب) که البته در گذر از لایه‌ها (مثلاً هسته درونی به بیرونی، هسته به گوشته و ...) دچار گسستگی هم می‌شود. پس این تقریب برای کار ژئودتیک مناسب نیست و نمی‌توان از روابط فوق استفاده کرد.

اما به هر حال باید به نحوی از روابط فوق استفاده کرد. به همین منظور ابتدا آن را قدری ساده می‌کنیم. می‌دانیم میدان برداری تابعی است که به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت می‌دهد و کار کردن با آن سخت است. پس سعی می‌کنیم یک میدان اسکالر نظیر (با تناظر یک به یک) برای آن پیدا کنیم. البته تمام میدان‌های برداری این ویژگی را ندارند. فقط میدان‌های غیر دورانی این خاصیت را دارند که خوشبختانه میدان ثقل (گریز از مرکز و جاذبه) از این نوعند.



یک مشکل دیگر این است که، در حالت کلی، دانسیته زمین با زمان تغییر می‌کند و به تبع آن میدان ثقل هم تغییر می‌کند. این تغییرات در شاخه‌ای از علم ژئودزی به نام «ژئودینامیک» بررسی می‌شود. اما در شاخه‌ی دیگری از علم ژئودزی به نام «ژئودزی استاتیک» که ما با آن کار می‌کنیم ثابت در نظر گرفته می‌شود. (مستقل از زمان)

میدان غیردورانی = کار برای انتقال واحد جرم به مسیر بستگی ندارد / انتگرال آن روی مسیر بسته صفر است / curl آن مساوی صفر است

$$\oint \vec f\cdot dr = \iint \underbrace{curl(\vec f)\cdot ds}_{\text{کار انجام شده در واحد سطح}} = 0$$

وقتی چنین شرایطی داشته باشد، می‌توان یک تابع اسکالر مانند V (تابع پتانسیل) به آن نسبت داد که $\vec f = \nabla V$

رابطه بین میدان برداری و اسکالرش مثل مشتق و انتگرال است

$$\vec f = \vec f_g + \vec f_c = \nabla V_g + \nabla V_c = \underbrace{\nabla(V_g + V_c)}_{\text{پتانسیل نیروی ثقل} = V}$$

$$\begin{array}{ccccc} \vec f & = & \vec f_g & + & \vec f_c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V & = & V_g & + & V_c \end{array}$$

$$V_g(\vec r) = \iiint f_g(\vec r)\,dr \quad ; \quad f_g(\vec r) = \nabla V_g$$

پتانسیل کشش است از جنس کار

$$V_c(\vec r) = \iiint f_c(\vec r)\,dr \quad ; \quad f_c(\vec r) = \nabla V_c$$

$$\begin{array}{ccccc} \vec g & = & \vec a_g & + & \vec a_c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W & = & W_g & + & W_c \end{array}$$

پتانسیل $W \xrightarrow{\text{گرادیان}} a$ شتاب

شتاب $a \xrightarrow{\text{انتگرال}} W$ پتانسیل

$$W_g = \iiint a_g(\vec r)\,dr \quad ; \quad \vec a_g = \nabla W_g$$

$$W_c = \iiint a_c(\vec r)\,dr \quad ; \quad \vec a_c = \nabla W_c$$

$$g = \nabla W_g + \nabla W_c = \underbrace{\nabla(W_g + W_c)}_{\text{پتانسیل ثقل}} = \nabla W$$

از جنس کار

پتانسیل = چقدر کار لازم است تا نقطه مادی را از مبدا تا نقطه مورد نظر جابجا کنیم

$$w_g = -\int_{\infty}^{r} \frac{GM}{r^2}\,dr = \frac{GM}{r}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{GM}{r}$$

که مبدا برجایی است که کار صفر باشد. کار در بی‌نهایت صفر است.

چون انتگرال گیری معین است معمولاً آزمایش می‌کنیم تابع پتانسیل را به دست می‌آوریم بعد از آن گرادیان می‌گیریم ببینیم به تابع اولیه می‌رسیم یا خیر.

$$w_g = \frac{GM}{r} \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad |r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla w_g = \left(\frac{\partial w_g}{\partial x}, \frac{\partial w_g}{\partial y}, \frac{\partial w_g}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial w_g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial w_g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial w_g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial w_g}{\partial r}}_{-\frac{GM}{r^2}}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GM}{|r^3|}\vec{r} = \vec{a}_g$$

پتانسیل یک نقطهٔ مادی به جرم M برابر $\frac{GM}{r}$ است.

$$\vec{a}_g = -G\oint_v \frac{\rho(r')}{l^3}\vec{l}\,dv$$

می‌توان نشان داد پتانسیل یک جسم با چگالی ρ برابر است با:

$$w_g = G\oint_v \frac{\rho(r')}{l}\,dv$$

* گرادیان از نظر فیزیکی نشان دهندهٔ max میزان تغییرات میدان است.

$$\nabla w_g = G\oint_v \rho(r')\,\nabla\left(\frac{1}{l}\right)dv$$

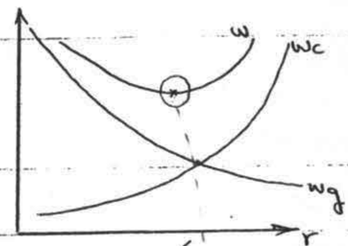
$$\vec{l} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k} \quad , \quad \nabla\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{-\vec{l}}{l^3}$$

$$\nabla w_g = -G\int_v \frac{\rho(r')}{l^3}\vec{l}\,dv = a_g$$

$$w_c = \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \quad , \quad \nabla w_c = \omega^2 r'' = \vec{a}_c$$

$$w = G\oint_v \frac{\rho(r')}{l}dv + \frac{1}{2}w^2 r''^2$$

$$\vec{g} = -G\oint_v \frac{\rho(r')}{l^3}\vec{l}\,dv + w^2\vec{r}''$$



(x) در فاصله‌ی مشخص از زمین قرار دارد که ماهواره‌های ژئواستیشنری را در آن قرار می‌دهند.

Geo-Stationary

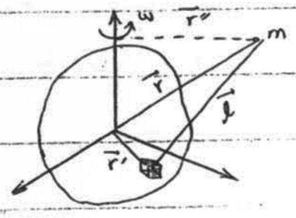
جلسه‌ی دوم : ۹۲,۷,۲۴

خلاصه‌ی جلسه پیش :

هدف فیزیکال = مطالعه سوی ثقل و بررسی تأثیر آن روی مشاهدات

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_c = \left(-G\int_v \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\vec{l}\,dv\right)m + mw^2\vec{r}''$$

$$= \underbrace{\left(-G\int_v \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\vec{l}\,dv + w^2\vec{r}''\right)}_{\vec{g}} m$$

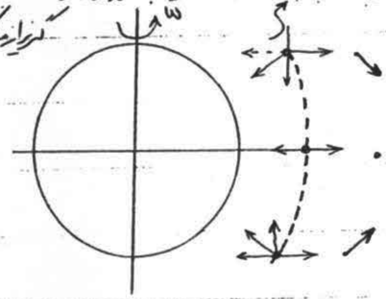


$$\vec{g} = -G\int_v \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3}\vec{l}\,dv + w^2\vec{r}'' \quad !$$

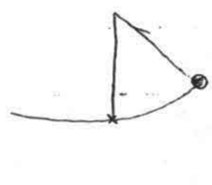
پتانسیل ثقل : $w = \underbrace{G\int_v \frac{\rho(r')}{l}dv}_{\text{پتانسیل جاذبه}} + \underbrace{\frac{1}{2}w^2 r''^2}_{\text{پتانسیل گریز از مرکز}}$: $\vec{g} = \nabla w$

$\vec{f} = m\vec{g}$

تصویر بردار شتاب جاذبه در راستای عمود بر محور دوران (خلاف جهت شتاب گریز از مرکز)



مثل حرکت پاندول به وسط می‌رسد : و بعد از آن در جهت خلاف به حرکت خود ادامه می‌دهد.

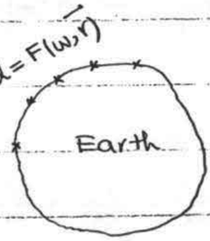


برای حل مشکل دانسته چه داریم؟

مشاهدات ژئودتیک بسیار تأثیرپذیر از میدان ثقل است. از جمله این مشاهدات: Φ، Λ، α، g (با گراویمتر اندازه گرفته می‌شود. چیزی که دستگاه گراویمتر به ما می‌دهد، اندازه بردار شتاب ثقل را به ما می‌دهد) $|g|=|\nabla W|$ ؛ $\vec{g} = \nabla W$

ΔH (اختلاف بین دو سطح هم‌پتانسیل را اندازه می‌گیریم).

مشاهدات l $\begin{cases} \Phi \\ \Lambda \\ \alpha \\ g \\ \vdots \end{cases}$: $l = F(\underbrace{W}_{\text{پتانسیل}}, \vec{r})$ → بردار موقعیت هر نقطه (مختصات هر نقطه)



مشاهدات ژئودتیکی از صدها سال پیش تا امروز داریم. این مشاهدات W را در خود دارند. از این‌ها استفاده می‌کنیم برای تعیین پتانسیل ثقل و بعد از پتانسیل ثقل به دست آمده در مشاهدات آینده استفاده می‌کنیم.

$$W = G\int_v \frac{\rho(r')}{l}\, dv + \frac{1}{2}\omega^2 r'^2$$

در ژئودزی پتانسیل ثقل در خارج زمین مورد نیاز است چون تمام مشاهدات در خارج زمین انجام می‌شود. اما در ژئوفیزیک و کارهای اکتشافی، پتانسیل را درون زمین می‌خواهیم.

هدف تعیین پتانسیل ثقل در خارج زمین از مشاهداتی که تابع آن مجهول در سطح زمین است $\equiv$ مسائل مقدار مرزی

مجهول: W

مرز: سطح زمین

در مسئله مقدار مرزی نیاز به یک معادله دیفرانسیل و داده مرزی داریم. داده مرزی: مشاهدات از مجهول در مرز. معادله دیفرانسیل: رفتار مجهول را به ما نشان می‌دهد.

حال باید مسئله مقدار مرزی مورد نظر را طراحی کنیم. در واقع نیاز به یک معادله دیفرانسیل داریم که باید از حل آن پتانسیل ثقل را به دست آوریم.

