مدرسان شریف

کارشناسی ارشد

ریاضیات عمومی (۲)

- ۱۲۰۰ پرسش چهار گزینه ای شامل ۸۵۰ مسئله حل شده و ۳۵۰ مسئله با پاسخ کلیدی
- ارائه مطالب به روش‌های کاملاً خلاصه ، ساده و فرمول بندی شده
- ارائه روش های سریع و کوتاه جهت تعیین جواب‌ها
- ارئه ۱۰ آزمون خود سنجی جهت آمادگی هر چه بهتر دانشجویان
- قابل استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی به عنوان کتاب مرجع دانشگاهی جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم

مؤلفین : مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

خلاصه درس ، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷-۷۵

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

چه کسم من؟ چه کسم من؟ که بسی وسوسه‌مندم
که از این سوی کشندم، که از آن سوی کشندم

نفسی آتش‌سوزان، نفسی سیل گریزان
زچه اصلم؟ زچه فصلم؟ زچه بازار خرندم؟

نفسی رهزن و غولم، نفسی تند و ملولم
نفسی زین دو برونم، که بر آن بام بلندم

(دیوان شمس)

سرشناسه : نامی، حسین.
عنوان و پدیدآور : ریاضی عمومی (۲) / مؤلفین حسین نامی/علیرضا عشقی:
مشخصات نشر : تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری : ۲۸۸ ص.
شابک : 978 – 964 – 2838 – 37 - 0
یادداشت: فیپا
یادداشت : چاپ سوم
یادداشت : عنوان عطف: ریاضیات عمومی (۲) کارشناسی ارشد.
یادداشت : عنوان روی جلد: مدرسان شریف کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۲) ...
عنوان دیگر: ریاضیات عمومی (۲) کارشناسی ارشد.
عنوان دیگر: مدرسان شریف: کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۲) ...
موضوع : دانشگاهها و مدارس عالی - - ایران - - آزمونها.
موضوع : ریاضیات - - آزمونها و تمرینها (عالی).
موضوع : آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی - - ایران.
شناسه افزوده : عشقی، علیرضا.
شناسه افزوده : مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف.
رده بندی کنگره : ۹۲۲۲ ر ۱۸۳ ن ۲۳۵۳/ LB
رده‌بندی دیویی : ۳۷۸/۱۶۶۴
شماره کتابخانه ملی : ۴۲۵۱۱ ـ ۸۵ م

نام کتاب: ریاضی عمومی (۲)

مؤلفین: مهندس حسین نامی ـ علیرضا عشقی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

تاریخ چاپ اول : مهرماه ۱۳۸۵

تاریخ چاپ سوم : مهرماه ۱۳۸۷

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی - مینو

قیمت: ۵۸۰۰ تومان

شابک: 978 – 964 – 2838 – 37 - 0

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبرکبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو می‌باشد، لذا مؤسسه علمی ـ فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی ـ آموزشی خود اقدام به ارایه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این‌که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «ریاضی عمومی (۲)» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت موسسه مدرسان شریف

مقدمه مؤلفین

خدایـا، مرا آن ده کـه آن بـه

افزایش روزافزون فارغ التحصیلان دوره‌های کارشناسی و اشتیاق آنها برای ورود به دوره‌های کارشناسی ارشد و کمبود کتب آمادگی مناسب آزمونهای کارشناسی ارشد هدف اصلی نگارش این کتاب می‌باشد.

با توجه به این که درس «ریاضی عمومی (۲)» معمولاً در سال اول تحصیلی توسط دانشجویان دوره‌های کارشناسی گذرانده می‌شود و پس از گذشت دو سال از آن مطالب فرا گرفته شده تقریباً به فراموشی سپرده شده، لذا کتاب با نگارش ساده و اجتناب از بیان مطالب غیر ضروری (اثبات فرمول‌ها و ...) سعی بر این داشته که دانشجویان جهت موفقیت در آزمون کارشناسی ارشد در کمترین زمان بهترین نتیجه‌گیری را داشته و دیگر نیازی به مراجعه به کتب دیگر نداشته باشند، از ویژگی‌های بارز این کتاب نسبت به دیگر کتب موجود در این زمینه موارد زیر را می‌توان نام برد:

۱) مطالب به صورت خلاصه و فرمول‌بندی شده و حتی‌المقدور حل مسائل با روشهای تستی بیان گردیده است.

۲) هر فصل کتاب دارای سه بخش کلی است که بخش اول شامل خلاصه درس همراه با مثالهای حل شده می‌باشد که این مثالها عیناً سؤالات دوره‌های گذشته، سؤالات تألیفی و یا سؤالاتی است که در آزمونهای آزمایشی موسسه مدرسان شریف سؤال بوده‌اند. بخش دوم شامل صرفاً سؤالات به همراه پاسخنامه تشریحی مربوط به آزمونهای دوره‌های گذشته در رشته‌های مختلف از سال ۱۳۷۸ تا ۱۳۸۴ است. در بخش سوم هر فصل تستهای تکمیلی مربوط به آن فصل آورده شده است که بعضاً سؤالات مشکلی نسبت به سؤالات دوره‌های قبل در این تستها مشاهده می‌شود. (که به عقیده مؤلفین و دپارتمان ریاضی مؤسسه مدرسان شریف می‌توانند سؤالاتی جالب جهت طرح در آزمونهای آینده باشد.)

۳) کتاب مجموعاً شامل حدود ۸۵۰ تست با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و تقریباً ۳۵۰ تست با پاسخ‌های کلیدی است که جمعاً حدود ۱۲۰۰ مسئله غیر تکراری در کتاب گنجانده شده که از این حیث می‌توان کتاب را در بین کتب ریاضی دیگر که برای این منظور تهیه شده‌اند، بی‌نظیر دانست.

۴) در حل بعضی تستها نوآوری‌های خاص این کتاب (روش‌های حل سریع و کوتاه) مشاهده می‌شود.

۵) کلیه سئوالات مربوط به آزمونهای دانشگاه سراسری از سال ۷۸ تا ۸۴ مربوط به اکثر رشته‌ها و همچنین سئوالات منتخب دانشگاه آزاد از سال ۸۰ تا ۸۴ به صورت طبقه‌بندی شده در انتهای فصول مختلف کتب گنجانده شده است.

۶) سئوالات مربوط به قبل از سال ۷۸ در کتاب به عنوان مثالهای حل شده در هر فصل و یا تحت عنوان تست‌های تکمیلی در کتاب آورده شده است.

۷) در انتهای کتاب سئوالات آزمون سال ۱۳۸۵ و ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ دانشگاه سراسری (اسفند ۸۴ و ۸۵ و ۸۶) به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی ارائه شده است.

۸) جهت خودسنجی و آمادگی هر چه بهتر دانشجویان عزیز ۱۰ مرحله آزمون در سه سطح A (سخت)، B (متوسط) و C (آسان) تنظیم شده، که با توجه به مدت زمان پیشنهادی و سطح آزمون دانشجویان عزیز می‌توانند شرایط خود را از لحاظ مقدار آمادگی مورد سنجش قرار دهند.

۹) مطالب کتاب به گونه‌ای تدوین گردیده که می‌تواند به عنوان مرجع کامل جهت درس ریاضی عمومی (۲) جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم دانشگاهها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه هیچ تألیفی خالی از اشکال نیست لذا از همه اساتید و دانشجویان انتظار داریم عنایت فرمایند و اشکالات این کتاب را به آدرس: فلکه دوم صادقیه روبه‌روی مسجد امام جعفر صادق(ع) - بلوار شهدا - پلاک ۳۵ - آموزشگاه مدرسان شریف ارسال کنند و یا با شماره تلفن ۱۳۸۴۸۶۱ - ۰۹۱۲ تماس حاصل فرمایند. در خاتمه جا دارد از خانم فاطمه هلیلی که تایپ و صفحه‌آرایی این مجموعه را به عهده داشتند، نهایت سپاسگزاری را داشته باشیم.

مهندس حسین نامی ـ علیرضا عشقی
مهرماه ۱۳۸۷

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: توابع چند متغیره	**۱**
توابع دو یا چند متغیره	۱
حد و پیوستگی توابع دو متغیره	۱
تعریف مشتق جزئی	۲
دیفرانسیل یک تابع	۴
مشتق جزئی در توابع چند متغیره	۵
قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب با تعداد متغیرهای بیشتر	۶
مشتق‌گیری ضمنی	۸
قضیه اویلر	۹
محاسبه مشتقات جزیی یک دستگاه با استفاده از ژاکوبین	۱۰
به دست آوردن نقاط بحرانی و اکسترممهای توابع دو متغیره	۱۱
به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از ضرایب لاگرانژ	۱۲
گرادیان	۱۵
دیورژانس	۱۵
کرل	۱۵
لاپلاسین	۱۶
مشتق سوئی	۱۶
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول	۱۸
پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول	۳۶
تست‌های تکمیلی فصل اول	۶۲
فصل دوم: رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری	**۶۶**
رویه‌ها	۶۶
رویه‌های درجه دوم	۶۶
سطح حاصل از دوران	۶۸
توابع برداری	۶۸
طول قوس منحنی‌های فضایی	۶۹
تعریف بردارهای سرعت، شتاب بردارهای یکانی مماس و قائم	۷۰
انحنا یا خمیدگی منحنی C	۷۱
دایره بوسان	۷۲
تاب منحنی	۷۳
حرکت در مختصات قطبی	۷۳
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم	۷۴
پاسخنامه تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم	۷۷
تست‌های تکمیلی فصل دوم	۸۱
فصل سوم: انتگرال توابع چند متغیره	**۸۲**
انتگرال‌های دوگانه	۸۲
تعویض ترتیب انتگرال‌گیری	۸۴
تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت حجم	۸۶
محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی	۸۷
فرمول‌های حجم و سطح در مختصات قطبی	۸۹
تغییر متغیر در انتگرال دوگانه (استفاده از ژاکوبین)	۹۰
مقدار متوسط تابع f	۹۲
جرم، مرکز ثقل و گشتاور ماند یک صفحه مسطح	۹۲

فهرست مطالب

عنوان — **صفحه**

انتگرالهای سه‌گانه ۹۳
محاسبه انتگرالهای سه‌گانه با استفاده از مختصات استوانه‌ای ۹۵
محاسبه انتگرالهای سه‌گانه با استفاده از مختصات کروی ۹۵
مقدار متوسط تابع $f(x,y,z)$ ۹۶
جرم، گشتاور ماند و مرکز ثقل اجسام (دارای حجم) ۹۶
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم ۹۸
پاسخنامه تشریحی تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم ۱۰۷
تست‌های تکمیلی فصل سوم ۱۱۸
فصل چهارم : میدانهای برداری و انتگرال‌گیری روی مسیرها و سطوح **۱۲۵**
انتگرال روی خم ۱۲۵
محاسبه جرم و گشتاور ۱۲۶
انتگرال خط میدانهای برداری ۱۲۷
استقلال از مسیر و میدانهای پایستار (کنسرواتیو یا ابقایی) ۱۳۰
تعیین پتانسیل برای میدانهای پایستار ۱۳۰
شار گذرنده از یک خم واقع در صفحه ۱۳۳
قضیه گرین ۱۳۳
انتگرال‌های رویه‌ای (انتگرال روی سطح) ۱۳۸
تعریف و روش محاسبه انتگرال رویه‌ای ۱۳۸
انتگرال میدان برداری روی سطوح (شار) ۱۴۱
قضیه دیورژانس (قضیه گاوس یا قضیه واگرایی) ۱۴۳
قضیه استوکس ۱۴۶
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم ۱۴۸
پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم ۱۵۷
تست‌های تکمیلی فصل چهارم ۱۶۹
فصل پنجم : بردار **۱۷۴**
دستگاه مختصات قائم ۱۷۴
حاصل‌ضرب داخلی دو بردار (حاصلضرب اسکالر) ۱۷۵
حاصل‌ضرب خارجی دو بردار ۱۷۶
ضرب مختلط سه بردار ۱۷۷
ضرب برداری سه بردار (حاصل‌ضرب سه‌گانه) ۱۷۸
استقلال و وابستگی خطی ۱۷۹
معادله خط ۱۷۹
معادله صفحه ۱۸۱
ماتریس ۱۸۳
دترمینان ۱۸۶
ماتریس وارون و(معکوس) یک ماتریس مرتبه n ۱۸۸
حل دستگاه معادلات خطی ۱۸۹
مقادیر ویژه و بردار ویژه ۱۹۰
ماتریس‌های قطری شدنی ۱۹۲
ماتریس معین مثبت و معین منفی ۱۹۲

فهرست مطالب

عنوان — **صفحه**

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم ۱۹۴
پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم ۲۰۲
تست‌های تکمیلی فصل پنجم ۲۰۹

آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰) **۲۱۴**
پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰) ۲۲۴
تست‌های سراسری ۱۳۸۵ .... **۲۲۵**
پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵ .... ۲۳۳
تست‌های سراسری ۱۳۸۶ .... **۲۴۷**
پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶ .... ۲۵۴
تست‌های سراسری ۱۳۸۷ .... **۲۶۴**
پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷ .... ۲۷۰
پاسخنامه تست‌های تکمیلی ۲۷۶
منابع و مراجع ۲۷۷

فصل اول
« توابع چند متغیره »

توابع دو یا چند متغیره

مقادیر بسیاری از توابع به کمک بیش از یک متغیر مستقل معین می‌شوند، برای مثال حجم استوانه از رابطه $V = \pi r^2 h$ که r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه است، تعیین می‌گردد.

دامنه و برد توابع دو متغیره

در تعیین دامنه تابع $z = f(x,y)$ مجموعه نقاطی مانند $A(x,y)$ در صفحه xoy می‌توانند به عنوان دامنه در نظر گرفته شوند و حوزه مقادیر تابع نیز با توجه به ضابطه آن تعیین می‌گردد.

مثال ۱ : دامنه و برد تابع $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ :** $y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$

دامنه f شامل تمام نقاطی است که در بالا و روی سهمی $y = x^2$ قرار می‌گیرند. برد f نیز شامل تمام مجموعه اعداد مثبت و صفر می‌باشد.

مثال ۲ : برد تابع دو متغیره $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $[0,3]$ ۴) $R - \{0\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد چون $-x^2 - y^2$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر می‌باشد، پس مقدار زیر رادیکال کوچکتر یا حداکثر مساوی ۹ خواهد بود لذا مقدار z از عدد ۳ نمی‌تواند بیشتر باشد.

حد و پیوستگی توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $f(x,y)$ را در نظر بگیرید، برای وجود حد $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ باید مقدار این حد مستقل از روش میل کردن (x,y) به سمت (x_0 , y_0) باشد، بعبارت دیگر اگر با چند روش مختلف میل کردن، جوابهای مختلف بدست آید آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست. معمولاً برای بررسی وجود حد توابع دو متغیره مسیرهای $y = mx$ را انتخاب می‌کنیم، اگر مقدار حد به m بستگی داشته باشد، تابع قطعاً حد ندارد و اگر حد به m بستگی نداشت، نمی‌توانیم در مورد وجود حد اظهار نظر کنیم.

مثال ۳ : حد تابع $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ در نقطه $(0,0)$ کدام است ؟

۱) حد ندارد ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون حد به m بستگی دارد، لذا تابع حد ندارد.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x}{x+mx} = \frac{1}{m+1}$$

توضیح: نوع دیگر بررسی حد اینگونه توابع (البته زمانی که مقدار حد برابر $\frac{0}{0}$ شود) استفاده از مختصات قطبی می‌باشد. با توجه به اینکه $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌توانیم $f(x,y)$ را در مختصات قطبی نمایش داده، وقتی $r \to 0$ مقدار حد را محاسبه می‌کنیم اگر مستقل از θ بود مقدار بدست آمده، حد تابع می‌باشد در غیر این‌صورت حد موجود نمی‌باشد.

مثال ۴ : مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

۱) دارای حد نیست ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}=0$$

در مورد محاسبهٔ حد توابع چند متغیره می‌توان از موارد زیر در حل تست‌ها استفاده کرد:

۱) اغلب اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد حد وجود دارد و اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد، حد وجود ندارد.

۲) در تابع $\frac{x^m y^n}{x^k+y^w}$ مسیر $x^m = ky^n$ را بررسی کنید.

شرط پیوستگی توابع دو متغیره

اگر حد تابع $f(x,y)$ در (x_0,y_0) برابر $f(x_0,y_0)$ باشد، آنگاه گوئیم تابع در (x_0,y_0) پیوسته می‌باشد.

مثال ۵ : تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

۱) پیوسته است. ۲) پیوسته نیست. ۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) فقط پیوستگی راست دارد.

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$0\le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}\times y^2 \le y^2$$

حال توجه کنید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$. بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$ و چون $f(0,0)=0$ بنابراین f در مبدأ پیوسته است.

تعریف مشتق جزئی

اگر $z=f(x,y)$ با فرض اینکه y مقدار ثابتی باشد، داریم:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y)}$$

که $\frac{\partial z}{\partial x}$ مشتق جزئی تابع z نسبت به متغیر x است، به همین ترتیب $\frac{\partial z}{\partial y}$ مشتق جزئی تابع z نسبت به متغیر y نامیده می‌شود، برای به دست آوردن مشتق‌های جزئی می‌توان از روابط عادی بیان شده در مشتق‌گیری استفاده کرد.

مثال ۶ : مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را برای تابع $z=\mathrm{Lntg}\frac{x}{y}$ تعیین کنید.

پاسخ : برای بدست آوردن $\frac{\partial z}{\partial x}$، y را مقداری ثابت در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}(1+tg^2\frac{x}{y})}{tg\frac{x}{y}} = \frac{1+tg^2\frac{x}{y}}{y\,tg\frac{x}{y}}$$

برای بدست آوردن $\frac{\partial z}{\partial y}$، x را مقداری ثابت در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}(1+tg^2\frac{x}{y})}{tg\frac{x}{y}} = -\frac{x(1+tg^2\frac{x}{y})}{y^2\,tg\frac{x}{y}}$$

تذکر ۱ : اگر $z=f(x,y)$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را به صورت f'_x ، f_x ، z_x ، z'_x ، f'_1 و f_1 نیز در کتابهای مختلف نمایش می‌دهند.

مشتق جزئی مرتبه‌های بالاتر

مشتق‌های جزئی مرتبه دوم از تابع $z=f(x,y)$ برابر «مشتق‌های جزئی از مشتق‌های جزئی مرتبه اول تابع z» می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy} = z''_{xy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx} = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx} = z''_{yx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy} = z''_{yy}$$

تذکر ۲ : وقتی تمام مشتق‌های جزئی تابعی پیوسته باشند، نتیجه نهائی مشتق به ردیف (ترتیب) مشتق‌گیری بستگی ندارد یعنی $z''_{yx}=z''_{xy}$ می‌باشد. (یعنی فرقی نمی‌کند اول نسبت به x مشتق بگیریم بعد نسبت به y و یا بالعکس.)

مثال ۷ : مشتق‌های جزئی مرتبه دوم تابع $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$ را به دست آورید.

پاسخ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1\times(x^2+y^2)-2x\times x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

اگر بخواهیم با ردیف دیگری مشتق جزئی اخیر را حساب کنیم. داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\times(x^2+y^2)-2y\times y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

توضیح: ملاحظه می‌گردد $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ می‌باشد.

مثال ۸ : اگر $f(x,y)=x^2\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$ باشد، مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\times\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3)}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[y=1]{x=1} \frac{3\times1(1+1)-2\times1\times1}{(1+1)^2}=1$$

نکته ۱ : اگر $z=f(x,y)$ تابعی با مشتق‌های جزئی پیوسته باشد، به طور کلی برای محاسبه $\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n}$ باید از $f(x,y)$، m بار نسبت به x و n بار نسبت به y با هر ترتیبی که خواستیم، مشتق بگیریم.

مثال ۹ : حاصل عبارت $\frac{\partial^5}{\partial x^2\partial y^3}(x\sin y+e^y)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $e^y+\sin y$ ۳) $e^y+x\cos y$ ۴) $-x\cos y+e^y$

پاسخ : گزینه «۱» اگر اول نسبت به x مشتق بگیریم، کار ساده‌تر خواهد بود. باید اول دو بار نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2\partial y^3}(x\sin y+e^y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\sin y+e^y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(x\sin y+e^y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^3}{\partial y^3}.\frac{\partial}{\partial x}(\sin y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}(0)=0$$

دیفرانسیل یک تابع

اگر تابع با ضابطه $y=f(x)$ را در نظر بگیریم دیفرانسیل تابع y را به فرم dy نمایش داده و بصورت $\boxed{dy=y'.dx}$ نشان می‌دهیم .

دیفرانسیل کامل تابع دو متغیره : اگر $u=f(x,y)$ باشد که x و y متغیرهای مستقل و تابع f دارای مشتق جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه دیفرانسیل u بصورت $\boxed{du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy}$ تعریف می‌شود .

مثال ۱۰ : اگر $u=x^y$ باشد آنگاه دیفرانسیل کامل u کدام است؟

۱) $du=x^y Ln\,x dx+yx^{y-1}dy$ ۲) $du=x^y Ln\,x dx+x^{y-1}Ln\,y\,dy$ ۳) $du=yx^{y-1}dx+yx^{y-1}dy$ ۴) $du=yx^{y-1}dx+x^y Ln\,x\,dy$

پاسخ : گزینه «۴» $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=yx^{y-1}dx+x^y Ln\,x.dy$

و در صورت وجود مشتقات جزیی مرتبه دوم، دیفرانسیل مرتبه دوم تابع u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2}$$

مثال ۱۱ : دیفرانسیل کامل مرتبه دوم تابع $u=2x^2-3xy-y^2$ کدام است؟

۱) $4dx^2+6dxdy-2dy^2$ ۲) $4dx^2-6dxdy-2dy^2$ ۳) $4dx^2+6dxdy+2dy^2$ ۴) $-4dx^2-6dxdy+2dy^2$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x-3y\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3x-2y\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(-3x-2y)=-3$$

$$d^2z=4dx^2-6dxdy-2dy^2$$

نکته ۲ : به طور کلی برای تابع $z=f(x,y)$ می‌توان رابطه دیفرانسیل کامل مرتبه n ام را به صورت زیر بیان نمود:

$$\boxed{d^n z=(dx.\frac{\partial}{\partial x}+dy.\frac{\partial}{\partial y})^n z}$$

شرط دیفرانسیل کامل

برای اینکه عبارتی مانند $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ دیفرانسیل کامل تابعی باشد، باید شرط $\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}}$ برقرار باشد، برای مثال عبارت $(2x+y)dx+(x+2y)dy$ دیفرانسیل کامل می‌باشد زیرا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P=2x+y\\Q=x+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

دیفرانسیل کامل تابع سه متغیره

اگر $u=f(x,y,z)$ باشد که x,y و z متغیرهای مستقل و تابع f دارای مشتق جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه دیفرانسیل کامل u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz}$$

مثال ۱۲ : دیفرانسیل کامل u در صورتی که $u=xyz$ باشد، کدام است؟

۱) $xydx+xzdy+yzdz$ ۲) $yzdx+xzdy+xydz$ ۳) $xydx+zydy+xzdz$ ۴) $yzdx+xydy+xydz$

پاسخ : گزینه «۲»

شرط دیفرانسیل کامل بودن تابع سه متغیره:

اگر توابع $P(x,y,z)$، $Q(x,y,z)$ و $R(x,y,z)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند و مشتق‌های مرتبه اول آنها پیوسته باشد، در این صورت عبارت $A=Pdx+Qdy+Rdz$ زمانی دیفرانسیل کامل خواهد بود که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

برای مثال عبارت $(3x^2+2y-1)dx+(z^2+2x)dy+(2yz-1)dz$ دیفرانسیل کامل است زیرا داریم:

$$P=3x^2+2y-1\ ,\ Q=z^2+2x\ ,\ R=2yz+1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=2z\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0$$

مشتق جزئی در توابع چند متغیره

اگر $z=\phi(u,v)$ در آن u و v توابعی مشتق‌پذیر با متغیرهای x و y می‌باشد $v=g(x,y)$ و $u=f(x,y)$ آنگاه مشتقات تابع z نسبت به x و y از روابط زیر بدست خواهد آمد :

۱) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$	۲) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$

مثال ۱۳ : اگر $w=f(u,v)$ با شرط $u=x+at$ و $v=y+bt$ مقدار $\frac{\partial w}{\partial t}$ کدام است ؟

۱) $a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}$ ۲) $b\frac{\partial w}{\partial x}+a\frac{\partial w}{\partial y}$ ۳) $a\frac{\partial w}{\partial x}-b\frac{\partial w}{\partial y}$ ۴) $b\frac{\partial w}{\partial x}+a\frac{\partial w}{\partial y}$

پاسخ : گزینه «۱» چون تابع v شامل متغیر x نمی‌باشد لذا جمله دوم فرمول را ننوشتیم :

$$(1)\ \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\times 1$$

چون تابع u شامل متغیر y نمی‌باشد لذا جمله اول فرمول را ننوشتیم :

$$(2)\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}\times 1\Rightarrow$$

$$(3)\ \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial t}=a\frac{\partial w}{\partial u}+b\frac{\partial w}{\partial v}\xrightarrow{3,2,1}\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}$$

مثال ۱۴ : اگر $z=x^2-xy+2y^2$, $x=(t+1)^2$, $y=t+\sqrt{t}$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ در $t=1$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ : گزینه «۲» در این تست تابع $z=\phi(x,y)$ و $x=f(t)$ و $y=g(t)$ در نظر گرفته شده که با توجه به فرمول تغییر u و v به x و y و تغییر $f(x)$ و $g(x)$ به $f(t)$ و $g(t)$ انجام شده است.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

اما داریم :

$$\frac{dx}{dt}=2(t+1)\ ,\ \frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}=2x-y\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=4y-x$$

وقتی $t=1$ در نتیجه $x=4$ و $y=2$ خواهد بود که با قرار دادن آنها در مشتقات فوق داریم :

$$\frac{dz}{dt}=(6\times 4)+(4\times\frac{3}{2})=30$$

مثال ۱۵ : اگر $z=u^2+v^2$ و $u=e^{x^2+y^2}$, $v=\frac{x}{y}$ باشد، در اینصورت $z'_x(1,1)$ کدام است؟

۱) $4e^4+2e^2$ ۲) $4e^4+2e$ ۳) $4e^4+2$ ۴) $4e^4$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=(2e^{x^2+y^2})(2xe^{x^2+y^2})+2(\frac{x}{y})(\frac{1}{y})\xrightarrow[y=1]{x=1}\frac{\partial z}{\partial x}=4e^4+2$$

مثال ۱۶ : اگر $z=xy+x\phi(\frac{y}{x})$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است ؟

۱) xy ۲) $\phi(\frac{x}{y})$ ۳) $2xy$ ۴) $xy+z$

☑ **پاسخ** : گزینه «۴» در این تست تابع ϕ شامل $u=\frac{y}{x}$ می‌باشد و لذا جمله‌های دوم فرمول ذکر شده دیگر مورد نیاز نیست .

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x}=y+\phi(\frac{y}{x})+(\frac{\partial\phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x})\times x=y+\phi(\frac{y}{x})-x\frac{y}{x^2}\frac{\partial\phi}{\partial u}$$

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial y}=x+(\frac{\partial\phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y})x=x+(\frac{\partial\phi}{\partial u})$$

$$\xrightarrow{1,2} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+x\phi(\frac{y}{x})-y.\frac{\partial\phi}{\partial u}+xy+y.\frac{\partial\phi}{\partial u}=xy+\underbrace{xy+x\phi(\frac{y}{x})}_{z}=xy+z$$

مثال ۱۷ : اگر $z=f(\frac{x}{y})$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $\left|\begin{matrix}x=2\\y=2\end{matrix}\right.$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}f'(1)$ ۲) $\frac{1}{2}f'(1)$ ۳) $f'(1)$ ۴) $\frac{1}{2}$

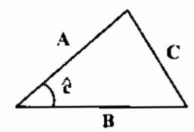
☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$z=f(\frac{x}{y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f'(\frac{x}{y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(2,2)=\frac{1}{2}f'(\frac{2}{2})=\frac{f'(1)}{2}$$

مثال ۱۸ : یک ضلع مثلثی $2/4m$ است و با سرعت $10(\frac{cm}{s})$ در حال افزایش است. یک ضلع دیگر این مثلث ۱/۶ متر می‌باشد که با سرعت $5(\frac{cm}{s})$ در حال افزایش است، زاویه بین این دو ضلع $\frac{\pi}{6}$ است. مساحت مثلث با چه سرعتی در حال افزایش می‌باشد؟

۱) $0/07(\frac{m^2}{s})$ ۲) $0/09(\frac{m^2}{s})$ ۳) $0/14(\frac{m^2}{s})$ ۴) $0/11(\frac{m^2}{s})$

☑ **پاسخ** : گزینه «۱» چون اضلاع با زمان تغییر پیدا می‌کنند، مساحت نیز با زمان تغییر پیدا خواهد کرد:



$$S=\frac{1}{2}AB\sin\hat{c}\Rightarrow\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial A}.\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial B}.\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{B\sin c}{2}(\frac{dA}{dt})+\frac{A\sin c}{2}.(\frac{\partial B}{\partial t})$$

توجه شود $\frac{\partial S}{\partial t}$ سرعت افزایش مساحت و $\frac{\partial A}{\partial t}$، $\frac{\partial B}{\partial t}$ سرعت افزایش اضلاع می‌باشند:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{1/6\sin\frac{\pi}{6}}{2}\times\frac{10}{100}+\frac{2/4\times\sin\frac{\pi}{6}}{2}\times\frac{5}{100}=0/07(\frac{m^2}{s})$$

مثال ۱۹ : اگر $w=r^2\cos 2\theta$ ، $y=r\sin\theta$ و $x=r\cos\theta$ باشد، مقدار $\frac{\partial w}{\partial x}$ به ازای $x=1$ و $y=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$w=r^2(1-2\sin^2\theta)=r^2-2r^2\sin^2\theta=r^2-2(r\sin\theta)^2=(x^2+y^2)-2y^2=x^2-y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x\xrightarrow{x=1}\frac{\partial w}{\partial x}=2$$

قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب با تعداد متغیرهای بیشتر

اگر $F=\phi(x,y,z,u,v)$ که در آن x,y,z ، u,v توابعی مشتق‌پذیر برحسب متغیرهای t,s,r هستند، آنگاه داریم:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}}$$

مثال ۲۰ : اگر $F(x,y,z)=x^2+yz+z^2$ باشد و $x=e^t$ ، $y=e^t$ و $z=e^{-t}$ باشد، آنگاه مشتق F نسبت به t کدام است؟

۱) $2(e^{2t}+e^{-2t}+1)$ ۲) $2(e^{2t}+e^{-2t})$ ۳) $2(e^{2t}-e^{-2t}-1)$ ۴) $2(e^{2t}-e^{-2t})$

☑ **پاسخ** : گزینه «۴»

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}=2x.e^t+z.e^t+(y+2z)(-e^{-t})=2e^{2t}+1-1-2e^{-2t}=2(e^{2t}-e^{-2t})$$

مثال ۲۱ : اگر $T(x,y,z,t)=\frac{xy}{1+z}(1+t)$ و $x=t$ ، $y=2t$ و $z=t-t^2$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{\partial T}{\partial t}$ در نقطه $t=1$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ** : گزینه «۳»

$$t=1\Rightarrow x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{y}{1+z}(1+t)\times 1+\frac{x}{1+z}(1+t)\times 2+\frac{-xy}{(1+z)^2}(1+t)(1-2t)+\frac{xy}{1+z}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=1}=4\times 1+1\times 2\times 2-4\times(-1)+2=14$$

مثال ۲۲ : عبارت $w=f(y-z\ ,\ z-x\ ,\ x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

۱) $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$ ۲) $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}$ ۳) $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=0$ ۴) $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$

☑ **پاسخ** : گزینه «۳»

$$u=y-z\ ,\ v=z-x\ ,\ t=x-y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}=0-\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+0-\frac{\partial w}{\partial t}$$

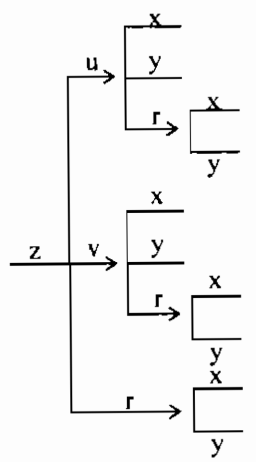
$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}+0$$

لذا با جمع طرفین تساوی‌های فوق داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=0$$

مثال ۲۳ : اگر $z=\phi(u,v,r)$ و u,v و r توابعی مشتق‌پذیر باشند، و u و v توابعی با متغیرهای x ، y و r باشند و r تابعی با متغیرهای x و y باشد، آنگاه مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ** :



$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial r}$$

مثال ۲۴ : اگر $F(x-az\ ,\ y-bz)=0$ باشد، آنگاه مقدار $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$ در صورتی که x و y متغیرهای مستقل و z تابعی برحسب x و y باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ab ۴) $\frac{a}{b}$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$u=x-az\ ,\ v=y-bz\ ,\ F(u,v)=0$$

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=F_u(dx-adz)+F_v(dy-bdz)=0 \Rightarrow F_u dx+F_v dy=(aF_u+bF_v)dz \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را بر } dx \text{ تقسیم می‌کنیم}} F_u+F_v.\underbrace{\cancel{\frac{dy}{dx}}}_{0}=\frac{dz}{dx}(aF_u+bF_v) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u}{aF_u+bF_v}$$

$$\xrightarrow[\text{رابطه (1) بر } dy]{\text{به همین ترتیب با تقسیم}} \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{bF_v}{aF_u+bFv} \Rightarrow a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{aF_u+bF_v}{aF_u+bF_v}=1$$

مشتق‌گیری ضمنی

هر گاه تابع $F(x,y,z)=0$ دارای مشتق ضمنی باشد می‌توان یکی از متغیرها را تابعی از دو متغیر دیگر در نظر گرفت، داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

تذکر ۳ : توجه شود در شرایطی که تعیین z بر حسب x و y به طور واضح ممکن نباشد، از فرمول فوق استفاده می‌شود.