کافی است از رابطه‌ی پتانسیل لاپلاسین بگیریم تا معادله‌ی دیفرانسیل مورد نیاز به دست آید.

$$W = G\int \frac{\rho(r')}{l}dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$$\begin{cases} \Delta W = \dots \quad (?) \\ l = F(W, \vec{r}) \end{cases}$$

$$\Delta W = \Delta\left(G\int_v \frac{\rho(r')}{l}dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\right)$$

لاپلاسین یک اپراتور خطی است. پس داریم:

$$\Delta W = \Delta\left[G\int_v \frac{\rho(r')}{l}dv\right] + \Delta\left[\frac{1}{2}\omega^2 r''^2\right]$$

$$= G\int \rho(\vec{r'})\Delta\left(\frac{1}{l}\right)dv + \frac{1}{2}\omega^2\Delta(r''^2) \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$r''^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow \Delta(r''^2) = 4 \longrightarrow \frac{1}{2}\omega^2(4) = 2\omega^2 > 0$$

میدان نیروی گریز از مرکز به صورت چشمه عمل می‌کند.

$$\Delta W = G\int \rho(r')\Delta\left(\frac{1}{l}\right)dv + 2\omega^2$$

اگر $\nabla\left(\frac{1}{l}\right)$ را هم حساب کنیم حاصل صفر می‌شود که درست نیست چرا که جواب عبارت بالا با توجه به تعریف لاپلاسین سه ضابطه‌ای است که یکی صفر می‌شود و دو تای دیگر جواب دارد. (به عنوان تمرین حل شود)

$$\Delta = \mathrm{div}(\mathrm{grad.})$$

$$\Delta W = \Delta(W_g + W_c) = \Delta W_g + \underbrace{\Delta W_c}_{2\omega^2}$$

$$\Delta W_g = G\int_v \rho(\vec{r'})\Delta\left(\frac{1}{l}\right)dv \quad : \quad \Delta W_g = \mathrm{div}(\nabla W_g) = \mathrm{div}(\vec{a}_g)$$

تعاریف فیزیکی:

* گرادیان: max تغییرات میدان

$$\mathrm{div}(\vec{a}_g) = \lim_{v \to 0} \frac{\oint\!\!\oint \vec{a}_g \cdot \vec{n}\, ds}{v}$$

شار عبوری از کل سطح بسته‌ی S

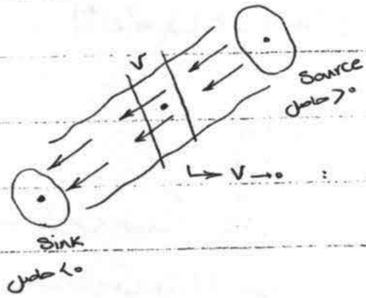
* کرل: میدان غیر دورانی هست یا خیر ($\mathrm{curl}\, F = 0$: میدان F غیر دورانی)

$$\mathrm{div}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

* دیورژانس: وضعیت یک نقطه‌ی مادی درون میدان

علامت منفی نشان دهنده‌ی چاه و علامت مثبت نشان دهنده منبع است.

Source   Sink



این نقطه در میدان هیچ تأثیری ندارد ، صفر

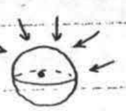
$V \to 0$ حد : حاصل یک عدد — این نقطه مولد میدان است ، مثبت

این نقطه از بین برنده میدان است ، منفی

مفهوم انتگرال در سطح بسته = هر چیزی که از سطح عبور کند (چه داخل شود چه خارج) را با هم جمع کنیم

در واقع می خواهیم بررسی کنیم هر نقطه چه نقشی در میدان جاذبه با ثقل زمین دارد.

$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ بردار نرمال سطح S



در دیورژانس شکل سطح در جواب تأثیری ندارد پس بهتر است کره بگیریم تا $\vec{n}$ بر $\vec{r}$ منطبق شود.

$$\vec{a}_g = -\frac{GM}{r^2}\vec{r} \quad , \quad \vec{a}_g \cdot \vec{n} = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{r}\cdot\vec{n} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\oiint \vec{a}_g \cdot \vec{n}\, ds = \oiint -\frac{GM}{r^2}\, ds = -\frac{GM}{r^2} \underbrace{\oiint ds}_{4\pi r^2} = -4G\pi M = -4\pi GM$$

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oiint \vec{a}_g \cdot \vec{n}\, ds}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{-4\pi G \cancel{M}^{\rho V}}{V} = -4\pi G\rho$$

: نقطه یک چاه است

چگالی به عنوان یک منبع جاذبه، یک چاه در میدان جاذبه است.

شار گذرنده از میدان به جرم موجود در سطح بسته بستگی دارد.

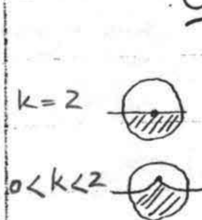
$$\operatorname{div}(\vec{a}_g) = \begin{cases} -4\pi G\rho & \text{(درداخل زمین)} \\ 0 & \text{(درخارج زمین)} \end{cases}$$

دیورژانس گرادیان برابر لاپلاسین است

$\Delta W_g \quad -\operatorname{div}(\vec{a}_g)$

وضعیت سوم این است که نقطه روی سطح زمین باشد . حاصل $-2\pi G\rho$ می شود . (اگر زمین مسطح باشد : نصف خالی و نصف جرم)

$\Delta W_g = 0 \to$ W_g یک تابع هارمونیک است



$-k\pi G\rho \quad 0<k<4$

$$\operatorname{div}(\vec{a}_g) = \Delta W_g = \begin{cases} -4\pi G\rho & \text{درداخل زمین} \to \text{پواسن (درونی)} \\ -k\pi G\rho & \text{روی سطح زمین} \\ 0 & \text{خارج زمین} \to \text{لاپلاس (بیرونی)} \end{cases}$$

این مسئله را می توان بدون اطلاع از چگالی (ρ) درون زمین و تنها با معلوم بودن پتانسیل جاذبه (W_g) روی مرز حل کرد. (یک مسئله مقدار مرزی)

$$\Delta W = \Delta(W_g + W_c) = \Delta W_g + \Delta W_c = \Delta\left[G\int_v \frac{\rho(r')}{l}dv\right] + \Delta\left[\tfrac{1}{2}\omega^2 r''^2\right]$$

$$= \begin{cases} -4\pi G\rho \\ -4\pi G\rho & +2\omega^2 \\ 0 \end{cases}$$

معادله پواسن صورت دیگر انتگرال نیوتن است.

با حل معادله پواسن می‌توان قانون جاذبه نیوتن را نتیجه گرفت. عبارت $\frac{GM}{|r-r'|}$ تابع گرین معادله پواسن است. پس راه دیگر برای یافتن میدان جاذبه حل معادله پواسن است (اگر ρ معلوم باشد از انتگرال نیوتن استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از معادله پواسن)

معادله دیفرانسیل (معادله پواسن): $\Delta W = \begin{cases} -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ 2\omega^2 \end{cases}$

مسئله مقدار مرزی: $\begin{cases} \Delta W = \begin{cases} -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ 2\omega^2 \end{cases} \\ l = F(W, \bar{r}) \end{cases}$

هندسه میدان ثقل.

جلسه سوم: ۹۲/۷/۱

در روابط جلسه قبل می‌بینیم که ΔW_g (در خارج زمین) در معادله لاپلاس صدق می‌کند اما در داخل و سطح زمین در معادله پواسن صدق می‌کند.

خود ΔW یک معادله پواسن است. از طرفی چون W را در فضای خارج زمین می‌خواهیم، از دو ضابطه داخل و سطح زمین صرف‌نظر می‌کنیم و مسئله تبدیل می‌شود به حالت زیر:

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ l = F(W, \bar{r}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \end{cases}$$

، با مشاهده اندازه شتاب ثقل توسط گرانی‌سنج‌ها می‌خواهیم به W برسیم.

$g(W, \bar{r})$ یعنی اگر روی یک سطح هم‌پتانسیل هم حرکت کنیم، پتانسیل ثابت است اما g تغییر می‌کند.

■ هندسه میدان ثقل:

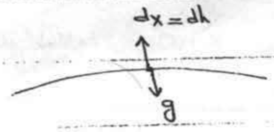
سطح هم‌پتانسیل: کار = اختلاف پتانسیل ← در سطح هم‌پتانسیل کار صفر است

$$W(x,y,z) = cte$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)}_{\nabla W = g} \cdot \underbrace{(dx, dy, dz)}_{dX} = 0$$

دیفرانسیل سطح هم‌پتانسیل

$$dw = 0 \longrightarrow \vec{g} \cdot \vec{dx} = 0 \longrightarrow g \perp dx$$



$$dw = \vec{g} \cdot \vec{dx} = |g||dh| \cos 180 = -g\,dh \longrightarrow g = -\frac{\partial w}{\partial h} = \frac{-\partial w}{\partial z}$$

$$g = |\vec{g}| = |\nabla w|$$

▪. انحنای سطح هم پتانسیل :

$$w(x, y, z(x,y)) = Cte$$

در راستای x $\;= \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}$$

مشتق خط ، $\equiv 0$ $\qquad \dfrac{dz}{dx} = 0 \equiv 0$

میزان به صورت خط تغییری ندارد. $\qquad$ چون مماس در نظر گرفتیم

در نقطه‌ی تماس شیب خط مماس و منحنی صفر است.

$$0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{-g}\underbrace{\frac{d^2z}{dx^2}}_{k_x} \quad ; \quad \begin{cases} -g k_x + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ -g k_y + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(k_x + k_y) = 0$$

$$\begin{cases} k_x = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases}$$

میانگین انحنا : $J = -\frac{1}{2}(k_x + k_y)$

علامت (-) قراردادی است

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2gJ = 0$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\longrightarrow \Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2gJ = 0 \longrightarrow \Delta w + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial z}}_{=\partial h} + 2gJ = 0$$

$$g = -\frac{\partial w}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial h} = -2gJ - \Delta w = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2gJ$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial z} = k\pi G\rho - 2\omega^2 - 2gJ}$$

گرادیان هوای آزاد

در خارج سطح زمین ، $k = 0 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial h} = -2\omega^2 - 2gJ \simeq 0/3086 \ mgal/m$

$gal = 1 \ cm/s^2$ واحد شتاب

این رابطه در داخل و خارج زمین

تقریبا است حدود چند ده متر.

$g \simeq 9/8 \ m/s^2$

$$\boxed{g = -\frac{\partial W}{\partial h} \xrightarrow{\text{واحد } W} m^2/s^2}$$

در روی سطح ، $k = 2 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial h} = 2\pi G\rho - 2\omega^2 - 2gJ$: گرادیان بوگه

Bouguer

$\simeq 0/1119 \ mgal/m$

در داخل زمین ، $k = 4 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial h} = 4\pi G\rho - 2\omega^2 - 2gJ$: فرمول اول بروتر

$\simeq 0/0848 \ mgal/m$

(در سطح پوسته زمین)

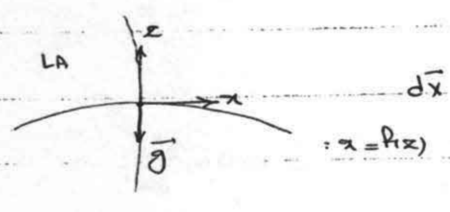
$1000 - 2000 \ m$

داخل زمین

جلسه چهارم : ۹۲/۸/۲

انحنای خط شاقولی :

خط شاقولی : منحنی که در هر نقطه بر سطح هم پتانسیل عمود است. (بردار $\vec{g}$ در هر نقطه به آن مماس است)



$d\vec{x} = (dx, dy, dz) \qquad \vec{g} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z}$

خط شاقول وقتی : $\vec{g}$ در راستای dx باشد.

$\vec{g} \parallel d\vec{x} \quad : \frac{dx}{\frac{\partial W}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial W}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial W}{\partial z}} \qquad k_1 = \frac{d^2x}{dz^2}$ ← $\vec{g}$ فقط مؤلفه سوم را دارد.

شرط راستا

$\therefore \ \vec{g} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)$

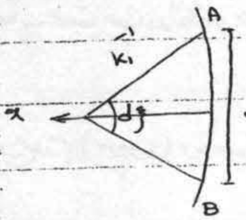
$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial z}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\frac{dx}{dz}\right)\right]$$

شیب خط مماس منحنی

$$k_1 = \frac{\cancel{\partial w/\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x} \longleftarrow$$ مهم در امتحان (تحلیل رابطه)

خط شاقولی دارای یک انحنای فضایی است که در راستای x و y متفاوت است.

$$k_2 = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y} \longleftarrow$$ مهم



$$dH = k_1^{-1} \cdot dg$$

$$dg = -k_1\, dH$$

$$\delta\xi = -\int_A^B \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x}\, dH$$

$$\delta\eta = -\int_A^B \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y}\, dH$$

حل معادله‌ی پواسن و مسئله‌ی مقدار مرزی:

$$W = G\int_v \frac{\rho(r')}{l}\, dv + \tfrac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$\downarrow$

$$\Delta W = \begin{cases} -4\pi G\rho + 2\omega^2 & \text{داخل} \\ -2\pi G\rho + 2\omega^2 & \text{روی سطح} \\ 2\omega^2 & \text{خارج} \end{cases}$$

$$l = F(W, \vec{r})$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ l = F(W, \vec{r}) \end{cases}$$

$\Delta W = 2\omega^2 \longrightarrow$ این معادله تعیین کننده‌ی رفتار مجهول است

$l = F(W,\vec{r}) \longrightarrow \Phi$

$$g = |\vec{g}| = |\nabla W|$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \end{cases} \qquad \frac{\partial W}{\partial n} \neq g$$

مشتق در جهت عمود بر سطح نیست.