مثال ۲۵ : اگر $F(x,y,z)=\sin xy+2e^{xyz}=0$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2x}e^{-xyz}\cos xy-\frac{z}{x}$ ۲) $-\frac{1}{2y}e^{-xyz}\cos xy-\frac{z}{y}$ ۳) $\frac{1}{2y}e^{-xy}\cos xy+\frac{z}{x}$ ۴) $\frac{1}{2y}e^{-xyz}\cos xy+\frac{z}{y}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{x\cos xy+2xze^{xyz}}{2xye^{xyz}}=-\frac{1}{2y}e^{-xyz}\cos xy-\frac{z}{y}$$

مثال ۲۶ : اگر $\sin xy+\sin yz+\sin zx=1$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ درنقطه $A(1,0,0)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) صفر ۴) تابع مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{y\cos xy+z\cos zx}{y\cos yz+x\cos zx} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0,0)=0$$

تذکر ۴ : اگر $F(x,y,z,w)=0$ باشد، آنگاه مثلاً برای محاسبه عبارتی مانند $\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}}$$

مثال ۲۷ : اگر $w=x^2e^{y+z}$ ، آنگاه حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $2x^2e^{y+z}$ ۴) $2x^2$

پاسخ : گزینه «۱»

$$F(x,y,z,w)=w-x^2e^{y+z}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-x^2e^{y+z}}{-x^2e^{y+z}}=-1$$

مثال ۲۸ : در رابطه $x^2z+2y+e^{x-y-2z}=0$ متغیرهای x و y مستقل از یکدیگرند، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,-1,1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2xz+e^{x-y-2z}}{x^2-2e^{x-y-2z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,-1,1)=-\frac{2\times1\times1+e^{1+1-2}}{1-2e^{1+1-2}}=3$$

مثال ۲۹ : هرگاه $x^y+y^z+z=3$ باشد، حاصل z'_y در نقطه $A(1,1,1)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) صفر ۳) -1 ۴) تابع مشتق ندارد.

پاسخ : گزینه «۳»

$$F(x,y,z)=x^y+y^z+z-3=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{x^y\text{Ln}x+zy^{z-1}}{y^z\text{Ln}y+1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1)=-1$$

قضیه اویلر

تعریف تابع همگن

تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n می‌گوییم هرگاه به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

مثلاً تابع $\sin\frac{x}{y}$ همگن از درجه صفر، تابع x^2+y^2 همگن از درجه ۲ و تابع x^2+y غیرهمگن می‌باشد.

هرگاه تابع $f(x,y,z)$ همگن از درجه n و دارای مشتق در مرتبه اول باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf}$$

تذکر ۵ : (قضیه اویلر) اگر تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نظر گرفته شود، داریم:

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)}$$

مثال ۳۰ : هرگاه $f(x,y)=(x^2+y^2)tg(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}})$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟

۱) f ۲) $2f$ ۳) $3f$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda^2x^2+\lambda^2y^2)tg\frac{\sqrt{\lambda x}-\sqrt{\lambda y}}{\sqrt{\lambda x+\lambda y}}=\lambda^2(x^2+y^2)tg\frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{\lambda}(x+y)}=\lambda^2f(x,y)$$

تابع f تابعی همگن از درجه ۲ می‌باشد، لذا طبق قضیه اویلر داریم: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f(x,y)$

مثال ۳۱ : هرگاه $f(x,y)=\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{y}$ ۲) $\frac{y}{x}$ ۳) $-\frac{x}{y}$ ۴) $-\frac{y}{x}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\frac{\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}}{\lambda(x+y)}=\sin\frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda(x+y)}=\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}=f(x,y)$$

ملاحظه می‌گردد تابع f همگن از درجه صفر است، لذا داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{y}{x}$$

مثال ۳۲ : در تابع $z=\frac{x^2}{y}-\frac{x}{x+y}$ حاصل $A=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\frac{x^2}{y}$ ۲) $\frac{x}{y}$ ۳) z ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۱» توجه شود تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1=\frac{x^2}{y}$ و $z_2=-\frac{x}{x+y}$ حاصل می‌گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگن از درجه صفر می‌باشد، لذا بر طبق قضیه اویلر مقدار A برابر خواهد بود با: $A=1\times z_1+0\times z_2=\frac{x^2}{y}$

توضیح: روش محاسبه طولانی‌تر که بعضاً در کتابهای دیگر آمده محاسبه مشتق‌ها و انجام عملیات جبری می‌باشد.

نکته ۳ : اگر $F(u)=f(x,y,z)$ و f تابعی همگن از درجه n باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=n\frac{F(u)}{F'(u)}}$$

مثال ۳۳ : اگر $u = \text{Arcsin}(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\cos u$ ۲) $\sin u$ ۳) $\frac{1}{2}\text{tg}u$ ۴) $\text{tg}u$

پاسخ : گزینه «۳»

$$u = \text{Arcsin}(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}) \Rightarrow f(u)=\sin u=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

تابع $f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ همگن از درجه $n=\frac{1}{2}$ می‌باشد. لذا داریم:

$$x.\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}.\frac{F(u)}{F'(u)}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin u}{\cos u}=\frac{\text{tg}u}{2}$$

نکته ۴ : هرگاه $u=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه n باشد، آنگاه همواره روابط زیر را خواهیم داشت:

۱) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}$

۲) $y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}$

و

۳) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$

مثال ۳۴ : اگر $z=x^2e^{\frac{y}{x}}$ آنگاه $A=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟

۱) z ۲) $2z$ ۳) $3z$ ۴) $6z$

پاسخ : گزینه «۴»

$$z(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}=\lambda^2x^2e^{\frac{y}{x}}=\lambda^2 z$$

تابع z همگن از درجه $n=3$ می‌باشد، لذا با توجه به رابطه (۳) نکته فوق داریم:

$$A=n(n-1)z=3(3-1)z=6z$$

مثال ۳۵ : تابع $z=yf(\frac{x}{y})+F(\frac{x}{y})$ در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند.

۱) $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$ ۲) $x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$

۳) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$ ۴) $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$

پاسخ : گزینه «۱» تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1=yf(\frac{x}{y})$ و $z_2=F(\frac{x}{y})$ حاصل می‌گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگن از درجه صفر است. لذا بر طبق رابطه (۳) نکته فوق داریم:

$$x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=1(1-1)\times z_1+0(0-1)\times z_2=0$$

توضیح: روش محاسبه طولانی‌تر که بعضاً در کتابهای دیگر آمده محاسبه مشتق‌ها و انجام عملیات جبری می‌باشد.

محاسبه مشتقات جزیی یک دستگاه با استفاده از ژاکوبین

اگر $f(x,y,u,v)=0$ و $g(x,y,u,v)=0$ که در آن $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ می‌باشد. آنگاه داریم:

۱) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ ۲) $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ ۳) $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ ۴) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

که $J=\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$ ژاکوبین می‌باشد.

مثال ۳۶ : اگر $u^2+v=x-y$ و $u+v^2=x+y$ باشد، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2v+1}{4uv-1}$ ۲) $\frac{2v-1}{4uv-1}$ ۳) $\frac{2u+1}{4uv-1}$ ۴) $\frac{2u-1}{4uv-1}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} f(x,y,u,v)=u^2+v-x+y=0 \\ g(x,y,u,v)=u+v^2-x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}}=\frac{2v-1}{4uv-1}$$

مثال ۳۷ : اگر $x-y+u^3+v^2=1$ و $x+y+u^3e^v=2$ باشد، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\frac{u^3+2ve^{-v}}{2u^4+6u^2v}$ ۲) $\frac{u^3+2ve^{-v}}{2u^4-6u^2v}$ ۳) $\frac{u^3+2ve^{-v}}{2u^4+6u^2v}$ ۴) $\frac{u^3-2ve^{-v}}{2u^4+6u^2v}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(x,y,u,v)=x-y+u^3+v^2-1=0$$
$$g(x,y,u,v)=x+y+u^3e^v-2=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ 1 & u^3e^v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2e^v & u^3e^v \end{vmatrix}}=\frac{u^3e^v+2v}{2u^4e^v-6u^2ve^v}=\frac{u^3+2ve^{-v}}{2u^4-6u^2v}$$

نکته ۵ : اگر $f(u,v,w)$ ، $g(u,v,w)$ و $h(u,v,w)$ نسبت به u و v و w مشتق‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix}$$

مثال ۳۸ : اگر $u=x^2+y^2+z^2$ ، $v=x+y+z$ ، $w=xy+yz+zx$ حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,v)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) xyz ۴) $x^2y^2z^2$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

توجه شود به ازای $x=y=z=\frac{1}{2}$ هر سه سطر و ستون دترمینان برابر یک می‌شود و در این حالت حاصل دترمینان برابر صفر است. حال در گزینه‌ها هر کدام از آنها که به ازای $x=y=z=\frac{1}{2}$ برابر صفر شد جواب است، لذا فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

بدست آوردن نقاط بحرانی و اکسترممهای توابع دو متغیره

اگر تابع $z=f(x,y)$ و مشتقات جزئی آن (تا مرتبه دوم) در نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشند و $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ و فرض کنیم $\Delta=f_{xx}.f_{yy}-f^2_{xy}$ باشد.

۱ـ اگر $\Delta(x_0,y_0)>0$ باشد، آنگاه نقطه (x_0,y_0) اکسترمم نسبی تابع است که اگر $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ باشد، نقطه (x_0,y_0) مینیمم نسبی و اگر $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ باشد، نقطه (x_0,y_0) ماکزیمم نسبی تابع می‌باشد.

۲ـ اگر $\Delta(x_0,y_0)<0$ باشد، آنگاه نقطه (x_0,y_0) نقطه زینی تابع می‌باشد.

نکته ۶ : ریشه‌های دستگاه $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند.

مثال ۳۹ : اگر $f(x,y)=x^2y-y^2-x^3+xy$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(0,0)$ نقطه بحرانی نیست ۲) $(0,0)$ یک نقطه زینی است ۳) $(0,0)$ مینیمم نسبی است ۴) $(0,0)$ ماکزیمم نسبی است

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x=2xy-3x^2+y=0 \\ f_y=x^2-2y+x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0) \rightarrow \text{نقطه بحرانی می‌باشد}$$

$$\begin{cases} f_{xx}=2y-6x \\ f_{yy}=-2 \\ f_{xy}=2x+1 \end{cases} \Rightarrow \Delta(0,0)=0-(1)^2=-1<0 \rightarrow \text{نقطه زینی}$$

مثال ۴۰ : تابع $z = x^2 - xy + y^2 - 3x$ دارای چه نوع نقطه‌ای می‌باشد؟

۱) زینی ۲) مینیمم ۳) ماکزیمم ۴) نقطه عادی

پاسخ : گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x - y - 3 \Rightarrow z_{xx} = 2\,,\ z_{xy} = -1 \\ z_y = -x + 2y \Rightarrow z_{yy} = 2 \\ \Delta = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 2\times 2 - (-1)^2 = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ تابع دارای مینیمم نسبی است

مثال ۴۱ : بیشترین مقدار تابع دو متغیری $z = -2x^2 - y^2 + 2x + 3y$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{11}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 < 0\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}\ ,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\ ,\ \Delta = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = (-4)(-2) = 8 \end{cases}$$

نقطه $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ماکزیمم نسبی است. $z(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = -2(\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{3}{2}) = \frac{11}{4}$

به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از ضرایب لاگرانژ

گاهی در مسایل مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابعی را که دامنه آنها زیر مجموعه‌ای از یک صفحه خاص، یک قرص یا ناحیه مثلثی است یا مقادیر اکسترمم تابع با در نظر گرفتن شرط خاصی مورد سئوال قرار می‌گیرد. برای این منظور از روش ضریب لاگرانژ استفاده می‌کنیم اگر بخواهیم اکسترمم تابع $f = f(x,y,z)$ را با شرط $g(x,y,z) = 0$ به دست آوریم، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u = f(x,y,z) + \lambda.g(x,y,z)$$

λ را ضریب لاگرانژ می‌نامیم و باید معادلات زیر همزمان برقرار باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

مثال ۴۲ : ماکزیمم مقدار تابع $z = y^2 - x^2$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ : گزینه «۲»

$$u = y^2 - x^2 + \lambda(x + 2y - 6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2x + \lambda = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = -\lambda \end{cases} \xrightarrow{x+2y-6=0} \frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

ملاحظه می‌گردد $A(-2,4)$ نقطه ماکزیمم تابع است، پس داریم: $z_{max} = 16 - 4 = 12$

مثال ۴۳ : ماکزیمم و مینیمم تابع $z = 6 - 4x - 3y$ به شرطی که $x^2 + y^2 = 1$ باشد، به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۱ و ۱ ۲) ۱ و ۱۱ ۳) ۶ و ۴ ۴) ۴ و ۶

پاسخ : گزینه «۱»

$$U = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{\lambda} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -3 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2\lambda} \end{array}\right\} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\frac{2}{\lambda})^2 + (\frac{3}{2\lambda})^2 = 1 \xrightarrow{x^2+y^2=1} \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{16+9}{4\lambda^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

چون $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\lambda$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ پس به ازای مقادیر $\lambda > 0$ تابع دارای مینیمم و به ازای $\lambda < 0$ تابع دارای ماکزیمم است:

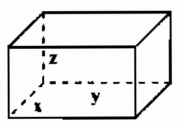
$$\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{5}\ ,\ y = \frac{3}{5} \Rightarrow z_{min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$$

$$\lambda = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}\ ,\ y = -\frac{3}{5} \Rightarrow z_{max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$$

مثال ۴۴ : مطابق شکل می‌خواهیم یک استخر روباز به شکل مکعب با حجم ۳۲ متر مکعب بسازیم، ابعاد این استخر برای اینکه کمترین مصالح ساختمانی در ساخت آن مصرف شود، کدام مقادیر باید باشد؟

۱) $x = 4\,,\ y = 2\,,\ z = 4$ ۲) $x = 2\,,\ y = 16\,,\ z = 1$ ۳) $x = 4\,,\ y = 4\,,\ z = 2$ ۴) $z = 4\,,\ x = 2\,,\ y = 4$

پاسخ : گزینه «۳» برای اینکه کمترین مقدار مصالح مصرف شود باید مساحت آن مینیمم شود، از طرفی مساحت این استخر با توجه به اینکه روباز است به صورت $S = xy + 2yz + 2zx$ قابل بیان است.



لذا با شرط $V = xyz = 32$ باید S مینیمم گردد:

$$U = xy + 2yz + 2zx + \lambda(xyz - 32)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + 2z + \lambda(yz) = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + \lambda(xz) = 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y + 2x + \lambda(xy) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

اگر رابطه (۱) را در x و رابطه (۲) را در y ضرب کرده و از هم کم کنیم: $2zx - 2zy = 0 \Rightarrow 2z(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$

به همین ترتیب از ترکیب روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت: $x = 2z$

لذا داریم: $V = xyz = 2z \times 2z \times z \Rightarrow 32 = 4z^3 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 4\,,\ y = 4$

نکته ۷ :

الف) اگر $x + y + z = a$ باشد، ماکزیمم عبارت $A = x^m y^n z^p$ برابر $k = \dfrac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ خواهد بود.

ب) اگر داشته باشیم $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = k$ و بخواهیم ماکزیمم $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ را محاسبه کنیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c_1x_1}{\alpha_1} = \frac{c_2x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{c_nx_n}{\alpha_n}$$

ج) اگر داشته باشیم $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} = k$ و بخواهیم مینیمم $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ را محاسبه کنیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c_1x_1}{\alpha_1} = \frac{c_2x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{c_nx_n}{\alpha_n}$$

مثال ۴۵ : رابطهٔ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$ برقرار می‌باشد. حداکثر مقدار عبارت $x_1x_2^2x_3^3x_4^4$ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

۱) ۶۲۵ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۱۲

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{c_1x_1}{\alpha_1}=\frac{c_2x_2}{\alpha_2}=\frac{c_3x_3}{\alpha_3}=\frac{c_4x_4}{\alpha_4}\Rightarrow \frac{2x_1}{2}=\frac{2x_2}{2}=\frac{3x_3}{3}=\frac{4x_4}{4}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=x$$

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=20\Rightarrow 10x=20\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=2\Rightarrow Max\ x_1x_2^2x_3^3x_4^4=2^{10}=1024$$

مثال ۴۶ : حداقل مقدار $tg^6x+1024\cot g^3x$ را پیدا کنید؟

۱) ۱۸۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۳۵ ۴) ۱۹۲

پاسخ : گزینه «۴»

$$(tg^6x)^{\frac{1}{2}}(\cot g^3x)=1\Rightarrow \frac{tg^6x}{\frac{1}{2}}=\frac{1024\cot g^3x}{1}\Rightarrow 2tg^6x=1024\cot g^3x\Rightarrow tg^9x=512\Rightarrow tgx=2$$

در نتیجه حداقل مقدار عبارت فوق به ازای $tgx=2$ به دست می‌آید:

$$Min(tg^6x+1024\cot g^3x)=2^6+1024\times 2^{-3}=2^6+2^7=64+128=192$$

مثال ۴۷ : اگر $x+y+z=8$ باشد، مینیمم عبارت $A=x^3y^3z^2$ کدام است؟

۱) ۵۱۲۰ ۲) ۳۰۱۲ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۹۱۶

پاسخ : گزینه «۴» طبق نکته (۷)، $p=2$ ، $n=3$ و $m=3$ می‌باشد: $k=\frac{3^3\times 3^3\times 2^2\times 8^8}{8^8}=2916$

صفحه مماس و خط قائم بر یک سطح

معادله صفحه مماس بر رویه S با ضابطه $F(x,y,z)=0$ در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ عبارت است از:

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$$

و معادله خط قائم بر این رویه در نقطه P_0 عبارت است از:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

مثال ۴۸ : معادله صفحه مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=3$ در نقطه (۱،۱،۱) واقع بر روی کره کدام است؟

۱) $x+y+z=1$ ۲) $x+y+z=2$ ۳) $x+y+z=3$ ۴) $x+y+z=4$

پاسخ : گزینه «۳» $F'_x=2x\ ,\ F'_y=2y\ ,\ F'_z=2z\ \ ,\ \ x_0=1\ ,\ y_0=1\ ,\ z_0=1$

$$2(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0\Rightarrow \boxed{x+y+z=3}$$

مثال ۴۹ : معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^2+y^2+xz^2=2$ در نقطه (۱،۰،۱) کدام است؟

۱) $x+y+2z=3$ ۲) $x+y+z=3$ ۳) $3x+2z=5$ ۴) $2x+3z=5$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases}F'_x=2x+z^2\ ,\ F'_y=2y\ ,\ F'_z=2xz\\ F'_x(1,0,1)=3\ ,\ F'_y(1,0,1)=0\ ,\ F'_z(1,0,1)=2\end{cases}\Rightarrow 3(x-1)+2(z-1)=0\Rightarrow 3x+2z=5$$

مثال ۵۰ : معادله خط قائم بر رویه $x^2+y^2+z=9$ در نقطه (۱،۲،۴) کدام است؟

۱) $x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{2}$ ۲) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=z-4$ ۳) $x-1=y-2=z=4$ ۴) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» $F'_x=2x\ ,\ F'_y=2y\ ,\ F'_z=1\Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$

شرط تعامد دو رویه

اگر رویه‌های با ضابطه‌های $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در نظر گرفته شود شرط اینکه دو رویه در نقطه P_0 متعامد باشد. به صورت زیر قابل بیان است:

$$\boxed{F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z=0}$$

مثال ۵۱ : به ازای چه مقادیری از a دو رویه به معادلات $x^2+y^2+z^2=6$ و $ax^2+y^2-z^2=0$ در نقطه P(1,2,1) متعامد هستند؟

۱) -۳ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -۴

پاسخ : گزینه «۱» $F'_x=2x\ ,\ F'_y=2y\ ,\ F'_z=2z\ ,\ G'_x=2ax\ ,\ G'_y=2y\ ,\ G'_z=-2z$

$$4ax^2+4y^2-4z^2=0\Rightarrow 4a+16-4=0\Rightarrow a=-3$$

گرادیان

❖ تعریف : اگر $\phi=\phi(x,y,z)$ تابعی اسکالر (غیر برداری) باشد در این صورت گرادیان ϕ را به فرم $\nabla\phi$ نشان داده و به صورت $\boxed{\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec i+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec j+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec k}$ تعریف می‌شود که در این رابطه عملگر (یا تبدیل) ∇ را دل یا نابلا می‌نامیم.

مثال ۵۲ : گرادیان تابع $\phi(x,y,z)=xy+yz^2$ در نقطه‌ای با مختصات M(2,-1,-1) کدام است؟

۱) $\nabla\phi=-\vec i+2\vec j-2\vec k$ ۲) $\nabla\phi=-\vec i+2\vec j+2\vec k$ ۳) $\nabla\phi=-2\vec i+\vec j+2\vec k$ ۴) $\nabla\phi=-2\vec i+2\vec k-2\vec j$

پاسخ : گزینه «۲» اگر $\phi=\phi(x,y,z)$ آنگاه گرادیان ϕ بفرم $\nabla\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ می‌باشد لذا داریم:

$$\nabla\phi=(y,x+z^2,2yz)\Rightarrow \nabla\phi(2,-1,-1)=(-1,2,2)\Rightarrow \nabla\phi(2,-1,-1)=-\vec i+2\vec j+2\vec k$$

تذکر ۶ : گرادیان یک تابع اسکالر، خود یک بردار است.

دیورژانس

❖ تعریف : میدان برداری $\vec F$ را به صورت $\vec F(x,y,z)=F_1(x,y,z)\vec i+F_2(x,y,z)\vec j+F_3(x,y,z)\vec k$ تعریف می‌کنیم دیورژانس $\vec F$ را با نماد $div\vec F$ نمایش داده و به صورت $\boxed{div\vec F=\vec\nabla.\vec F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}}$ تعریف می‌شود.

مثال ۵۳ : دیورژانس $\vec V=x^2yz\vec i+xyz\vec j+xy^2z^2\vec k$ در نقطه M(1,1,-1) کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۵ ۳) ۴ ۴) -۲

پاسخ : گزینه «۲» اگر $V=V_1\vec i+V_2\vec j+V_3\vec k$ باشد آنگاه داریم: $div\vec V=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z}$

$$div\vec V=\frac{\partial(x^2yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xyz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z}=2xyz+xz+2xzy^2$$

$$\Rightarrow div\vec V(1,1,-1)=2(1)(1)(-1)+(1)(-1)+2(1)(-1)(1)=-5$$

تذکر ۷ : دیورژانس یک بردار، یک عدد می‌باشد.

کرل

❖ تعریف : میدان برداری F را در نظر بگیرید. کرل $\vec F$ را با نماد $curl\vec F$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{curl\vec F=\vec\nabla\times\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z})\vec i+(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x})\vec j+(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y})\vec k}$$

مثال ۵۴ : کرل بردار $A=2x^2y\vec i+7xz\vec j+4xy\vec k$ در نقطه (1,2,3) برابر است با:

۱) $-3\vec i-8\vec j+18\vec k$ ۲) ۰ ۳) $6\vec i+18\vec k$ ۴) $5\vec i+19\vec k$

پاسخ : گزینه «۱» $curl\vec A=(4x-7x)\vec i+(0-4y)\vec j+(7z-2x^2)\vec k\Rightarrow curl\vec A(1,2,3)=-3\vec i-8\vec j+18\vec k$

تذکر ۸ : کرل یک بردار، خود یک بردار می‌باشد .

نکته ۸ : روابط زیر را در مورد تابع اسکالر f و g و عدد اسکالر k همواره برقرار است:

۱) $\vec{\nabla}\times\nabla\vec{f}=0$

۲) $\nabla(kf)=k\nabla f$

۳) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

۴) $\nabla(f.g)=f\nabla g+g\nabla f$

همچنین در مورد تابع برداری $\vec{F}$ و عدد اسکالر k روابط زیر را داریم:

۱) $\vec{\nabla}.(\nabla\times\vec{f})=0$

۲) $\nabla.(\nabla k)=0$

لاپلاسین

اگر تابع $\phi=\phi(x,y,z)$ تابعی اسکالر باشد در این صورت لاپلاسین ϕ را بفرم $\nabla^2\phi$ نمایش داده و بصورت

$$\boxed{\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}}$$

تعریف می‌شود .

مثال ۵۵ : لاپلاسین تابع $v=6x^2y^2z+x^2$ در نقطه $M(1,0,1)$ کدام است؟

۱) $2I+12j$ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) $2i+12k$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\ ,\ v=6x^2y^2z+x^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=12xy^2z+2x\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=12x^2yz\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}=6x^2y^2$$

$$\nabla^2 v=[\frac{\partial}{\partial x}(12xy^2z+2x)+\frac{\partial}{\partial y}(12x^2yz)+\frac{\partial(6x^2y^2)}{\partial z}]\Rightarrow\nabla^2 v=12y^2z+2+12x^2z\Rightarrow\nabla^2 v(1,0,1)=14$$

تذکر ۹ : لاپلاسین یک تابع اسکالر، یک عدد می‌باشد .

تذکر ۱۰ : لاپلاسین تابع اسکالر φ در واقع به صورت $\mathrm{div}.[\nabla(\varphi)]$ نیز قابل بیان است.

مثال ۵۶ : مقدار $\mathrm{div}\nabla(e^{x+y+z})$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) e^3

پاسخ : گزینه «۲»

$$\mathrm{div}.\nabla(e^{x+y+z})=\frac{\partial^2(e^{x+y+z})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(e^{x+y+z})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(e^{x+y+z})}{\partial z^2}=e^{x+y+z}+e^{x+y+z}+e^{x+y+z}=3e^{x+y+z}$$

که مقدار آن در مبدأ برابر ۳ می‌باشد.

تذکر ۱۱ : اگر لاپلاسین یک تابع برابر صفر باشد، در این صورت آن تابع را **هارمونیک** می‌نامیم.

خواص دیورژانس، گرادیان، کرل و لاپلاسین

اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ میدان‌های برداری و g_1 و g_2 توابع اسکالر باشند، آنگاه:

۱) $\mathrm{div}(\mathrm{curl}F_1)=\nabla.(\nabla\times F_1)=0$

۲) $\mathrm{curl}(\nabla g_1)=\nabla\times\nabla g_1=0$

۳) $\nabla(g_1g_2)=g_2\nabla g_1+g_1\nabla g_2$

۴) $\mathrm{div}(g_1F_1)=\nabla g_1.F_1+g_1\mathrm{div}F_1$

۵) $\mathrm{div}(F_1\times F_2)=(\mathrm{curl}F_1).F_2-(\mathrm{curl}F_2).F_1$

۶) $\mathrm{curl}(g_1F_1)=(\nabla g_1)\times F_1+g_1(\nabla\times F_1)$

مشتق سوئی

اگر تابع $\varphi=\phi(x,y,z)$ تابعی اسکالر باشد، آنگاه مشتق سوئی f در جهت بردار یکه $\vec{u}$ را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{\text{مشتق سوئی } \varphi \text{ در جهت بردار یکه } \vec{u}=\vec{u}.\nabla\varphi}$$

مثال ۵۷ : مشتق سوئی تابع $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ در نقطه $(3,4,-1)$ در امتداد بردار $A=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا بردار یکه را برای $\vec{A}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|\vec{A}|=\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7$$

$$\vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+6k}{7}=\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla\varphi=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}\Rightarrow\nabla\varphi(3,4,-1)=6\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\text{مشتق سوئی در جهت بردار } \vec{A}=\vec{u}.\nabla\varphi(3,4,-1)=(\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}).(6\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k})=\frac{18}{7}-\frac{16}{7}+\frac{12}{7}=\frac{14}{7}=2$$

نکته ۹ : اگر حاصل، ضرب عددی دو بردار u و گرادیان را در فرمول مشتق جهتی محاسبه کنیم، فرمول مشتق جهتی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\boxed{\text{مشتق سوئی در جهت بردار } \vec{u}=|u|.|\nabla\varphi|\cos\theta}$$

که θ زاویه بین $\vec{u}$ و $\nabla\varphi$ در نقطه p می‌باشد و مشتق جهتی وقتی بزرگترین مقدار را دارد که $\cos\theta=1$ و یا $\vec{u}$ در جهت گرادیان باشد به عبارت دیگر وقتی $\vec{u}$ در جهت بردار گرادیان باشد تابع φ سریعترین افزایش را دارد و این مقدار برابر $\nabla\varphi$ می‌باشد.

مثال ۵۸ : بزرگترین مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x^2y^2z^4$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۹ ۳) $\sqrt{29}$ ۴) $9\sqrt{29}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=2xy^2z^4\vec{i}+2x^2y^2z^4\vec{j}+4x^2y^2z^3\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(1,1,1)=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow|\nabla f|=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(4)^2}=\sqrt{29}$$

مثال ۵۹ : اندازه مشتق سوئی تابع با ضابطه $f(x,y,z)=e^{2y-1}+3y\sqrt{5+x^2}-\frac{x^2}{1+z}$ در نقطه $B(2,\frac{1}{2},0)$ به طرف نقطه $A(0,-\frac{1}{2},2)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا بردار یکه u را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB}=(2-0)\vec{i}+[\frac{1}{2}-1(-\frac{1}{2})]\vec{j}+(0-2)\vec{k}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=\left.(\frac{2x\times3y}{2\sqrt{5+x^2}}-\frac{2x}{1+z})\vec{i}+(2e^{2y-1}+3\sqrt{5+x^2})\vec{j}+\frac{x^2}{(1+z)^2}\vec{k}\right|_{B(2,\frac{1}{2},0)}=-3\vec{i}+11\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f.\vec{u}=-3\times\frac{2}{3}+11\times\frac{1}{3}+4\times\frac{-2}{3}=-1$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ برد تابع $f: R^3 \to R$ با ضابطه $f(x,y,z)=\dfrac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) R ۲) $R-\{0\}$ ۳) $\{(x,y,z): y\neq z\}$ ۴) $\{(x,y,z): |y|\neq|x|\}$

۲ـ اگر $z=x^2+2xy+y^2$ و $x=t\cos t$ و $y=t\sin t$، مقدار $\dfrac{dz}{dt}$ در $t=\dfrac{\pi}{2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\pi(1-\frac{\pi}{2})$ ۲) $\pi(2-\frac{\pi}{2})$ ۳) $\pi(1+\frac{\pi}{2})$ ۴) $\pi(2+\frac{\pi}{2})$

۳ـ تابع f با ضابطه $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ در کدام نقاط مشتق‌پذیر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) بر R
۲) در هر نقطه از دامنه‌اش
۳) بر مجموعه $\{(x,y):(x,y)\neq(0,0)\}$
۴) بر مجموعه $\{(x,y): x\neq 0$ یا $y\neq 0\}$

۴ـ معادله صفحه مماس بر سطح $x^2=12y$ در نقطه $(6,3,1)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $y-z=2$ ۲) $x-z=5$ ۳) $x-y=3$ ۴) $x-y+z=4$

۵ـ بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ ۳) $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ ۴) $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

۶ـ فاصله مینیمم مبدأ تا سطح $z=\sqrt{x^2-1}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) 2

۷ـ اگر $z=f(u,v)$ و $u=x-y$ و $v=x^2y$ باشد، $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با :

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{\partial z}{\partial u}+y\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ۲) $\dfrac{\partial z}{\partial u}+2\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ۳) $-y\dfrac{\partial z}{\partial u}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ۴) $2xy\dfrac{\partial z}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}$

۸ـ به فرض اینکه تابع هزینه تولید برای یک واحد صنعتی به صورت $c=5x^2+2xy+3y^2+800$ است که در آن x و y و c به ترتیب میزان تولید کالای x، میزان تولید کالای y و میزان کل هزینه است. برای تولید جمعاً ۳۹ واحد از کالای x و y و $(x+y=39)$ حداقل هزینه چقدر خواهد بود؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\bar{x}=11$, $\bar{y}=17$ ۲) $\bar{x}=9$, $\bar{y}=23$ ۳) $\bar{x}=11$, $\bar{y}=24$ ۴) $\bar{x}=13$, $\bar{y}=26$

۹ـ برای تابع $f(x,y)=1+2x+3y-xy$ کدام عبارت صحیح است ؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) f در هیچ نقطه‌ای اکسترمم نسبی ندارد.
۲) f در $(3,2)$ دارای ماکسیمم نسبی است.
۳) f در $(3,2)$ دارای مینیمم نسبی است.
۴) f در $(0,0)$ دارای اکسترمم نسبی است.