$W(x,y,z) = cte$

وقتی روی سطح هم‌پتانسیل حرکت می‌کنیم، پتانسیل ثابت است اما g نه!

g به موقعیت هم وابسته است (وابسته به دانسیته)

۱۴

انواع مسائل مقدار مرزی:

$$\Delta V = f$$

- نوع اول (دیریکله): خود تابع را در مرز داریم (مشاهده‌ها ما همان مجهول است)

$$\begin{cases} \Delta V = f \\ V(\bar{r}) = h_1(\bar{r}) & \bar{r} \in S \end{cases}$$

* در یک جهت مرز دو داده مرزی نداریم. جواب یکتا نشود

- نوع دوم (نیومن): مشتق تابع را در جهت عمود بر سطح در مرز داریم

$$\begin{cases} \Delta V = f \\ \frac{\partial V}{\partial n}(\bar{r}) = h_2(\bar{r}) & \bar{r} \in S \end{cases}$$

- نوع سوم (روبین): ترکیب خطی از تابع و مشتق آن را در جهت عمود بر سطح در مرز داریم

$$\begin{cases} \Delta V = f \\ c_1 V(\bar{r}) + c_2 \frac{\partial V}{\partial n}(\bar{r}) = h_3(\bar{r}) & \bar{r} \in S \end{cases}$$

- نوع چهارم ( ): در قسمتی از مرز خود تابع و در قسمتی دیگر مشتق تابع را داریم.

$$\begin{cases} \Delta V = f \\ V(\bar{r}) = h_1(\bar{r}) & r \in S_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n}(\bar{r}) = h_2(\bar{r}) & r_2 \in S_2 \end{cases}$$

تفاوت اصلی مسئله ما با مسائل بالا این است که در مسائل بالا، ارتباط بین مجهول و مشاهده یک ارتباط خطی است
در نوع اول رابطه خطی است. در نوع دوم، مشتق عملگر خطی است و ...

1) $h = f(V) \quad f = I \rightarrow h_1 = V$

2) $h = f(V) \quad : f = \frac{\partial}{\partial n} \rightarrow h = \frac{\partial}{\partial n}(V_1 + V_2) = \frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial n}$

اما در مسئله ما:

$$g = F(W) \qquad F(*) = |\nabla *|$$

$$F(A+B) = |\nabla(A+B)| = |\nabla A + \nabla B| \neq |\nabla A| + |\nabla B|$$

رابطه خطی نیست

باید فرض کنیم اینها را خطی کنیم. پس رسیدیم به یک مسئله مقدار مرزی غیرخطی که باید خطی اش کنیم.

$$\begin{cases}\Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W|\end{cases} = l = f(x) \quad : \quad \begin{array}{l} l \to g \\ x \to W \\ x_0 \to U : \text{مقدار تقریبی } W \end{array}$$

برای خطی کردن، $l = f(x)$ را به سری تیلور بسط می‌دهیم. پس به یک مقدار اولیه x_0 نیاز داریم. با این شرط که x_0 خیلی به x نزدیک باشد.

$$l = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \cdots}_{\text{چون } x_0 \text{ خیلی نزدیک به } x}$$

انتخاب می‌کنیم از این جمله به بعد صرف نظر کنیم.

$$l - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}\delta x \longrightarrow \delta l = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}\delta x \longrightarrow \delta\hat{x} + x_0 = \hat{x}$$

قدم اول حل: انتخاب x_0.

$$g = F(W)$$

$l \quad g$

$x \quad W$

$x_0 \quad U$: پتانسیل تقریبی یا همان پتانسیل نرمال است $\Rightarrow g - |\nabla U| = \frac{\partial F}{\partial W}\Big|_{W=U} T$

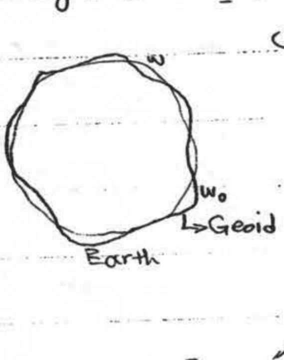
$f(x_0) \quad |\nabla U|$

$\delta x \quad W - U = T$: انومالی پتانسیل $\quad \tilde{} \xrightarrow{T = W-U} T + U = W$

$$N = \frac{T}{|\nabla U|} \leftarrow \text{رابطه‌ی مهم در فیزیکال}$$

W پتانسیل ثقل زمین واقعی است. که از مجموع دو پتانسیل جاذبه و گریز از مرکز به دست می‌آید. $W = W_g + W_c$

پس نیاز داریم شکلی بیابیم که خیلی نزدیک شکل زمین باشد یا همان سرعت دوران می‌کند و W نزدیک به W زمین تولید کند.



$\frac{3}{4}$ زمین را آب تشکیل داده و برای یک ناظر بیرونی شکل زمین شکل آب‌های آن است.

این سطح منطبق بر یک سطح هم پتانسیل ثقل است و به آن ژئوئید می‌گوییم.

پس شکل زمین همان شکل ژئوئید است.

پس فرض می‌کنیم سطح زمین تماماً آب است. پس ما مشاهدات را روی ژئوئید اندازه می‌گیریم در واقع.

مسائلی که برای تعیین U باید در نظر بگیریم : ۱- با همان سرعت دوران زمین دوران کند (تا بتوانیم خود پتانسیل گریز از مرکز را تعریف بزنیم) $U_c = W_c$

۲- شکل آن خیلی به شکل زمین باشد. (مثل یک کره یا بیضوی)

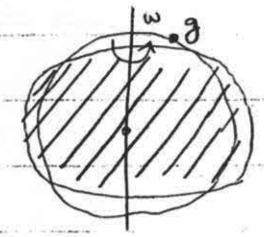
۳- جرم آن برابر جرم زمین باشد. (پتانسیل جاذبه را تقریب بزند)

۴- پتانسیل روی سطح آن برابر پتانسیل ژئوئید باشد.

$U = U_g + U_c$

توزیع جرم می تواند به صورت ← نقطه ای یا دانسیته ده باشد

یا توزیع جرم یکنواخت باشد در آن جسم فرضی که این تعریف برای ما بهتر است.



m : پتانسیل گریز از مرکز برای m از هر دو شکل استفاده کنیم یکسان می شود.

فرض کنیم که سطح زمین همان ژئوئید است.

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| = F(\underbrace{W, \lambda, \theta}, r) \end{cases} \rightarrow \text{۱ مشاهده و ۴ مجهول}$$

فرض کنیم موقعیت مسطحاتی هر مشاهده معلوم است

← ۲ مجهول $\lambda\theta$ کم می شود → ۱ مشاهده و $\underbrace{\text{۲ مجهول}}_{W, \theta}$

← فرض کنیم W هم همان پتانسیل نرمال است که معلوم است همان پتانسیل ژئوئید است.

← ۱ مشاهده و ۱ مجهول

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \\ W = W_0 \end{cases}$$

$U_c = \frac{1}{2}\omega^2 r'^2 = W_c \longrightarrow U = U_g + \frac{1}{2}\omega^2 r'^2$

1/

$$\vec f = \vec f_g + \vec f_c = \left[\left(-G\int_v \frac{\rho(\vec{r'})}{l^3}\,\vec l\,dv\right) + (\omega^2 \vec{r''})\right] m$$

تأثیر نیروی ثقل روی مشاهدات ژئودتیک

$$\text{مشاهدات} = l = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Lambda \\ g = |\vec g| \\ \Delta H \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(روی سطح زمین)

هدف : بدست آوردن نیروی ثقل و بررسی تأثیر آن روی مشاهدات است .

درحقیقت بدست آوردن نیروی ثقل در فضای خارج زمین با استفاده از مشاهداتی که روی سطح زمین انجام شده .

بنابراین دلیل استفاده از مسایل مقدار مرزی ، محاسبه ی مقدار نیروی ثقل در فضای خارج از زمین از طریق مشاهداتی است که روی مرز (سطح زمین) انجام شده است .

$$\vec g = G\int_v \frac{\rho(\vec{r'})}{l^3}\,\vec l\,dv + \omega^2 \vec{r''}$$ → این شتاب از نظر هندسی با نیروی ثقل یکسان است اگر جرم واحد باشد .

$$W = W_g + W_c = G\int_v \frac{\rho(\vec{r'})}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$$\vec g = \nabla W \quad , \quad g = |\nabla W|$$

$$\vec W \rightarrow \vec g \rightarrow \vec f$$

$$\begin{cases} \Delta W = 2\omega^2 & \text{معادله دیفرانسیل} \\ g = |\vec g| = |\nabla W| & \text{مقدار مرزی} \end{cases}$$ مربوط به خارج زمین

تفاوت مسایل مقدار مرزی مربوط به مقدار روی مرز است .

مسایل مقدار مرزی خطی هستند .

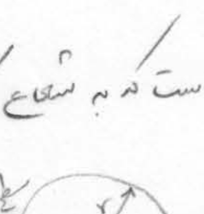
$$l = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}(x - x_0) + \cancel{\text{توان دوم}}$$

$$f(x_0) \ , \quad \delta l = l - f(x_0) \ , \quad \delta x \ , \quad \hat x = x_0 + \delta x$$

مشاهدات تابعی از r و W هستند $\quad l = F(\overset{\text{پتانسیل}}{W}, \overset{\text{موقعیت}}{\vec r})$

پس نیاز به درنظر گرفتن دو تقریب برای r و W می‌باشد. تقریب برای r این است که به شعاع کره‌ی زمین (6375 km) یک کره تقریب بزنیم .

$\vec r = (\lambda, \theta, r)$



$$\begin{matrix} x & x_0 & \delta x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec r & R & \delta \vec r \end{matrix}$$

پس داریم : $l = F(\underbrace{W}_{\text{پتانسیل سطح زمین}}, \overbrace{\lambda, \theta}^{\text{معلوم فرض می‌شوند}}, r = R)$

حل برای تقریب مقدار اولیه W ، به کره‌ی فوق جرم نسبت می‌دهیم (جرم برابر با جرم زمین) که این جرم دارای دوران نیز می‌باشد .

به این ترتیب ω (سرعت دورانی/سرعت زاویه‌ای) به وجود می‌آید .

برای بدست آوردن مقدار $\underline{W}$ (یک مقدار اولیه که به پتانسیل زمین نزدیک باشد) مشروط زیر را در نظر میگیریم :

① جرم آن برابر جرم زمین

② سرعت دوران آن برابر سرعت دوران زمین

③ پتانسیل روی این سطح تقریبی ، برابر با پتانسیل روی ژئوئید یعنی $U(\lambda,\theta,r=R) = W_0$

④ شکل آن به شکل زمین نزدیک باشد.