۱۰ـ ماگزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=4x^2+2xy-3y^2$ بر روی مربع $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ کدام است ؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) ماکزیمم مطلق = ۳ و مینیمم مطلق =۳-
۲) ماکزیمم مطلق = $\dfrac{13}{3}$ و مینیمم مطلق = ۳-
۳) ماکزیمم مطلق = ۰ و مینیمم مطلق = ۰
۴) ماکزیمم مطلق = ۴ و مینیمم مطلق = ۳

۱۱ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار واحد U که با محور xها زاویه ۴۵ درجه بسازد چقدر است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$ ۳) 15 ۴) $\dfrac{19\sqrt{2}}{2}$

۱۲ـ مقدار $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

۱۳ـ معادله صفحه مماس بر $z=x^2+y^2$ در نقطه $(1,1,2)$ چیست ؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $x+y-z=1$ ۲) $x+y-z=\dfrac{1}{2}$ ۳) $2x+2y-z=3$ ۴) $2x+2y-z=2$

۱۴ـ حاصل $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۱۵ـ اگر $f(x,y)=e^xy-y\cosh xy$ حاصل $f_{xy}(1,0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) -1 ۲) 0 ۳) e ۴) 1

۱۶ـ معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $2z=3x^2+xy-2y^2$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $3x-4y+2z-1=0$ ۲) $3x+4y+5z-2=0$ ۳) $4x+4y+5z-2=0$ ۴) $4x-3y-2z+1=0$

۱۷ـ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ بر R^2 پیوسته باشد، a کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۱۸ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $\begin{cases}y=x^2\\ z^2=16-y\end{cases}$ در نقطه $(4,16,0)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\begin{cases}4x=y\\ z=0\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=4\\ y=16\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y-x=12\\ z=0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x+y=20\\ z=0\end{cases}$

۱۹ـ اگر $u=x^2+xy$، $x=r^2+s^2$ و $y=3r-2s$، حاصل $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ در نقطه $r=s=1$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) 10 ۲) 8 ۳) 6 ۴) 4

۲۰ـ اگر $u=x^2+y^2+z^2$، $v=x+y+z$، $w=xy+yz$، حاصل $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) 1 ۳) xyz ۴) $x^2y^2z^2$

۲۱ـ کدام گزاره درمورد تابع دو متغیره f با ضابطه $f(x,y)=x\sin y$ درست است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) دارای نقطه زینی است اما مینیمم مطلق ندارد.
۲) نقطه زینی نداشته اما مینیمم مطلق دارد.
۳) دارای نقطه زینی است و ماکسیمم نسبی دارد.
۴) مینیمم نسبی ندارد ولی دارای ماکسیمم نسبی است.

۲۲ـ معادله صفحه مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=9$ در نقطه $(2,\sqrt{5},0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $2y+\sqrt{5}x=9$ ۲) $2y+\sqrt{5}x=-9$ ۳) $\sqrt{5}y+2x=-9$ ۴) $\sqrt{5}y+2x=9$

۲۳ـ اگر $f(x,y)=x^2y-y^2-x^2+xy$ کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $(0,0)$ نقطه بحرانی نیست. ۲) $(0,0)$ یک نقطه زینی است. ۳) $(0,0)$ مینیمم موضعی است. ۴) $(0,0)$ ماکزیمم موضعی است.

۲۴ـ اگر $f: R^2\to R^3$ با ضابطه $f(x,y)=(x+y,x,y)$ و $g: R^3\to R^2$ با ضابطه $g(x,y,z)=(x+y,y+z)$ مفروض باشند، (gof) کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $gof(x,y)=(x+y,2x+y)$
۲) $gof(x,y)=(2x+y,x+y)$
۳) $gof(x,y)=(x+2y,x+y)$
۴) $gof(x,y)=(x+y,x+2y)$

۲۵ـ مشتق تابع $z = x^2y^2 - xy^2 - 2y$ در نقطه (۱ و ۲) و در جهتی که این نقطه را به مبدأ وصل می‌کند برابر است با:
(مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ ۴) $-\sqrt{5}$

۲۶ـ اگر $z^2 = x^2 + y^2$ حاصل عبارت $\frac{\partial \ln z}{\partial \ln y} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln x}$ برابر کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $x.y$ ۴) $x + y$

۲۷ـ اگر $z = x^5 f(\frac{y}{x^2})$ حاصل عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 5z$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $-z$ ۲) 0 ۳) $\frac{-y}{x^2} + f'(\frac{y}{x^2})$ ۴) $\frac{y}{x}.f'(\frac{y}{x^2})$

۲۸ـ مقدار q در تابع $q = K^{0/4}L^{0/5}$ با رعایت قید $2K + 4L = 108$ بهینه می‌گردد. مقدار L کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲۹ـ تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ; x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در $(0,0)$ پیوسته است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ϕ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1\}$ ۴) $\{1, -1\}$

۳۰ـ مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy$ در نقطه $(1, \frac{\pi}{2}, -1)$ در جهت بردار $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱

۳۱ـ اگر $f(x,y) = x^2 + y^2$ و $x = r + s$ و $y = r - s$، مقدار $\frac{\partial f}{\partial s}$ در نقطه $s = -\frac{1}{2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۹)

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴

۳۲ـ در تابع $x^2 + y \neq 0$، $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y}$ و $f(1,-1) = a$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع f در (۱- و ۱) پیوسته است.
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) ϕ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{\frac{1}{2}\}$ ۴) $\{1$ و $\frac{1}{2}\}$

۳۳ـ تابع $W = x^2 - xy + 2z^2 + yz$ در نقطه (۱- و ۱ و ۲) در امتداد کدام بردار با بیشترین سرعت تغییر می‌کند؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $2i + j - k$ ۲) $i - 2j + 2k$ ۳) $i - j - k$ ۴) $i + j - k$

۳۴ـ در ورقه نازک فلزی با ناحیه $x^2 + y^2 \leq 9$، اندازه درجه حرارت در هر نقطه $M(x,y)$ به صورت $T = x^2 + 2y^2 - 4x$ است کمترین مقدار T کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۱- ۴) صفر

۳۵ـ اگر $f : R^3 \to R$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = Ln(xyz)$ و $g : R^2 \to R^3$ با ضابطهٔ $g(u,v) = (e^{u+v}, e^{u-v}, e^{uv})$ مفروض باشند. fog کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $2u + uv$ ۲) $u + uv$ ۳) $u - uv$ ۴) $u + 2uv$

۳۶ـ حد تابع $\frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{y}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ چقدر است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) حد برابر ۱- است. ۲) حد برابر صفر است. ۳) حد برابر ۱ است. ۴) حد وجود ندارد.

۲۷ـ اگر f و F دو تابع متغیره و دارای مشتقات نسبی مرتبه اول باشند، بعلاوه $F(x,y) = f(u,v)$ که در آن $u = x - y$ و $v = -x + y$ آنگاه مقدار $\left.\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(2,2)}$ کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) $(f_u + f_v)_{(0,0)}$ ۳) $2(f_u + f_v)_{(0,0)}$ ۴) $2(f_u - f_v)_{(0,0)}$

۳۸ـ اگر $z = \sin^{-1}\frac{x}{y}$ باشد، کدام رابطه برقرار است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ۲) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ۳) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ۴) $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

۳۹ـ نقطه مینیمم تابع $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ با شرط $2x + 3y + z = 12$ کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\frac{36}{11}, \frac{6}{11}, \frac{12}{11})$ ۲) $(\frac{6}{11}, \frac{36}{11}, \frac{12}{11})$ ۳) $(\frac{36}{11}, \frac{12}{11}, \frac{6}{11})$ ۴) $(\frac{12}{11}, \frac{6}{11}, \frac{36}{11})$

۴۰ـ بردار عمود بر صفحهٔ $z = Ln(x^2 + y^2)$ در نقطهٔ (Ln۲ و ۱- و ۱) و در سمت خارج کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ۲) $\vec{n} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ۳) $\vec{n} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ۴) $\vec{n} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

۴۱ـ اگر $\hat{u}$ بردار یکه در جهت ماکزیمم مقدار مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y) = x^2e^y$ در نقطهٔ $(-2,0)$ باشد، در این صورت مقدار $\hat{u}$ با کدام عبارت برابر است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\hat{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{j}$ ۲) $\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ ۳) $\hat{u} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$ ۴) $\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{j}$

۴۲ـ در مورد تابع $F(x,y) = xy + Lnxy$ کدام گزینه صحیح است.
(مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک مینیمم نسبی تابع است.
۲) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک ماکزیمم نسبی تابع است.
۳) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک نقطه زینی است.
۴) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ تعریف نشده است.

۴۳ـ اگر $f(x,y) = x\cos 2y + ye^{2x}$ باشد مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را به دست آورید:
(عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $-2\sin 2y + 2e^{2x}$ ۲) $2x\sin 2y + 2e^{2x}$ ۳) $x\sin 2y + 2e^{2x}$ ۴) $2x\sin 2y - 2e^{2x}$

۴۴ـ اگر $u = Ln(x + y + z)$، حاصل $Ln\frac{\partial u}{\partial z} + Ln\frac{\partial u}{\partial y} + Ln\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $3u$ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) $-3u$

۴۵ـ نقطه بحرانی تابع $z = x + y$ با شرط $x > 0$، $y > 0$ و $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکزیمم
۲) مینیمم
۳) زینی
۴) با شرط مفروض فاقد نقطه بحرانی

۴۶ـ اگر $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ باشد مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{u}{3}$ ۲) $3u$ ۳) $3u^2$ ۴) $6u$

۴۷ـ اگر $z = x^2 - 2y^2$ و $x = 3s + 2r$ و $y = 3s - 2r$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $r = 2$ و $s = 1$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۴۸ـ در چه جهتی مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در نقطه $(1,1)$ برابر صفر است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۰)

۱) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ۲) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ ۳) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ ۴) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

۴۹ـ در تابع $z=xy^2-x^2-y^2+xy$ مبدأ مختصات: (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۰)

۱) ماکزیمم نسبی است. ۲) نقطهٔ زینی است. ۳) مینیمم نسبی است. ۴) نقطه

۵۰ـ مقدار حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xye^x}{x^2-y^2}$: (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۰)

۱) حد ندارد. ۲) صفر ۳) ۱ ۴) بی‌نهایت

۵۱ـ بزرگترین مشتق سوئی تابع $w=xyz$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۰)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۵۲ـ کمترین فاصله مبدأ مختصات از سطح به معادله $x^2-z^2=2$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۳ـ مشتق جهتدار تابع $f(x,y)=x^2-2xy^2$ در نقطهٔ $(2,-1)$ و در جهت بردار $(-1,0)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۶ ۲) ۱۴ ۳) ۲ ۴) ۸-

۵۴ـ اگر $f(x,y,z)=x^2ye^z$ در این صورت ∇f (گرادیان f) برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $(2x,x^2e^z,x^2y)$ ۲) $(2x,x^2e^z,x^2ye^x)$ ۳) $(2xye^z,x^2e^z,x^2ye^z)$ ۴) $(2xye^x,1,x^2ye^x)$

۵۵ـ بردار عمود بر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=3$ در نقطهٔ $(1,2,3)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $(2,\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ ۲) $(2,1,2)$ ۳) $(2,1,\frac{2}{3})$ ۴) ۵!۵!

۵۶ـ در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{\operatorname{Arctg}(3xy-3y)}{\operatorname{Arcsin}(2xy-6x)}$ کدام گزینه صحیح است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) حد موجود و برابر $\frac{1}{2}$ است. ۲) حد موجود نیست. ۳) حد موجود و برابر $\frac{3}{2}$ است. ۴) حد موجود و برابر ۱ است.

۵۷ـ کدام گزینه در مورد تابع f با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) تابع f در $(0,0)$ پیوسته است.
۲) تابع f در $(0,0)$ دارای مشتقات نسبی است.
۳) تابع f در $(0,0)$ حد دارد.
۴) تابع f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۵۸ـ معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ در نقطه $(0,0,3)$ از کدام نقطهٔ دیگر می‌گذرد؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\sqrt{3},1,2)$ ۲) $(3,0,1)$ ۳) $(3,\sqrt{3},0)$ ۴) $(1,\sqrt{3},3)$

۵۹ـ در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin(\frac{y}{x})$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) حد موجود و برابر 8π است. ۲) حد موجود و برابر $8\sqrt{2}$ است. ۳) حد موجود و برابر $4\pi^2$ است. ۴) حد موجود نیست.

۶۰ـ تابع f با ضابطه $f(x,y)=|x^2-y^2|$ در نقطه با مختصات (۰ و ۰) چگونه است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.
۲) نه پیوسته و نه مشتق‌پذیر است.
۳) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.
۴) پیوسته نیست ولی دارای مشتقات جزیی است.

۶۱ـ اگر $z=x^2+y^2$ ، $x=\sin t$ و $y=e^t$ ، مقدار $\dfrac{dz}{dt}$ در $t=0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲ـ معادله صفحه مماس بر سطح $x^2+y^2+z^2=1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3})$ از کدام نقطهٔ دیگر می‌گذرد؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) (۱- و $\sqrt{3}$ و ۱) ۲) (۱ و $-\sqrt{3}$ و ۱) ۳) (۱ و $\sqrt{3}$ و ۱) ۴) (۱ و $-\sqrt{3}$ و ۱-)

۶۳ـ هرگاه $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ ، عبارت $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $2f$ ۲) صفر ۳) x^2+y^2 ۴) $y\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\dfrac{\partial f}{\partial y}$

۶۴ـ نقطه (۱ و ۱) برای سطح به معادلهٔ $z=x^2+y^3-3xy$ چگونه نقطه‌ای است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکسیمم موضعی ۲) مینیمم موضعی ۳) زینی ۴) عادی

۶۵ـ اگر $\begin{cases}u=x+y+z\\ uv=y+z\\ uvw=z\end{cases}$ آنگاه $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) u^2v ۲) uv^2 ۳) vw^2 ۴) uw

۶۶ـ اگر $f(x,y,x)=\begin{cases}\dfrac{x+z}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) وجود ندارد ۴) ∞

۶۷ـ اگر $xyz=c, f(x,y,z)=0$ (c ثابت) و f تابع مشتق پذیر باشد آنگاه $\dfrac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\dfrac{-y(xf_x-zf_z)}{x(yf_y-zf_z)}$ ۲) $\dfrac{y(xf_x+zf_z)}{x(yf_y-zf_z)}$ ۳) $\dfrac{-x(yf_y-zf_x)}{y(xf_x-zf_z)}$ ۴) $\dfrac{x(yf_y+zf_z)}{y(xf_x-zf_z)}$

۶۸ـ معادلهٔ خط قائم بر سطح به معادلهٔ $3x^2+\operatorname{Arctg}(2z)=e^y+1$ در نقطه $(1,\operatorname{Ln}2,0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $3z=(x-1)\ ,\ z+y=\operatorname{Ln}2$
۲) $z=(x-1)\ ,\ z+y=2$
۳) $3z=3x-2\ ,\ z+y=\operatorname{Ln}2$
۴) $x-y=\operatorname{Ln}\frac{e}{2}\ ,\ z+x=1$

۶۹ـ تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=\operatorname{tg}^{-1}(\frac{y}{x})$ مفروض است از نقطهٔ $P(1,1)$ در سوی چه امتدادی حرکت کنیم تا حداکثر سرعت افزایش برای تابع f بدست آید؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۲) $(-1\ ,\ 1)$ ۳) $(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

۷۰ـ معادلهٔ صفحه مماس بر مخروط به معادلهٔ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z^2$ در نقطهٔ $(2\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{2})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $3x+y=2\sqrt{5}\,z$ ۲) $x+2y=\sqrt{5}\,z+4$ ۳) $x-2y=\sqrt{5}\,z-5$ ۴) $3x-y=2\sqrt{5}\,z-2$

۷۱ـ حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^4y^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

۷۲ـ نقطه بحرانی تابع $z=x^2-3xy+2y^2-5x+7y$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $(1,-1)$ مینیمم ۲) $(1,-1)$ مینیمم ۳) $(1,-1)$ ماکسیمم ۴) $(1,-1)$ زینی

۷۳ـ صفحه‌ای را که در نقطه $P_0(1,-2,5)$ بر سطح $z=x^2+y^2$ مماس است به دست آورید. (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $2x-4y-z=5$ ۲) $2x+4y+z=5$ ۳) $2x+2y+2z=4/5$ ۴) $2x+y-z=2$

۷۴ـ کدامیک از نقاط زیر یک مینیمم نسبی تابع $f(x,y)=x^3-4xy+y^3+4y$ می‌باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-2,-4)$ ۲) $(4,2)$ ۳) $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$

۷۵ـ معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $x^2+y^2-z=8$ و $x-y^2+z^2=-2$ در نقطه $(2,-2,0)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{20}$ ۲) $\frac{x-2}{4}=\frac{y^2+2}{-2}=\frac{z}{10}$ ۳) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{20}$ ۴) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{10}$

۷۶ـ معادله صفحه مماس بر سطح $4x^2+y^2+2z^2=26$ در نقطه $(1,-2,3)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $x-2y+3z=13$ ۲) $2x-y+3z=13$ ۳) $x+y+3z=13$ ۴) $2x+y-3z=13$

۷۷ـ $\frac{dw}{dt}$ را بر حسب تابعی از t به دست آورید اگر $w=xy+z$ ، $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ و $z=t$ باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $1+\cos 2t$ ۲) $\cos 2t$ ۳) $\sin 2t$ ۴) $1-\sin 2t$

۷۸ـ اگر $u=x^2+y^2$ و $x=4s-3t$ و $y=st^2$ مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s=0$ و $t=0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 18

۷۹ـ معادله خط قائم بر سطح به معادله $z=ye^x$ در نقطه $(1,2,2e)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=\frac{z-2e}{-1}$ ۲) $\frac{x-1}{e}=\frac{y-2}{2e}=\frac{z-2e}{-1}$ ۳) $\frac{x-1}{e}=\frac{y-2}{e}=z-2e$ ۴) $\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=z-2e$

۸۰ـ چنانچه $u=f(x-y,y-x)$ باشد، آنگاه: (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۲) $2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۳) $\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

۸۱ـ مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(1,1)$ برای تابع $f(x,y)=3x^3-4x^2y+3xy^2+7x-8y$ کدام است؟

(مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۱)

۱) 6 ۲) -8 ۳) -6 ۴) 8

۸۲ـ چنانچه $u=f(\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}ay^3)$ باشد، آنگاه: (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۱)

۱) $ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۲) $ay\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۳) $ax\frac{\partial u}{\partial x}+by\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۴) $ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$

۸۳ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $x^2+4y^2-4z^2-4=0$ در نقطهٔ $(2,1,1)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $x+2y-2z=2$ ۲) $x+2y+2z=6$ ۳) $x-2y-2z=-2$ ۴) $x-2y+2z=2$

۸۴ـ اگر θ زاویهٔ اشتراک سطوح $x^2+y^2-2=0$ و $x^2+y^2-2z=0$ در نقطهٔ $(1,1,1)$ باشد در این صورت $\cos\theta$ برابر است با ....

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۸۵ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y,z)=x^2y+z^3$ در نقطهٔ $A=(3,-2,1)$ و در امتداد بردار $\overline{AB}$ که در آن $B(5,0,2)$ برابر است با ....

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۸۶ـ اگر $\omega=u^2+e^{2\upsilon}$ و $u=xy^2$ و $\upsilon=x^2\sin y$ ، آنگاه $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ در نقطهٔ $x=1$ و $y=\frac{\pi}{2}$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $2(\frac{\pi^6}{32}+e^2)$ ۲) $2(\frac{\pi^6}{64}+2e^2)$ ۳) $2(\frac{\pi^6}{64}+e^2)$ ۴) $2(\frac{\pi^6}{32}+2e^2)$

۸۷ـ در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود و برابر صفر هستند.
۲) $\frac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ پیوسته است.
۳) $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ ناپیوسته است.
۴) f در مبدأ ناپیوسته است.

۸۸ـ معادله ارتفاع یک کوه به صورت $h(x,y)=2x^2-2xy+y^3$ است. محور xها در امتداد شرق و محور yها در امتدد شمال است. یک کوهنورد در نقطه (۲ و ۱) برای بالا رفتن از کوه به کدام سمت باید برود؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) شرق ۲) غرب ۳) جنوب ۴) شمال

۸۹ـ اگر $f(x,y)=x^3-3x+y^2-2y$ در این صورت نقاط (۱ و ۱)، (۱ و ۱-) برای f به ترتیب .... هستند. (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ماکزیمم نسبی و زینی
۲) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی
۳) مینیمم نسبی و زینی
۴) زینی و ماکزیمم نسبی

۹۰ـ اگر $u=x^2+y^2$ و $x=4s-3t$ و $y=st^2$، مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s=0$ و $t=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 18

۹۱ـ معادله خط قائم بر سطح به معادله $z=ye^x$ در نقطه (۲e و ۲ و ۱) کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=\frac{z-2e}{-1}$ ۲) $\frac{x-1}{e}=\frac{y-2}{2e}=\frac{z-2e}{-1}$ ۳) $\frac{x-1}{e}=\frac{y-2}{e}=z-2e$ ۴) $\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=z-2e$

۹۲ـ مینیمم رویهٔ به معادلهٔ $f(x,y)=x^3-4xy+y^3+4y$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۹۳ـ گرادیان تابع $f(x,y)=x^3y^2$ در نقطهٔ $(-1,2)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $4\vec{i}-3\vec{j}$ ۲) $3\vec{i}-12\vec{j}$ ۳) $4\vec{i}+12\vec{j}$ ۴) $12\vec{i}-4\vec{j}$

۹۴ـ اگر $u=3x^2+y^2-z^2$ ، $x=2s+5t$ ، $y=s^2-t^2$ ، $z=st$ ، $\frac{\partial u}{\partial t}$ در نقطه $t=0$ ، $s=1$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) 60 ۲) 50 ۳) 40 ۴) 30

۹۵ـ مشتق سویی تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=y^4+2xy^3+x^2y^2$ در نقطه $(0,1)$ و در جهت $\vec{i}+\vec{j}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۹۶ـ ماکسیمم تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=x^2y^2$ نسبت به قید $x^2+y^2=1$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۹۷ـ O یک رأس جعبه‌های مکعب مستطیل شکل در مبدأ و سه یال این رأس در امتداد محورها قرار دارند. اگر رأس مقابل O از این مکعب مستطیل‌ها روی صفحهٔ به معادله $3x+2y+6z=18$ قرار داشته باشد. ماکسیمم حجم این مکعب مستطیلها کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۰/۵

۹۸ـ رابطه $z=x^n f(\frac{y}{x})$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+nz=0$ ۲) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=0$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial x}-n\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=0$

۹۹ـ تابع f با ضابطه $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ داده شده است، در این صورت: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) f در همه نقاط R^2 مشتق‌پذیر است.
۲) f در هیچ نقطه از R^2 مشتق‌پذیر نیست.
۳) f در نقطه $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.
۴) f در نقطه $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۱۰۰ـ مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ در نقطهٔ $p(1,1,2)$ و در سوی بردار $v=(2,1,2)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۱ـ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=3x^2+2y^2-4y+1$ روی قرص $x^2+y^2\le 16$، کدامیک از مقادیر زیراند؟
(عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) ۵۳ و ۱- ۲) ۴۹ و ۱۷ ۳) ۴۹ و ۱- ۴) ۵۳ و ۱۷

۱۰۲ـ در چه نقاطی از سطح $2x^3+y-z^2=5$ صفحه مماس در آنها با صفحه، $24x+y-6z=3$ موازی است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-1,24,3),(2,2,3)$ ۲) $(-1,8,1),(1,4,1)$ ۳) $(-2,25,2),(2,-7,2)$ ۴) $(-2,30,3),(2,-2,3)$

۱۰۳ـ اگر $u=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ حاصل $\nabla^2 u$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$ ۲) صفر ۳) $f''(r)$ ۴) $f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$

۱۰۴ـ ماکسیمم مقدار تابع $f(x,y)=\operatorname{Ln}(x^2)+\operatorname{Ln}(y^2)$ تحت شرایط $1\le x\le e^2$ و $xy=1$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۰۵ـ تابع $f(x,y)=xy(4-x-y)$ مفروض است. کدامیک از عبارات زیر در رابطه با نقاط بحرانی این تابع صحیح است؟
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.
۲) این تابع دارای یک نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.
۳) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه مینیمم است.
۴) این تابع دارای دو نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.

۱۰۶ـ تابع $f(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-4x+y$ مفروض است. کدامیک از عبارات زیر در رابطه با نقاط بحرانی این تابع صحیح است؟
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) این تابع دارای یک نقطه زین اسبی، یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.
۲) این تابع دارای یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است و نقطه زین اسبی ندارد.
۳) این تابع دارای دو نقطه زین اسبی، یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.
۴) این تابع دارای دو نقطه ماکزیمم و دو نقطه مینیمم است.

۱۰۷ـ معادله صفحه مماس بر بیضوی $4x^2+y^2-16z=0$ در نقطه $(2,4,2)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $2x-y-2z=-4$ ۲) $2x-y+2z=2$ ۳) $2x+y-2z=4$ ۴) $2x+y+2z=12$

۱۰۸ـ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی برخورد $z=\frac{1}{2}\sqrt{24-x^2-2y^2}$ و صفحه $y=2$ در نقطهٔ $(2,2,\sqrt{3})$ کدام است؟
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ۲) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۹ـ اگر $f(x,y)=3x^2-y^2+4x$ آنگاه مشتق جهت‌دار f در جهت بردار یکه U که با جهت مثبت محور xها زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازد کدام است؟
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $3x-2\sqrt{3}y$ ۲) $x-2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}x-y+4$ ۴) $3\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}$

۱۱۰ـ اگر $z=f(x+y,x-y)$، کدام رابطه برقرار است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ۲) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

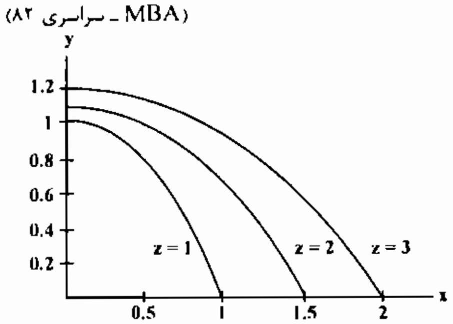
۱۱۱ـ در یک مطالعه، دما در هر نقطهٔ صفحه از تابع $T(x,y)=\frac{100}{x^2+y^2+1}$ پیروی می‌کند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟
(MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) در نقطه (۳ و ۲) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۳ و ۲-) تغییری نمی‌کند.
۲) در نقطه (۳ و ۲) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار ($\frac{3}{2}$ و ۲-) تغییری نمی‌کند.
۳) در نقطه (۳ و ۲) جهت بیشترین افزایش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار ($-\frac{3}{2}$ و ۱) تغییری نمی‌کند.
۴) در نقطه (۳ و ۲) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۶ و ۴-) تغییری نمی‌کند.

۱۱۲ـ باز پرداخت وام مسکن، P، تابعی از سه متغیر است، $P=f(A,r,N)$. A مقدار وام دریافتی است به ریال، r نرخ بهره است و N شمارهٔ سالهای بازپرداخت وام می‌باشد. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\partial P}{\partial A}>0$ و $\frac{\partial P}{\partial r}<0$ و $\frac{\partial P}{\partial N}>0$
۲) $\frac{\partial P}{\partial A}<0$ و $\frac{\partial P}{\partial r}>0$ و $\frac{\partial P}{\partial N}<0$
۳) $\frac{\partial P}{\partial A}<0$ و $\frac{\partial P}{\partial r}<0$ و $\frac{\partial P}{\partial N}>0$
۴) $\frac{\partial P}{\partial A}>0$ و $\frac{\partial P}{\partial r}>0$ و $\frac{\partial P}{\partial N}<0$

۱۱۳ـ $z=f(x,y)$ تابعی از x، y است و نمودار خم‌های $z=1$ و $z=2$ و $z=3$ درشکل زیر داده شده است. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مقادیر تقریبی است.) (MBA ـ سراسری ۸۲)



۱) $z_y(0,1)=1\ ,\ z_x(0,1)=1\ ,\ z_x(1,0)=1$
۲) $z_y(0,1)=20\ ,\ z_x(0,1)=1\ ,\ z_x(1,0)=1$
۳) $z_y(0,1)=10\ ,\ z_x(0,1)=0/5\ ,\ z_x(1,0)=2$
۴) $z_y(0,1)=10\ ,\ z_x(0,1)=0\ ,\ z_x(1,0)=2$

۱۱۴ـ صفحه $x+y+z=1$ استوانه $x^2+y^2=2$ را در یک خم C قطع می‌کند. نقاط P و Q را روی C چنان بیابید که به ترتیب ارتفاع ماکسیمم و مینیمم را از صفحهٔ xy داشته باشند. (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $P(0,\sqrt{2},1-\sqrt{2})\ ,\ Q=(\sqrt{2},0,1-\sqrt{2})$
۲) $P=(-1,-1,3)\ ,\ Q=(1,1,-1)$
۳) $P=(0,-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\ ,\ Q=(-\sqrt{2},0,1+\sqrt{2})$
۴) $P=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})\ ,\ Q=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$

۱۱۵ـ مشتق جهت‌دار $f(x,y)=e^x tgy+2x^2y$ در نقطه $(0,\frac{\pi}{4})$ در جهت $\vec{i}-\vec{j}$ عبارت است از: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۶ـ تابع $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) در نقطه $(0,0)$ مینیمم دارد. ۲) دارای ماکسیمم و مینیمم نیست.
۳) در نقطه $(0,0)$ ماکسیمم دارد. ۴) در نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی دارد.

۱۱۷ـ مشتق‌های جزیی $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$ برای $z=\cos(x^2+y^2)$ که $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\end{cases}$ به ترتیب عبارتند از:
(MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $-2u\sin u^2$ و 0 ۲) $-2u\sin v^2$ و $2u\cos v^2$ ۳) 0 و $2u\cos v^2$ ۴) $-2u\sin u^2$ و $2u\cos u^2$

۱۱۸ـ اگر $u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$، کدام گزاره درست است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ۲) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}=x\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ۳) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$ ۴) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

۱۱۹ـ صفحهٔ مماس بر رویه به معادلهٔ $z=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$ در نقطه $(3,3,4)$ محور xها را در A و محور yها را در B و محور zها را در C قطع می‌کند. $x_A+y_B+z_C$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱۷ ۲) ۱۰ ۳) -10 ۴) $-17/5$

۱۲۰ـ اگر $\phi(x,y)=e^{xy^2}$ باشد $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}$ ۲) $2xy^3e^{xy^2}+e^{xy^2}$ ۳) $2y^3e^{xy^2}+2ye^{xy^2}$ ۴) $2y^2e^{xy^2}+2ye^{xy^2}$

۱۲۱ـ در صورتیکه x و y و z مخالف صفر و $x+y+z=1$ باشد، ماکزیمم xy^2z^2 کدام عدد است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{1}{32}$ ۲) $\dfrac{1}{36}$ ۳) $\dfrac{1}{628}$ ۴) $\dfrac{1}{432}$

۱۲۲ـ اگر $\phi(x,y)=x^nf(\dfrac{y}{x})$ باشد، کدام تساوی برقرار است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $y\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+x\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=n\phi$ ۲) $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\phi$ ۳) $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=n\phi$ ۴) $y\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+x\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\phi$

۱۲۳ـ در مورد تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ کدام گزاره صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر f در نقطه (x_0,y_0,z_0) دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

۲) اگر $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$، آنگاه مماس بر سطح f در نقطه (x_0,y_0,z_0) افقی است.

۳) اگر f در نقطه (x_0,y_0) مشتق‌پذیر و $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ آنگاه مشتق سوئی f در نقطه (x_0,y_0) در هر جهتی صفر است.

۴) اگر f همه‌جا پیوسته و دارای دو مینیمم نسبی باشد آنگاه f حداقل دارای یک ماکزیمم نسبی است.

۱۲۴ـ اگر $f(x,y,z)=z^2-xe^{2x-y}$ اندازه تصویر بردار grad f در نقطه $(1,2,-1)$ بر روی بردار $A=-i+j$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۳

۱۲۵ـ معادله $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-3\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ با تغییر متغیرهای $r=2y-3x$ و $\rho=2y+3x$ به کدام صورت بیان می‌شود؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{\partial f}{\partial r}=0$ ۲) $\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=0$ ۳) $\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=0$ ۴) $\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=0$

۱۲۶ـ معادله صفحه مماس بر سطح $4x^2+y^2+2z^2=26$ در نقطه (۳ و ۲- و ۱) برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $2x-y+2z=13$ ۲) $x-y+2z=13$ ۳) $2x+y-2z=10$ ۴) $2x+2y-z=10$

۱۲۷ـ اگر $u=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ باشد، مقدار عبارت $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{u}{3}$ ۲) $3u^2$ ۳) $3u$ ۴) $6u$

۱۲۸ـ اگر $f(u,v)=\dfrac{u}{v}$ و $u=\sqrt{x^2-3y+4z}$ و $v=xyz$ مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ در $z=2$ و $y=1$ و $x=1$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ۳) $-\dfrac{5\sqrt{6}}{8}$ ۴) صفر

۱۲۹ـ بردار یکه عمود بر سطح $xy^3z^2=4$ در نقطه $(-1,-1,2)$ برابر کدام مقدار است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $\dfrac{1}{12}(4,5,-6)$ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{176}}(4,12,4)$ ۳) $\dfrac{1}{12}(5,-6,4)$ ۴) $\dfrac{1}{\sqrt{176}}(-4,-12,4)$

۱۳۰ـ کوچکترین و بزرگترین مقدار تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ بر قرص بسته، $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$ کدامیک از مقادیر زیراند: (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ و ۲۵ ۲) ۰ و ۱۶ ۳) ۰ و ۱۴ ۴) ۰ و ۳۶

۱۳۱ـ در چه نقاطی از بیضی‌گون $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ قائم به آن با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ ۲) $(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

۳) $(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ ۴) $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}),(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$

۱۳۲ـ بردار یکه عمود بر سطح $x^2y^2z=3$ در نقطه $(1,1,3)$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{1}{\sqrt{73}}(6,6,1)$ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{74}}(6,6,2)$ ۳) $\dfrac{1}{\sqrt{73}}(6,6,-1)$ ۴) $\dfrac{1}{\sqrt{74}}(6,6,-2)$

۱۳۳ـ اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)=2x^2+2xy+5y^2+4x$ چگونه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $(0,0)$ مینیمم ۲) $\left(-\frac{10}{9},\frac{2}{9}\right)$ مینیمم ۳) $\left(-\frac{10}{9},\frac{2}{9}\right)$ ماکسیمم ۴) فاقد نقطه اکسترمم

۱۳۴ـ ماکزیمم عبارت $2x+y$ در صورتی که $x+y\le 4$ و $-x+y\ge -2$ باشد چیست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۳۵ـ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد

۱۳۶ـ در تابع دو متغیر $z=x^2\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x=\sqrt{3}$ و $y=1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $\dfrac{\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{\pi}{3}$ ۴) $\dfrac{2\pi}{3}$

۱۳۷ـ اندازه مشتق سویی تابع $W=x^2y-yz+2z$ در نقطه $(1,-2,0)$ در امتداد بردار $2i-j+2k$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) $-\dfrac{2}{3}$ ۴) $\dfrac{2}{3}$

۱۳۸ـ اگر $f(x,y)=xe^{-(x+y^2)}+ye^{-y^2-1}$ باشد، حداکثر مقدار f به ازای چه مقدار y به دست می‌آید؟

(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ ۴) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

۱۳۹ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y,z)=\dfrac{e^z}{x^2+y}$ در جهت بردار $\vec{i}-3\vec{j}$ در نقطه $(1,1,\operatorname{Ln}2)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ۲) $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ ۳) صفر ۴) $\dfrac{1}{2}$

۱۴۰ـ اگر $z=2x+y^2+1$ باشد، کمترین مقدار $x-y+z^2$ کدام است؟

(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{8}$ ۳) $-\dfrac{1}{16}$ ۴) $-\dfrac{1}{32}$

۱۴۱ـ منحنی c به معادله $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=t$ مفروض است. کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از خط مماس بر منحنی c در نقطه $(-1,0,\pi)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) $\sqrt{1+\pi^2}$ ۲) $\sqrt{2+\pi^2}$ ۳) $\sqrt{2+2\pi^2}$ ۴) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{2}}$

۱۴۲ـ اگر $f(x,y,z)=1+x^2e^{yz^2}$؛ $\vec a=2i+j-k$ و $p=(1,0,1)$ آنگاه مشتق سویی (جهتی) f در جهت بردار $\vec a$ و در نقطه p برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $6\sqrt{2}$

۱۴۳ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases} x & (y\ge 0),(x\le 0 \ \text{یا}\ 0<y\le x^2) \\ 0 & \text{بقیه نقاط}\end{cases}$ در این صورت $f_x(0,1)$، $f_y(0,1)$ به ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ـ ۰ ۲) وجود ندارد ـ ۰ ۳) وجود ندارد ـ ۱ ۴) وجود ندارد ـ وجود ندارد.

۱۴۴ـ مقدار ماکزیمم مشتق جهتی رویهٔ $f(x,y)=x^2e^y$ در نقطهٔ $(-2,0)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۴۵ـ بیشترین مقدار مجموع دو عدد مثبت x و y که در نامساوی‌های $y\le 2x+5$ و $4x+3y\le 60$ و $y+50\ge 5x$ صدق کنند، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۸ ۲) ۱۸/۵ ۳) ۱۹ ۴) ۱۹/۵

۱۴۶ـ اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند از رابطه $g(z-x)+f(y-z)=0$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱+ ۴) $g'-f'$

۱۴۷ـ در تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-xy}{x+y} & ;(x,y)\ne(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$ مقدار $f'_x(0,0)-f'_y(0,0)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۱۴۸ـ قاعده جسمی قائم و منطبق بر دایره $x^2+y^2=9$ و مقطع آن با هر صفحه عمود بر محور xها یک مربع است، حجم آن کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۷۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۴۴

۱۴۹ـ بیشترین مقدار مشتق تابع سویی تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z$ در نقطه $(3,-3,2)$ چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۵۰ـ خط مماس بر منحنی فضایی C فصل مشترک دو رویه $z=x^2-y^2$ و $3xy-2z=0$ در نقطه $(2,1,3)$ موازی کدام بردار است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $2i+j+6k$ ۲) $2i-j+6k$ ۳) $i-2j+3k$ ۴) $5i+2j+4k$

۱۵۱ـ اگر $z=e^x\cos y$ و $\begin{cases}x^2+e^x-t^2-t=1\\ yt^2+y^2t-t+y=0\end{cases}$، مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۱۵۲ـ اگر $z=x^2+y^2$، بردار عمود بر این رویه کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $2xi+2yj$ ۲) $-2x\vec i+2y\vec j+z\vec k$ ۳) $2x\vec i+2y\vec j-\vec k$ ۴) $y\vec j+x\vec j$

۱۵۳ـ معادلهٔ صفحهٔ عمود بر خط به معادلهٔ $\begin{cases}x+y=1\\x+z=1\end{cases}$ که از مبدأ می‌گذرد کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $x-y-z=0$ ۲) $x+y-z=0$ ۳) $x-y+z=0$ ۴) $x+y+z=0$

۱۵۴ـ اگر $z=(x^2+y^2)e^{(\frac{x^2y^2}{x^4+y^4})}$ آنگاه مقدار $\frac{x\partial z}{\partial x}+\frac{y\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) z ۳) 2z ۴) 3z

۱۵۵ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+y} & x+y\ne 0\\ \alpha & x+y=0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار α، $f_x(1,-1)$ موجود نیست؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) هر مقدار α

۱۵۶ـ اگر $z=x\cos y$، $y=s-t$ و $x=s+t$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ وقتی $t=0$ و $s=\pi$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) π

۱۵۷ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ به معادلهٔ $z=e^{3+2x+y^2}$ در نقطه $(1,3,-6)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $2x-6y-z=-31$ ۲) $2x+6y-z=5$ ۳) $2x-6y+z=-29$ ۴) $2x+6y+z=7$

۱۵۸ـ بردار مماس بر منحنی به معادلهٔ $\begin{cases}x+z=2\\x^2=8y\end{cases}$ در نقطهٔ $(4,8,-2)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\vec i-6\vec j-\vec k$ ۲) $\vec i+6\vec j+\vec k$ ۳) $\vec i+6\vec j-\vec k$ ۴) $\vec i-6\vec j+\vec k$

۱۵۹ـ فرض کنید $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$، در این صورت $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) حد وجود ندارد.

۱۶۰ـ نقطه اکسترمم $f(x,y)=x^3-y^3+3xy$ چگونه است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) (۱ و ۱-) ماکسیمم نسبی ۲) (۱- و ۱) مینیمم نسبی ۳) (۱ و ۱-) مینیمم نسبی ۴) (۱- و ۱) ماکسیمم نسبی

۱۶۱ـ اگر $f(x,y)=xy^2+3y$ و $\vec a=3\vec i-4\vec j$، مشتق سوئی (جهتی) f در نقطه (۱ و ۳-) در جهت $\vec a$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۲ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\ne 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$ آنگاه کدام گزینه در مورد حدود $C=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y), B=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y), A=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) A، B موجود و نابرابرند و C موجود نیست. ۲) A، B، C موجود و نابرابرند.

۳) A، B موجود و برابرند و C موجود نیست. ۴) A، B، هیچکدام موجود نیستند.

۱۶۳ـ خطوط عمود بر رویه $z=x^2+y^2$ در نقاط مختلف دایره $\begin{cases}x^2+y^2=2\\z=2\end{cases}$ یک رویه تشکیل می‌دهند، معادله این رویه کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x^2+y^2=2\sqrt{2}(5-2z)^2$ ۲) $x^2+y^2=\sqrt{2}(5-2z)^2$ ۳) $x^2+y^2=(5-2z)^2$ ۴) $x^2+y^2=2(5-2z)^2$

۱۶۴ـ مشتق سوئی $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ در نقطه (۱,۱,۲) و در امتداد بردار $\frac{2}{3}\vec i+\frac{2}{3}\vec j-\frac{1}{3}\vec k$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۶۵ـ اگر $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$، شرط لازم و کافی برای آنکه $f(0,0)$ ماکسیمم موضعی باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $ac-b^2>0, a<0$ ۲) $ac-b^2<0, a<0$ ۳) $ac-b^2>0, a>0$ ۴) $ac-b^2>0, a>0$

۱۶۶ـ اکسترممهای تابع $w=f(x,y,z)$ با شرط $\begin{cases}H(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ جواب کدام معادله‌اند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\overrightarrow{\nabla H}.(\overrightarrow{\nabla f}\times\overrightarrow{\nabla G})=0$ ۲) $\overrightarrow{\nabla f}.(\overrightarrow{\nabla H}\times\overrightarrow{\nabla G})=0$ ۳) $\overrightarrow{\nabla G}.(\overrightarrow{\nabla f}\times\overrightarrow{\nabla H})=0$ ۴) $\overrightarrow{\nabla f}-\lambda(\overrightarrow{\nabla H}\times\overrightarrow{\nabla G})=0$

۱۶۷ـ اگر $z = f(x,y)$ تابعی دو متغیره باشد حد $f(x,y)$ وقتی (x,y) روی $\vec{u}$ به (a,b) میل می‌کند به ازای هر بردار $\vec{u}$ موجـود باشـد و مشتق سویی f در نقطه (a,b) در سوی دو بردار غیر موازی موجود باشد در این صورت کدام گزاره صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) f در (a,b) حد دارد ولی ممکن است پیوسته نباشد اما مشتقات نسبی f در (a,b) موجودند.

۲) f در (a,b) پیوسته است و مشتقات نسبی f در (a,b) موجودند.

۳) ممکن است f در (a,b) حد نداشته باشد ولی مشتقات نسبی f در (a,b) موجودند.

۴) ممکن است f در (a,b) حد نداشته باشد و مشتقات نسبی f در (a,b) موجود نباشند.

۱۶۸ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ کدامیک از توابع زیر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $z = f(\frac{x}{y})$ ۲) $z = f(x,y)$ ۳) $z = f(x-y)$ ۴) $z = f(x^2 - y^2)$

۱۶۹ـ مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = 2xy$ بر روی قرص بسته $x^2 + y^2 \le 4$ برابر است با:

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) ۸ و ۰ ۲) ۲+ و ۲- ۳) ۴+ و ۴- ۴) ۸+ و ۸-

۱۷۰ـ در کدام جهت تابع $f(x,y,z) = xy + 6z + xz$ در نقطه $(-1,5,-3)$ بیشترین نرخ تغییرات را دارد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $2i + 2j - k$ ۲) $2i - 2j + k$ ۳) $2j - 2i + k$ ۴) $2k - 2i + 2j$

۱۷۱ـ هرگاه $W = x_1 x_2 \dots x_n$ ، $\frac{dW}{dt}$ در نقطه $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) t^{n-1} ۲) nt^n ۳) nt^{n-1} ۴) $(n-1)t^n$

۱۷۲ـ کدام تابع در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ صدق می‌کند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^2 y^2$ ۲) $\sqrt{x^2 + y^2}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{y^2}{x^2}$ ۴) $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

۱۷۳ـ ماکسیمم تابع $f(x,y) = 3x - 2y + 1$ با توجه به شرط $9x^2 + 4y^2 = 18$ در چه نقاطی رخ می‌دهد و چقدر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $1, \left(1, \frac{3}{2}\right)$ ۲) $-5, \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ۳) $7, \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ ۴) $7, \left(1, -\frac{3}{2}\right)$

۱۷۴ـ ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^2 - y^2$ روی ناحیه $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\right\}$ کدامند و در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $0, 4$ و $(2,0)$ و $(0,0)$ ۲) $-4, 0$ و $(0,0)$ و $(-2,0)$ ۳) $-4, 4$ و $(\pm 2, 0)$ و $(0, \pm 2)$ ۴) $4, 4$ و $(2,0)$ و $(-2,0)$

۱۷۵ـ برای کدام تابع نقطه $(0,0)$ یک نقطه می‌نیمم نسبی است:

$f(x,y) = x^2 + y^4 + 1$

$g(x,y) = x^2 + y^3$

$h(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$k(x,y) = xy(3 - x - y)$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x,y)$ ۲) $h(x,y)$ ۳) $g(x,y)$ ۴) $k(x,y)$

۱۷۶ـ در چه نقاطی گرادیان تابع $f(x,y) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x} + y\right)$ مساوی $\left(-\frac{16}{9}, 1\right)$ است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ ۲) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ ۳) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right)$ ۴) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right)$

۱۷۷ـ معادلهٔ صفحه مماس در نقطهٔ $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ بر رویهٔ $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $x + y + z = \sqrt{3}$ ۲) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = \sqrt{3}$ ۳) $\frac{x}{9} + \frac{y}{16} + \frac{z}{25} = \sqrt{3}$ ۴) $\frac{x}{9} + \frac{y}{16} + \frac{z}{25} = 3$

۱۷۸ـ کدام تابع در معادله $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ صدق می‌کند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ۲) $f(x,y) = 1 + \sin\frac{x}{y}$ ۳) $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ ۴) $f(x,y) = x^2 \mathrm{Ln}\frac{x}{y} - xy$

۱۷۹ـ کدام حد وجود دارد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}$ ۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ ۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

۱۸۰ـ دامنه تعریف تابع $f(x,y) = \sqrt{xy} + \sin^{-1} x$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1$ و x, y هم علامت‌اند$\}$

۲) $D = \{(x,y) \mid x \in R^+$ و x, y هم علامت‌اند$\}$

۳) $D = \{(x,y) \mid -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ و x, y هم علامت‌اند$\}$

۴) $D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1$ و x, y هم علامت‌اند$\}$

۱۸۱ـ کدام تابع را در نقطه $(0,0)$ می‌توان طوری تعریف کرد که تابع در این نقطه پیوسته شود؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ۲) $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ ۳) $f(x,y) = \frac{xy}{x - y}$ ۴) $f(x,y) = \frac{x^2}{x + y}$

۱۸۲ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x,y) = \begin{cases} ye^{-\frac{1}{x^2}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می‌کند؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

۲) f در نقطه $(0,0)$ فقط مشتق‌پذیر مرتبهٔ اول است.

۳) f در نقطه $(0,0)$ دارای بردار گرادیان نیست.

۴) f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته نیست.

۱۸۳ـ بردار یکه عمود بر سطح f به معادلهٔ $f(x,y,z) = x^2 + 3xyz + 2y^2 - z^2 - 5$ در نقطه $(1,1,1)$ واقع بر آن کدام است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2i + 3j}{\sqrt{13}}$ ۲) $\frac{2i + 3j + k}{\sqrt{14}}$ ۳) $\frac{6i + 9j}{\sqrt{117}}$ ۴) $\frac{6i + 9j + 2k}{\sqrt{261}}$

۱۸۴ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می‌کند؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) f در $(0,0)$ پیوسته است.

۲) f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۳) f در $(0,0)$ دارای مشتق سویی در هر جهت می‌باشد.

۴) f در $(0,0)$ دارای مشتقات جزیی مرتبه اول بوده ولی پیوسته نمی‌باشد.

۱۸۵ـ اگر $u^2 - uv - v^2 + x^2 + y^2 - xy = 0$ و $uv - x^2 + y^2 = 0$ و $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ ، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{uy - 4x(u+v)}{2(u^2 + v^2)}$ ۲) $\frac{ux - 4y(u+v)}{2(u^2 + v^2)}$ ۳) $\frac{ux + 4y(u+v)}{2(u^2 + v^2)}$ ۴) $\frac{uy + 4x(u+v)}{2(u^2 + v^2)}$

۱۸۶ـ می‌نیمم عبارت $x^2+2y^2+2xy+2x+3y$ با قید $x^2-y=1$ در کدام نقطه است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $(0,-1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(\frac{3}{4},\frac{-7}{16})$ ۴) $(-\frac{3}{4},\frac{7}{16})$

۱۸۷ـ اگر $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{5}$ باشد، بیشترین مقدار $2x+4y-5z$ کدام است؟ (مدیریت اجرائی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۸۸ـ اگر $f(t)=(\sin t-t\cos t)i+(\cos t+t\sin t)j$ باشد، مقدار انحناء منحنی در نقطه نظیر $t=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{3}{\pi}$

۱۸۹ـ درجه حرارت T در نقطه $M(x,y,z)$ به صورت $T=96xyz^2$ است، بالاترین درجه حرارت در سطح کره $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۸ ۳) ۱۳ ۳) ۱۴/۴ ۴) ۱۶

۱۹۰ـ دو صفحه، موازی صفحه $x-2y+2z+9=0$ بر بیضوی $x^2+4y^2+2z^2=1$ مماس شده‌اند، فاصله این دو صفحه کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۹۱ـ اگر $z=f(x+ay)$ که در آن a عدد ثابتی است. کدام تساوی زیر برقرار است؟ $(a\neq 0)$ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial y}=-a\frac{\partial z}{\partial x}$ ۳) $a\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}$ ۴) $-a\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}$

۱۹۲ـ نقطهٔ $(2,-1)$ برای سطح به معادلهٔ $z=x^2-y^2-2x+4y-3$ چه نوع نقطه‌ای است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴)

۱) ماکسیمم نسبی ۲) زینی ۳) مینیمم نسبی ۴) عادی

۱۹۳ـ دیفرانسیل تابع $z=2x^2-3xy-y^2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $4x-3y$ ۲) $-3x-2y$

۳) $(4x-3y)-(3x+2y)\frac{dy}{dx}$ ۴) $(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$

۱۹۴ـ فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، اگر مشتق جهتی این تابع در نقطه مذکور در امتداد $i+j$ برابر $3\sqrt{2}$ و در امتداد $4j-3i$ برابر ۵ باشد، آنگاه بردار گرادیان $\nabla f(a,b)$ برابر کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $-i+7j$ ۲) $7i-j$ ۳) $7i+j$ ۴) $\frac{12\sqrt{2}+5}{7}i+\frac{9\sqrt{2}-5}{7}j$

۱۹۵ـ کمترین فاصله نقاط رویه $xyz=1$ از مبدأ مختصات، کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۹۶ـ فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در نقطه $\{a,b\}$ مشتق‌پذیر باشد، اگر مشتق جهتی این تابع در نقطه مذکور در امتداد $i+j$ برابر $3\sqrt{2}$ و در امتداد $4j-3i$ برابر ۵ باشد، آنگاه بردار $\nabla f(a,b)$ کدام است؟ (معدن و مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $7i-j$ ۲) $7i+j$ ۳) $-i+7j$ ۴) $\frac{12\sqrt{2}+5}{7}i+\frac{9\sqrt{2}-5}{7}j$

۱۹۷ـ مقدار ماکزیمم موضعی (نسبی) تابع $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ را در صورت وجود بیابید. (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) وجود ندارد.

۱۹۸ـ اگر f تابعی از R^2 به R با ضابط $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & x=y=0\end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد حدود $A=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ، $B=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ و $C=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) A موجود نیست ولی B، C موجود و برابرند.
۲) A موجود نیست ولی B، C موجود و نابرابرند.
۳) هر سه A، B و C موجود و برابرند.
۴) هیچ‌کدام از A، B و C موجود نیستند.

۱۹۹ـ اگر $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۰ـ معادله خط مماس بر مقطع دو سطح فضایی به معادله‌های $z=2x^2-3y^2+1$ و $z=x^2+2y^2$ در نقطه $(2,1,6)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-8,3,-50)$ ۲) $(-8,-3,-50)$ ۳) $(8,-3,-50)$ ۴) $(-8,-3,50)$

۲۰۱ـ بیشترین مقدار مشتق جهتی سطح به معادلهٔ $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4xyz$ در نقطه $(-1,1,2)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $2\sqrt{35}$ ۲) $3\sqrt{35}$ ۳) $2\sqrt{53}$ ۴) $3\sqrt{53}$

۲۰۲ـ تابع $w=f(y-z,z-x,x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$ ۲) $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}$

۳) $\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=0$ ۴) قابل محاسبه به فرم فوق نیست.

۲۰۳ـ با تغییر متغیر $v=x$ و $z=x+y$ معادله $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$ به چه صورت می‌باشد؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۴ و ۸۴)

۱) $u_{vv}=0$ ۲) $u_{vz}=0$ ۳) $u_{zz}=0$ ۴) $u_{vv}=1$

۲۰۴ـ تابع $z=yf(\frac{x}{y})+F(\frac{x}{y})$ در کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کند؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$ ۲) $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$

۳) $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$ ۴) $x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$

۲۰۵ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ در نقطه (۲ و ۱) در جهت بردار واحد U که با محور xها زاویه 45° بسازد چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۱» به ازای $y=1$ و $z=0$، تابع f به صورت $f(x,y,z)=x$ در می‌آید که برد آن R می‌باشد.

۲ـ گزینه «۱» می‌توانیم از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده کنیم، ولی جایگذاری و محاسبه مستقیم ساده‌تر می‌باشد.

$$z=t^2\cos^2 t+2t\cos t\times t\sin t+t^2\sin^2 t=t^2+t^2\sin 2t \Rightarrow \frac{dz}{dt}=2t+2t\sin 2t+2t^2\cos 2t\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\pi-\frac{\pi^2}{2}=\pi(1-\frac{\pi}{2})$$

۳ـ گزینه «۲» تابع f در کلیه نقاط، به جز نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند مشتق‌پذیر می‌باشد.

۴ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=x^2-12y=0 \Rightarrow \nabla f=(2x,-12,0)\Big|_{(6,3,1)}=(12,-12,0)$$

$$\Rightarrow 12(x-6)-12(y-3)+0(z-1)=0 \Rightarrow x-y-3=0$$

۵ـ گزینه «۳» می‌خواهیم عبارت $V=xyz$ یا به طور معادل $V^2=x^2y^2z^2$ را تحت شرط $x^2+y^2+z^2=4$ ماکسیمم کنیم. چون مجموع x^2 و y^2 و z^2 ثابت است، حاصل‌ضرب وقتی ماکسیمم می‌شود که $x^2=y^2=z^2$. بنابراین:

$$3x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt3}, y=\frac{2}{\sqrt3}, z=\frac{2}{\sqrt3} \Rightarrow V=\frac{8}{3\sqrt3}=\frac{8\sqrt3}{9}$$

۶ـ گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم عبارت $d=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت شرط $z=\sqrt{x^2-1}$ مینیمم کنیم. با توجه به شرط لازم است $x\ge 1$، بنابراین مینیمم f در نقطه $(1,0,0)$ رخ می‌دهد، در نتیجه: $\min(d)=f(1,0,0)=\sqrt{1+0+0}=1$

توجه کنید که برای حل این مسأله می‌توانستیم از روش ضرایب لاگرانژ نیز استفاده کنیم.

۷ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}2xy=2xy\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}$$

۸ـ گزینه «۴»

روش اول : می‌خواهیم تابع $C=5x^2+2xy+3y^2+800$ را تحت شرط $g=x+y-39=0$ مینیمم کنیم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\nabla C=(10x+2y,2x+6y) \ ، \ \nabla g=(1,1)$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\nabla C=\lambda\nabla g\\ x+y-39=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10x+2y=\lambda\\ 2x+6y=\lambda\\ x+y-39=0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x=13$ و $y=26$ به دست می‌آید.

روش دوم : در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در شرط $x+y=39$ صدق می‌کند، گزینه (۴) است.

۹ـ گزینه «۱»

روش اول:

$$\begin{cases}f_x=2-y=0\\ f_y=3-x=0\end{cases} \Rightarrow x=3 \ , \ y=2$$

بنابراین نقطه $P(3,2)$ نقطه بحرانی تابع است. برای تعیین نوع نقطه P، بین را تشکیل می‌دهیم.

$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0\times 0-(-1)^2=-1<0 \Rightarrow$ نقطه زینی است P

چون تنها نقطه بحرانی تابع یعنی P نیز اکسترمم نیست، پس تابع نقطه اکسترمم ندارد.

روش دوم: $f_x=2-y \Rightarrow f_{xx}=0 \Rightarrow$ تابع نقطه اکسترمم ندارد

یادآوری: هرگاه f_{xx} یا f_{yy} صفر شود تابع نقطهٔ اکسترمم ندارد.

۱۰ـ گزینه «۲» برای یافتن نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع، لازم است نقاط مرزی و نقاط بحرانی را بررسی کنیم.

$$\begin{cases}f_x=8x+2y=0\\ f_y=2x-6y=0\end{cases} \Rightarrow x=0 \ , \ y=0$$

بنابراین تنها نقطه بحرانی تابع، نقطه $(0,0)$ است که روی مرز قرار دارد(پس نیازی به محاسبه f در این نقطه نیست، چون در مرزها در نظر گرفته خواهد شد). در نتیجه کافی است مرزها را مورد بررسی قرار دهیم.

$$x=0 \Rightarrow f(x,y)=f(0,y)=-3y^2 \Rightarrow \min=-3 \ , \ \max=0$$

$$y=0 \Rightarrow f(x,y)=f(x,0)=4x^2 \Rightarrow \min=0 \ , \ \max=4$$

$$x=1 \Rightarrow f(x,y)=f(1,y)=4+2y-3y^2 \Rightarrow \min=3 \ , \ \max=\frac{13}{3}$$

$$y=1 \Rightarrow f(x,y)=f(x,1)=4x^2+2x-3 \Rightarrow \min=-3 \ , \ \max=3$$

با توجه به مقادیر به دست آمده ماکسیمم مطلق برابر $\frac{13}{3}$ و مینیمم مطلق برابر ۳- است.

۱۱ـ گزینه «۲» $\nabla f=(4x-3y \ , \ -3x+10y) \Rightarrow \nabla f(1,2)=(-2,17)$

چون بردار واحد $\vec u$، با محور xها زاویه 45° می‌سازد، پس $\vec u=(\cos 45^\circ \ , \ \sin 45^\circ)=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$. بنابراین مشتق سویی f در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار u برابر است با: $D_uf(1,2)=(-2,17).(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})=\frac{15\sqrt2}{2}$

۱۲ـ گزینه «۴» اگر روی خط $y=mx$ به مبدأ نزدیک شویم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2e^{mx^2}}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{me^{mx^2}}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

چون حاصل حد به m بستگی دارد، پس حد وجود ندارد.

۱۳ـ گزینه «۴»

روش اول : $f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \Rightarrow \nabla f=(2x,2y,-1) \Rightarrow \nabla f(1,1,2)=(2,2,-1)$

بنابراین معادله صفحه در نقطه $(1,1,2)$ به صورت روبرو خواهد بود: $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0 \Rightarrow 2x+2y-z=2$

روش دوم : تنها گزینه‌ای که نقطه $(1,1,2)$ در آن صدق می‌کند، گزینه (۴) می‌باشد.

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt y}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt y}{x}\times\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt y}{\sqrt{x+y}+\sqrt y}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt y}=\frac{1}{2}$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$f(x,y)=e^xy-y\cosh xy \Rightarrow f_x=e^xy-y^2\sinh xy$$

$$f_{xy}=e^x-2y\sinh xy-y^2x\sinh xy\Big|_{(1,0)}=e$$

۱۶ـ گزینه «؟»

$$\nabla f=(6x+y \ , \ x-4y \ , \ -2) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(1,1,1)}=(7,-3,-2)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $7(x-1)-3(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow 7x-3y-2z=2$

۱۷ـ گزینه «۱» $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lim}} f(x,y) = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lim}} \frac{xy}{|x|+|y|} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lim}} (\frac{x}{|x|+|y|}) \times y =$ محدود بین ۱- و ۱ $\times 0 = 0$

بنابراین برای پیوستگی لازم است $a = 0$ باشد.

۱۸ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = y - x^2 = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = (-2x,1,0)\Big|_{(4,16,0)} = (-8,1,0) \\ f_2(x,y,z) = z^2 + y - 16 = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = (0,1,2z)\Big|_{(4,16,0)} = (0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-8)$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$ در می‌آید.

۱۹ـ گزینه «۳» به ازای $r = 1$ و $s = 1$ مقادیر $x = 2$ و $y = 1$ به دست می‌آیند. بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)\times 2s + x\times(-2) = 6$$

۲۰ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

دترمینان ماتریس فوق به ازای $x = y = z = 1$ برابر صفر می‌شود و با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۲۱ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x = \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi \\ f_y = x\cos y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین نقاط $(0,k\pi)$ نقاط بحرانی تابع می‌باشند. $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 - \cos^2 y = -\cos^2 y$

چون $\Delta < 0$، پس نقاط $(0,k\pi)$ نقاط زینی می‌باشند.

۲۲ـ گزینه «۴»

روش اول : معادله کره را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$\nabla f = (2x,2y,2z) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(2,\sqrt{5},0)} = (4,2\sqrt{5},0)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو خواهد بود: $4(x-2) + 2\sqrt{5}(y-\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow 2x + \sqrt{5}y = 9$

روش دوم : تنها معادله‌ای که نقطه $(2,\sqrt{5},0)$ در آن صدق می‌کند، گزینه (۴) است.

۲۳ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 3x^2 + y = 0 \\ f_y = x^2 - 2y + x = 0 \end{cases}$$

نقطه $(0,0)$ یکی از جوابهای دستگاه فوق می‌باشد. از طرفی: $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2y-6x)(-2) - (2x+1)^2$

چون مقدار Δ در نقطه $(0,0)$ برابر ۱- است، پس نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی می‌باشد.

۲۴ـ گزینه «۲» $g\circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y,x,y) = (2x+y,x+y)$

۲۵ـ گزینه «۴» بردار واحدی که نقطه (۱ و ۲) را به مبدأ وصل می‌کند $\vec{u} = (\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}})$ می‌باشد.

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2xy^2 - y^3 ,\ 2x^2y - 3xy^2 - 3 ,\ -1) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(2,1)} = (3,-1,-1)$$

$$D_u f = \nabla f.u = (3,-1,-1).(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0) = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

۲۶ـ گزینه «۱»

روش اول: قرار می‌دهیم $u = Lnx$ ، $v = Lny$ و $w = Lnz$. در این صورت $x = e^u$ ، $y = e^v$ و $z = e^w$ و رابطه $z^2 = x^2 + y^2$ به صورت $e^{2w} - e^{2u} - e^{2v} = 0$ در می‌آید. بنابراین:

$$\frac{\partial Lnz}{\partial Lnx} + \frac{\partial Lnz}{\partial Lny} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{-2e^{2u}}{2e^{2w}} - \frac{-2e^{2v}}{2e^{2w}} = \frac{e^{2u}}{e^{2w}} + \frac{e^{2v}}{e^{2w}} = 1$$

روش دوم: $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow Lnz^2 = Ln(x^2+y^2) \Rightarrow Lnz = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$

بنابراین:

$$\frac{\partial Lnz}{\partial Lnx} + \frac{\partial Lnz}{\partial Lny} = \frac{\partial Lnz/\partial x}{\partial Lnx/\partial x} + \frac{\partial Lnz/\partial y}{\partial Lny/\partial y} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{1}{y}} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

۲۷ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$z = x^5 f(\frac{y}{x^2}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 f(\frac{y}{x^2}) - 2yx^2 f'(\frac{y}{x^5}),\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 f'(\frac{y}{x^2})$$

بنابراین:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 5z = 5x^5 f(\frac{y}{x^2}) - 2yx^3 f'(\frac{y}{x^5}) + 2yx^3 f'(\frac{y}{x^2}) - 5z = 0$$

۲۸ـ گزینه «۲» ابتدا قرار می‌دهیم $f = 3k + 4L - 108 = 0$ ، بنابراین به روش ضرایب لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \nabla q = \lambda \nabla f \\ 3k + 4L = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0/4k^{-0/6}L^{0/5} = 3\lambda \\ 0/5k^{0/4}L^{-0/5} = 4\lambda \\ 3k + 4L = 108 \end{cases}$$

با تقسیم معادلهٔ اول بر معادله دوم در دستگاه فوق، به دست می‌آید $\frac{L}{k} = \frac{15}{16}$. با استفاده از این رابطه و معادله سوم $k = 16$ و $L = 15$ به دست می‌آید.

۲۹ـ گزینه «۱» اگر روی خط $y = mx$ به مبدأ نزدیک شویم، آنگاه: $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lim}} f(x,y) = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

چون حاصل حد به m بستگی دارد، پس f در $(0,0)$ حد ندارد و در نتیجه نمی‌تواند پیوسته باشد.

۳۰ـ گزینه «۲» $f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy \Rightarrow \nabla f = (z^2 - y\cos xy, -x\cos xy, 2xz) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},-1)} = (1,0,-2)$

اگر قرار دهیم $u = i - 2j + 2k$ ، آنگاه: $\frac{u}{|u|} = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k) = (\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3})$

بنابراین مشتق سوئی f در نقطه $(1,\frac{\pi}{2},-1)$ در جهت بردار u برابر است با: $D_u f = (1,0,-2).(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}) = -1$

۳۱ـ گزینه «۳» با جایگزینی x و y برحسب r و s در تابع f خواهیم داشت: $f(r,s)=2r^2+2s^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}=4s\Big|_{s=\frac{-1}{2}}=-2$

۳۲ـ گزینه «۱» در روی مسیر $y=-1$، حد موردنظر برابر $\frac{1}{2}$ و در روی مسیر $x=1$، حد موردنظر برابر ۱ است، پس f در (۱- و ۱) حد ندارد، بنابراین نمی‌تواند پیوسته باشد.

۳۳ـ گزینه «۳»

$$\nabla W=(2x-y,-x+z,4z+y)\Big|_{(2,+1,-1)}=(3,-2,-3)=3(1,-1,-1)$$

بیشترین تغییرات در جهت بردار گرادیان می‌باشد.