$\underline{U}$ تقریبی است برای $\underline{W}$ در خارج از زمین

$\vec{\delta r}$: فاصله ژئوئید از سطح زمین

$$W = W_g + W_c = G\int_v \frac{\rho(\vec{r'})}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$$U = U_g + U_c = G\int_v \frac{\rho^0(\vec{r'})}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

ρ^0 : توزیع چگالی یکنواخت

برای $\underline{U}$ یک مسئله‌ی مقدار مرزی ساخته می‌شود با توجه به اینکه مقدار $\underline{U}$ روی کره معلوم است :

$$\Delta U = \underbrace{\begin{cases} -4\pi G\rho^c & \text{داخل کره} \\ -2\pi G\rho^c & \text{روی کره} \\ 0 & \text{خارج کره} \end{cases}}_{\Delta U_g} + \underbrace{2\omega^2}_{\Delta U_c}$$

ما به دنبال حل این معادله در خارج از کره هستیم :

$$\begin{cases} \Delta U_g = 0 \longrightarrow \underline{U_g} \text{ یک تابع هارمونیک است} \\ U(\lambda,\theta,r=R) = W_0 \end{cases}$$

که این یک مسئله‌ی نوع اول (دیریکله) است
(با توجه به معلوم بودن مقدارها روی مرز)

داریم : $U_g(\lambda,\theta,r=R) = W_0 - \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R}$

در نهایت داریم : $U = U_g + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = W_0$

بنابراین باید معادله‌ی دیفرانسیلی را حل کنیم که دارای یک مقدار ثابت و ضرایب مجهول می‌باشد که با استفاده از مقدار مرزی آنها را می‌یابیم.

حل معادلهٔ دیفرانسیل به روش تفکیک متغیرها

(روش لاپلاس در سیستم مختصات کارتزین)

$$\begin{cases} \Delta U_g(x,y,z)=0 \\ U_g(x,y,z)=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)=\Phi(x,y)\cdot Z(z) \end{cases}$$

رابطه لاپلاس

$$\Delta U_g=\frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_g}{\partial z^2}=Z\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+Z\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\Phi Z}}\left(\frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=\frac{-1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=c_1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-c_1 \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{Z''}+c_1 Z=0} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-c_1\Phi=0 \Rightarrow \boxed{Y''-(c_1-c_2)Y=0} \end{cases}$$

$$X''Y+XY''-c_1XY=0 \xrightarrow{\frac{1}{XY}} \frac{X''}{X}=-\left(\frac{Y''}{Y}-c_1\right)=c_2$$

$$\frac{Y''}{Y}-c_1=-c_2 \qquad \boxed{X''-c_2X=0}$$

معادله دیفرانسیل $\Delta U_g=0$ تبدیل به سه معادله دیفرانسیل شد که توسط ثابتهای c_1 و c_2 به هم مرتبطند.

این حالت خاص از معادلهٔ اشتورم - لیوویل است. بدست آوردن ثابتهای c_1 و c_2 از طریق شرایط خاص امکانپذیر است.

معادلهٔ اشتورم - لیوویل $\qquad x\in[a,b]$

$$[P(x)\,U'(x)]'+q(x)\,U(x)+\lambda\,\rho(x)\,U(x)=0$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو

$P(x)=1$ $\qquad$ $P(x)$, $q(x)\geq 0$ $\rightarrow$ (توابع حقیقی)

$q(x)=0$

$U(x)$ $\rightarrow$ (یک تابع حقیقی وابسته به λ) تابع ویژه

$\rho(x)=1$ $\qquad$ $\rho(x)>0$ $\rightarrow$ (یک تابع نامنفی) تابع وزن

$\lambda=c_2$ $\qquad$ λ عدد حقیقی $\rightarrow$ (یک پارامتر ثابت) مقدار ویژه

$U(x) = X(x)$

$A\,x = \lambda\,x$

بردار ویژه

$U(x) \longrightarrow$ تابع ویژه (تابع حقیقی وابسته به λ)

جواب معادله اشتورم - لیوویل به ازای یک λ خاص

$\rho(x) = 1$

$$L\,U(x) = \lambda \cdot U(x)$$

عملگر اشتورم لیوویل

عدد حقیقی

تابع ویژه

Ⅰ مقدار ویژه همواره یک عدد حقیقی است.

Ⅱ جوابهای معادله اشتورم - لیوویل دو به دو بر هم عمودند (با وزن واحد)

وزن

$$\langle U_a(x), U_b(x) \rangle = \int_a^b U_i(x)\, U_j(x)\, \rho(x)\, dx = \begin{cases} N\,\delta_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$N = \int_a^b U_i^2(x)\, \rho(x)\, dx$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

دلتای کرونکر

Ⅲ جواب های معادله اشتورم - لیوویل تشکیل یک سیستم پایه می دهند. یعنی هر تابعی که در این بازه تعریف شده باشد یک ترکیب خطی از این جوابها خواهد بود.

$$f(x) = \sum c_i\, U_i(x)$$

$$\begin{cases} X'' - c_2 X = 0 \\ Y'' - (c_1 - c_2)\, Y = 0 \\ Z'' + c_1 Z = 0 \end{cases}$$

داده های مرزی

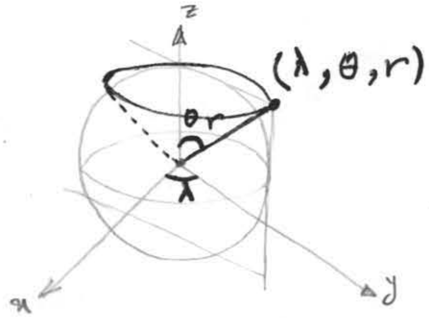
Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ $\Longrightarrow$ عملگر L، یک عملگر هرمیتی است.

5/

با تعریف یک کره در نظر گرفته می‌شود سه بعد سیستم مختصات بیضوی

$$\begin{cases}\Delta U_g = 0\\ U_g(\lambda,\theta,\overset{\text{کره}}{r=R}) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R} = \bar{W}_0\end{cases}$$

سیستم مختصات کروی (تلاقی کره و مخروط و صفحه)



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\lambda\\ y = r\sin\theta\sin\lambda\\ z = r\cos\theta\end{cases}$$

رابطه سیستم مختصات کروی و کارتزین

بیضوی تقریب بهتری برای زمین می‌باشد.

برای کره: (λ, θ, r)

برای بیضوی: $(\lambda, \theta, \overset{u}{a, b})$

در سیستم مختصات بیضوی چون b و a متفاوت است، یعنی بیضوی:

بنابراین یک خانواده خاص از بیضوی‌ها در نظر گرفته می‌شود تا در صورت تغییر a، b هم تغییر نماید.

مثلاً خانواده بیضوی‌ها با

$$\begin{cases} f = \frac{a-b}{a} & \text{فشردگی}\\ e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} & \text{خروج از مرکزیت اولیه}\\ e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} & \text{خروج از مرکزیت ثانویه}\end{cases}$$

e مشخص انتخاب شود.

$$E^2 = a^2 - b^2$$

خروج از مرکزیت خطی

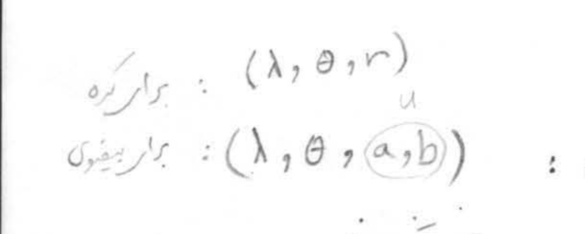
اما به دلیل دشواری وابسته بودن a و b در فرمول‌های فوق از رابطه دیگری استفاده می‌شود:

خانواده‌ای از بیضوی‌ها

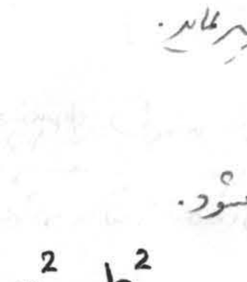
مختصات بیضوی ژاکوبی (λ, β, u)

مختصات بیضوی گاوسی (λ, φ, h)

GPS به ما این را می‌دهد



β: عرض تبدیل یافته



رابطه سیستم مختصات ژاکوبی با کارتزین

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\cos\lambda\\ y = \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\sin\lambda\\ z = u\sin\beta\end{cases}$$

برای حل معادله لاپلاس فوق از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود چون فقط در سیستم مختصات ژاکوبی جداسازی متغیرها امکان‌پذیر است.

$$\begin{cases}\Delta U_g = 0\\ U_g(\lambda,\theta,r=R) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R} = W_0\end{cases}$$

لاپلاسین در سیستم مختصات خاص هر سیستم مختصاتی مانند (u_1 , u_2 , u_3)

(u_1, u_2, u_3)

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\cdot\frac{\partial}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\cdot\frac{\partial}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\cdot\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right]$$

تنسور قطر اصلی : (g_{11}, g_{22}, g_{33})

تنسور کمیتی است که با آن سیستم مختصات تعریف می‌شود. (ارتباط محورها باهم)

برای سیستم مختصات کارتزین تنسور متریک I است. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

کوواریانس صفر است

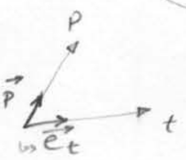
عناصر خارج از قطر اصلی کوواریانس بین عناصر هستند.

ماتریس وزن یک تنسور متریک است

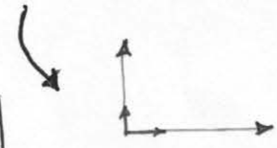
چند پارامتر با ویژگی‌های متفاوت (درجه حرارت و فشار)

هیچ رابطه‌ای خاص باهم ندارند

مثلاً شکل محورها باهم می‌شود:



تنسور متریک P



کارتزین شد

ماتریس ژاکوبی

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$x = r\sin\theta\cos\lambda$

$y = r\sin\theta\sin\lambda$

$z = r\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تنسور متریک برای سیستم مختصات کروی

ماتریس تنسور که متریک را است.

عناصر خارج قطر اصلی وابستگی دو سیستم مختصات را نشان می‌دهد (کوواریانس)

$$(u_1, u_2, u_3) \longleftrightarrow (x, y, z)$$

$x = x(u_1, u_2, u_3)$

$y = y(u_1, u_2, u_3)$

$z = z(u_1, u_2, u_3)$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}\cdot du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3}du_3$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}\cdot du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3}\cdot du_3$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}\cdot du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3}du_3$$

فاصله‌ی طول کوتاه در سیستم مختصات کارتزین

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^T\cdot dX$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}}_{dX} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ژاکوبی } (J)} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda, \theta, r) \longleftrightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{cases} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^2 \neq d\lambda^2 + d\theta^2 + dr^2 \end{cases}$$

پل ارتباطی دو طول

$dX = J\,dU$

$dX^T = dU^T J^T$

ماتریس تنسور متریک

G

$$\Rightarrow ds^2 = dX^T\cdot dX = dU^T J^T J\, dU$$

Lame'

$$\Delta U_g = \underbrace{\frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r}}_{\text{بخش شعاعی}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\Delta^* U_g}_{\text{بخش زاویه‌ای}} \qquad \Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot g\,\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$$

عملگر لاپلاس - بلترامی

$$\Delta U_g = \underbrace{\frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r}}_{\text{بخش شعاعی}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left\{\frac{\partial^2 U_g}{\partial \theta^2} + \cot g\,\theta\frac{\partial U_g}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_g}{\partial \lambda^2}\right\}}_{\text{بخش زاویه‌ای}} = 0$$

تعمیم لاپلاس روی کره

روش جداسازی برای حل معادله دیفرانسیل

(روش لاپلاس در سیستم مختصات کروی)

$$\begin{cases} U_g(\lambda,\theta,r) = \Lambda(\lambda)\,T(\theta)\,H(r) = Y(\lambda,\theta)\,H(r) \\ \Delta U_g = H''Y + \frac{2}{r}H'Y + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}H + \cot g\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}H + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}H\right\} = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{r^2}{HY}} r^2\frac{H''}{H} + 2r\frac{H'}{H} = -\frac{1}{Y}\left\{\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \cot g\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}\right\} = C_1$$

$$r^2\frac{H''}{H} + 2r\frac{H'}{H} = C_1 \rightarrow \boxed{r^2H'' + 2rH' - C_1H = 0} \quad \text{I}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \cot g\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} + C_1 Y = 0$$

$$Y(\lambda,\theta) = \Lambda(\lambda)\,.\,T(\theta)$$

$$\Lambda.T'' + \cot g\,\theta.\Lambda.T' + \frac{1}{\sin^2\theta}T.\Lambda'' + C_1.T\Lambda = 0 \xrightarrow{\times\left(\frac{\sin^2\theta}{\Lambda T}\right)} \sin^2\theta\frac{T''}{T} + \sin\theta\cos\theta\frac{T'}{T} + \frac{\Lambda''}{\Lambda} + C_1\sin^2\theta = 0$$

$$\sin^2\theta\cdot\frac{T''}{T} + \sin\theta\cos\theta\cdot\frac{T'}{T} + C_1\sin^2\theta = -\frac{\Lambda''}{\Lambda} = C_2$$

$$\boxed{\sin^2\theta\,T'' + \sin\theta\cos\theta\,T' + (C_1\sin^2\theta - C_2)\,T = 0} \quad \text{II}$$

$$\boxed{\Lambda'' + C_2\Lambda = 0} \quad \text{III}$$

$$\Delta U_g = 0$$

$$\begin{cases} \Lambda'' + C_2\Lambda = 0 \\ \sin^2\theta\,T'' + \sin\theta\cos\theta\,T' + (C_1\sin^2\theta - C_2)\,T = 0 \\ r^2H'' + 2rH' - C_1H = 0 \end{cases}$$

این روابط از طریق ثابت‌های C_2 و C_1 به هم مربوط هستند. برای تعیین ثابت‌های C_1 و C_2 باید اطلاعاتی درباره رفتار U داشته باشیم.