۳۴ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases}T_x=2x-4=0\\ T_y=4y=0\end{cases}\Rightarrow x=2\,,\ y=0$$

بنابراین نقطه (۲,۰) تنها نقطه بحرانی می‌باشد که در شرط موردنظر نیز صدق می‌کند. از طرفی: $\Delta=T_{xx}T_{yy}-T_{xy}^2=2\times4-0=8$

چون $T_{xx}>0$ و $\Delta>0$، بنابراین (۲,۰) نقطه مینیمم یا به عبارتی دارای کمترین درجه حرارت است. $T(2,0)=4+0-8=-4$

۳۵ـ گزینه «۱» $fog(u,v)=f(g(u,v))=f(e^{u+v},e^{u-v},e^{uv})=Ln(e^{u+v}.e^{u-v}.e^{uv})=Lne^{2u+uv}=2u+uv$

۳۶ـ گزینه «۴» در امتداد مسیر $x=0$، حد را به دست می‌آوریم: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}=\pm\infty$

چون در امتداد مسیر $x=0$، حد وجود ندارد، پس تابع f در (۰,۰) حد ندارد.

۳۷ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\times1+f_v\times(-1)=f_u-f_v$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=f_u\times(-1)+f_v\times1=f_v-f_u$$

بنابراین: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=0$

۳۸ـ گزینه «۲» چون تابع z همگن از درجه ۰ می‌باشد، طبق قضیه اویلر گزینه (۲) صحیح است.

۳۹ـ گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x+3y+z=12\\ 8x=2\lambda\\ 2y=3\lambda\\ 2z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{24}{11}\Rightarrow x=\frac{6}{11}\ ,\ y=\frac{36}{11}\ ,\ z=\frac{12}{11}$$

۴۰ـ گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=Ln(x^2+y^2)-z\Rightarrow\nabla f=(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2},-1)\Big|_{(1,-1,Ln2)}=(1,-1,-1)$$

بردار فوق و هر مضربی از آن جهت صحیح را نشان می‌دهد.

۴۱ـ گزینه «۲» جهت موردنظر، جهت بردار گرادیان می‌باشد. $\nabla f=(2xe^y,x^2e^y)\Big|_{(-2,0)}=(-4,4)\Rightarrow\vec u=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$

۴۲ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases}F_x=y+\frac{1}{x}=0\\ F_y=x+\frac{1}{y}=0\end{cases}\Rightarrow$$

نقطه $(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})$ در معادلات روبرو صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه بحرانی نمی‌باشد.

۴۳ـ گزینه «۱»

$$f(x,y)=x\cos2y+ye^{2x}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\cos2y+2ye^{2x}\Rightarrow\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}=-2\sin2y+2e^{2x}$$

۴۴ـ گزینه «۴»

$$u=Ln(x+y+z)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}$$

به طور مشابه $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial z}$ نیز برابر $\frac{1}{x+y+z}$ خواهد بود. بنابراین:

$$Ln\frac{\partial u}{\partial x}+Ln\frac{\partial u}{\partial y}+Ln\frac{\partial u}{\partial z}=3Ln\frac{1}{x+y+z}=-3Ln(x+y+z)=-3u$$

۴۵ـ گزینه «۱» شرط داده شده را می‌توان به صورت پارامتری روبرو نوشت: $x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ 0<t<\frac{\pi}{2}$

بنابراین تابع به صورت $z=\cos t+\sin t$ در می‌آید، که در نقطه $t=\frac{\pi}{4}$ دارای ماکسیمم $\sqrt2$ خواهد بود.

۴۶ـ گزینه «۲» تابع u، تابع همگن از مرتبه ۳ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر داریم: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u$

۴۷ـ گزینه «۴» به ازای $r=2$ و $s=1$، مقادیر $x=7$ و $y=-1$ به دست می‌آید. $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}=2x.2+(-4y)\times(-2)=20$

۴۸ـ گزینه «۳»

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow\nabla f=(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2})\Big|_{(1,1)}=(1,-1)$$

جهت بردار یکه موردنظر را می‌توان به صورت $\vec u=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ در نظر گرفت، بنابراین:

$$D_uf=\nabla f.\vec u=\cos\alpha-\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

۴۹ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases}z_x=y^2-2x+y=0\\ z_y=2xy-3y^2+x=0\end{cases}$$

واضح است که نقطه (۰,۰) یکی از جوابهای دستگاه فوق می‌باشد، بنابراین (۰,۰) یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=-2\times(2x-6y)-(2y+1)^2$$

در نقطه (۰,۰)، مقدار $\Delta<0$، بنابراین (۰,۰) یک نقطه زینی می‌باشد.

۵۰ـ گزینه «۱» مقدار حد را روی مسیر $y = mx$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^x}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2e^x}{x^2-m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{me^x}{1-m^2} = \frac{m}{1-m^2}$$

چون حد به دست آمده به m وابسته است، پس حد وجود ندارد.

۵۱ـ گزینه «۱»

$$\nabla w = (yz, xz, xy)\Big|_{(1,1,1)} = (1,1,1) \Rightarrow |\nabla w| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

۵۲ـ گزینه «۲» می‌خواهیم عبارت $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت قید $g(x,y,z) = x^2 - z^2 = 2$ مینیمم کنیم.

$$x^2 - z^2 = 2 \Rightarrow x^2 = z^2 + 2 \Rightarrow f = \sqrt{y^2 + 2z^2 + 2}$$

واضح است که حداقل f به ازای $y = z = 0$ حاصل می‌شود و بنابراین $\min(f) = \sqrt{2}$.

۵۳ـ گزینه «۱»

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 \Rightarrow \nabla f = (2x - 2y^2, -4xy) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(1,-2)} = (-6,8)$$

$$D_u f = \nabla f.u = (-6,8).(-1,0) = 6$$

۵۴ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z) = x^2ye^z \Rightarrow \nabla f = (2xye^z, x^2e^z, x^2ye^z)$$

۵۵ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3 \Rightarrow \nabla f = (2x, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9}) \Rightarrow N = \nabla f\Big|_{(1,2,3)} = (2,1,\frac{2}{3})$$

۵۶ـ گزینه «۲» چون کمانهای مقابل Arctg و Arcsin به سمت صفر میل می‌کنند، می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\operatorname{Arctg}(3xy-3y)}{\operatorname{Arcsin}(2xy-6x)} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3xy-3y}{2xy-6x}$$

حال توجه کنید که روی مسیر $y = 3$، حد برابر ∞ و روی مسیر $x = 1$ حد برابر 0 می‌شود، بنابراین حد وجود ندارد.

۵۷ـ گزینه «۲»

$$f(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

به طور مشابه $f_y(0,0) = 0$ می‌باشد.

۵۸ـ گزینه «۴»

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \Rightarrow \nabla f = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9})\Big|_{(0,0,3)} = (0,0,\frac{2}{3})$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$\frac{2}{3}(z-3) = 0 \Rightarrow z = 3$$

۵۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin(\frac{y}{x}) = 16\sin\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}$$

۶۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x^2 - y^2| = 0 = f(0,0) \Rightarrow$$ پیوسته است $(0,0)$ در f

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2|}{x} = 0$$

به طور مشابه $f_y(0,0) = 0$.

۶۱ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که به ازای $t = 0$. مقادیر $x = 0$ و $y = 1$ به دست می‌آیند.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = (2x\times\cos t + 2y\times e^t)\Big|_{t=0} = 2$$

۶۲ـ گزینه «۱»

$$\nabla f = (2x,2y,2z)\Big|_{(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})} = (\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$1(x-\frac{\sqrt{3}}{3}) + 1(y-\frac{\sqrt{3}}{3}) + 1(z-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0 \Rightarrow x+y+z = \sqrt{3}$$

۶۳ـ گزینه «۱» تابع f همگن از درجه ۲ است و بنابراین طبق قضیه اویلر، $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ می‌باشد.

۶۴ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \quad (1,1),(0,0)$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 9$$

در نقطه (۱ و ۱)، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین نقطه (۱ و ۱) مینیمم موضعی است.

۶۵ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv - uvw \\ z = uvw \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uw \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2v$$

۶۶ـ گزینه «۳» ابتدا حد را روی مسیر $x = y = z$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x}{x} = 2$$

از طرفی حد تابع داده شده روی صفحه $x + y = 0$، به صورت روبرو است:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{z\to 0}\frac{0}{z} = 0$$

بنابراین به ازای مسیرهای مختلف، مقادیر متفاوتی برای حد به دست می‌آید، بنابراین f در مبدأ حد ندارد.

۶۷ـ گزینه «۱» ابتدا رابطه $xyz = c$ را به صورت $g(x,y,z) = xyz - c = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ xz & xy \end{vmatrix}} = -\frac{xyf_x - yzf_z}{xyf_y - xzf_z}$$

۶۸ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z) = 3x^2 + \operatorname{Arctg}(2z) - e^y - 1 = 0 \Rightarrow \nabla f = (6x, -e^y, \frac{2}{1+4z^2})\Big|_{(1,\operatorname{Ln}2,0)} = (6,-2,2)$$

بنابراین معادله خط قائم عبارتست از:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-\operatorname{Ln}2}{-2} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3z = x-1 \\ z+y = \operatorname{Ln}2 \end{cases}$$

۶۹ـ گزینه «۲ و ۳ و ۴» جهت ∇f، راستای بیشترین افزایش تابع می‌باشد، بنابراین:

$$f(x,y)=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\Rightarrow \nabla f=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Big|_{(1,1)}=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

با توجه به اینکه سه بردار $(-1,1)$، $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ هر سه با بردار ∇f هم‌راستا هستند، بنابراین هر سه صحیح می‌باشند و فقط گزینه (۱) درست نیست!

۷۰ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2\Rightarrow \nabla f=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},-2z\right)\Big|_{(2,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})}=\left(1,\frac{1}{3},-\sqrt{5}\right)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$(x-2)+\frac{1}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)-\sqrt{5}\left(z-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0\Rightarrow x+\frac{1}{3}y-\sqrt{5}z=0$$

۷۱ـ گزینه «۳» بر روی مسیر $x=0$، مقدار حد برابر صفر می‌شود و در روی مسیر $y=x^2$ داریم:

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^4+x^4}=1$$

چون بر روی دو مسیر مختلف، دو مقدار مختلف برابر حد به دست آمد، بنابراین حد وجود ندارد.

۷۲ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases}z_x=2x-3y-5=0\\ z_y=-3x+4y+7=0\end{cases}\Rightarrow x=1\ ,\ y=-1$$

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=2\times 4-(-3)^2=-1$$

نقطه (۱- و ۱) تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد، چون همواره $\Delta<0$، بنابراین نقطه بحرانی، یک نقطه زینی است.

۷۳ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0\Rightarrow \nabla f=(2x,2y,-1)\Big|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1)$$

$$\Rightarrow 2(x-1)-4(y+2)-1(z-5)=0\Rightarrow 2x-4y-z=5$$

۷۴ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases}f_x=2x-4y=0\\ f_y=-4x+3y^2+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y\\ 3y^2-4x+4=0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط بحرانی $A(4,2)$ و $B(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ به دست می‌آیند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\times 6y-(-4)^2=12y-16$$

چون در نقطه A، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ بنابراین A نقطه مینیمم می‌باشد.

۷۵ـ گزینه «۱»

$$f_1(x,y,z)=x^2+y^2-z-8=0\Rightarrow \nabla f_1=(2x,2y,-1)\Big|_{(2,-2,0)}=(4,-4,-1)$$

$$f_1(x,y,z)=x-y^2+z^2+2=0\Rightarrow \nabla f_2=(1,-2y,2z)\Big|_{(2,-2,0)}=(1,+4,0)$$

بردار هادی خط مماس برابر $\nabla f_1\times\nabla f_2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\nabla f_1\times\nabla f_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\4&-4&-1\\1&4&0\end{vmatrix}=(4,-1,20)$$

پس معادله خط مماس به صورت روبرو می‌باشد:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{20}$$

۷۶ـ گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=4x^2+y^2+2z^2-26=0\Rightarrow \nabla f=(8x,2y,4z)\Big|_{(1,-2,3)}=(8,-4,12)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو می‌باشد:

$$8(x-1)-4(y+2)+12(z-3)=0\Rightarrow 2x-y+3z=13$$

۷۷ـ گزینه «۱»

$$w=xy+z=\sin t\cos t+t=\frac{1}{2}\sin 2t+t\Rightarrow\frac{dw}{dt}=\cos 2t+1$$

۷۸ـ گزینه «۴» می‌توان از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده کرد ولی جایگزینی و محاسبه مستقیم ساده‌تر است:

$$u=(4s-3t)^2+s^2t^4\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=-6(4s-3t)+4s^2t^3\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=18+12s^2t^2\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{s=t=0}=18$$

۷۹ـ گزینه «۱» ابتدا معادله سطح را به صورت $f(x,y,z)=ye^x-z=0$ می‌نویسیم، در این صورت:

$$\nabla f=(ye^x,e^x,-1)\Rightarrow\nabla f\Big|_{(1,2,2e)}=(2e,e,-1)$$

بنابراین معادله خط قائم بر سطح در نقطه $(1,2,2e)$ به صورت روبرو است:

$$\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=\frac{z-2e}{-1}$$

۸۰ـ گزینه «۴» ابتدا قرار می‌دهیم $v=x-y$ و $w=y-x$، در این صورت:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

۸۱ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4x^2+6xy-8\Big|_{(1,1)}=-6$$

۸۲ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial u}{\partial x}=bxf'\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-ay^2f'\Rightarrow ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

۸۳ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2-4z^2-4=0\Rightarrow\nabla f=(2x,8y,-8z)\Big|_{(2,1,1)}=(4,8,-8)=4(1,2,-2)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو خواهد بود:

$$1(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0\Rightarrow x+2y-2z=2$$

۸۴ـ گزینه «۴» زاویه بین دو رویه برابر زاویه بین بردارهای عمود به دو رویه (بردارهای گرادیان) می‌باشد.

$$f_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0\Rightarrow\nabla f_1=(2x,2y,0)\Big|_{(1,1,1)}=(2,2,0)$$

$$f_2(x,y,z)=x^2+y^2-2z=0\Rightarrow\nabla f_2=(2x,2y,-2)\Big|_{(1,1,1)}=(2,2,-2)$$

$$\cos\theta=\frac{\nabla f_1.\nabla f_2}{|\nabla f_1||\nabla f_2|}=\frac{4+4+0}{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

۸۵ـ گزینه «۲»

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,1)\Rightarrow\vec{u}=\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}=\frac{1}{3}(2,2,1)$$

$$\nabla f=(2xy,x^2,3z^2)\Rightarrow\nabla f\Big|_{(3,-2,1)}=(-12,9,3)$$

$$D_uf=\nabla f.u=(-12,9,3).\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=-8+6+1=-1$$

۸۶ـ گزینه «۲» به ازای $x=1$، $y=\frac{\pi}{2}$، مقادیر $u=\frac{\pi^2}{4}$ و $v=1$ به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial x}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\times y^2+2e^{2v}\times 3x^2\sin y=3\times(\frac{\pi^2}{2})^2\times(\frac{\pi}{2})^2+2e^2\times 3\times 1=3(\frac{\pi^6}{64}+2e^2)$$

۸۷ـ گزینه «۳»

۸۸ـ گزینه «۴»

$$\nabla h=(4x-2y,-2x+3y^2)\Big|_{(1,2)}=(0,10)=10(0,1)$$

برای حداکثر افزایش ارتفاع، باید در جهت بردار گرادیان حرکت نمود. و چون بردار گرادیان با توجه به مفروضات مسأله در امتداد شمال است، پس باید کوهنورد به سمت شمال حرکت کند.

۸۹ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases}f_x=3x^2-3=0\\ f_y=2y-2=0\end{cases}\Rightarrow$$ نقاط $A(1,1)$ و $B(-1,1)$ نقاط بحرانی هستند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6x\times 2-0=12x$$

در نقطه A، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$، بنابراین A یک نقطه مینیمم نسبی است و در نقطه B، $\Delta<0$ پس B یک نقطه زینی است.

۹۰ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=2x\times(-3)+2y\times 2st=-24s+18t+4s^2t^3\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=18+12s^2t^2\Big|_{(0,0)}=18$$

۹۱ـ گزینه «۱»

$$z=ye^x\Rightarrow f(x,y,z)=ye^x-z=0\Rightarrow\nabla f=(ye^x,e^x,-1)\Big|_{(1,2,2e)}=(2e,e,-1)$$

بنابراین معادله خط قائم به صورت روبرو می‌باشد: $\frac{x-1}{2e}=\frac{y-2}{e}=\frac{z-2e}{-1}$

۹۲ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases}f_x=2x-4y=0\\ f_y=-4x+3y^2+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y\\ -4x+3y^2+4=0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط $A(4,2)$ و $B(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ به دست می‌آیند. $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\times 6y-(-4)^2=12y-16$

در نقطه $A(4,2)$، $f_{xx}>0$ و $\Delta>0$ بنابراین A نقطه مینیمم رویه می‌باشد. $f(4,2)=4^2-4\times 4\times 2+2^3+4\times 2=0$

۹۳ـ گزینه «۴»

$$f(x,y)=x^3y^2\Rightarrow\nabla f=(3x^2y^2,2x^3y)\Rightarrow\nabla f\Big|_{(-1,2)}=(12,-4)$$

۹۴ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که به ازای $t=0$ و $s=1$، $x=2$، $y=1$ و $z=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=6x\times 5+2y\times(-2t)+(-2z)\times s=60$$

۹۵ـ گزینه «۳» ابتدا بردار داده شده را به صورت یکه در می‌آوریم. $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

از طرفی: $\nabla f=(2y^3+2xy^2)\vec{i}+(4y^3+6xy^2+2x^2y)\vec{j}\Rightarrow\nabla f\Big|_{(0,1)}=2i+4j$

بنابراین: $D_uf=(2,4).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=3\sqrt{2}$

۹۶ـ گزینه «۲» چون مجموع x^2 و y^2 ثابت است، حاصل‌ضرب x^2y^2 وقتی ماکسیمم می‌شود که $x^2=y^2$ و در نتیجه $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ باشد. بنابراین: $\max(f)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

۹۷ـ گزینه «۱» در واقع می‌خواهیم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را تحت شرط $3x+2y+6z=18$ ماکسیمم کنیم. بدین منظور لازم است $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ باشد. بنابراین $x=2$، $y=3$ و $z=1$ خواهد بود و در نتیجه: $\max(f)=3\times 2\times 1=6$

۹۸ـ گزینه «۲» طبق قضیه اویلر گزینه (۲) صحیح است.

۹۹ـ گزینه «۳»

۱۰۰ـ گزینه «۱»

$$\nabla f=(2x,2y,-2z)\Big|_{(1,1,2)}=(2,2,-4)$$

$$V=(2,1,2)\Rightarrow\vec{u}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

$$D_uf=\vec{\nabla f}.\vec{u}=\frac{-2}{3}$$

۱۰۱ـ گزینه «۱» مقادیر ماکزیمم و مینیمم در نقاط بحرانی یا روی مرز به دست می‌آیند.

$$\begin{cases}f_x=6x=0\Rightarrow x=0\\ f_y=4y-4=0\Rightarrow y=1\end{cases}$$

بنابراین $A(0,1)$ تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد. $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6\times 4-0=24$

چون $f_{xx}>0$ و $\Delta>0$، بنابراین A نقطه مینیمم تابع می‌باشد و $f(0,1)=-1$. در روی مرز ناحیه یعنی $x^2+y^2=16$، تابع f به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x,y)=3(16-y^2)+2y^2-4y+1=-y^2-4y+49\Rightarrow f'=-2y-4=0$$

$$\Rightarrow y=-2\ ,\ x=\pm 2\sqrt{3}\Rightarrow Max(f)=f(\pm 2\sqrt{3},-2)=53$$

۱۰۲ـ گزینه «۴» در نقاط مورد نظر گرادیان تابع با بردار نرمال صفحه موازی می‌باشد.

$$\nabla f=(6x^2,1,-2z)\ ,\ N=(24,1,-6)\Rightarrow\frac{6x^2}{24}=\frac{1}{1}=\frac{-2z}{-6}\Rightarrow x=\pm 2,z=3$$

با جایگزینی در معادله رویه y نقاط مربوطه نیز به دست می‌آید.

$$x=2\ ,\ z=3\Rightarrow 16+y-9=5\Rightarrow y=-2\Rightarrow A(2,-2,3)$$
$$x=-2\ ,\ z=3\Rightarrow -16+y-9=5\Rightarrow y=30\Rightarrow B(-2,30,3)$$

۱۰۳ـ گزینه «۱»

$$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\frac{x}{r}f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2})f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)=(\frac{r^2-x^2}{r^3})f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$$

به طور مشابه می‌توان $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ را به دست آورد. در این صورت:

$$\nabla^2 u=(\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3})f'(r)+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}f''(r)=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)$$

۱۰۴ـ گزینه «۲» ابتدا معادله تابع را به صورت $f(x,y)=\operatorname{Ln}x^2y^2$ می‌نویسیم. تحت شرط $xy=1$، معادله تابع به صورت $f(x)=\operatorname{Ln}x$ در می‌آید. پس می‌خواهیم ماکسیمم تابع $f(x)=\operatorname{Ln}x$ را در بازهٔ $1\le x\le e^2$ به دست آوریم. چون تابع $\operatorname{Ln}x$، تابعی صعودی است، پس ماکسیمم خود را در انتهای بازه یعنی e^2 اختیار می‌کند.

$$f(x)=\operatorname{Ln}x \Rightarrow f(e^2)=\operatorname{Ln}e^2=2\operatorname{Ln}e=2$$

۱۰۵ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x=4y-2xy-y^2=0\\ f_y=4x-x^2-2xy=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(4-2x-y)=0\\ x(4-x-2y)=0\end{cases}$$

که از معادله فوق نقاط بحرانی $A(0,0)$، $B(0,4)$، $C(4,0)$ و $D(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ به دست می‌آیند. حال به بررسی نوع نقاط بحرانی می‌پردازیم.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-2x\times-2y-(4-2x-2y)^2=4xy-(4-2x-2y)^2$$

در نقاط A، B، C مقدار $\Delta<0$، بنابراین نقاط A ، B، C زینی هستند ولی در نقطه $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$، مقدار $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$، بنابراین D یک نقطه ماکسیمم می‌باشد.

۱۰۶ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases} f_x=\frac{1}{x^2}-4=0\\ f_y=\frac{-1}{y^2}+1=0\end{cases} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\ ,\ y=\pm 1$$

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\frac{-2}{x^3}\times\frac{2}{y^3}-0=\frac{-4}{x^3y^3}$$

بنابراین نقاط $A(\frac{1}{2},1)$، $B(\frac{-1}{2},-1)$، $C(\frac{1}{2},-1)$ و $D(\frac{-1}{2},1)$ نقاط بحرانی هستند.

در نقاط B و A، مقدار $\Delta<0$، بنابراین نقاط A و B زینی هستند و در نقطه C، مقدار $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$، بنابراین C یک ماکسیمم و در D، مقدار $\Delta<0$ و $f_{xx}>0$، بنابراین D مینیمم است.

۱۰۷ـ گزینه «۳» $f(x,y,z)=4x^2+y^2-16z=0 \Rightarrow \nabla f=(8x,2y,-16)\Big|_{(2,4,2)}=(16,8,-16)$

بنابراین معادله صفحه موردنظر عبارت است از: $16(x-2)+8(y-4)-16(z-2)=0 \Rightarrow 2x+y-2z=4$

۱۰۸ـ گزینه «۱» در روی صفحه $y=2$، رویه داده شده به صورت $z=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ در می‌آید، بنابراین:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-x}{2\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx}\Big|_{(2,2,\sqrt{3})}=\frac{-2}{2\sqrt{16-4}}=\frac{-1}{\sqrt{12}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

۱۰۹ـ گزینه «۴»

$$u=(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

$$f(x,y)=3x^2-y^2+4x \Rightarrow \nabla f=(6x+4,-2y)$$

$$D_uf=\nabla f.u=(6x+4,-2y).(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=3x\sqrt{3}-y+2\sqrt{3}$$

۱۱۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فرض می‌کنیم $u=x+y$ و $v=x-y$. در این صورت:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

۱۱۱ـ هیچکدام از گزینه‌های صحیح نیست. گرادیان جهت بیشترین افزایش را نشان می‌دهد.

$$T(x,y)=\frac{100}{x^2+y^2+1} \Rightarrow \nabla T=(\frac{-200x}{(x^2+y^2+1)^2},\frac{-200y}{(x^2+y^2+1)^2})$$

در نقطه $A(2,3)$ بردار گرادیان به صورت $(\frac{-100}{49},\frac{-150}{49})$ در می‌آید که جهت حداکثر افزایش دما می‌باشد. همچنین توجه کنید که جهتی که در آن دما تغییر نکند (حداقل تغییر دما وجود داشته باشد) باید بر جهت گرادیان عمود باشد. که هیچکدام از گزینه‌ها واجد این خاصیت نیستند.

۱۱۲ـ گزینه «۴»

۱۱۳ـ گزینه «۴» طبق تعریف مشتق جزئی داریم:

$$z_x(1,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}\cong\frac{f(1/5,0)-f(1,0)}{0/5}=\frac{2-1}{0/5}=2$$

$$z_y(0,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h}\cong\frac{f(0,1/2)-f(0,1)}{0/2}=\frac{3-1}{0/2}=10$$

با توجه به شکل داده شده خط مماس در نقطه $(0,1)$ موازی محور x ها خواهد بود، یعنی $z_x(0,1)=0$ است.

۱۱۴ـ گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم $z=1-x-y$ را تحت قید $x^2+y^2=2$ به دست آوریم. بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\\ \nabla f=\lambda\nabla y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2\\ (-1,-1)=\lambda(2x,2y)\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط (۱ و ۱) و (۱- و ۱-) به عنوان نقاط بحرانی حاصل می‌شوند. $f(1,1)=-1\ ,\ f(-1,-1)=3$

۱۱۵ـ گزینه «۳» $\nabla f=(e^x\operatorname{tg}y+4xy\ ,\ e^x(1+\operatorname{tg}^2y)+2x^2)\Big|_{(0,\frac{\pi}{4})}=(1,2)$

$$D_uf=\nabla f.u=(1,2).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

۱۱۶ـ گزینه «۳» واضح است که همواره $f\le 0$ و چون $f(0,0)=0$، پس این نقطه ماکسیمم است.

۱۱۷ـ گزینه «۱» می‌توان از مشتق‌گیری زنجیری استفاده کرد ولی اگر به جای x و y برحسب u و v جایگزین کنیم سریعتر و ساده‌تر به جواب می‌رسیم.

$$z=\cos(x^2+y^2)=\cos(u^2\cos^2v+u^2\sin^2v)=\operatorname{eos}u^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-2u\sin u^2\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}=0$$

۱۱۸ـ گزینه «۴»

روش اول: $u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

به طور مشابه $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

روش دوم: تابع u همگن از درجه صفر می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۹ـ گزینه «۴» $f(x,y,z)=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}-z=0\Rightarrow \nabla f=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}},\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}},-1\right)\Big|_{(3,3,4)}=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},-1\right)$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $\dfrac{1}{4}(x-3)+\dfrac{1}{4}(y-3)-(z-4)=0\Rightarrow x+y-4z=-10$

بنابراین نقاط تلاقی با محورها به ترتیب عبارتند از: $A(-10,0,0)$، $B(0,-10,0)$، $C(0,0,2/5)$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۰ـ گزینه «۱» $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=y^2e^{xy^2}\Rightarrow \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۱ـ گزینه «۴» می‌دانیم وقتی $x+y+z$ برابر مقدار ثابتی باشد، عبارت $x^ay^bz^c$ وقتی ماکسیمم است که $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{2}\Rightarrow xy^2z^3=\frac{1}{432}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۲ـ گزینه «۳» تابع ϕ، همگن از درجه n می‌باشد. بنابراین طبق قضیه اویلر داریم: $x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+y\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=n\phi$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۳ـ گزینه «۳»

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۴ـ گزینه «۱» $\nabla f=(-e^{2x-y}-2xe^{2x-y},xe^{2x-y},2z)\Big|_{(1,2,-1)}=(-4,1,-2)$

$$\text{اندازه تصویر}=\frac{|\nabla f.A|}{|A|}=\frac{4+1}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۵ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\rho}\times\frac{\partial\rho}{\partial x}=-3\frac{\partial f}{\partial r}+3\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\rho}\times\frac{\partial\rho}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial r}+2\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

با جایگزین روابط فوق در معادله داده شده، نتیجه می‌شود $\dfrac{\partial f}{\partial r}=0$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۶ـ گزینه «۱» $f(x,y,z)=4x^2+y^2+2z^2-26=0\Rightarrow \nabla f=(8x,2y,4z)\Big|_{(1,-2,3)}=(8,-4,12)$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $8(x-1)-4(y+2)+12(z-3)=0\Rightarrow 2x-y+3z=13$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۷ـ گزینه «۳» تابع u، یک تابع همگن مرتبه ۳ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر گزینه (۳) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۸ـ گزینه «۱» به ازای $x=y=1$ و $z=2$، مقادیر $u=\sqrt{6}$ و $v=2$ به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{v}\times\frac{4}{2\sqrt{x^2-3y+4z}}+\left(\frac{-u}{v^2}\right)xy=\frac{-\sqrt{6}}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۹ـ گزینه «۴» $f(x,y,z)=xy^3z^2-4=0\Rightarrow \nabla f=(y^3z^2,3xy^2z^2,2xy^3z)\Big|_{(-1,-1,2)}=(-4,-12,4)$

$$\Rightarrow \vec{u}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(-4,-12,4)}{\sqrt{16+144+16}}=\frac{1}{\sqrt{176}}(-4,-12,4)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۰ـ گزینه «۱» واضح است که کمترین مقدار f در نقطه $(0,0)$ رخ می‌دهد که درون قرص بسته نیز می‌باشد و $f(0,0)=0$. برای تعیین بزرگترین مقدار f از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را تحت قید $g(x,y)=(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ ماکسیمم کنیم.

$$\begin{cases}(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\\ \nabla f=\lambda\nabla g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\\ 2x=2\lambda(x-\sqrt{2})\\ 2y=2\lambda(y-\sqrt{2})\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda-1}$$

با جایگزینی x و y در شرط g نتیجه می‌شود، $\lambda=\dfrac{5}{2}$ و بنابراین $x=y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. $f\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{25}{2}+\dfrac{25}{2}=25$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۱ـ گزینه «۲» بردار قائم بر بیضی گون همان بردار گرادیان می‌باشد. $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2-1=0\Rightarrow \nabla f=\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2},2z\right)$

برای اینکه بردار ∇f با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد، لازم است $2z=\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}$ باشد.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\\ x=y=4z\end{cases}\Rightarrow 9z^2=1\Rightarrow z=\pm\frac{1}{3}\Rightarrow A\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right),\ B\left(\frac{-4}{3},\frac{-4}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۲ـ گزینه «۱» $f(x,y,z)=x^2y^2z\Rightarrow \nabla f=(2xy^2z,2x^2yz,x^2y^2)\Big|_{(1,1,3)}=(6,6,1)\Rightarrow \vec{u}=\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}=\dfrac{1}{\sqrt{73}}(6,6,1)$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۳ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases}f_x=4x+2y+4=0\\ f_y=2x+10y=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-10}{9},\ y=\frac{2}{9}$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی مبین را تشکیل می‌دهیم: $f_{xx}=4,\ f_{yy}=10,\ f_{xy}=2\Rightarrow \Delta=4\times10-2^2=36>0$

چون $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ پس نقطه بحرانی $\left(\dfrac{-10}{9},\dfrac{2}{9}\right)$ نقطه مینیمم است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۴ـ گزینه «۳» با ضرب کردن شرط دوم در یک علامت منفی، آنرا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}x+y\le4\\ x-y\le2\end{cases}\Rightarrow 2x\le6\Rightarrow x\le3$$

پس ماکسیمم مقدار برای x، که در هر دو شرط صدق کند برابر ۳ است و با توجه به شرط $x+y\le4$، می‌توان نتیجه گرفت ماکسیمم مقدار برای y برابر ۱ است. پس ماکسیمم $2x+y$ برابر ۷ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۵ـ گزینه «۴» حد داده شده را روی مسیر $y = mx$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2e^{mx^2}}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{me^{mx^2}}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون حد حاصل به m وابسته است، پس حد وجود ندارد.

۱۳۶ـ گزینه «۱» تابع داده شده، یک تابع همگن از درجه ۲ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\text{Arctg}\frac{y}{x}\Big|_{(\sqrt{3},1)}=2(\sqrt{3})^2\text{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\pi$$

۱۳۷ـ گزینه «۱»

$$W=x^2y-yz+2z \Rightarrow \nabla W=(2xy, x^2-z, -y+2) \Rightarrow \nabla W\Big|_{(1,-2,0)}=(-4,1,4)$$

$$D_uW=\nabla W.\frac{u}{|u|}=(-4,1,4).\frac{(2,-1,2)}{3}=\frac{-8-1+8}{3}=\frac{-1}{3}$$

۱۳۸ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x=e^{-(x+y^2)}-xe^{-(x+y^2)}=e^{-(x+y^2)}(1-x)=0 \Rightarrow x=1 \\ f_y=-2xye^{(x+y^2)}+e^{-y^2-1}-2y^2e^{-y^2-1}=0 \end{cases}$$

با جایگزینی $x=1$ در معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$-2ye^{-(1+y^2)}+e^{-(1+y^2)}-2y^2e^{-(1+y^2)}=0 \Rightarrow -2y+1-2y^2=0 \Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۹ـ گزینه «۲»

$$\nabla f=\left(\frac{-2xe^z}{(x^2+y)^2},\frac{-e^z}{(x^2+y)^2},\frac{e^z}{x^2+y}\right)\Big|_{(1,1,\text{Ln}2)}=(-1,\frac{-1}{2},1) \Rightarrow D_uf=(-1,\frac{-1}{2},1).(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}},0)=\frac{1}{2\sqrt{10}}$$

۱۴۰ـ گزینه «۳» با جایگزینی z از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$f(x,y)=x-y+(2x+y^2+1)^2$$

$$\begin{cases} f_x=1+4(2x+y^2+1)=0 \\ f_y=-1+4y(2x+y^2+1)=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-9}{8}\ ,\ y=-1$$

بنابراین نقطه $A(\frac{-9}{8},-1)$ یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8\times(8x+12y^2+4)-64y^2$$

چون در نقطه A، مقدار $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$، بنابراین A نقطه مینیمم f می‌باشد و مقدار f در آن برابر $\frac{-1}{16}$ می‌باشد.

۱۴۱ـ گزینه «۴» نقطه داده شده به ازای $t=\pi$ به دست آمده است، ابتدا معادله خط مماس بر c را در $t=\pi$ به دست می‌آوریم.

$$R(t)=(\cos t,\sin t,t) \Rightarrow u(t)=(-\sin t,\cos t,1)\Big|_{t=\pi}=(0,-1,1)$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=-1 \\ \frac{y}{-1}=z-\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y+z=\pi \end{cases}$$

حال فاصله مبدأ را از خط مذکور به دست می‌آوریم. نقطه $P(-1,0,\pi)$ روی خط قرار دارد.

$$OP=(-1,0,\pi) \Rightarrow OP\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & \pi \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(\pi,1,1) \Rightarrow d=\frac{|OP\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{\pi^2+1^2+1^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{2}+1}$$

۱۴۲ـ گزینه «۲»

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)$$

$$f(x,y,z)=1+x^2e^{yz^2} \Rightarrow \nabla f=(2xe^{yz^2},x^2z^2e^{yz^2},2x^2ze^{yz^2})\Big|_{(1,0,1)}=(2,1,2)$$

$$D_uf=(2,1,2).\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۴۳ـ گزینه «۲» چون ضابطه f در همسایگی نقطه $(0,1)$ عوض می‌شود، بنابراین حد چپ و راست را مجزا به دست می‌آوریم:

$$f_x(0,1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_x(0,1)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$f_y=(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{0-0}{y-1}=0$$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

۱۴۴ـ گزینه «۴»

$$f(x,y)=x^2e^y \Rightarrow \nabla f=(2xe^y,x^2e^y)\Big|_{(-2,0)}=(-4,4)$$

می‌دانیم ماکسیمم مقدار مشتق جهتی برای طول بردار گرادیان می‌باشد، بنابراین: $\max(D_uf)=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

۱۴۵ـ گزینه «۲» می‌خواهیم $x+y$ در ناحیه‌ای چون D را ماکسیمم کنیم. چون ناحیه مورد نظر به شکل یک چند ضلعی محدب می‌باشد. بنابراین ماکسیمم و مینیمم در نقاط گوشه‌ای این چند ضلعی حاصل خواهد شد، که از تلاقی معادلات داده شده به دست می‌آیند. با بررسی نقاط گوشه می‌توان ملاحظه کرد که ماکسیمم f برابر ۱۸/۵ می‌باشد.

۱۴۶ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-g(z-x)}{g'(z-x)-f'(y-z)}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'(y-z)}{g'(z-x)-f'(y-z)}$$

بنابراین $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

۱۴۷ـ گزینه «۳»

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=1$$

۱۴۸ـ گزینه «۴» مساحت مقطع که یک مربع به ضلع $2y$ می‌باشد برابر $4y^2$ است که با توجه به رابطه $x^2+y^2=9$، آن را می‌توان به صورت $A(x)=4y^2=4(9-x^2)$ نوشت. بنابراین:

$$V=\int A(x)dx=\int_{-3}^{3}4(9-x^2)dx=144$$

۱۴۹ـ گزینه «۳»

$$\nabla f=(2x,2y,3)\Big|_{(3,-3,2)}=(6,-6,3) \Rightarrow |\nabla f|=9$$

۱۵۰ـ گزینه «۱»

$$f_1(x,y,z)=x^2-y^2-z \Rightarrow \nabla f_1=(2x,-2y,-1)\Big|_{(2,1,3)}=(4,-2,-1)$$

$$f_2(x,y,z)=3xy-2z \Rightarrow \nabla f_2=(3y,3x,-2)\Big|_{(2,1,3)}=(3,6,-2)$$

$$u=\nabla f_1\times\nabla f_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}=(10,5,30)=5(2,1,6)$$

۱۵۱ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که به ازای $t=0$، $x=0$ و $y=0$ به دست می‌آید. از طرفی:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}=e^x\cos y\frac{dx}{dt}-e^x\sin y\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}$$

بنابراین کافی است $\frac{dx}{dt}$ را در $t=0$ به دست آوریم:

$$x^2+e^x-t^2-t=1 \Rightarrow 2x^2\frac{dx}{dt}+e^x\frac{dx}{dt}-2t-1=0$$

به ازای $t=0$ و $x=0$، از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\frac{dx}{dt}=1$.

۱۵۲ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \Rightarrow \nabla f=(2x,2y,-1)$$

۱۵۳ـ گزینه «۱» معادله خط داده شده را به صورت $x=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ می‌نویسیم. بردار نرمال صفحه موردنظر برابر بردارهای خط مزبور می‌باشد. بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$1(x-0)-1(y-0)-1(z-0)=0 \Rightarrow x-y-z=0$$

۱۵۴ـ گزینه «۳» تابع داده شده یک تابع همگن درجه ۲ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

۱۵۵ـ گزینه «۴»

$$f_x(1,-1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,-1)-f(1,-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-x}{x-1}-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x-\alpha(x-1)}{(x-1)^2}$$

به ازای تمام مقادیر α حد فوق وجود ندارد.

۱۵۶ـ گزینه «۱» به ازای $t=0$ و $s=\pi$ مقادیر $x=\pi$ و $y=\pi$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}=\cos y-x\sin y=-1$$

۱۵۷ـ گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=e^{3+2x+y^2}-z \Rightarrow \nabla f=(2e^{3+2x+y^2},2ye^{3+2x+y^2},-1)\Big|_{(-6,3,1)}=(2,6,-1)$$

$$\Rightarrow 2(x+6)+6(y-3)-(z-1)=0 \Rightarrow 2x+6y-z=5$$

۱۵۸ـ گزینه «۳»

$$f_1(x,y,z)=x+z-2=0 \Rightarrow \nabla f_1=(1,0,1)$$

$$f_2(x,y,z)=x^3-8y=0 \Rightarrow \nabla f_2=(3x^2,-8,0)\Big|_{(4,8,-2)}=(48,-8,0)$$

بردار مماس موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردارهای گرادیان دو رویه می‌باشد:

$$\nabla f_1\times\nabla f_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 48 & -8 & 0 \end{vmatrix}=8i+48j-8k=8(i+6j-k)$$

۱۵۹ـ گزینه «۴» حد را در مسیر خط $y=mx$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1}{1+m^2}$$

چون مقدار حد به m بستگی دارد، پس حد وجود ندارد.

۱۶۰ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x=3x^2+3y=0 \\ f_y=-3y^2+3x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

به ازای $x=0$، مقدار $y=0$ و به ازای $x=1$، $y=-1$ خواهد بود. بنابراین نقاط بحرانی f عبارتند از $(0,0)$ و $(1,-1)$.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6x\times(-6y)-9=-36xy-9$$

در نقطه $(1,-1)$، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ بنابراین نقطه $(1,-1)$ مینیمم نسبی است.

۱۶۱ـ گزینه «۲» ابتدا بردار $\vec{a}$ را یکه می‌کنیم:

$$\vec{u}=\frac{a}{|a|}=\frac{1}{5}(3,-4)=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$$

$$\nabla f=(y^2,2xy+3) \Rightarrow \nabla f\Big|_{(-3,1)}=(1,-3)$$

بنابراین:

$$D_{\vec{u}}f=(1,-3).(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})=3$$

۱۶۲ـ گزینه «۳»

$$A=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0}f(x,y))=\lim_{x\to0}1=1$$

$$B=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0}f(x,y))=\lim_{y\to0}1=1$$

بنابراین A و B موجود و با هم برابرند. برای محاسبه حد C، دو مسیر $x=0$ و $y=x$ را به طور مجزا مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$C=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{y\to0\\x=0}}f(x,y)=\lim_{y\to0}0=0$$

$$C=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}1=1$$

چون روی دو مسیر مختلف، دو مقدار مختلف برای حد به دست می‌آید، بنابراین حد وجود ندارد.

۱۶۳ـ گزینه «۴» در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در شرط $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$ صدق می‌کند گزینه (۴) می‌باشد.

۱۶۴ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z \Rightarrow \nabla f=(2x,2y,-1)\Big|_{(1,1,2)}=(2,2,-1)$$

$$D_uf=\nabla f.u=(2,2,-1).(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=3$$

۱۶۵ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$f_x=2ax+2by\ ,\ f_y=2bx+2cy\ ,\ f_{xx}=2a\ ,\ f_{yy}=2c\ ,\ f_{xy}=2b$$

بنابراین:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2a\times2c-4b^2=4(ac-b^2)$$

برای ماکسیمم بودن نقطه بحرانی لازم است $f_{xx}<0$ و $\Delta>0$ باشد یعنی $a<0$ و $ac-b^2>0$.

۱۶۶ـ گزینه «۱ و ۲ و ۳» طبق روش ضرایب لاگرانژ، اکسترمم تابع f تحت دو شرط G و H وقتی اتفاق می‌افتد که $\nabla f=\lambda\nabla G+\mu\nabla H$. و این رابطه یعنی ∇f در صفحه دو بردار ∇G و ∇H قرار دارد (سه بردار گرادیان هم صفحه‌اند) و در نتیجه هر سه رابطه ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

۱۶۷ـ گزینه «۴»

۱۶۸ـ گزینه «۴»

$$z=f(x^2-y^2)\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)$$

۱۶۹ـ گزینه «۳» مقادیر ماکسیمم و مینیمم f روی مرز و یا نقاط بحرانی رخ می‌دهد. مرز ناحیه داده شده را می‌توان به صورت پارامتری زیر نوشت:

$$x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t \qquad 0\le t\le 2\pi$$

بنابراین در روی مرز، f به صورت $f(t)=4\sin 2t$ در می‌آید که ماکسیمم آن برابر ۴ و مینیمم آن ۴- است. از طرفی نقطه بحرانی $f(x,y)=2xy$، نقطه $(0,0)$ می‌باشد و در این نقطه $f(0,0)=0$ بنابراین همان مقادیر ۴- و ۴ به ترتیب مینیمم و ماکسیمم f می‌باشد.

۱۷۰ـ گزینه «۲»

$$\nabla f=(y+z,x,6+x)\Rightarrow \nabla f\Big|_{(-2,5,-1)}=(4,-2,2)$$

چون اندازه بردارها در چهار گزینه برابر ۳ می‌باشد، پس نیازی به یکه کردن بردارها نمی‌باشد.

$$\nabla f.(2,2,-1)=1$$
$$\nabla f.(2,-2,1)=17$$
$$\nabla f.(-2,2,1)=-11$$
$$\nabla f.(-2,2,2)=-8$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، گزینه «۲» صحیح می‌باشد.

۱۷۱ـ گزینه «۳» به جای مشتق‌گیری زنجیری بهتر است، ابتدا متغیرها را بر حسب t در w جایگزین کنیم و سپس از w نسبت به t مشتق بگیریم.

$$w=t^n\Rightarrow \frac{dw}{dt}=nt^{n-1}$$

۱۷۲ـ گزینه «۴»

۱۷۳ـ گزینه «۴» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}9x^2+4y^2=18\\ \nabla f=\lambda\nabla g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x^2+4y^2=18\\ (3,-2)=\lambda(18x,8y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x^2+4y^2=18\\ 6\lambda x=1\\ 4\lambda y=-1\end{cases}\Rightarrow x=1\ ,\ y=\frac{-3}{2}\ ,\ \lambda=\frac{1}{6}$$

پس نقطه ماکسیمم نقطه $(1,\frac{-3}{2})$ می‌باشد و در این نقطه مقدار تابع f برابر ۷ می‌باشد.

۱۷۴ـ گزینه «۳» واضح است که در ناحیه D تابع f می‌تواند مثبت یا منفی باشد، پس با توجه به مقادیر داده شده در گزینه‌ها فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۱۷۵ـ گزینه «۱» عبارات x^2 و y^4 همواره نامنفی می‌باشند و مینیمم آنها در $x=0$ و $y=0$ رخ می‌دهد. بنابراین نقطه $(0,0)$، نقطه مینیمم تابع $f(x,y)=x^2+y^4+1$ می‌باشد.

۱۷۶ـ گزینه «۴»

$$f(x,y)=\mathrm{Ln}(\frac{1}{x}+y)\Rightarrow \nabla f=\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}+y},\frac{1}{\frac{1}{x}+y}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}+y}=\dfrac{-16}{9}\\[2mm] \dfrac{1}{x}+y=1\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x_1=\frac{3}{4}$ و $x_2=\frac{-3}{4}$ و $y_1=\frac{-1}{3}$ و $y_2=\frac{7}{3}$ به دست می‌آید.

۱۷۷ـ گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1\Rightarrow \vec{N}=\nabla f=(\frac{2x}{9},\frac{y}{8},\frac{2z}{25})=(\frac{6}{9\sqrt{3}},\frac{4}{8\sqrt{3}},\frac{10}{25\sqrt{3}})=(\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{2}{5\sqrt{3}})$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}(x-\frac{3}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2\sqrt{3}}(y-\frac{4}{\sqrt{3}})+\frac{2}{5\sqrt{3}}(z-\frac{5}{\sqrt{3}})=0\Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}y+\frac{2}{5\sqrt{3}}z=2$$

با ضرب کردن طرفین معادله اخیر در $\frac{\sqrt{3}}{2}$، معادله صفحه به صورت $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=\sqrt{3}$ در می‌آید.

۱۷۸ـ گزینه «۴» طبق قضیه اولر، باید تابعی را انتخاب کنیم که همگن از درجه ۲ باشد، تنها گزینه ۴ همگن از درجه ۲ می‌باشد (گزینه ۱ از درجه $\frac{1}{2}$ است و گزینه‌های (۲) و (۳) همگن از درجه ۰ می‌باشند.)

۱۷۹ـ گزینه «۳»

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{(\frac{x^2}{x^2+y^2})}_{\text{مقداری بین ۰ و ۱}}y^2=\text{کراندار}\times 0=0$$

۱۸۰ـ گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال یعنی xy باید نامنفی باشد، بنابراین x و y باید هم علامت باشند. عبارت مقابل $\sin^{-1}$ باید بین ۱- و ۱ باشد یعنی $-1\le x\le 1$.

۱۸۱ـ گزینه «۲» تنها گزینه (۲) در $(0,0)$ حدی برابر صفر دارد و سایر گزینه‌ها در $(0,0)$ حد ندارند و در نتیجه نمی‌توانند در $(0,0)$ پیوسته باشند.

۱۸۲ـ گزینه «۱» تابع داده شده را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر نوشت و چون حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر، تابعی مشتق‌پذیر است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$g(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\ ,\ h(y)=y\ \Rightarrow f(x,y)=g(x)h(y)$$

۱۸۳ـ گزینه «۱» و «۳»

$$f(x,y,z)=x^3+3xyz+2y^3-z^3-5\Rightarrow \nabla f=(3x^2+3yz,3xz+6y^2,3xy-3z^2)\Big|_{(1,1,1)}=(6,9,0)$$

$$\Rightarrow \vec{N}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(6,9,0)}{\sqrt{6^2+9^2+0}}=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0)$$

۱۸۴ـ گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم f در $(0,0)$ حد ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{\sin(mx^2)}{x^2+m^2x^2}\ \underset{\text{هم‌ارزی}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

چون مقدار حد به m وابسته است، پس حد وجود ندارد. حال به بررسی وجود مشتقات جزئی در $(0,0)$ می‌پردازیم.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

۱۸۵ـ گزینه «۲» رابطه‌های داده شده به ترتیب f و g فرض می‌کنیم.

$$(\frac{\partial u}{\partial y})_x=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2y-x & -u-2v\\ 2y & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u-v & -u-2v\\ v & u\end{vmatrix}}=-\frac{2yu-xu+2yu+4yv}{2u^2-uv+uv+2v^2}=\frac{xu-4yu-4yv}{2u^2+2v^2}$$

۱۸۶ـ گزینه «۳» می‌توان از روش ضرایب لاگرانژ مسأله را حل کرد. ولی جایگزینی y برحسب x در عبارت داده شده سریعتر به جواب می‌رسد.

$$f(x)=x^2+2(x^2-1)^2+2x(x^2-1)+2x+3(x^2-1)=2(x^2-1)^2+2x^3+4x^2-3$$

$$f'(x)=8x(x^2-1)+6x^2+8x=8x^3+6x^2=x^2(8x+6)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2(8x+6)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{ریشه مضاعف} \quad , \quad x=\frac{-3}{4}$$

بنابراین نقطه $(\frac{-3}{4},\frac{-7}{16})$ نقطه اکسترمم تابع می‌باشد و چون $f''(\frac{-3}{4})>0$، پس $(\frac{-3}{4},\frac{-7}{16})$ نقطه مینیمم تابع می‌باشد.

۱۸۷ـ گزینه «۲» می‌خواهیم عبارت $f(x,y,z)=2x+4y-5z$ را تحت قید $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\frac{4}{5}=0$ ماکسیمم کنیم. بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{4}{5} \\ \nabla f=\lambda\nabla g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{4}{5} \\ 2=2\lambda x \Rightarrow x=\frac{1}{\lambda} \\ 4=2\lambda y \Rightarrow y=\frac{2}{\lambda} \\ -5=2\lambda z \Rightarrow z=\frac{-5}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}+\frac{25}{4\lambda^2}=\frac{4}{5}$$

از حل معادله فوق $\lambda=\pm\frac{15}{4}$ به دست می‌آید، و در این صورت دو نقطه $(\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{-10}{5})$ و $(\frac{-4}{15},\frac{-8}{15},\frac{10}{15})$ به عنوان نقاط بحرانی به دست می‌آیند.

$$f(\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{-10}{15})=6 \ , \ f(\frac{-4}{15},\frac{-8}{15},\frac{10}{15})=-6$$

بنابراین بیشترین و کمترین مقدار f به ترتیب ۶ و ۶- می‌باشند.

۱۸۸ـ گزینه «۴»

$$x(t)=\sin t-t\cos t \Rightarrow x'(t)=t\sin t \Rightarrow x''(t)=\sin t+t\cos t$$

$$y(t)=\cos t+t\sin t \Rightarrow y'(t)=t\cos t \Rightarrow y''(t)=\cos t-t\sin t$$

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t^2}{t^3}=\frac{1}{t}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}$$

۱۸۹ـ گزینه «۴» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 96yz^2=2\lambda x \\ 96xz^2=2\lambda y \\ 192xyz=2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 48xyz^2=\lambda x^2 \\ 48xyz^2=\lambda y^2 \\ 96xyz^2=\lambda z^2 \end{cases} \Rightarrow x^2=y^2=\frac{z^2}{2}$$

که با جایگزینی رابطه اخیر در معادله $x^2+y^2+z^2=1$، نتیجه می‌شود:

$$2z^2=1 \Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \ , \ x^2=\frac{1}{4} \ , \ y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow T=96\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=12$$

۱۹۰ـ گزینه «۳» بردار گرادیان رویه داده شده با بردار نرمال صفحه داده شده باید موازی باشد. بنابراین:

$$\nabla f=(2x,8y,4z) \ , \ \vec{N}=(1,-2,2) \Rightarrow \frac{2x}{1}=\frac{8y}{-2}=\frac{4z}{2} \Rightarrow x=-2y=z$$

با جایگزینی معادلات فوق در بیضوی نقاط $(\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{2})$ و $(\frac{-1}{2},\frac{1}{4},\frac{-1}{2})$ به دست می‌آیند. که این نقاط همان نقاطی هستند که دو صفحه بر بیضوی مماس شده‌اند. بنابراین معادلات صفحات موردنظر به صورت زیر می‌باشد:

$$1(x-\frac{1}{2})-2(y+\frac{1}{4})+2(z-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow x-2y+2z=2$$

$$1(x+\frac{1}{2})-2(y-\frac{1}{4})+2(z+\frac{1}{2})=0 \Rightarrow x-2y+2z=-2$$

با توجه به اینکه دو صفحه فوق موازیند، فاصله آنها برابر است با:

$$d=\frac{|2-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{4}{3}$$

۱۹۱ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x+ay) \ , \ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(x+ay)$$

۱۹۲ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_x=2x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ z_y=-2y+4=0 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

بنابراین نقطه (۲ و ۱) تنها نقطه بحرانی سطح موردنظر است و در نتیجه نقطه $(-1,2)$ یک نقطه عادی می‌باشد.

۱۹۳ـ گزینه «۴»

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)dx+(-3x-2y)dy$$

۱۹۴ـ گزینه «۲» ابتدا فرض می‌کنیم $\nabla f(a,b)=(f_x,f_y)$، در این صورت:

$$\begin{cases} \nabla f.(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=3\sqrt{2} \\ \nabla f.(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}f_x+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y=3\sqrt{2} \\ \frac{3}{5}f_x-\frac{4}{5}f_y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x+f_y=6 \\ 3f_x-4f_y=25 \end{cases}$$

که از حل معادله فوق $f_x=7$ و $f_y=-1$ به دست می‌آید.

۱۹۵ـ گزینه «۳» می‌خواهیم فاصله یعنی $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت شرط $xyz=1$ مینیمم کنیم. یا به طور معادل می‌خواهیم $d^2=x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $x^2y^2z^2=1$ مینیمم کنیم. از طرفی می‌دانیم هرگاه حاصل‌ضرب چند متغیر ثابت باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که تمام متغیرها با هم برابر باشند یعنی $x^2=y^2=z^2$. در نتیجه:

$$x^2.x^2.x^2=1 \Rightarrow x=\pm1 \ , \ y=\pm1 \ , \ z=\pm1 \Rightarrow \min(d)=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

۱۹۶ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $\nabla f=(f_1,f_2)$، در این صورت:

$$\vec{A}=i+j \Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$$

$$B=3i-4j \Rightarrow \vec{V}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{1}{5}(3i-4j)$$

$$\begin{cases} \nabla f.\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)=3\sqrt{2} \\ \nabla f.\frac{1}{5}(3i-4j)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1+f_2=6 \\ 3f_1-4f_2=25 \end{cases} \Rightarrow f_1=7 \ , \ f_2=-1 \Rightarrow \nabla f=(7,-1)$$

۱۹۷ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases} f_x = y-2x-2=0 \\ f_y = x-2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2\ ,\ y=-2$$

بنابراین نقطه (۲- و ۲-) تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2)-1^2 = 3$$

چون $\Delta > 0$ و $f_{xx} < 0$، بنابراین نقطه (۲- و ۲-) نقطه ماکزیمم می‌باشد. $f(-2,-2)=4-4-4+4+4+4=8$

۱۹۸ـ گزینه «۲»

$$B = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$C = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

چون حدهای B و C برابر نیستند پس حد A وجود ندارد.

۱۹۹ـ گزینه «۱»

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}-\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-2x}{y^2}-\frac{2y}{x^2}\Big|_{(1,1)} = -4$$

۲۰۰ـ گزینه «۲»

$$f_1(x,y,z)=2x^2-3y^2+1-z \Rightarrow \nabla f_1 = (4x,-6y,-1)\Big|_{(2,1,6)} = (8,-6,-1)$$

$$f_2(x,y,z)=x^2+2y^2-z \Rightarrow \nabla f_2 = (2x,4y,-1)\Big|_{(2,1,6)} = (4,4,-1)$$

بردار هادی خط مماس برابر (۱۰،۴،۵۶) می‌باشد. $u = \nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -6 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (10,4,56)$

بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو است: $\frac{x-2}{10}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-6}{56}$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه $(-8,-3,-50)$ در معادله فوق صدق می‌کند.

۲۰۱ـ گزینه «۴»

$$\nabla f = (3x^2-4yz, 6y^2-4xz, 3z^2-4xy)\Big|_{(-1,1,2)} = (-5,14,16)$$

$$\mathrm{Max}(D_u f) = |\nabla f| = \sqrt{25+196+256} = 3\sqrt{53}$$

۲۰۲ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(z-x)}{\partial x}\times f_2' + \frac{\partial(x-y)}{\partial x}f_3' = -f_2'+f_3'$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(y-z)}{\partial y}\times f_1' + \frac{\partial(x-y)}{\partial y}f_3' = -f_1'+f_3'$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(y-z)}{\partial z}\times f_1' + \frac{\partial(z-x)}{\partial z}f_2' = -f_1'+f_2'$$

۲۰۳ـ گزینه «۱»

$$u_x = u_v.v_x + u_z.z_x = u_v + u_z$$

به همین ترتیب، به طور مشابه با مشتق‌گیری زنجیری خواهیم داشت:

$$u_{xx} = u_{vv}+u_{vz}+u_{zv}+u_{zz} = u_{vv}+2u_{vz}+u_{zz}$$

$$u_y = u_z\ ,\ u_{yy} = u_{zz}\ ،\ u_{yx} = u_{vz}+u_{zz}$$

با جایگزینی در معادله داده شده به دست می‌آید: $(u_{vv}+2u_{vz}+u_{zz})-2(u_{vz}+u_{zz})+u_{zz} = u_{vv} = 0$

۲۰۴ـ گزینه «۳» طبق قضیه اویلر (به متن درس مراجعه کنید.)

۲۰۵ـ گزینه «۱»

$$\nabla f = (4x-3y\ ,\ -3x+10y)\Big|_{(1,2)} = (-2,17)$$

بردار یکه مورد نظر $\vec{u} = (\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4})$ می‌باشد، بنابراین: $D_u f = (-2,17).(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

تست‌های تکمیلی فصل اول

۱ـ تابع با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ کدام شرایط را دارد؟

۱) حد دارد ولی پیوسته نیست. ۲) حد دارد و پیوسته نیز می‌باشد.
۳) حد ندارد و نتیجتاً پیوسته نیز نمی‌باشد. ۴) مشتق‌پذیر می‌باشد.

۲ـ در مورد تابع با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ کدام عبارت صحیح است؟

۱) تابع مشتق پذیر می‌باشد. ۲) تابع مشتق پذیر نیست ولی پیوسته می‌باشد.
۳) تابع پیوسته نیست و نتیجتاً مشتق پذیر نیز نمی‌باشد. ۴) تابع پیوسته و مشتق پذیر است.

۳ـ اگر $f(u,v)=\dfrac{u}{v}$ ، $u=\sqrt{x^2-2y+4z}$ و $v=xyz$ مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ در نقطه $A(1,1,2)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ ۴) $-\dfrac{\sqrt{6}}{8}$

۴ـ حد تابع $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$ در نقطه $A(0,4)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) حد ندارد. ۳) 4 ۴) ∞

۵ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$ با تغییر متغیر $z=u(x,y)e^{x+y}$ به کدام معادله تبدیل می‌شود.

۱) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ ۲) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u-\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$
۳) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u=0$ ۴) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

۶ـ اگر $f(x,y)=\operatorname{Arcsin}\dfrac{y}{x}+\operatorname{Arctg}\dfrac{x}{y}$ آنگاه حاصل $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) صفر

۷ـ اگر $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ، آنگاه مقدار $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ به ازای $x=y=1$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) 2 ۴) $\dfrac{1}{2}$

۸ـ اگر $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ آنگاه مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}$ کدام است؟

۱) $x+y+z$ ۲) $(x+y+z)^2$ ۳) $2(x+y+z)$ ۴) $(x+y+z)^3$

۹ـ هرگاه $f(x,y)=\dfrac{Ax^n+Bx^n}{Cx^2+Dy^2}$ آنگاه مقدار $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ برابر کدام است؟

۱) $nf(x,y)$ ۲) $n^2f(x,y)$ ۳) $(n-2)f(x,y)$ ۴) $(n+2)f(x,y)$

۱۰ـ اگر $f(x,y,u,v)=x+y^2+2uv=0$ و $g(x,y,u,v)=x^2+y^2+u^2+v^2=0$ آنگاه $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{v(2x-y)-u}{2(u^2-v^2)}$ ۲) $\dfrac{v+u(y-2x)}{2(u^2-v^2)}$ ۳) $\dfrac{v(2x-y)+u}{2(u^2-v^2)}$ ۴) $\dfrac{v-u(y-2x)}{2(u^2-v^2)}$

۱۱ـ اگر $u=(x+y+z)$ ، $y+z=uv$ و $z=uvw$ آنگاه $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ کدام است؟

۱) uv ۲) u^2v^2 ۳) uv^2 ۴) u^2v

۱۲ـ اگر $w=x^2+y^2+z^2$ ، $x=e^t\cos t$ ، $y=e^t\sin t$ و $z=e^t$ آنگاه $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ کدام است؟

۱) $4e^{2t}$ ۲) $2e^{2t}$ ۳) $2e^{3t}$ ۴) $4e^{3t}$

۱۳ـ اگر $u=\operatorname{Ln}(x^2+y^2+z^2-3xyz)$ آنگاه مقدار $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{(x+y+z)^2}$ ۲) $\dfrac{1}{x+y+z}$ ۳) $\dfrac{3}{(x+y+z)^2}$ ۴) $\dfrac{3}{x+y+z}$

۱۴ـ اگر $u=e^{xy}\sin z$ آنگاه حاصل $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ کدام است؟

۱) $xye^{xy}\sin z$ ۲) $e^{xy}(1+xy)\sin z$ ۳) $e^{xy}(1+xy)\cos z$ ۴) $xye^{xy}\cos z$

۱۵ـ اگر $z=f(x,y)$ و $x=e^u\cos v$ و $y=e^u\sin v$ آنگاه مقدار $y\dfrac{\partial z}{\partial u}+x\dfrac{\partial z}{\partial v}$ کدام است؟

۱) e^{2v} ۲) $e^{2u}.\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ۳) $e^{2u}.\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ ۴) صفر

۱۶ـ اگر $v=x+y^2$ و $u=x-y^{\frac{2}{3}}$ آنگاه $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ کدام است؟

۱) $2y+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ ۲) $y+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ ۳) $2y+\dfrac{2}{3x}$ ۴) $2x+\dfrac{1}{3y}$

۱۷ـ اگر $z=e^{ax+by}f(ax-by)$ آنگاه مقدار $a\dfrac{\partial z}{\partial y}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$ برابر کدام است؟

۱) z ۲) abz ۳) $2z$ ۴) $2abz$

۱۸ـ اگر $z=xf(\dfrac{y}{x})+g(\dfrac{y}{x})$ آنگاه مقدار $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $f(\dfrac{y}{x})$ ۳) $g(\dfrac{y}{x})$ ۴) $xf(\dfrac{y}{x})$

۱۹ـ اگر $V=(ax+by)^2-(x^2+y^2)$ و $a^2+b^2=2$ آنگاه مقدار $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟

۱) ab ۲) $(ab)^2$ ۳) $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ ۴) صفر

۲۰ـ اگر $u=\operatorname{Arctg}\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y}}$ آنگاه مقدار $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ ۳) $(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ ۴) $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$

۲۱ـ اگر $z=u^2+uv$ ، $u=x-2y$ و $v=2x-y^2$ باشد، مقدار z'_x به ازای $x=1$ و $y=-1$ کدام است؟

۱) 12 ۲) 13 ۳) 11 ۴) 14

۲۲ـ اگر $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ حاصل $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(2,-1)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) -4 ۴) -2

۲۳ـ در تابع دو متغیری $z=\dfrac{xy}{x+y}$ مقدار $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{xy}{x+y}$ ۲) $\dfrac{xy}{x+y}$ ۳) صفر ۴) $\dfrac{x^2y^2}{x+y}$

۲۴ـ اگر $u=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z},\dfrac{z}{x})$ آنگاه مقدار $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ برابر کدام است؟

۱) u ۲) صفر ۳) $2u$ ۴) $3v$

۲۵ـ در مورد نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+y^2+6x+12$ کدام عبارت صحیح است؟

۱) تابع در نقطه $(-3,0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
۲) تابع در نقطه $(-3,0)$ می‌نیممی برابر ۳ دارد.
۳) تابع در نقطه $(0,-3)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
۴) تابع در نقطه $(3,0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.