جوابهای معادله لاپلاس در بخش خاص از فضا:

- تابع پتانسیل جاذبه یک تابع هارمونیک است.

$$\begin{cases}\Delta U_g = 0\\ U_g(\lambda,\theta,r=R) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R} = W_0\end{cases}$$

$$\begin{cases} U_g(\lambda,\theta,r) = U_g(\lambda+2\pi,\theta,r) & \text{دوره ای}\\ |U_g(\lambda,\theta,r)| < \infty & \text{کراندار}\\ \lim\limits_{r\to\infty} U_g(\lambda,\theta,r) = 0 & \end{cases}$$

پتانسیل جاذبه در بی نهایت به سمت صفر میل می کند

برای بدست آوردن ثابتهای c_1 و c_2 از شرایط خاص مسئله استفاده می کنیم:

Eigen Condition
ویژه

$$\begin{cases}\Delta U_g = 0 \longrightarrow U_g(\lambda,\theta,r) = \Lambda(\lambda)\cdot T(\theta)\cdot H(r)\\ U_g(\lambda,\theta,r=R) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R} = W_0\end{cases}$$

شروط بالا به بیانی دیگر

$$\begin{cases}\Lambda(\lambda+2\pi) = \Lambda(\lambda)\\ |\Lambda(\lambda)| < \infty\\ |T(\theta)| < \infty\\ |H(r)| < \infty\\ \lim\limits_{r\to\infty} H(r) \to 0\end{cases}$$

Eigen Condition

فقط برای H تعریف می شود

حل معادله اولی:
معادله حرکت هارمونیک

$$\Lambda'' + c_2\Lambda = 0$$

یک معادله لاپلاس یک بعدی که همواره یک تابع هارمونیک است

$$\begin{cases} \text{صفر}\quad c_2 = 0 \longrightarrow \Lambda(\lambda) = a + b\lambda\\ \text{مثبت}\quad c_2 = m^2 \longrightarrow \cos m\lambda\ ,\ \sin m\lambda \longrightarrow\\ \text{منفی}\quad \cancel{c_2 = -m^2}\end{cases}$$

نمی تواند منفی شود (در این صورت تابع هایپربولیک می شود که دوره ای نیست)

ترکیب خطی از اینها جزو جوابهای ماست

$$a\cos m\lambda + b\sin m\lambda$$

$$\Lambda(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[a_m\cos m\lambda + b_m\sin m\lambda\right]$$

$$m=0 \longrightarrow a$$

$$\underbrace{\lambda\in[0,2\pi]}_{\text{شرط}} \qquad \underbrace{\int_0^{2\pi}|f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty}_{\text{شرط}}$$

جوابهای $\cos m\lambda$ و $\sin m\lambda$ دو به دو برهم عمودند

هنگامی که تابع در بازه ی تعریف شده باشد و شرط هم برقرار باشد، این سیستم پایه را تشکیل می دهد:

$$f(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[(a_m\cos m\lambda + b_m\sin m\lambda)\right]$$

$$r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$ سیستم پایه

ضرب داخلی $\int_0^{2\pi}\cos m\lambda\cdot\sin l\lambda\, d\lambda = 0 \longrightarrow$ چون دو به دو برهم عمودند

$$\int_0^{2\pi}\cos m\lambda\cos k\lambda\, d\lambda = \begin{cases}1 & m=k \longrightarrow \begin{cases}2\pi & m=0\\ \pi & m\neq 0\end{cases}\\ 0 & m\neq k\end{cases}$$ حاصل انتگرال

مسئله از نوع مقدار مرزی است.

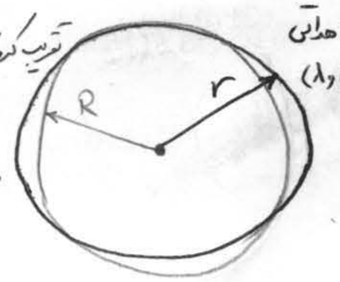
$$\begin{cases}\Delta W = 2\omega^2 \\ l = F(W,\vec{r})\end{cases} \xrightarrow{\text{پتانسیل خارج زمین}} \begin{cases}\Delta W = 2\omega^2 \\ g = |\nabla W| \\ \quad = F(W,\vec{r})\end{cases}$$

تابعی از پتانسیل و موقعیت نقطه

پتانسیل $\begin{pmatrix}\Phi \\ \Lambda \\ \vdots\end{pmatrix}$ — موقعیت

W (مجهول) $\quad (\lambda,\theta,r) \longrightarrow$ شکل زمین (مجهول)

$g=|\nabla W| \longrightarrow$ روی زمین اندازه‌گیری می‌شود

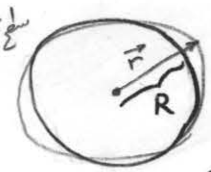


$$|\nabla(A+B)| = |\nabla A+\nabla B| \neq |\nabla A|+|\nabla B|$$

برای حل معادله از بسط به سری تیلور استفاده می‌کنیم:

$$l = f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \underbrace{(x+x_0)}_{\delta x} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \underbrace{(y-y_0)}_{\delta y} + \cdots$$

به دلیل کوچک بودن مقادیر از سایر جملات صرف نظر شد.



تقریب کروی

ارتفاع ژئوئید

$r \quad R$ $\quad\begin{cases} N = r - R \text{ (مجهول)} \\ W - U = T \end{cases}$

$W \quad U$

آنومالی پتانسیل

پتانسیل نرمال

$U = U_g + U_c$

از حل بسط تیلور فوق به دنبال $\delta x, \delta y$

$\hat{x} = x_0 + \delta x$

$\hat{y} = y_0 + \delta y$

و برای پتانسیل نظیر نیز باید دو مؤلفه داشته باشد که هم جاذبه و هم گریز از مرکز را تقریب بزند.

۱) سرعت دوران این شکل برابر سرعت دوران زمین باشد.

$$W = W_g + W_c = G\int_v \frac{\rho}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r'^2$$

$$U = U_g + U_c = G\int_v \frac{\rho^c}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$$\Delta W = \Delta(W_g + W_c) = \begin{cases}-4\pi G\rho \\ -k\pi G\rho \\ 0\end{cases} + 2\omega^2$$

$$\Delta U = \Delta(U_g + U_c) = \begin{cases}-4\pi G\rho^c \\ -2\pi G\rho^c \\ 0\end{cases} + 2\omega^2$$

$$\Delta U_g = \begin{cases}-4\pi G\rho^c \\ -2\pi G\rho^c \\ 0\end{cases}$$

$\Delta U_g = 0$ در فضای خارج زمین

2) جرم آن برابر جرم زمین

3) پتانسیل در روی سطح کره مرجع برابر $\underline{W_0}$

$$U(\lambda,\theta,r=R)=W_0$$

$$U_g(\lambda,\theta,r=R)+\frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R}=W_0$$

$$\underbrace{U_g(\lambda,\theta,r=R)}_{\text{تقریب معلوم}}=W_0-\underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 r''^2}_{\text{معلوم}}\Big|_{r=R}$$

مسئله‌ی مقدار مرزی در حالتی که مقدار آن در مرز (ژئوئید) معلوم است.

پتانسیل جاذبه (هرجسمی) در خارج از آن در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$\begin{cases}\Delta U_g=0\\ U_g(\lambda,\theta,r=R)=W_0-\frac{1}{2}\omega^2 r''^2\Big|_{r=R}\end{cases}$$

ادامه جلسه قبل

$$\Delta U_g=\frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_g}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial U_g}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 U_g}{\partial\lambda^2}=0$$

$$\Delta U_g=\frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\underbrace{\left\{\frac{\partial^2 U_g}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial U_g}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_g}{\partial\lambda^2}\right\}}$$

بخش زاویه ای که وقتی r را ثابت نگه داریم، انگار در حال چرخش روی کره هستیم.

$$=\frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\overset{*}{\Delta}U_g=0$$

حل معادله دیفرانسیل جزئی (زمانی که معادله ها قابل جداسازی باشند از این روش استفاده می کنیم):

$$U_g(\lambda,\theta,r)=\Lambda(\lambda)\cdot T(\theta)\cdot H(r)=Y(\lambda,\theta)\cdot H(r)$$

با در نظر گرفتن شرایط خاص گفته شده:

$$\begin{cases}① & \Lambda''+C_2\Lambda=0\\ ② & \sin^2\theta . T''+\sin\theta\cos\theta . T'+(C_1\sin^2\theta-C_2).T=0\\ ③ & r^2H''+2rH'-C_1H=0\end{cases}$$

حل معادله یکم:

$$\begin{cases}C_2=0 \longrightarrow a+\cancel{b\lambda} \longrightarrow \Lambda(\lambda)=a\\ C_2=m^2 \longrightarrow \Lambda''+m^2\Lambda=0 \quad \cos m\lambda \quad \sin m\lambda\\ \cancel{C_2=-m^2}\end{cases}$$

توابع ثابت هم جواب مسئله هستند

توابع هایپربولیک می‌شوند که دوره ای نیستند

برای هر دو حالت $\begin{cases}C_2=0\\ C_2=m^2\end{cases}$

$$\Lambda(m)=a_m\cos m\lambda+b_m\sin m\lambda \xrightarrow{\text{هر ترکیب خطی}} \Lambda(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[a_m\cos m\lambda+b_m\sin m\lambda\right]$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

این جواب‌ها می‌توانند تشکیل سیستم پایه بدهند؛ $\cos m\lambda$ و $\sin m\lambda$ نقش i و j و k را دارند.

$$\int_0^{2\pi}|f(\lambda)|^2d\lambda \qquad \lambda\in[0,2\pi] \longrightarrow f(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\cos m\lambda+d_m\sin m\lambda)$$

$$\sin^2\theta\, T'' + \sin\theta\cos\theta\, T' + (c_1\sin^2\theta - m^2)\,T = 0$$