۲۶ـ نقطه می‌نیمم تابع $f(x,y)=x^2y+xy^2-axy$ کدام است؟

۱) $(-\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ ۲) $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ ۳) $(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$ ۴) $(0,\frac{a}{3})$

۲۷ـ ماکزیمم حجم یک مکعب مستطیل داخل کره‌ای به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ کدام است؟

۱) $\frac{8abc}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{4abc}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{4abc}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

۲۸ـ ماکزیمم و می‌نیمم فاصله نقطه $(3,4,12)$ از کره‌ای به معادله $x^2+y^2+z^2=1$ به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۴ و ۱۲ ۲) ۱۲ و ۱۰ ۳) ۱۶ و ۱۴ ۴) ۱۴ و ۱۰

۲۹ـ نقطه می‌نیمم تابع $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2+2x+y$ کدام است؟

۱) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$

۳۰ـ طول نزدیکترین نقطه به صفحه $2x+y+2z=16$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{16}{9}$ ۳) $-\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{32}{9}$

۳۱ـ خط عمود بر رویه $x^3+y^3+z^3+xyz=4$ در نقطه $(1,1,a)$ واقع بر رویه کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{a+3}=\frac{y-1}{3+a}=\frac{z-a}{2}$ ۲) $x-1=y-1=\frac{z-a}{2}$ ۳) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ ۴) $x-1=y-1=z-1$

۳۲ـ معادله صفحه مماس بر سطحی به معادله $x^2+y^2=4z$ در نقطه $(2,-4,5)$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $x+2y-z=-11$ ۲) $2x-2y-2z=-3$ ۳) $2x+2y-z=-9$ ۴) $x-2y-z=5$

۳۳ـ اگر $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر از r در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار $\nabla f(r)$ کدام است؟

۱) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r^2}$ ۲) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r}$ ۳) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r^3}$ ۴) $f'(r).\frac{\bar{r}}{r}$

۳۴ـ مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=x^2\text{Arctg}xy$ در راستای $u(4,1,-2)$ و نقطه $p(1,0,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ۲) $\frac{-1}{\sqrt{21}}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{21}}$ ۴) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

۳۵ـ بردار یکه عمود بر سطح xy^3z^2 در نقطه $(-1,1,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{(4,-12,-4)}{\sqrt{176}}$ ۲) $\frac{(-4,-12,4)}{13}$ ۳) $\frac{(4,12,4)}{\sqrt{176}}$ ۴) $\frac{(4,5,-6)}{13}$

۳۶ـ بزرگترین مشتق جهتی (سویی) تابع $f(x,y)=ax^2+by^2$ در نقاط واقع بر روی دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\max\{|a|,|b|\}$ ۲) $2|a|$ ۳) $\max\{|a|,|b|\}$ ۴) $2|b|$

۳۷ـ مقدار d^2z به شرطی که $z=e^{xy}$ کدام است؟

۱) $e^{xy}[(xdx+ydy)^2-2dxdy]$
۲) $e^{xy}[(xdx+ydy)^2+2dxdy]$
۳) $e^{xy}[(ydx+xdy)^2-2dxdy]$
۴) $e^{xy}[(ydx-xdy)^2-2dxdy]$

۳۸ـ برای اینکه عبارت $f(x,y)(dx+dy)$ دیفرانسیل کامل باشد، باید کدام شرط زیر برقرار باشد؟

۱) $f_y=2f_x$ ۲) $f_x=2f_y$ ۳) $f''_x=f''_y$ ۴) $f'_x=f'_y$

۳۹ـ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ در صورتی که $z=\text{Ln}(x^2+y)$ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{(x^2+y)^2}$ ۲) $-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$ ۳) $\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ ۴) صفر

۴۰ـ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ در صورتی که $z=\text{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$ ۴) $\frac{y}{1+(1-xy)^2}$

۴۱ـ حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ در صورتی که $u=xy+yz+zx$ باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $x+y+z$

۴۲ـ اگر $z=\sin(xy)$ آنگاه حاصل $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ با شرط $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\pi$ ۴) صفر

۴۳ـ حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ در صورتی که $\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}=\text{arctg}\frac{y}{x}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$ ۲) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$ ۳) $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$ ۴) $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$

۴۴ـ اگر $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) z ۴) $\frac{xy}{z^2}$

۴۵ـ اگر $f(x,y,z)=0$ آنگاه حاصل $\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) f ۴) -1

۴۶ـ برد تابع حقیقی $z=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^1 ۳) $[0,1]$ ۴) $R^+\cup\{0\}$

۴۷ـ تمام دامنه تابع $z=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{xy}$ کدام است؟

۱) $y\le 0\,,\,-2<x<2$
۲) $-2<x<2\,,\,y\ge 0$
۳) $x\ge 0\,,\,y\ge 0$
۴) $-2\le x\le 2\,,\,-\infty<y<+\infty$

۴۸ـ مشتق سوئی تابع $u=xy+yz+zx$ در نقطه $M(2,1,3)$ در جهت امتداد این نقطه به نقطه $N(5,5,15)$ کدام است؟

۱) $\frac{34}{6}$ ۲) $\frac{34}{13}$ ۳) $\frac{68}{6}$ ۴) $\frac{68}{13}$

۴۹ـ مشتق سوئی تابع $z=\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$ در نقطه $p(1,1)$ و در جهت نیمساز ربع اول محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۰ـ طول مستطیلی ۳۰ متر است و با سرعت ۴ متر در ثانیه در حال کاهش است، عرض این مستطیل ۲۰ متر است و با سرعت ۵ متر در ثانیه بزرگ می‌شود، محیط و مساحت آن به ترتیب با چه سرعتی در ثانیه تغییر می‌کنند؟

۱) ۲۰ و ۳۰ ۲) ۱ و ۳۵ ۳) ۲ و ۷۰ ۴) ۱۰ و ۱۵

چو بشنوی سخن اهل دل مگو که خطاست سخن‌شناس نئی جان من خطا اینجاست «حافظ»
خلـق را تقلیدشـان بر بـاد داد ای دو صد لعنت بر این تقلید باد «مولوی»

فصل دوم

«رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری»

رویه‌ها

رویه‌ها نمودار تابع دو متغیره هستند. رویه‌ها اطلاعاتی در مورد آهنگ تغییر، نقاط اکسترمم، وجود ریشه و ... در اختیار ما می‌گذارند. همچنین رویه‌ها به عنوان مرزهای نواحی فضایی به کار می‌روند. در اینجا می‌خواهیم رویه‌هایی را که در عمل بیشتر به کار می‌روند و اهمیت بیشتری نیز دارند را معرفی و مورد بررسی قرار دهیم.

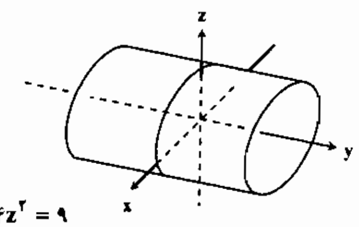
استوانه

در بین تمامی رویه‌ها، رویه‌ای که ترسیم و نوشتن معادله آن از همه ساده‌تر است، استوانه می‌باشد (به جز صفحه). در واقع یک استوانه، رویه‌ای است متشکل از همه خطوطی که از یک خم واقع در صفحه می‌گذرند و با خط ثابتی موازی‌اند.

به طور مثال شکل زیر نشان‌دهنده استوانه‌ای است متشکل از خطهای موازی با محور z و گذرنده از خم $y = x^2$. توجه کنید که در شکل زیر مقاطعی از استوانه که بر محور z عمودند، سهمی هستند. به طور کلی استوانه می‌تواند هر نوع مقطعی داشته باشد.

نکته ۱ : به طور کلی هر خم $f(x,y) = c$ واقع در صفحه xy استوانه‌ای را مشخص می‌کند که موازی محور z می‌باشد و معادله استوانه همان $f(x,y) = c$ است. و به طور مشابه $f(x,z) = c$ استوانه‌ای است موازی با محور y ها و $f(y,z) = c$ استوانه‌ای است موازی محور x ها.

مثال ۱ : معادلهٔ $x^2 + y^2 = 1$ مشخص کننده استوانهٔ مستدیری است متشکل از خطهای موازی محور z و گذرنده از دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع در صفحه xy و معادلهٔ $x^2 + 4z^2 = 9$ استوانه‌ای بیضوی است که خطهای موازی محور y ها و گذرنده از بیضی $x^2 + 4z^2 = 9$ واقع در صفحه xz آن را می‌سازند.



$x^2 + 4z^2 = 9$

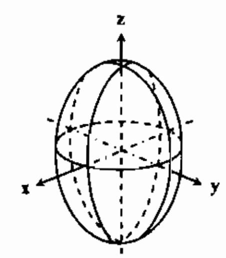
رویه‌های درجه دوم

رویه‌های درجه دوم رویه‌هایی هستند که معادلاتشان ترکیبی از جملات درجه دوم و جملات درجهٔ اول و مقادیر ثابت است. بنابراین معادله آنها در حالت کل به صورت زیر است:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

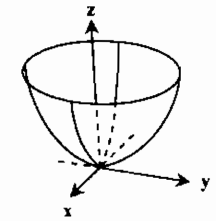
که پس از دوران به اندازه مناسب و مربع کردن آن، رویه به یکی از حالات زیر تبدیل می‌شود:

الف) بیضی‌گون (بیضی‌وار) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



محورهای مختصات را نقاط $(\pm a,0,0)$، $(0,\pm b,0)$ و $(0,0,\pm c)$ قطع می‌کند و در داخل مکعب مستطیل زیر: $|x| \le a, |y| \le b, |z| \le c$ قرار دارد. چون در معادله این رویه فقط توان زوج x، y و z وجود دارد لذا رویه نسبت به صفحات متقارن است. مقطعهای آن با صفحات مختصات بیضی شکل هستند. وقتی دو قطر از سه نیم‌قطر a، b و c با هم برابر باشند، این رویه یک بیضیوار دورانی خواهد بود، و وقتی $a = b = c$، یک کره خواهد بود. و در حالت کلی حجم آن برابر $\frac{4}{3}\pi abc$ می‌باشد.

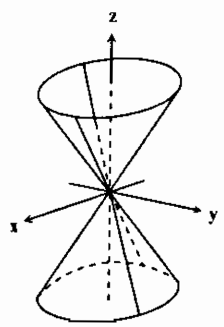
ب) سهمیوار بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$



نسبت به صفحات $x = 0$ و $y = 0$ متقارن می‌باشد. تنها نقطه تقاطع آن با محورها مبدأ است. اگر $c > 0$ رویه در بالای صفحه xy واقع است و اگر $c < 0$ رویه در پایین صفحه xy واقع است. مقاطع این رویه با صفحات مختصات سهمی است.

نکته ۲ : هرگاه در معادله فوق $a = b$ باشد، معادله را سهمیوار مستدیر یا دورانی می‌گویند. مقطعهای آن با صفحه‌های شامل محور z، سهمی‌هایی هستند قابل انطباق بر هم که کانون مشترکشان در نقطه $(0,0,\frac{a^2}{4c})$ قرار دارد. آنتن‌هایی که در تلسکوپ رادیویی، ردیاب ماهواره‌ای و ... به کار می‌روند اغلب به شکل سهمیوار مستدیر هستند.

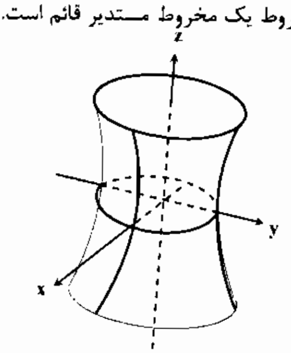
ج) مخروط بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



نسبت به سه صفحه مختصات متقارن است. اگر $a = b$ این مخروط یک مخروط مستدیر قائم است.

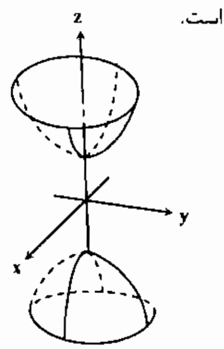
د) هذلولیوار یکپارچه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

نسبت به هر یک از سه صفحه مختصات متقارن است. مقاطع آن با صفحه $x = 0$ و $y = 0$ هذلولی ولی با صفحه $z = 0$ بیضی است.



این رویه همبند است، یعنی بدون خارج شدن از رویه می‌توان از هر نقطه واقع بر آن به هر نقطه دیگر واقع بر آن رفت. به همین دلیل آن را یکپارچه می‌نامند. اگر $a = b$، این هذلولی‌وار، یک رویه دورانی است.

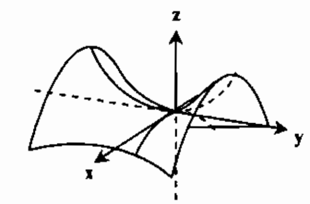
هـ) هذلولیوار دو پارچه $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



نسبت به هر صفحه مختصات متقارن است. صفحه $z = 0$ این رویه را قطع نمی‌کند و مقاطع آن با صفحات $x = 0$ و $y = 0$، هذلولی است. این رویه متشکل از دو قسمت جداگانه است. یکی بالای صفحه $z = c$ و دیگری پایین صفحه $z = -c$. به همین دلیل به آن دو پارچه می‌گویند.

نکته ۳ : معادلات هذلولیوار یکپارچه و دو پارچه از لحاظ تعداد جملات منفی در طرف چپ، وقتی طرف راست ۱+ است، با هم فرق دارند. در واقع تعداد جملات منفی برابر تعداد پارچه‌های هذلیوار است. و اگر معادلات این دو را با معادله مخروط مقایسه کنید، می‌بینید که با قرار دادن صفر به جای یک در این دو معادله، معادله یک مخروط به دست می‌آید. این مخروط در واقع مجانبهای هر دو هذلولی‌وار است.

و) سهمیوار هذلولوی $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$



نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ تقارن دارد. در صفحه $x=0$ سهمی به طرف بالا باز می‌شود و رأس آن در مبدأ است ولی در صفحه $y=0$ سهمی به طرف پایین باز می‌شود و رأس آن نیز در مبدأ است.

نکته ۴ : در نزدیکی مبدأ رویه به شکل زین اسب است. از نظر شخصی که بر روی این رویه در صفحه yz حرکت کند، مبدأ نقطه مینیمم است ولی اگر شخص در صفحه xz حرکت کند، مبدأ نقطه ماکسیمم به نظرش می‌رسد. چنین نقطه‌ای را نقطه زینی یا مینیماکس رویه می‌گویند.

به طور کلی اگر نمایش رویه به صورت $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ باشد آنگاه:

الف) اگر با مربع‌سازی معادله رویه به صورت: $A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2+C(z-\gamma)^2=h$ تبدیل شود آن‌گاه:

اگر $ABC=0$ رویه، یک رویه استوانه‌ای می‌باشد.

اگر $ABC\neq 0$ و A، B و C هم‌علامت باشند نمایش بیضی‌وار می‌باشد.

و اگر $ABC\neq 0$ و A، B و C هم‌علامت نباشند آن‌گاه:

i) اگر $ABC>0$ و $h>0$ نمایش هذلولی‌وار دو پارچه می‌باشد.

ii) اگر $ABC<0$ و $h>0$ نمایش هذلولی‌وار یک پارچه می‌باشد.

iii) اگر $h=0$ آن‌گاه نمایش مخروط می‌باشد.

ب) اگر با مربع‌سازی معادله رویه به حالت $A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C(z-\gamma)$ باشد آن‌گاه:

اگر $AB=0$ نمایش رویه استوانه‌ای می‌باشد.

اگر $AB>0$ نمایش سهمی‌وار بیضوی است.

و اگر $AB<0$ نمایش سهمی‌وار هذلولی است.

سطح حاصل از دوران

اگر منحنی f را حول خط دلخواه d دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را سطح دوار می‌گویند. معمولاً خط d یکی از محورهای مختصات می‌باشد که به آن محور دوران نیز می‌گویند.

هرگاه منحنی $f(x,y)=0$ (با فرض $y>0$) را حول محور x ها دوران دهیم، معادله سطح حاصل به صورت $f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$ خواهد بود.

توجه : به طور مشابه معادلات سطوح دوار حاصل از دوران منحنی‌های $f(x,z)=0$ ، $f(y,z)=0$ را حول محورهای مختصات می‌توان نوشت.

مثال ۲ : معادله رویه‌ای که از دوران منحنی $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=1$ حول محور x ها پدید می‌آید، کدام است؟

۱) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{2}{2}}+z^{\frac{3}{2}}=1$ ۲) $x^{\frac{3}{2}}+(y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}=1$ ۳) $(x^2+z^2)^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}}=1$ ۴) $x^3+y^3+z^3=1$

پاسخ : گزینه «۲» کافی است به جای y در معادله $\sqrt{y^2+z^2}$ قرار دهیم. در این صورت:

$$x^{\frac{3}{2}}+(\sqrt{y^2+z^2})^{\frac{3}{2}}=1 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}+(y^3+z^2)^{\frac{3}{4}}=1$$

توابع برداری:

تابع برداری F که تابعی از مقدار اسکالر t می‌باشد، به صورت روبرو بیان می‌شود: $F(t)=f_1(t)\vec{i}_1+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

حد توابع برداری:

حد تابع برداری $F(t)$ در نقطه‌ای مانند t_0 به صورت روبرو محاسبه می‌شود: $\lim\limits_{t\to t_0}F(t)=\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t)\vec{i}+\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t)\vec{j}+\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\vec{k}$

مثال ۳ : تابع $f:R\to R^3$ با ضابطه $F(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+2\vec{k}$ مفروض است، حد تابع در نقطه $t_0=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) حد موجود نیست. ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(i+\vec{j}+k)$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+2k$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}F(t)=\cos\frac{\pi}{4}\vec{i}+\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}+2\vec{k}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+2k$$

پیوستگی تابع برداری $F(t)$

هرگاه هر سه حد $f_1(t)$ و $f_2(t)$ ، $f_3(t)$ در نقطه‌ای مانند t_0 موجود باشد و برای تابع برداری $\vec{F}(t)$ در نقطه t_0 رابطه زیر را داشته باشیم، می‌گوییم تابع $F(t)$ در نقطه $t=t_0$ پیوسته است:

$$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_0)$$

مثال ۴ : به ازای چه مقادیری از a تابع $f(t)=\begin{cases}\sin t\vec{i}+a(t+2)j+\frac{tgt}{t}\vec{k} & t\neq 0\\ \vec{j}+\vec{k} & t=0\end{cases}$ در نقطه $t=0$ پیوسته است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim\limits_{t\to 0}F(t)=\lim\limits_{t\to 0}(\sin t)\vec{i}+\lim\limits_{t\to 0}a(t+2)\vec{j}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{tgt}{t}\vec{k}=2a\vec{j}+\vec{k}=F(0)\Rightarrow 2aj+\vec{k}=\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

مشتق توابع برداری:

مشتق توابع برداری $F(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ در نقطه $t=t_0$ برابر $F'(t_0)=f_1(t_0)\vec{i}+f_2(t_0)\vec{j}+f_3(t_0)\vec{k}$ می‌باشد.

مثال ۵ : مشتق تابع $F(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+e^t\vec{k}$ در نقطه $t=0$ کدام است؟

۱) $\vec{i}+\vec{k}$ ۲) $\vec{j}+\vec{k}$ ۳) $\vec{i}+\vec{j}$ ۴) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$F'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+e^t\vec{k}\Rightarrow F'(0)=\vec{j}+\vec{k}$$

قواعد مشتق‌گیری از توابع برداری

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر در نقطه t باشند، داریم:

۱) $[f_1(t).f_2(t)]'=f_1'(t).f_2(t)+f_1(t)f_2'(t)$ ۲) $(fog)'(t)=f'[g(t)]g'(t)$

نکته ۵ : اگر طول تابع برداری $F(t)$ عددی ثابت باشد، آنگاه بردار مشتق $F(t)$ یعنی $F'(t)$ بر آن عمود است و در این حالت می‌دانیم: $F(t).F'(t)=0$ می‌باشد و بالعکس اگر $F(t).F'(t)=0$ باشد آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم طول بردار $F(t)$ عددی ثابت است. به عنوان مثال برای تابع $F(t)=(\sin t\ ,\ \cos t\ ,\ 1)$ داریم: $F'(t)=(\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 0)\Rightarrow F(t).F'(t)=\sin t\cos t-\sin t\cos t+0=0$

تذکر ۱ : انتگرالهای معین و نامعین تابع برداری $F(t)$ مانند قوانین انتگرالها برای توابع اسکالر است.

طول قوس منحنی‌های فضایی

طول قوس تابع $F(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ در فاصله t_1 تا t_2 از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$S=\int_{t_1}^{t_1}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt$$

مثال ۶ : طول قوس منحنی $F(t)=(e^t\cos t\ ,\ e^t\sin t\ ,\ e^t)$ از $t=0$ تا $t=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}(e-1)}{2}$ ۲) $\sqrt{2}(e-1)$ ۳) $\sqrt{3}(e+1)$ ۴) $\sqrt{3}(e-1)$

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$S=\int_0^1\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t-2e^{2t}\sin t\cos t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}\cos^2 t+2e^{2t}\sin t\cos t+e^{2t}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{e^{2t}[2(\sin^2 t+\cos^2 t)+1]}\,dt=\int_0^1\sqrt{3e^2}\,dt=\sqrt{3}\int_0^1 e^t dt=\sqrt{3}[e^t]_0^1=\sqrt{3}(e-1)$$

تعریف بردارهای سرعت، شتاب بردارهای یکانی مماس و قائم

اگر C یک منحنی فضائی باشد که توسط معادله روبرو بیان گردد: $R(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

و ذره‌ای روی این منحنی در حرکت باشد، اگر متغیر t زمان در نظر گرفته شود $R(t)$ را می‌توان معادله مسیر این ذره در نظر گرفت در این صورت سرعت **لحظه‌ای** این ذره به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\boxed{V(t)=\frac{dR}{dt}=f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}}$$

و اندازه سرعت با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{|V(t)|=\sqrt{[f_1'(t)]^2+[f_2'(t)]^2+[f_3'(t)]^2}}$$

تذکر ۲ : توجه شود که اندازه سرعت در واقع همان عبارت زیر انتگرال در محاسبه طول قوس می‌باشد.

مثال ۷ : حرکت ذره‌ای روی منحنی با معادله به صورت $\vec{R}(t)=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}$ انجام می‌گیرد. مقدار سرعت و شتاب ذره به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۰ و صفر ۲) $6t$ و t ۳) $8t$ و 8 ۴) $10t$ و 10

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-8t\vec{j}+6t\vec{k}\Rightarrow|V(t)|=\sqrt{(-8t)^2+(6t)^2}=10t$$

$$\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=-8\vec{j}+6\vec{k}\Rightarrow|\vec{a}(t)|=\sqrt{(-8)^2+(6)^2}=10$$

بردار یکه مماس

برداری است که در هر لحظه بر C مماس بوده و جهت آن همواره در جهت حرکت ذره می‌باشد و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{T}(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}}$$

بردار یکه قائم

بردار $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ که در هر لحظه بر بردار $\vec{T}(t)$ (و منحنی C) عمود است را بردار یکه قائم اول می‌نامیم و بردار $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ را که در هر لحظه بر صفحه دو بردار $\vec{T}$ و $\vec{N}$ عمود است، را **بردار یکه قائم دوم** می‌نامیم. بردار یکه قائم دوم را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\boxed{B=\frac{R'(t)\times R''(t)}{|R'(t)\times R''(t)|}}$$

شتاب: بردار شتاب لحظه‌ای ذره روی منحنی C از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{R}''(t)=f_1''(t)\vec{i}+f_2''(t)\vec{j}+f_3''(t)\vec{k}}$$

و اندازه شتاب برابر است با:

$$\boxed{|\vec{a}(t)|=\sqrt{[f_1''(t)]^2+[f_2''(t)]^2+[f_3''(t)]^2}}$$

مثال ۸ : بردار یکه مماس بر منحنی $\vec{R}(t)=(\cos t+t\sin t)\vec{i}+(\sin t-t\cos t)\vec{j}$ کدام است؟

۱) $-\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ ۲) $-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$ ۳) $\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ ۴) $\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$

☑ پاسخ : گزینه «۳»

$$\vec{R}'(t)=\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}=\sqrt{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=t$$

$$\Rightarrow\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}=\frac{t\cos t\vec{i}+t\sin t\vec{j}}{t}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$$

مثال ۹ : اگر $\vec{R}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ باشد، آنگاه بردار یکه قائم اصلی (اول) منحنی برابر کدام است؟

۱) $\vec{R}'(t)$ ۲) $-\vec{R}'(t)$ ۳) $1-\vec{R}'(t)$ ۴) $1+\vec{R}'(t)$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$\vec{T}(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}=\frac{-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$$

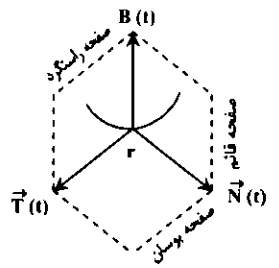
$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=\frac{-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}=-(\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j})=-\vec{R}(t)$$

نکته ۶ :

صفحهٔ بوسان: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\vec{B}(t)$ عمود است.

صفحه قائم: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\vec{T}(t)$ عمود است.

صفحه راستگرد: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\vec{N}(t)$ عمود است.



انحنا یا خمیدگی منحنی C

اگر $\vec{T}(t)$ بردار یکه مماس بر منحنی C باشد با معادله $R(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ و S طول قوس منحنی باشد، بردار انحنای C به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{\vec{k}(t)=\frac{d\vec{T}}{ds}}$$

و اندازه انحنای منحنی با رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{k=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}}$$

تذکر ۳ : خمیدگی خط راست برابر صفر است.

مثال ۱۰ : انحنای منحنی $R(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2}$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$R'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|R'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{R}''(t)=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -\sin t & \cos t & 1\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+k\Rightarrow|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$k=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

نکته ۷ : اگر C با ضابطه $y=f(x)$ مشخص شود مقدار انحنای C به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

نکته ۸ : اگر C با ضابطه $x=f(y)$ بیان گردد، مقدار انحنای C به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k=\frac{|x''_y|}{[1+(x'_y)^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

شعاع انحنا : شعاع انحنا یا شعاع خمیدگی از رابطه $R=\frac{1}{k}$ به دست می‌آید.

تذکر ۴ : خمیدگی یک دایره با شعاع r برابر $\frac{1}{r}$ می‌باشد، یعنی افزایش شعاع دایره از خمیدگی آن کاسته می‌شود.

مثال ۱۱ : عرض نقطه‌ای روی منحنی $y = e^x$ که در آن نقطه شعاع انحنای منحنی مینیمم مقدار خود را دارد، کدام است؟

۱) $-\frac{Ln2}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $Ln2$

پاسخ : گزینه «۳»

$$y' = e^x \ , \ y'' = e^x \Rightarrow k = \frac{y''}{|1+y'|^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\frac{3}{2}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} \times 2e^{2x} \times e^x - e^x \times (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^{2x}} = 0$$

$$\Rightarrow e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}[3e^{2x} - (1+e^{2x})] \Rightarrow 2e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{Ln2}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته ۹ : اگر معادله C به صورت خم پارامتری $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ بیان گردد آنگاه انحنای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{k = \frac{|x'_{(t)}y''_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)}|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

مثال ۱۲ : خمیدگی منحنی با ضابطه $x(t) = 2\cos^3 t$ و $y(t) = 2\sin^3 t$ در نقطه $t = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$x'(t) = -6\cos^2 t\sin t \Rightarrow x'(\frac{\pi}{4}) = -6 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x''(t) = -12\cos t\sin^2 t - 6\cos^3 t \Rightarrow x''(\frac{\pi}{4}) = -12 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - 6(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$y'(t) = 6\sin^2 t\cos t \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = 6 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

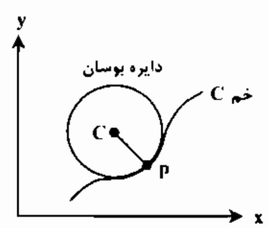
$$y''(t) = 12\cos^2 t\sin t - 6\cos^3 t \Rightarrow y''(t) = 12 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$k(\frac{\pi}{4}) = \frac{|-\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{(-9\sqrt{2})}{2}|}{27} = \frac{|-\frac{9}{2} + \frac{27}{2}|}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

نکته ۱۰ : هرگاه خم C به فرم قطبی $r = f(\theta)$ بیان گردد، رابطه انحنا به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{k(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{[(r)^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

دایره بوسان



خم C و نقطه دلخواه p و روی آن را در صفحه x, y در نظر بگیرید، اگر $k(p) \neq 0$ باشد (یعنی انحنا در نقطه p صفر باشد.) دایره‌ای که در نقطه p به خم C مماس است و مرکز آن در جهت تقعر C قرار دارد و شعاع آن برابر شعاع انحنای خم $(R = \frac{1}{k(p)})$ است را دایره بوسان می‌نامیم.

اگر منحنی C به صورت $y = f(x)$ بیان گردد آنگاه مرکز دایره انحنا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{y_C = y_{(p)} + \frac{1 + y'^2(p)}{y''(p)}} \quad , \quad \boxed{x_C = x_{(p)} - \frac{y'(p)(1 + y'^2(p))}{y''(p)}}$$

تذکر ۵ : اگر خم C به صورت $y = f(x)$ بیان گردد، در نقطه تماس y' و y'' برای خم و دایره برابر است.

مثال ۱۳ : دایره‌ای بر منحنی $y = x^2 + 1$ در نقطه (۱,۲) مماس است و مقدار y'' برای هر دو منحنی در آن نقطه برابر است، شعاع دایره کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به تذکر فوق شعاع دایره در واقع همان شعاع انحنای خم است:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x \ , \ y'' = 2 \ , \ R = \frac{(1+y')^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1+4)^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

تاب منحنی

انحراف خم از صفحه مماس در هر نقطه تاب نامیده می‌شود اگر $\vec{N}$ و $\vec{B}$ به ترتیب بردارهای قائم یکائی اول و دوم باشند عددی مانند τ وجود دارد که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$\boxed{\frac{dB}{dS} = -\tau N}$$

τ را تاب منحنی می‌گویند و اندازه تاب برابر $|\tau| = \pm|\frac{dB}{dS}|$ می‌باشد و اگر منحنی C با معادله $\vec{R}(t)$ مشخص می‌شود آنگاه داریم:

$$\boxed{\tau = \frac{|\vec{R}'(t) \times R''(t).R'''(t)|}{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|^2}}$$

تذکر ۶ : اگر خم در یک صفحه واقع شود آنگاه مقدار تاب صفر است.

تذکر ۷ : سه بردار $R'(t), R''(t)$ و $R'''(t)$ بر یک صفحه خواهند بود. اگر و تنها اگر $(R'(t) \times R''(t)).R'''(t) = 0$ باشد.

مثال ۱۴ : تاب خم $R(t) = (2+\cos t, 3+\sin t, \cos t+\sin t)$ در نقطه $t = 1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\sin 1$ ۴) $\cos 1$

پاسخ : گزینه «۱» اگر t را بین پارامترهای yx و z حذف کنیم، داریم: $x + y - z = 2 + \cos t + 3 + \sin t - \cos t - \sin t = 5$

به عبارت دیگر خم بر یک صفحه واقع است و تاب برابر صفر است.

حرکت در مختصات قطبی

وقتی ذره‌ای در مختصات قطبی حرکت کند، سرعت و شتاب جسم را برحسب بردارهای واحد زیر می‌توان بیان کرد:

$u_r = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$ برداریکه شعاعی

$u_\theta = -(\sin\theta)i + (\cos)j$ بردار یکه مماسی

بردار u_r در امتداد بردار R می‌باشد، به طوریکه داریم $R = ru_r$ و بردار u_θ بر u_r عمود است و جهت آن در راستای افزایش θ می‌باشد.