کاسته شد

حل معادله دوم با فرض $m=0$

به دست آوردن معادلات لژاندر

سوال امتحانی

تغییر متغیر $\tau = \cos\theta$

$$T' = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\theta} = -\sin\theta \cdot T'_\tau$$

$$T'' = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\theta}\right) = T''_{\tau\tau}\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2 + T'_\tau\left(\frac{d^2\tau}{d\theta^2}\right) = \sin^2\theta\, T''_{\tau\tau} - \cos\theta\, T'_\tau$$

$$\sin^2\theta\left[\sin^2\theta \cdot T''_{\tau\tau} - \cos\theta\cdot T'_\tau\right] + \sin\theta\cos\theta\,(-\sin\theta\, T'_\tau) + (c_1\sin^2\theta - m^2)\,T = 0$$

$$\xrightarrow{\div\sin^2\theta} \sin^2\theta\cdot T''_{\tau\tau} - \cos\theta\cdot T'_\tau - \cos\theta\, T'_\tau + \left(c_1 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)T = 0$$

$$\begin{cases}\theta \in [0,\pi] \\ \tau \in [-1,1]\end{cases}$$

در قطب

$$\xrightarrow{\sin^2\theta = 1-\tau^2} (1-\tau^2)\,T''_{\tau\tau} - 2\tau\, T'_\tau + \left(c_1 - \frac{m^2}{1-\tau^2}\right)T = 0$$

$$m=0\ ;\ (1-\tau^2)\,T''_{\tau\tau} - 2\tau\, T'_\tau + c_1 T = 0$$

معادله فقط به ازای این مقدار دارای جواب است (به معادلات دیفرانسیل مراجعه شود)

$$\left[(1-\tau^2)\,T'_\tau\right]' + c_1 T = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = n(n+1)} \quad n = 0, 1, \dots$$

جواب معادله لژاندر با فرض $m=0$

چند جمله‌ای لژاندر نوع اول $P_n(\tau)$

چند جمله‌ای لژاندر نوع دوم $Q_n(\tau)$

رودریگز

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^2-1)^n$$

اگر معادله لژاندر را به روش فروبنیوس حل کنیم به این می‌رسیم

$$\cancel{Q_n(\tau) = \frac{1}{2}P_n(\tau)\cdot\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(\tau)\,P_{n-k}(\tau)}$$

$\tau \in [-1,1]$ چون در قطبین $\tau = 1$ و مخرج صفر می‌گردد.

به اتکای شرایط خاص گفته شده فقط یکی از جوابها برای ما قابل قبول است.

می‌توان نشان داد P_n ها دو به دو برهم عمودند و تشکیل یک سیستم پایه می‌دهند.

جزو جواب نیست چون بی‌نهایت می‌شود (در قطبین)

$$T_n(\tau) = c_n P_n(\tau) + d_n Q_n(\tau)$$

$$\int_{-1}^{1}|f(\tau)|^2 d\tau < \infty$$

$$T(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\tau)$$

اگر در شرط $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2 dx\ ;\ x \in [-1,1]$ صدق کند:

جواب: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(x)$

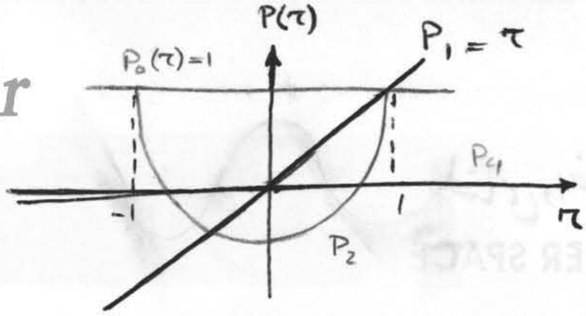
$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\tau)$$

$P_0(\tau) = 1$

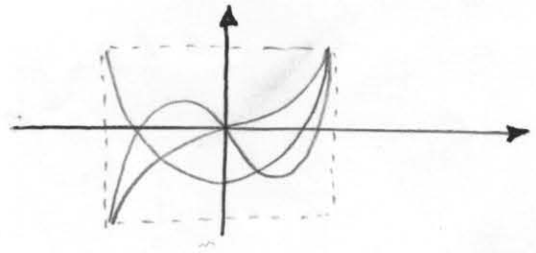
$P_1(\tau) = \tau$

$P_2(\tau) = \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}$

$P_3(\tau)$



$P_n(\tau)$



$Q_n(\tau)$

$$\underbrace{(1-\tau^2).T''_{\tau\tau} - 2\tau.T'_\tau}$$

$$\left[(1-\tau^2)\,T'_\tau\right]' + \left[C_1 - \frac{m^2}{1-\tau^2}\right]T = 0$$ معادله اشتورم - لیوویل

تا کنون معادله لژاندر به ازای $m=0$ محاسبه گردید. حال آنکه m همواره برابر صفر نیست. درصورتی که $m \neq 0$ باشد معادله لژاندر وابسته بدست می‌آید:

$$m \neq 0 \;;\; \left[(1-\tau^2)\,T'_\tau\right]' + \left[C_1 - \frac{m^2}{1-\tau^2}\right]T = 0$$

معادله لژاندر وابسته

که معادله‌ی فوق از m بار مشتق گیری از معادله روبرو بدست می‌آید: (با تغییر متغیر)

$$(1-\tau^2)T'' - 2\tau T' + C_1 T = 0$$

معادله لژاندر دو نوع جواب دارد (چه وابسته باشد چه غیر وابسته):

چند جمله ای نوع اول	چند جمله‌ای نوع دوم
$P_n(\tau)$	$Q_n(\tau)$
چند جمله‌ای وابسته نوع اول	چند جمله ای وابسته نوع دوم
$P_{nm}(\tau)$	$Q_{nm}(\tau)$

از تابع m بار مشتق بگیریم — تابع از درجه‌ی n

$m \neq 0$

$$P_{nm}(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{d\tau^m}P_n(\tau) \longrightarrow P_{n0}(\tau) = P_n(\tau)$$

$$Q_{nm}(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{d\tau^m}Q_n(\tau) \longrightarrow Q_{n0}(\tau) = Q_n(\tau)$$

ترکیب خطی روابط فوق هم جزء جوابهاست:

$$T_{nm}(\theta) = C_{nm}P_{nm}(\tau) + d_{nm}Q_{nm}(\tau)$$

$$T(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[c_{nm}P_{nm}(\tau) + d_{nm}Q_{nm}(\tau)\right]$$

اگر $m > n$ باشد، $P_{nm}(\tau)$ برابر صفر می‌گردد. چون مرتبه‌ی مشتق بیشتر از درجه‌ی چند جمله‌ای خواهد بود.

13

① معادله : $\Lambda'' + C_2 \Lambda = 0 \qquad C_2 = m^2 \qquad \cos m\lambda \qquad \sin m\lambda$

دو به دو با وزن واحد بر هم عمودند

② معادله : $\sin^2\theta . T'' + \sin\theta . \cos\theta . T' + (C_1 \sin^2\theta - C_2) T = 0$

$C_1 = n(n+1)$

$n = 0, 1, \dots$

$P_{nm}(\cos\theta)$

بخش زاویه‌ای

$$\int_{-1}^{1} P_n(\tau) P_k(\tau) d\tau = \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) . P_k(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \square \, \delta_{nk} < \infty$$

$\square \to \frac{2}{2n+1}$

دلتای کرونکر $\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(\tau) d\tau = \frac{2}{2n+1}$$

سوال امتحانی

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(\tau) P_{km}(\tau) d\tau = \square \, \delta_{nk}$$

$\square \to \frac{(n+m)!}{(n-m)!} . \frac{2}{2n+1}$

حل معادله سوم (بخش شعاعی)

$r^2 H'' + 2rH' - c_1 H = 0$

$r^2 H'' + 2rH' - n(n+1) H = 0$

تغییر متغیر $\quad r = e^t \qquad t = \ln r$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dr} = \frac{dH}{dt} . \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} H'_t \\ \frac{d^2H}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dH}{dt} . \frac{dt}{dr}\right) = H''_{tt} . \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} H'_t \end{cases}$$

$r^2 \left[H''_{tt} . \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} . H'_t \right] + 2r \left[\frac{1}{r} . H'_t \right] - n(n+1) H = 0$

$H''_{tt} + H'_t - n(n+1) H = 0$

$\alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0 \implies \alpha \begin{cases} n \\ -(n+1) \end{cases}$

$H(r) \begin{cases} \cancel{r^n} \\ \boxed{r^{-(n+1)}} \end{cases} \qquad \lim_{r \to \infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}}\right) = 0$

مقدار این حد والا است

با توجه به شرط $\lim_{r \to \infty} H(r) = 0$ معادله دوم قابل قبول است .

$$r^2 H'' + 2rH' - n(n+1)H = 0 \xrightarrow{\text{جواب}} \left(r^{-(n+1)}\right)$$

یک معادله خطی

$$\begin{cases} r^{-(n+1)} P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda \\ r^{-(n+1)} \underbrace{P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda}_{\text{Surface Spherical Harmonics}} \end{cases}$$

Solid Spherical Harmonics

چون خارج از کره در معادله لاپلاس صدق می‌کنند هارمونیک هستند و به آنها هارمونیک‌های کروی گفته می‌شود. ضمناً هر ترکیب خطی از آنها نیز جواب است.

Surface Spherical Harmonics ⟵ اگر r را ثابت در نظر بگیریم، بقیه‌ی رابطه مربوط به بخش زاویه‌ای است که روی سطح می‌باشد.

جواب در خارج از کره به شعاع واحد :

کره به شعاع واحد (مهم)

$$U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

با حل یک نوع مسئله در نیخله (مهم)

روی ژئوئید بوده که اینجا به کار می‌آید برای بدست آوردن این ضرایب.

$$U = U_g + U_c = U_g + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = \cancel{G\int_V \frac{\rho}{l}\,dv} + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

$$\Delta U_g = 0 \quad : \text{در خارج کره}$$

جواب در خارج از کره به شعاع R :

اثبات سوال امتحانی (مهم)

$$U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

با این رابطه می‌توان میدان ثقل زمین را تقریب زد و با استفاده از آن به تقریب مناسبی از پتانسیل زمین رسید.

در این معادله a_{nm} و b_{nm} و R مجهول هستند.

R باید به گونه‌ای تعیین شود که بهترین انطباق را داشته باشد.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}_{H(r)}\underbrace{P_{nm}(\cos\theta)}_{T(\theta)}\underbrace{\cos m\lambda}_{\Lambda(\lambda)}$$

جوابهای معادله لاپلاس :

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}\underbrace{P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda}_{Y_{nm}(\lambda,\theta)} \longrightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} Y_{nm}(\lambda,\theta)$$

$$r^{-n-1}\, Y_{nm}(\lambda,\theta)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_g}{\partial r} = -(n+1)\, r^{-(n+2)}\, Y_{nm}(\lambda,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 U_g}{\partial r^2} = (n+1)(n+2)\, Y_{nm}(\lambda,\theta)\cdot r^{-(n+3)} \end{cases}$$

در معادله صفحه بعد جایگذاری می‌کنیم :

15

$$\Delta U_g = \frac{\partial^2 U_g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta^* U_g = 0$$

$$(n+1)(n+2).r^{-(n+3)} Y_{nm}(\lambda,\theta) - \frac{2}{r}[n+1]\, r^{-(n+2)} Y_{nm}(\lambda,\theta) + \frac{1}{r^2}\Delta^*\left[r^{-(n+1)} Y_{nm}(\lambda,\theta)\right] = 0$$

$$(n+1)(n+2).r^{-(n+3)} Y_{nm}(\lambda,\theta) - 2(n+1).r^{-(n+3)} Y_{nm}(\lambda,\theta) + r^{-(n+3)}\Delta^* Y_{nm}(\lambda,\theta) = 0$$

پس هارمونیک های کروی $Y_{nm}(\lambda,\theta)$ توابع ویژه معادله لاپلاس
برروی کره یا توابع ویژه عملگر لاپلاس - بلترامی هستند. (*)

$$\Delta^* Y_{nm}(\lambda,\theta) + n(n+1) Y_{nm}(\lambda,\theta) = 0$$

$$\boxed{\Delta^* Y_{nm}(\lambda,\theta) = -n(n+1) Y_{nm}(\lambda,\theta)}$$

معادله اشتورم - لیوویل ⟶ چون از ترکیب دو معادله
اشتورم - لیوویل بدست آمده

cos یا sin

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{nm}(\lambda,\theta)\, Y_{kl}(\lambda,\theta)\, \sin\theta\, d\theta\, d\lambda = \int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \Phi_m(\lambda) P_{nm}(\cos\theta) . \Phi_l(\lambda) P_{kl}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta\, d\lambda$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \Phi_m(\lambda)\,\Phi_l(\lambda)\, d\lambda}_{\boxed{}\ \delta_{ml}} \underbrace{\int_0^{\pi} P_{nm}(\cos\theta)\, P_{kl}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta}_{\boxed{}\ \delta_{nk}}$$

دو به دو بر هم عمودند

$$\begin{cases} 2\pi & m=l=0 \\ \pi & m=l\neq 0 \\ 0 & m\neq l \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{2n+1} & n=k \\ \frac{2\pi(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{2n+1}\,\delta_{ml}\,\delta_{nk} & \\ 0 & n\neq k \end{cases}$$

$$Y_{nm}(\lambda,\theta) = \begin{cases} \cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \\ \sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \end{cases}$$

$$\Delta^* Y(\lambda,\theta) = -n(m+1)\, Y_{nm}(\lambda,\theta)$$

قلمرو کره $= [0,2\pi]\times[0,\pi]$

(*)

① پس هارمونیک های کروی هم سیستم پایه تشکیل می دهند :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |f(\lambda,\theta)|^2\, ds < \infty \longrightarrow$$ انرژی متناهی باشد

$$f(\lambda,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right] P_{nm}(\cos\theta)$$

② دو به دو با وزن واحد برروی کره متعامدند.

جواب مسئله

$C_2 = m^2 \qquad \cos m\lambda \qquad \sin m\lambda$

$C_1 = n(n+1) \qquad P_{nm}(\cos\theta)$

$r^{-(n+1)}$

هارمونیک‌های کروی

$$\left\{\begin{array}{l} \overbrace{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}^{\text{شعاعی}} \overbrace{P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda}^{Y_{nm}(\lambda,\theta)} \\ \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \overline{P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda} \end{array}\right.$$

بخش زاویه‌ای $Y_{nm}(\lambda,\theta)$: surface Spherical Harmonics

و اگر بخش شعاعی را هم در نظر بگیریم : Solid Spherical Harmonics

برای کره‌ای به شعاع R

$$U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta)$$

پتانسیل حاصل از کره‌ای به شعاع R

$$U(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left[a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

برای هر نقطه‌ای خارج از یک کره

$$U(\lambda,\theta,r=R) = W_0$$

که با شرایطی از جمله مسئله مقدار مرزی در کل ضرایب بدست می‌آیند.

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} Y_{nm}(\lambda,\theta) \qquad Ax = \lambda x$$

$$\Delta^* Y_{nm}(\lambda,\theta) = -n(n+1)\,Y_{nm}(\lambda,\theta)$$

$$Y_{nm}(\lambda,\theta) = \begin{cases} \cos m\lambda \cdot P_{nm}(\cos\theta) \\ \sin m\lambda \cdot P_{nm}(\sin\theta) \end{cases}$$

معادله اشتورم-لیوویل:
جوابها دو به دو بر هم عمودند.
و تشکیل سیستم پایه می‌دهند.

ضرب داخلی

$$\int_0^{2\pi}\cos m\lambda \cdot \cos l\lambda \, d\lambda = \begin{cases} 2\pi & m = l = 0 \\ \pi & m = l \neq 0 \\ 0 & m \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin m\lambda \cdot \sin l\lambda \, d\lambda = \begin{cases} \pi & m = l \\ 0 & m \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos m\lambda \cdot \sin l\lambda \, d\lambda = 0$$

تعریف دایره : $\lambda \in [0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi} |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$

اگر انرژی متناهی باشد می‌توانیم به سری زیر بسط دهیم :

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos k\lambda + b_k\sin k\lambda\right]$$

$$\langle f(\lambda), \cos l\lambda\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos k\lambda + b_k\sin k\lambda\right], \cos l\lambda\right\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\langle\cos k\lambda, \cos l\lambda\rangle + b_k\overset{0}{\cancel{\langle\cos l\lambda, \sin k\lambda\rangle}}\right] =$$

ادامه در صفحه بعد

$$= a_0 \langle 1, \cos l\lambda \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \cos k\lambda, \cos l\lambda \rangle$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda)\, d\lambda \\ a_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \cos l\lambda \, d\lambda \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \sin l\lambda \, d\lambda$$

$$P_{nm}(\cos\theta) \qquad \theta \in [0, \pi]$$

$$P_{nm}(\tau) \qquad \tau = \cos\theta$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & n = l \\ 0 & n \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} P_{nm}(\cos\theta) P_{lm}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl}$$

$$\int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta < \infty \longrightarrow \int_{-1}^{1} |f(\tau)|^2 d\tau < \infty$$

ضریب سری فوریه‌ی لیسنوسی

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C_{nm} \cdot P_{nm}(\cos\theta)$$

سری فوریه‌ی لژاندر

$$\underbrace{\langle f(\theta), P_{km}(\cos\theta) \rangle}_{\text{ضرب داخلی روی کره}} = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C_{nm} P_{nm}(\cos\theta), P_{km}(\cos\theta) \rangle$$

یادآوری: ضرب داخلی توابع

$$x \in [a, b]$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_{km}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} C_{nm} \int_0^{\pi} P_{nm}(\cos\theta) P_{km}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} C_{nm} \delta_{nk}$$

$$C_{km} = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_{nm}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

$$\Delta^* Y_{nm}(\lambda, \theta) = -n(n+1) \cdot Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

تعریف کره : $\overset{\lambda}{[0, 2\pi]} \times \overset{\theta}{[0, \pi]}$

$$Y_{nm}(\lambda, \theta) = \begin{cases} \cos m\lambda \cdot P_{nm}(\cos\theta) \\ \sin m\lambda \cdot P_{nm}(\cos\theta) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{nm}(\lambda, \theta) \cdot Y_{kl}(\lambda, \theta) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot 2\pi \cdot \delta_{nk} \delta_{ml} & m = 0 \\ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \pi \, \delta_{nk} \delta_{ml} & m \neq 0 \end{cases}$$

به توضیح صفحه بعد توجه شود

18

$$G=\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}\end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} \lambda & \theta & r \\ \end{array} \begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

دلیل $\sin\theta$ در روابط صفحه قبل

$$d_v=\sqrt{g_{11}}\,dg_1\cdot\sqrt{g_{22}}\,dg_2\cdot\sqrt{g_{33}}\,dg_3 \qquad ds=\sqrt{g_{11}}\,dg_1\cdot\sqrt{g_{22}}\,dg_2$$

حجمی : $dv=dx\,dy\,dz$ کارتزین   سطحی : $ds=dx\,dy$ کارتزین

یک بعدی : $ds=dx$

$$ds=r^2\sin\theta$$

$$\langle f,g\rangle=\iint f.g\,ds \xrightarrow{\text{اگر}} r=1\ ;\ ds=\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|f(\lambda,\theta)|^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda<\infty$$

$$\iint_S|f(\lambda,\theta)|^2ds<\infty$$

ارتباط با a_{nm} و b_{nm} جواب معادله لاپلاس ندارند.

$$f(\lambda,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a'_{nm}\cos m\lambda+b'_{nm}\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta) \rightarrow$$

سری فوریه ی دو بعدی

$$\langle f(\lambda,\theta),\cos l\lambda\,P_{kl}(\cos\theta)\rangle=\Big\langle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\big[a'_{nm}\cos m\lambda\,P_{nm}(\cos\theta)+\cdots$$

$$\cdots+b'_{nm}\sin m\lambda\,P_{nm}(\cos\theta)\big],\cdots$$

$$\cdots\cos l\lambda\,P_{kl}(\cos\theta)\Big\rangle$$

$$\begin{cases} a'_{n0}=\dfrac{2n+1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\lambda,\theta)\,\overset{P_n}{P_{n0}}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda \\ \begin{pmatrix}a'_{nm}\\ b'_{nm}\end{pmatrix}=\dfrac{2n+1}{2\pi}\cdot\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\lambda,\theta)\begin{pmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{pmatrix}P_{nm}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda\end{cases}$$

تابعی که روی دایره یا کره تعریف می‌شود را می‌توان به سری فوریه بسط داد.

انواع هارمونیک های کروی سطحی
(با توجه به مقادیر m و n)

$$C_{nm}(\lambda,\theta) = \cos m\lambda \, P_{nm}(\cos\theta)$$

$$S_{nm}(\lambda,\theta) = \sin m\lambda \, P_{nm}(\cos\theta)$$

دسته‌ی یکم - هارمونیک های زونال :
(Zonal)

$m=0$; $C_{n0}(\lambda,\theta) = P_{n0}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$

$S_{n0}(\lambda,\theta) = 0$

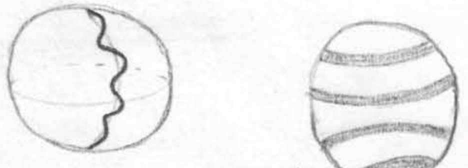
$\theta = [0, \pi]$
$\lambda = [0, 2\pi]$

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^2-1)^n \qquad \tau = \cos\theta$$

P_n یک چندجمله‌ای درجه n می‌باشد، لذا n ریشه خواهیم داشت. یعنی بر روی کره n بار تغییر علامت و (n+1) ناحیه داریم.

وابسته به λ نمی‌باشد و فقط تابعی از θ است.

اگر نمودار روی کره تصویر شود (مثبت و منفی می‌شود)



(zonal) هارمونیک های زونال

بر اساس درجه‌ی مختلف θ ریشه‌های مختلف وجود خواهد داشت.
مشخص است که به λ وابسته نبوده و فقط در راستای مدار تغییر می‌کند.
مدار [0 و π] معادل [1 و 1-] است.

دسته‌ی دوم - هارمونیک های بخشی :
(sectorial)

$n=m$; $C_{nm}(\lambda,\theta) = \cos m\lambda \, P_{nm}(\cos\theta)$

$\theta = [0, \pi]$
$\lambda = [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \cos m\lambda \, P_{mm}(\cos\theta) \\ \sin m\lambda \, P_{mm}(\cos\theta) \end{cases}$$

اگر از یک چندجمله‌ای درجه m، m بار مشتق بگیریم ← عدد ثابت k

$$P_{mm}(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\tau^m} P_m(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2} \cdot k$$

هم به λ وابسته است هم به θ

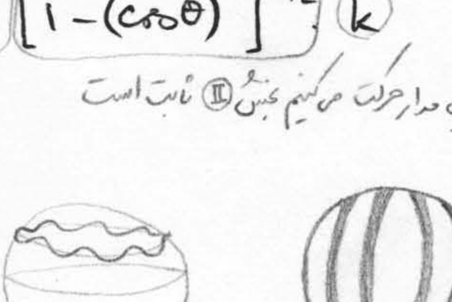
$$\begin{cases} \cos m\lambda (1-\tau^2)^{m/2} \cdot k = \overset{\text{I}}{\cos m\lambda} \, \overset{\text{II}}{\left[1-(\cos\theta)^2\right]^{m/2}} \cdot k \\ \sin m\lambda (1-\tau^2)^{m/2} \cdot k = \sin m\lambda \left[1-(\cos\theta)^2\right]^{m/2} \cdot k \end{cases}$$

عدد ثابت

وقتی روی یک مدار حرکت می‌کنیم بخش II ثابت است

$\cos\lambda$: 2 ریشه $\longrightarrow$ $\cos m\lambda$: 2m ریشه

در مدار بزرگتر فاصله‌ی بین ریشه‌ها نیز بیشتر می‌شود، ولی تعداد ریشه‌ها در هر مدار یکسان است.



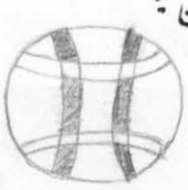
(Sectorial) هارمونیک های بخشی

2m ریشه بر حسب λ ، 2m تغییر علامت در جهت مدار ، 2m ناحیه روی کره

دسته سوم - هارمونیک های شطرنجی :
(Tesseral)

$n \neq m \quad , m \neq 0$

(Tesseral) هارمونیک های شطرنجی



$2m$ ریشه به ازای λ و $(n-m)$ ریشه به ازای θ دارد. لذا $2m(n-m)$ تغییر علامت و $2m(n-m+1)$ ناحیه می‌باشد.

$$U = U_g + U_c$$

بحث جلسه بعد

$$U = G\int_V \frac{\rho^c}{l}\,dv + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 \qquad \Delta U_g = 0$$

جواب معادله لاپلاس

در نیوتون ρ^c مجهول است
(توزیع جرم یا چگالی)

$$\Delta U_g = 0 \longrightarrow U_g(\lambda,\theta,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}$$

$$U = G\int \frac{\rho^c}{l}\,dv \quad + \quad \frac{1}{2}\omega^2 r''^2$$

چون توزیع جرم یا چگالی موجود نیست از رابطه نیوتون نمی‌توان استفاده کرد

مجهولات رابطه پواسن

پواسن

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 \qquad (\lambda,\theta,r)$$

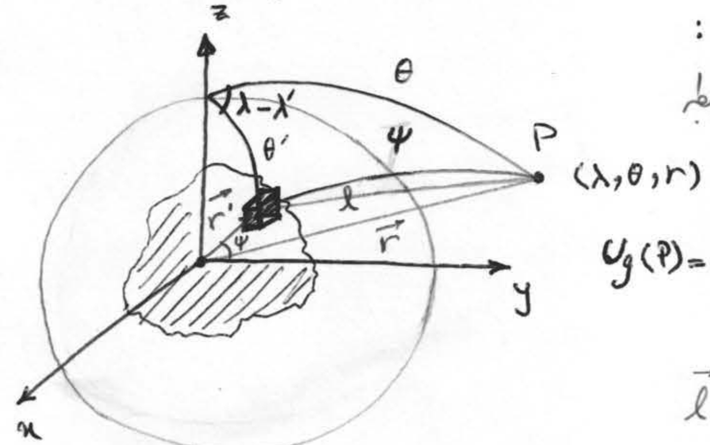
کره

توزیع چگالی درون کره

شرط مرزی $\quad U(\lambda,\theta,r=R) = W_0 \quad$ از این شرط مرزی برای بدست آوردن رابطه بین ضرایب و ρ^c استفاده می‌شود

حسن رابطه پواسن نسبت به رابطه نیوتون این است که به ازای مقادیر مختلف n و m در مرز می‌توانیم مقدار را بدست آوریم.

ارتباط ضرایب هارمونیک های کروی و جسم جاذب :



با توجه به اینکه در رابطه‌ی فوق پتانسیل یک کمیت فیزیکی است و سمت راست رابطه به صورت ریاضی بیان شده، باید ضرایب هارمونیک‌های کروی معنای فیزیکی داشته باشند. برای رسیدن به این مفاهیم رابطه پتانسیل را به سری هارمونیکهای کروی ربط می‌دهیم :

$$U_g(P) = G\int_V \frac{\rho}{l}\,dv$$

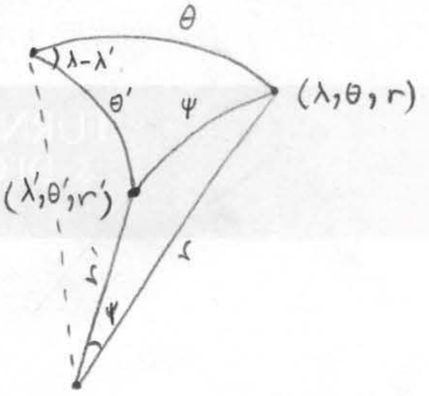
$$\vec{l} = \vec{r} - \vec{r'} \qquad l^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi$$

$$l = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi\right]^{1/2} = r\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\psi\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\psi\right]^{-1/2} \qquad \frac{r'}{r} < 1 \qquad |\cos\psi| \leq 1$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r'^n \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$$

قضیه ی جمع



$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda')$$

سوال امتحانی - با استفاده از قضیه ی جمع اثبات کنید :

$$P_n(\cos\psi) = P_{n0}(\cos\theta)P_{n0}(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta)P_{nm}(\cos\theta') \cdots$$

$$\cdots \left(\cos m\lambda\cos m\lambda' + \sin m\lambda\sin m\lambda'\right)$$

از این رابطه بدست می آید:

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} r'^n\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}\Big[P_{n0}(\cos\theta)P_{n0}(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta)P_{nm}(\cos\theta')$$

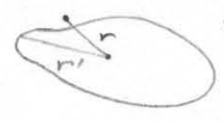
$$\left(\cos m\lambda\cos m\lambda' + \sin m\lambda\sin m\lambda'\right)\Big]$$

که این مقدار را در رابطه ی U_g قرار می دهیم :

$$U_g(P) = \frac{G}{R}\int_V \rho^c\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{R^n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\Big[P_{n0}(\cos\theta)P_{n0}(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta) \cdots\right.$$

$$\left.\cdots P_{nm}(\cos\theta')\left(\cos m\lambda\cos m\lambda' + \sin m\lambda\sin m\lambda'\right)\Big]\right\}dv$$

با توجه به اینکه سری همگرای یکنواخت می باشد می توانیم جای انتگرال و سری را جابه جا نماییم. توجه شود در این رابطه r ثابت فرض شده :



$r' < r$

$$U_g = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left\{\left(\frac{G}{R^{n+1}}\int_V \rho^c r'^n P_{n0}(\cos\theta')\,dv\right)P_{n0}(\cos\theta) \cdots\right.$$

$$\cdots + \left(\frac{2G}{R^{n+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_V \rho^c r' P_{nm}(\cos\theta')\cos m\lambda'\,dv\right)P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda \cdots$$

$$\left.\cdots + \left(\frac{2G}{R^{n+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_V \rho^c r' P_{nm}(\cos\theta')\sin m\lambda'\,dv\right)P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right\}$$

رابطه را ساده می کنیم :

$$U_g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \Bigg\{ \underbrace{\left(\frac{G}{R^{n+1}} \int_V \rho^c r'^n P_{n0}(\cos\theta')\, dv\right)}_{a_{n0}} P_{n0}(\cos\theta) \cdots$$

$$\cdots + \sum_{m=1}^{n} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{2G}{R^{n+1}} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \rho^c r'^n P_{nm}(\cos\theta') \cos m\lambda'\, dv\right)}_{a_{nm}} P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\left(\frac{2G}{R^{n+1}} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \rho^c r'^n P_{nm}(\cos\theta') \sin m\lambda'\, dv\right)}_{b_{nm}} P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda \Bigg] \Bigg\}$$

$$U_g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda\right] P_{nm}(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \Bigg[a_{n0} P_{n0}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \Big[a_{nm} \cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) + b_{nm} \sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \Big] \Bigg]$$

$$\begin{cases} a_{n0} = \dfrac{G}{R} \displaystyle\int_V \rho^c \left(\frac{r'}{R}\right)^n P_{n0}(\cos\theta')\, dv \\[2ex] \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix} = \dfrac{2G}{R} \cdot \dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} \displaystyle\int_V \rho^c \left(\frac{r'}{R}\right)^n P_{nm}(\cos\theta') \begin{pmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{pmatrix} dv \end{cases}$$

این ضرایب معنای فیزیکی دارند چون وابسته به چگالی هستند . البته 12 تای اول برای ما مهم هستند .

a_{00}	a_{10}	a_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}
b_{00}	b_{10}	b_{11}	b_{20}	b_{21}	b_{22}

$P_0(t) = 1$

$P_1(t) = t$

$P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$

$P_{00}(\cos\theta) = 1$

$P_{10} = \cos\theta$

$P_{11} = \sin\theta$

$P_{20} = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$P_{21}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$

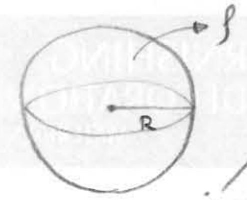
$P_{22}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$

رابطه رودریگز: $(t = \cos\theta)$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$$

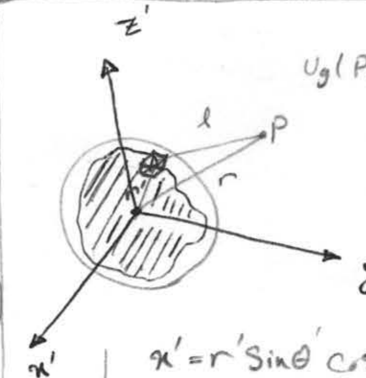
مثال: $P_{11}(t) = (1-t^2)^{1/2}$



$$\frac{GM}{r}$$

برای یک کره با توزیع یکنواخت مقدار پتانسیل را بیان می‌کند.

a_{00} قسمت عمده‌ی مبدأ پتانسیل است (97 درصد)
تمام محاسبات برای به دست آوردن 3 درصد باقیمانده است
زیرا حداکثر جدایی ژئوئید از سطح زمین 100 متر است.
(با توجه به شعاع 6400 کیلومتری زمین)



$x' = r'\sin\theta'\cos\lambda'$

$y' = r'\sin\theta'\sin\lambda'$

$z' = r'\cos\theta'$

تعریف مختصات مرکز ثقل

$$\begin{pmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\int_v \rho^c \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} dv$$

مثال:

$$r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}r'^2\cos^2\theta' - \frac{1}{2}r'^2 =$$

$$\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$

$$z'^2 - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$$

$$a_{00} = \frac{G}{R}\underbrace{\int_v \rho^c dv}_{M} = \frac{GM}{R}$$

بخش دوم روابط صفحه قبل به صورت کارتزین بیان می‌شود

$$a_{10} = \frac{G}{R^2}\int_v \rho^c \underbrace{r'\cos\theta'}_{z'} dv = \frac{G}{R^2}\int_v \rho^c z' dv = \frac{GM}{R^2} z'_c$$

مؤلفه سوم مختصات مرکز ثقل ← مؤلفه a_{10} وابسته به مرکز ثقل است.

$$a_{11} = \frac{G}{R^2}\int_v \rho^c \underbrace{r'\cos\lambda'\sin\theta'}_{x'} dv = \frac{GM}{R^2} x'_c$$

$$a_{20} = \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) dv$$

$$= \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c\left(z'^2 - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) dv$$

$$a_{21} = \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c r'^2 \sin\theta'\cos\theta'\cos\lambda' dv$$

$$= \frac{G}{R^3}\int_v \rho^c x' z' dv$$

$$a_{22} = \frac{G}{4R^3}\int_v \rho^c r'^2 \cos 2\lambda' \sin^2\theta' dv$$

$$= \frac{G}{4R^3}\int_v \rho^c (x'^2 - y'^2) dv$$

چون در روابط a و b مقدار $\sin m\lambda$ وجود دارد، درصورتیکه $m=0$ باشد، رابطه صفر می‌شود. لذا:

$b_{00} = 0$

$b_{10} = 0$

$$b_{11} = \frac{G}{R^2}\int_v \rho^c \underbrace{r'\sin\theta'\sin\lambda'}_{y'} dv = \frac{GM}{R^2} y'_c$$

$b_{20} = 0$