با مشتق‌گیری از u_r و u_θ نسبت به زمان به دست می‌آید:

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{du_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \cos\theta\frac{d\theta}{dt}) = \frac{d\theta}{dt}u_\theta$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}) = -\frac{d\theta}{dt}u_r$$

بردار سرعت و شتاب بر حسب u_r و u_θ از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$V = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta$$

$$a = (\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2)u_r + (r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})u_\theta$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ انحناء منحنی $R(t)=e^t\cos t\vec{i}+e^t\sin t\vec{j}+e^t\vec{k}$ در $t=0$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲ـ منحنی مولد رویهٔ دوار به معادله $x^2+z^2=e^{2y}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\begin{cases} z=e^{2y} \\ x=0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} z^2=e^{2y} \\ x=0 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} z^2=e^{4y} \\ x=0 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} z=e^{4y} \\ y=0 \end{cases}$

۳ـ انحنای منحنی $t>0$ ، $r(t)=(\frac{t^2}{3},\frac{t^2}{2},0)$ ، برابر با کدام رابطه است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $k=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ۲) $k=\frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ ۳) $k=\frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ ۴) $k=\frac{1}{t(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

۴ـ انحناء منحنی $\vec{R}(t)=(\sin t,\cos t,\frac{1}{2}t^2)$ در نقطه $t=0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

۵ـ بردار یکانی قائم بر مارپیچ به معادلات $z=3t$ ، $y=\sin 2t$ و $x=2\cos 2t$ به کدام صورت است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{4}{5}i\sin 2t+\frac{4}{5}j\cos 2t+\frac{3}{5}k$ ۲) $-\frac{4}{5}i\cos 2t+\frac{4}{5}j\cos 2t-\frac{3}{5}k$

۳) $-i\cos 2t-j\sin 2t$ ۴) $i\sin 2t-j\cos 2t$

۶ـ می‌دانیم بردار سرعت متحرکی در مختصات قطبی به صورت $V=U_r.\frac{dr}{dt}+U_\theta.r\frac{d\theta}{dt}$ است. مؤلفه شتاب آن در امتداد شعاع حامل قطبی کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{d^2r}{dt^2}$ ۲) $\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{dr}{dt}$ ۳) $\frac{d^2r}{dt^2}+r(\frac{d\theta}{dt})^2$ ۴) $\frac{d^2r}{dt^2}-r(\frac{d\theta}{dt})^2$

۷ـ اگر نیروی مؤثر بر متحرک با بردار موضع $\vec{R}$ ، نیروی جاذبه‌ای باشد، آنگاه بردار $\vec{R}\times\frac{\overline{dR}}{dt}$ چگونه است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) بردار ثابت ۲) با افزایش نیرو کاهش دارد. ۳) با افزایش نیرو و افزایش دارد. ۴) فقط اندازه آن ثابت

۸ـ شعاع انحنای منحنی $x^2+xy+y^2=3$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) 6 ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

۹ـ انحناء سهمی به معادله $y=x^2$ در رأس سهمی کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۰ـ انحناء بیضی به معادله $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ در نقطه (۰ و ۳) کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۱ـ انحنای منحنی $y=\operatorname{Ln}x$ در نقطه $(1,0)$ کدام مقدار است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲ـ معادله صفحه عمود بر منحنی $y=\sin t, z=\cos(2t)$ و $x=\sin t$ در نقطه نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $x+y-2z=2$ ۲) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$ ۳) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z=2$ ۴) $x+y-2\sqrt{2}z=2$

۱۳ـ مکان هندسی نقطه $P:\begin{cases} r=2 \\ \theta=t \\ z=t \end{cases}$ وقتی $t\in R$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) استوانه ۲) کره ۳) مارپیچ مخروطی ۴) مارپیچ استوانه‌ای

۱۴ـ اگر $r(t)=(t,\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},t^2)$ نمایش پارامتری یک منحنی C باشد، به ازای چه مقدار b مثبت، طول منحنی C از $t=0$ تا $t=b$ برابر ۳۰ واحد است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $b=3$ ۲) $b=4$ ۳) $b=5$ ۴) $b=6$

۱۵ـ اگر V سرعت متحرکی باشد که روی منحنی $[x(t)=3t\ ,\ y(t)=4t, z(t)=2]$ حرکت می‌کند، $|V|$ کدام است؟

(مهندسی سیستمهای اقتصادی و احتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) 5 ۲) $|3t|+|4t|+2$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $\sqrt{25t^2+4}$

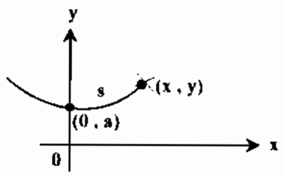
۱۶ـ بردار قائم یکه بر منحنی $R(t)=(t^2-3t)i+3t^2j$ به ازاء $t=\frac{1}{2}$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}j$ ۲) $\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}j$ ۳) $\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}j$ ۴) $-\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}j$

۱۷ـ معادلهٔ درجه دوم $x^2+y^2=a^2$ در فضای سه بعدی معرف کدام رویه است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) کره ۲) استوانه ۳) بیضی‌وار ۴) مخروط

۱۸ـ اگر قوس s منحنی زنجیری $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ از پایین‌ترین نقطهٔ آن سنجیده شده باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{s}{a}$

۲) $\frac{s}{2a}$

۳) as

۴) $2as$

۱۹ـ حرکت متحرکی در صفحه xoy با رابطه $R=it\cos t+jt\sin t$ داده شده است. مؤلفه قائم شتاب کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ۲) $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$ ۳) $\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ ۴) $\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$

۲۰ـ اگر متحرکی بر روی منحنی $z(t)=4t$ و $y(t)=\cos 3t$ و $x(t)=\sin 3t$ حرکت کند، آنگاه نیروی مؤثر در کدام امتداد است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) قائم بر مسیر ۲) بردار سرعت ۳) مماس بر مسیر ۴) برآیند بردار شتاب و سرعت

۲۱ـ منحنی $\begin{cases} xz=1 \\ y=0 \end{cases}$ هادی یک استوانه است، معادلهٔ استوانه کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $xz=1$ ۲) $x^2z^2=1$ ۳) $x+z=1$ ۴) $x^2+z^2=1$

۲۲ـ جزء طول قوس ds برای منحنی با معادلات پارامتری $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) e^tdt ۲) $2e^tdt$ ۳) $2e^{2t}(dt)^2$ ۴) $\sqrt{2}e^tdt$

۲۳ـ اگر $F(t)=\frac{2t}{1+t^2}i+\frac{1-t^2}{1+t^2}j+k$ یک تابع برداری باشد، آنگاه زاویه بین $F(t)$ ، $F'(t)$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۴ـ سرعت یک ذره متحرک در لحظهٔ t در امتداد خطی مستقیم برابر است با $v = v(t) = 3t^2 - 2t + 4$ فاصلهٔ بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ را بیابید. (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶۰　۲) ۱۰۸　۳) ۱۲۰　۴) ۱۳۲

۲۵ـ اگر $r : [a,b] \to R^3$ یک منحنی پارامتری با طول قوس L و $A = \{(t_1,t_2) \mid r(t_1) = r(t_2)\}$. در این صورت کدام حکم در مورد A صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) اگر A نامتناهی باشد آنگاه $L = \infty$.
۲) ممکن است A نامتناهی باشد ولی $L < \infty$.
۳) اگر A متناهی باشد آنگاه $L < \infty$.
۴) همواره A نامتناهی است $L = \infty$.

۲۶ـ انحنای منحنی C به معادلات پارامتری $y = f(t)$ ، $x = g(t)$ که درلحظه t در معادلات $y' = 2t$ و $x' = 2$ صدق کند، در لحظه $t = 0$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $k = 0$　۲) $k = 1$　۳) $k = 2$　۴) $k = \frac{1}{2}$

۲۷ـ کدام معادله معرف یک مخروط است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^2 + y^2 = z^2$　۲) $y^4 = x^3 + z^2$　۳) $x^2 - 2xy + y^2 = z$　۴) $x^2 + y^2 + z^2 = zz$

۲۸ـ اگر $f(t) = (\sin t - t\cos t)i + (\cos t + t\sin t)j$ باشد، مقدار انحناء منحنی در نقطه نظیر $t = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲　۲) $\frac{\pi}{3}$　۳) $\frac{\pi}{6}$　۴) $\frac{3}{\pi}$

۲۹ـ خمیدگی (یا انحناء) $K(t)$ خم با معادله برداری $r(t) = (t + \cos t)i + (t - \cos t)j + (\sqrt{2}\sin t)k$ در یک نقطه کلی خم برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　۴) $|\sin 2t|$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ گزینه «۲»

$$V(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t) \Rightarrow V(0) = (1,1,1)$$

$$a(t) = (-2e^t\sin t, 2e^t\cos t, e^t) \Rightarrow a(0) = (0,2,1)$$

$$\vec{V}(0)\times\vec{a}(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,2)$$

$$k = \frac{|V\times a|}{|V|^3} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{(\sqrt{1+1+1})^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۲ـ گزینه «۲» رویه داده شده را با صفحه $yz(x = 0)$ تلاقی می‌دهیم در این صورت $z^2 = e^{2y}$

۳ـ گزینه «۴»

$$r(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, 0) \Rightarrow V(t) = (t^2, t, 0) \Rightarrow a(t) = (2t, 1, 0)$$

$$V\times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & t & 0 \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-t^2) \Rightarrow k = \frac{|V\times a|}{|V|^3} = \frac{t^2}{(t^4+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۴ـ گزینه «۳»

$$R(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}t^2) \Rightarrow V = \frac{dR}{dt} = (\cos t, -\sin t, t) \Rightarrow V(0) = (1,0,0)$$

$$a = \frac{dV}{dt} = (-\sin t, -\cos t, 1) \Rightarrow a(0) = (0,-1,1)$$

چون دو بردار $V(0)$ و $a(0)$ بر هم عمودند، پس $|V\times a| = |V||a| = \sqrt{2}$. در نتیجه:

$$k = \frac{|V\times a|}{|V|^3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم بردار قائم واحد اصلی از فرمول $\vec{N} = \frac{\vec{T'}}{|\vec{T'}|}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$R'(t) = (-4\sin 2t, 4\cos 2t, 3) \Rightarrow |R'(t)| = 5 \Rightarrow T = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = (\frac{-4}{5}\sin 2t\ ,\ \frac{4}{5}\cos 2t\ ,\ \frac{3}{5})$$

$$T' = (\frac{-8}{5}\cos 2t\ ,\ \frac{-8}{5}\sin 2t\ ,\ 0) \Rightarrow |T'| = \frac{8}{5} \Rightarrow N = (-\cos 2t\ ,\ -\sin 2t\ ,\ 0)$$

۶ـ گزینه «۴» به حرکت مختصات قطبی صفحهٔ ۹۰ مراجعه کنید.

۷ـ گزینه «۱» چون تنها نیروی مؤثر بر جسم نیروی جاذبه می‌باشد، لذا بردار مکان در راستای نیرو خواهد بود و داریم:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \lambda\vec{R} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\lambda}{m}\vec{R}$$

از طرفی توجه کنید که:

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}\times\frac{d\vec{R}}{dt}) = \frac{d\vec{R}}{dt}\times\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{R}\times\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 + \vec{R}\times\vec{a} = \vec{R}\times\frac{\lambda}{m}\vec{R} = \frac{\lambda}{m}(\vec{R}\times\vec{R}) = 0$$

که از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\vec{R}\times\frac{d\vec{R}}{dt} = C$. (برای اطلاعات بیشتر به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی مراجعه کنید.)

۸ــ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$x^2+xy+y^2=3 \Rightarrow 2x+y+xy'+2yy'=0 \xrightarrow[y=1]{x=1} y'=-1$$

$$2+y'+y'+xy''+2y'^2+2yy''=0 \xrightarrow[y'=-1]{x=y=1} y''=\frac{-2}{3}$$

از طرفی $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$، بنابراین:

$$k=\frac{\frac{2}{3}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \rho=\frac{1}{k}=3\sqrt{2}$$

۹ــ گزینه «۴» رأس سهمی $y=x^2$ نقطه $(0,0)$ می‌باشد.

$$y=x^2 \Rightarrow y'=2x \ , \ y''=2$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(0,0)}=2$$

۱۰ــ گزینه «۴» ابتدا بیضی داده شده را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$x=3\cos t \ , \ y=2\sin t \ , \ 0\le t\le 2\pi$$

بنابراین:

$$x'=-3\sin t \ , \ y'=2\cos t \ , \ x''=-3\cos t \ , \ y''=-2\sin t$$

در نتیجه:

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6\sin^2 t+6\cos^2 t}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

نقطه $(3,0)$ در فرم پارامتری به ازای $t=0$ حاصل می‌شود بنابراین:

$$k=\frac{6}{(9\sin^2+4\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=0}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

۱۱ــ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$y=\operatorname{Ln}x \Rightarrow y'=\frac{1}{x} \ , \ y''=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow y'\Big|_{(1,0)}=1 \ , \ y''\Big|_{(1,0)}=-1$$

از طرفی:

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۲ــ گزینه «۲»

$$R(t)=(\sin t,\sin t,\cos 2t) \Rightarrow V(t)=(\cos t,\cos t,-2\sin 2t)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$$

به ازای $t=\frac{\pi}{4}$، نقطه $P(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ روی منحنی به دست می‌آید. بنابراین معادله صفحه عمودی بر منحنی در این نقطه به صورت زیر است:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-2(z-0)=0 \Rightarrow \sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$$

۱۳ــ گزینه «۴»

۱۴ــ گزینه «۳»

$$r(t)=(t,\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},t^2) \Rightarrow V(t)=(1,2t^{\frac{1}{2}},2t) \Rightarrow |V(t)|=1+4t+4t^2$$

$$\Rightarrow \int_0^b \sqrt{|V(t)|}\,dt=30 \Rightarrow \int_0^b \sqrt{(1+2t)^2}\,dt=30 \Rightarrow \int_0^b (1+2t)\,dt=30 \Rightarrow b^2+b=30 \Rightarrow b=5$$

۱۵ــ گزینه «۱»

$$R(t)=(3t,4t,2) \Rightarrow V(t)=R'(t)=(3,4,0) \Rightarrow |V(t)|=5$$

۱۶ــ گزینه «۱» می‌دانیم بردار قائم واحد اصلی از فرمول $\vec{N}=\dfrac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$R(t)=(t^3-3t,3t^2) \Rightarrow V(t)=(3t^2-3,6t) \Rightarrow |V(t)|=3(t^2+1)$$

$$T(t)=\frac{V(t)}{|V(t)|}=(\frac{t^2-1}{t^2+1},\frac{2t}{t^2+1}) \Rightarrow T'(t)=(\frac{4t}{(t^2+1)^2},\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2})$$

$$\Rightarrow T'(\frac{1}{2})=(\frac{32}{25},\frac{24}{25}) \ , \ |T'(\frac{1}{2})|=\frac{8}{5} \Rightarrow \vec{N}=\frac{T'}{|T'|}=(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$$

۱۷ــ گزینه «۲»

۱۸ــ گزینه «۱» منظور از پایین‌ترین نقطه، نقطه $(0,a)$ روی منحنی می‌باشد، که طول قوس از این نقطه تا نقطه دلخواه x,y برابر است با:

$$s=\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^x \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^x \cosh\frac{x}{a}\,dx=a\sinh\frac{x}{a}$$

از طرفی:

$$y=a\cosh\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{a}$$

بنابراین: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{s}{a}$.

۱۹ــ گزینه «۴»

$$\dot{R}=(t\cos t,t\sin t) \Rightarrow \dot{V}=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t) \Rightarrow |V|=\sqrt{t^2+1}$$

$$\vec{a}=(-2\sin t-t\cos t,2\cos t-t\sin t) \Rightarrow \vec{V}\times\vec{a}=(0,0,t^2+2)$$

$$\Rightarrow k=\frac{|V\times a|}{|V|^3}=\frac{t^2+2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{a}_N=kV^2=\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$$

۲۰ــ گزینه «۱» می‌دانیم نیروی مؤثر با بردار شتاب هم‌راستا است.

$$\dot{R}(t)=(\sin 3t,\cos 3t,4t) \Rightarrow \vec{V}(t)=(3\cos 3t,-3\sin 3t,4) \Rightarrow \vec{a}(t)=(-9\sin 3t,-9\cos 3t,0)$$

چون $\vec{V}.\vec{a}=0$، پس بردار شتاب بر V یعنی مسیر حرکت عمود است.

۲۱ــ گزینه «۱» استوانه یک منحنی است که یکی از مؤلفه‌های آن بدون قید و محدودیت می‌باشد.

۲۲ــ گزینه «۴»

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2}\,dt=\sqrt{2}e^t\,dt$$

۲۳ــ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$F'(t)=\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}i+\frac{-4t}{1+t^2}j$$

چون $F(t).F'(t)=0$، بنابراین F و F' بر هم عمودند.

۲۴ــ گزینه «۲»

$$d=\int_2^5 (3t^2-2t+4)\,dt=(t^3-t^2+4t)\Bigg|_2^5=108$$

۲۵ــ گزینه «۲» مجموعه A تعداد نقاط تلاقی خم با خودش را نشان می‌دهد. منحنی پارامتری $R(t)=(\cos t,\sin t)$، $0\le t\le 4\pi$. یک دایره را نشان می‌دهد که دو بار طی شده است و بنابراین بی‌نهایت بار خودش را قطع کرده است و این در حالی است که طول خم برابر 4π می‌باشد.

۲۶ـ گزینه «۴»

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|2\times 2-0\times 2t|}{(2^2+(2t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۷ـ گزینه «۱»

◆ ◆ ◆ ◆

۲۸ـ گزینه «۴»

$$x(t)=\sin t-t\cos t \Rightarrow x'(t)=t\sin t \Rightarrow x''(t)=\sin t+t\cos t$$
$$y(t)=\cos t+t\sin t \Rightarrow y'(t)=t\cos t \Rightarrow y''(t)=\cos t-t\sin t$$
$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t^2}{t^3}=\frac{1}{t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۹ـ گزینه «۲»

$$\vec{r}(t)=(t+\cos t,t-\cos t,\sqrt{2}\sin t) \Rightarrow \vec{V}(t)=(1-\sin t,1+\sin t,\sqrt{2}\cos t)$$
$$\Rightarrow \vec{a}(t)=(-\cos t,\cos t,-\sqrt{2}\sin t)\ ,\ |V|=\sqrt{(1-\sin t)^2+(1+\sin t)^2+2\cos^2 t}=2$$
$$V(t)\times a(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-\sin t & 1+\sin t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin t \end{vmatrix}=(-\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})\vec{i}+(\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})\vec{j}+2\cos t\vec{k}$$
$$\Rightarrow |V\times a|=\sqrt{2(\sin t+1)+2(\sin t-1)^2+4\cos^2 t}=2\sqrt{2}$$

انحناء منحنی پارامتری از فرمول $k=\frac{|v\times a|}{|v|^3}$ به دست می‌آید، بنابراین $k=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

◆ ◆ ◆ ◆

تست‌های تکمیلی فصل دوم

۱ـ برای اینکه برای تابع برداری $F(t)=\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+\vec{k}$ رابطه $F'(t).F(t)=0$ برقرار باشد، a چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sin t$ ۴) $\cos t$

۲ـ طول منحنی $(t,t^2,\frac{2}{3}t^3)$ از $t=0$ تا $t=2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{22}{3}$

۳ـ طول قوس منحنی $R(t)=t\vec{i}+Ln(\frac{1}{\cos t})\vec{j}+Ln(\frac{1}{\cos t}+tgt)\vec{k}$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $Ln(1+\sqrt{2})$ ۲) $\sqrt{2}Ln\sqrt{2}$ ۳) $Ln(1+2\sqrt{2})$ ۴) $\sqrt{2}Ln(1+\sqrt{2})$

۴ـ اگر $\vec{T}$ بردار یکانی مماس بر منحنی C باشد، آنگاه $\int_C \vec{T}.d\vec{R}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) کار انجام شده توسط نیروی T
۳) طول قوس منحنی ناحیه درون C ۴) مساحت ناحیه درون C

۵ـ اگر $\alpha(t)=(6\sin 2t,6\cos 2t,5t)$ آنگاه خمیدگی α در نقطه $(0,6,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{169}$ ۲) $\frac{24}{169}$ ۳) $\frac{12}{13}$ ۴) $\frac{24}{13}$

۶ـ شعاع انحنای منحنی تابع $y=Lnx$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ کدام است؟

۱) ۲/۷ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۶ ۴) ۱/۸

۷ـ انحنای منحنی $R(t)=at\vec{i}-\frac{at+2}{b}\vec{j}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) $\frac{1}{b}$ ۴) صفر

۸ـ شعاع انحنای تابع $y=e^{\sqrt{2}x}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۵

۹ـ انحنای منحنی $y=x^2$ در کدامیک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟

۱) $p(0,0)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(2,0)$

۱۰ـ انحنای نمودار تابع $y=Ln(\cos x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱۱ـ طول قوس از خم به معادلات $x=Ln\frac{(1+\sin t)}{\cos t}-\sin t,y=\cos t$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $Ln2$ ۴) $1-Ln2$

۱۲ـ تاب منحنی $x=e^t\cos t$ ، $y=e^t\sin t$ و $z=e^t$ کدام است؟

۱) e^{-t} ۲) $\frac{e^{-t}}{2}$ ۳) $\frac{2e^{-t}}{3}$ ۴) $\frac{e^{-t}}{3}$

۱۳ـ معادله صفحه بوسان را برای منحنی $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$ در نقطه $m(2,4,8)$ کدام است؟

۱) $x+4y+12z-114=0$ ۲) $\frac{x-2}{1}=\frac{z-4}{4}=\frac{z-8}{12}$ ۳) $12x-6y+z-8=0$ ۴) $12x+4y+12z-8=0$

۱۴ـ انحنای منحنی $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ و $z=\cosh t$ در نقطه $t=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵ـ انحنای منحنی $x=2(\varphi-\sin\varphi)$ ، $y=2(1-\cos\varphi)$ در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

هر کس به لذت فراگیری ساعتی صبر نکند تا ابد در ذلت نادانی بماند. **«حضرت محمد (ص)»**
برخی کتب را باید چشید بعضی دیگر را باید بلعید و قلیلی را هم باید جوید و هضم کرد. **«فرانسیس بیکن»**

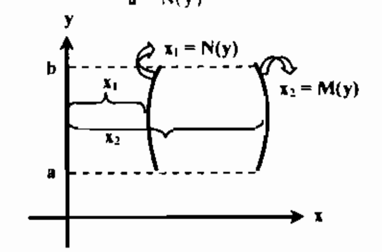
فصل سوم

«انتگرال توابع چند متغیره»

انتگرالهای دوگانه

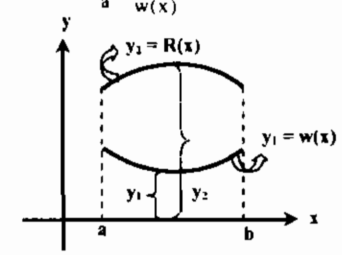
معمولاً انتگرال‌های دوگانه به دو صورت زیر در مسائل بیان می‌شوند:

$$۲)\ I=\int_a^b\int_{N(y)}^{M(y)}f(x,y)\,dx\,dy$$



توجه شود که در این حالت هر خط موازی محور xها مرز ناحیه را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند و از انتگرال ۲ استفاده می‌کنیم.

$$۱)\ I=\int_a^b\int_{w(x)}^{R(x)}f(x,y)\,dy\,dx$$



توجه شود در این حالت هر خط موازی محور yها مرز ناحیه را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند و از انتگرال ۱ استفاده می‌کنیم.

برای محاسبه انتگرال (۱) ابتدا در تابع f ، x را ثابت فرض و سپس از آن نسبت به y انتگرال می‌گیریم و مقادیر آن را بر حسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم که تابعی بر حسب x خواهد بود، سپس یک انتگرال با حدود a ، b و عبارتی بر حسب x داریم که باید از آن نسبت به x انتگرال بگیریم. برای محاسبه انتگرال (۲) ابتدا در تابع f ، y را ثابت فرض کرده و سپس از آن نسبت به x انتگرال می‌گیریم و مقادیر آن را بر حسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم که تابعی بر حسب y خواهد بود سپس یک انتگرال با حدود a ، b و عبارتی بر حسب y داریم که باید از آن نسبت به y انتگرال بگیریم، توجه کنید که در انتگرال (۱) dy و در انتگرال (۲) dx بعد از f(x,y) نوشته شده است.

مثال ۱ : حاصل انتگرال $I=\int^{۲}\int_{\frac{۲y}{۳}}^{۳}(x^۲+۲y^۲)dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲۰}{۷}$ ۳) $\frac{۳۹}{۷}$ ۴) $\frac{۳۵}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$I=\int_۰^۲\Big[\int_{\frac{۲y}{۳}}^{۳}(x^۲+۲y^۲)dx\Big]dy=\int_۰^۲\Big[\frac{x^۳}{۳}+۲xy^۲\Big]_{\frac{۲y}{۳}}^{۳}dy=$$

$$\int_۰^۲\Big(\frac{۲۷}{۳}+۶y^۲-\frac{۲۷y^۳}{۲۴}-۳y^۳\Big)dy=\int_۰^۲\Big(۹+۶y^۲-\frac{۳۳}{۸}y^۳\Big)dy=\Big[۹y+۲y^۳-\frac{۳۳}{۳۲}y^۴\Big]_۰^۲=\frac{۳۵}{۲}$$

مثال ۲ : حاصل $I=\int^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\sin x}^{\cos x}dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\Big(\int_{\sin x}^{\cos x}dy\Big)dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}[y]_{\sin x}^{\cos x}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(\cos x-\sin x)dx=[\sin x+\cos x]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\sqrt{۲}-۱$$

مثال ۳ : حاصل انتگرال $I=\int_۰^۱\int_۰^{\frac{۱}{x}}e^{xy}dy\,dx$ کدام است؟

۱) $۲e-۱$ ۲) $e-۲$ ۳) انتگرال واگراست. ۴) $\frac{e-۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I=\int_۰^۱\int_۰^{\frac{۱}{x}}e^{xy}dydx=\int_۰^۱\Big[\frac{۱}{x}e^{xy}\Big]_۰^{\frac{۱}{x}}dx=\int_۰^۱\Big(\frac{e}{x}-\frac{۱}{x}\Big)dx=(e-۱)\int_۰^۱\frac{dx}{x}=(e-۱)[\mathrm{Ln}\,x]_۰^۱=+\infty\Rightarrow$$ انتگرال واگراست

مثال ۴ : $\int_۰^۱dx\int_۰^۱\frac{x^۲dy}{۱+y^۲}$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲۴}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I=\int_۰^۱dx\int_۰^۱\frac{x^۲}{۱+y^۲}dy=\int_۰^۱[x^۲\,\mathrm{Arc\,tg}y]_۰^۱dx=\frac{\pi}{۴}\int_۰^۱x^۲dx=\frac{\pi}{۴}\Big[\frac{x^۳}{۳}\Big]_۰^۱=\frac{\pi}{۱۲}$$

مثال ۵ : حاصل $\int_۳^۴dx\int_۱^۲\frac{dy}{(x+y)^۲}$ چقدر است ؟

۱) $\mathrm{Ln}\frac{۲۵}{۲۴}$ ۲) $\mathrm{Ln}\frac{۲۴}{۲۵}$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{۲۵}{۱۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$I=\int_۳^۴dx\int_۱^۲\frac{dy}{(x+y)^۲}=\int_۳^۴\Big[-\frac{۱}{x+y}\Big]_۱^۲dx=\int_۳^۴\Big(-\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{x+۱}\Big)dx=[-\mathrm{Ln}(x+۲)+\mathrm{Ln}(x+۱)]_۳^۴$$

$$=\Big[\mathrm{Ln}\Big(\frac{x+۱}{x+۲}\Big)\Big]_۳^۴=\mathrm{Ln}\frac{۵}{۶}-\mathrm{Ln}\frac{۴}{۵}=\mathrm{Ln}\frac{۲۵}{۲۴}$$

مثال ۶ : مقدار $\iint_D f(x,y)dA$ وقتی که $f(x,y)=xy$ و D ناحیه محدود به خطوط $y=۰$ و $y=۲x$ و $x=۲$ باشد، کدامند؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۳۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y=۲x\xrightarrow{y=۰}x=۰\ ,\ x=۲$$

$$I=\int_۰^۲\int_۰^{۲x}xydydx=\int_۰^۲x\Big[\frac{y^۲}{۲}\Big]_۰^{۲x}dx=\int_۰^۲۲x^۳dx=\Big[\frac{۲x^۴}{۴}\Big]_۰^۲=۸$$

مثال ۷ : مقدار $I=\iint_A\frac{\sin x}{x}dA$ که در آن A مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به محور x ها، خط $y=x$ و خط $x=۱$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $۱-\cos۱$ ۲) $۱+\cos۱$ ۳) $\cos۱-۱$ ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$x=۱\ ,\ y=۰\ ,\ y=x\xrightarrow{y=۰}x=۰$$

$$I=\int_۰^۱\int_۰^x\frac{\sin x}{x}dydx=\int_۰^۱\Big[y.\frac{\sin x}{x}\Big]_۰^xdx=\int_۰^۱\sin xdx=[-\cos x]_۰^۱=۱-\cos۱$$

مثال ۸ : مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_D\frac{dxdy}{x+y}$ که درآن $D=\{(x,y)\,|\,y<x<۱\ ,\ x+y>۱\}$ می‌باشد، برابر است با:

۱) $۲\mathrm{Ln}(۲+\sqrt{۳})$ ۲) $\mathrm{Ln}۲-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\mathrm{Ln}۲$ ۴) $\mathrm{Ln}۳$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\begin{cases}x+y=۱\\ y=x\end{cases}\Rightarrow ۱-x=x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$I=\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\int_{۱-x}^x\frac{dydx}{x+y}=\int_{\frac{۱}{۲}}^۱[\mathrm{Ln}(x+y)]_{۱-x}^xdx=\int_{\frac{۱}{۲}}^۱(\mathrm{Ln}۲x-\mathrm{Ln}۱)dx=\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\mathrm{Ln}۲x\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\underbrace{\mathrm{Ln}۲x}_{u}\underbrace{(۲dx)}_{du}$$

$$=\frac{۱}{۲}[۲x\mathrm{Ln}۲x-۲x]_{\frac{۱}{۲}}^۱=\frac{۱}{۲}[۲\mathrm{Ln}۲-۲+۱]=\mathrm{Ln}۲-\frac{۱}{۲}$$

توجه شود در محاسبه انتگرال فوق از رابطه روبرو استفاده کردیم:

$$\int_a^b\mathrm{Ln}u\,du=[u\mathrm{Ln}u-u]_a^b$$

نکته ۱ : اگر تابع $F(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی $D: a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d$ پیوسته باشد و آنرا بتوان به صورت $f(x).g(y)$ نوشت آنگاه داریم:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x).g(y)dxdy = \int_a^b g(y)dy \int_c^d f(x)dx}$$

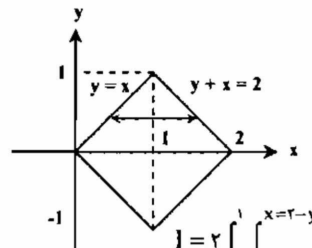
نکته ۲ : اگر تابع $f(x,y)$ نسبت به x زوج باشد و D نسبت به محور xها متقارن باشد، آنگاه می‌توانیم انتگرال را برای یکی از قسمتها (بالای محور xها یا پائین محور xها) محاسبه نمود و در نهایت عبارت را در عدد ۲ ضرب کنیم.

نکته ۳ : اگر تابع $f(x,y)$ نسبت به x فرد باشد و ناحیه D نسبت به محور y ها متقارن باشد و یا تابع f نسبت به y فرد و ناحیه D نسبت به محور x ها متقارن باشد آنگاه مقدار انتگرال $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ برابر صفر خواهد بود.

مثال ۹ : حاصل انتگرال $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$ وقتی R مربعی به رئوس $(0,0)$، $(1,1)$، $(2,0)$ و $(1,-1)$ است، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد که ناحیه R نسبت به محور x ها متقارن است لذا برای $x \ge 0$ انتگرال را محاسبه کرده و در نهایت در عدد دو ضرب می‌کنیم:



$$\begin{cases} x = y \\ x = 2 - y \end{cases} \Rightarrow y = 2 - y \Rightarrow y = 1$$

$$I = 2\int_0^1 \int_{x=y}^{x=2-y} (x^2+y^2)dxdy = 2\int_0^1 [\frac{x^3}{3} + xy^2]_y^{2-y} dy = 2\int_0^1 [\frac{1}{3}(2-y)^3 + (2-y)y^2 - \frac{y^3}{3} - y^3]dy = \frac{8}{3}$$

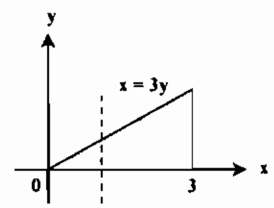
تعویض ترتیب انتگرالگیری

در بعضی انتگرالها مجبور به تعویض ترتیب انتگرالگیری هستیم و باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱۰ : مقدار $I = \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\,dy$ کدام است ؟

۱) $\frac{e^e+1}{6}$ ۲) $\frac{1-e^9}{6}$ ۳) $\frac{e^9-1}{6}$ ۴) $\frac{e^9+1}{6}$

پاسخ : گزینه «۳» محاسبه انتگرال $\int e^{x^2}dx$ ممکن نیست لذا باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم برای این منظور باید ناحیه $0 < y < 1$, $3y \le x < 3$ را رسم کنیم ملاحظه می‌شود که پس از رسم این ناحیه خط موازی محور yها مرز منحنی را در $x = 0$ و $x = 3y$ قطع می‌کند لذا داریم :

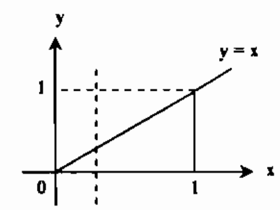


$$I = \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3 [ye^{x^2}]_0^{\frac{x}{3}}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{3}xe^{x^2}dx = [\frac{1}{6}e^{x^2}]_0^3 = \frac{e^9-1}{6}$$

مثال ۱۱ : مقدار $I = \int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx\,dy$ کدام است ؟

۱) $\frac{e+1}{6}$ ۲) $\frac{e-1}{2}$ ۳) $2(e+1)$ ۴) انتگرال قابل محاسبه نیست.

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به اینکه محاسبه انتگرال $\int e^{\frac{y}{x}}dx$ ممکن نیست لذا با رسم ناحیه $0 < y < 1$ و $y < x < 1$ داریم :



$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy\,dx = \int_0^1 [xe^{\frac{y}{x}}]_0^x\,dx = \int_0^1 x(e-1)dx = (e-1)[\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

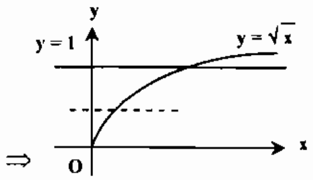
مثال ۱۲ : مقدار $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}dydx$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

محاسبه انتگرال نسبت به y ممکن نیست و باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

$$\left.\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \le y \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$



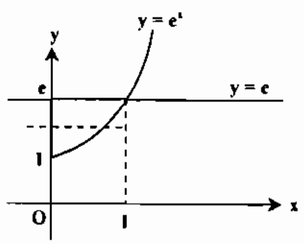
ملاحظه می‌گردد هر خط موازی محور x ها مرز ناحیه را در خطوط $x = 0$ و $x = y^2$ قطع می‌کند، و y بین 0 تا 1 تغییرات دارد، پس داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dxdy = \int_0^1 [\ ye^{\frac{x}{y}}\ ]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y(e^y - 1)dy = \int_0^1 ye^y - \int_0^1 ydy = [ye^y - e^y]_0^1 - [\frac{y^2}{2}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۳ : مقدار $I = \int_0^1 \int_{e^x}^e \frac{1}{Lny}dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{e+1}{2}$ ۲) $1-e$ ۳) $e-1$ ۴) $e+1$

پاسخ : گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد $e^x < y < e$ با رسم دو خط $y = e$ و $y = e^x$ و رسم یک خط موازی محور x ها ملاحظه می‌گردد که منحنی مرز ناحیه را در روی خطوط $x = 0$ و $x = Lny$ قطع می‌کند، و y نیز بین 1 تا e تغییرات می‌کند، لذا داریم:



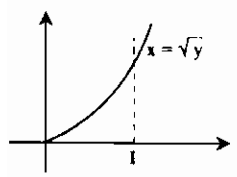
$$I = \int_0^1 \int_{e^x}^e \frac{1}{Lny}dydx = \int_1^e \int_0^{Lny} \frac{1}{Lny}dxdy = \int_1^e [\frac{x}{Lny}]_0^{Lny} = \int_1^e 1 \times dy = [y]_1^e = e - 1$$

مثال ۱۴ : مقدار $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}(e-1)$ ۲) $\frac{e}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ : گزینه «۱»

با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، خواهیم داشت:



$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^3}dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x^3}dy\,dx = \int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}$$

مثال ۱۵ : اگر $F(x) = \int_1^x e^{t^2}dt$ ، حاصل $I = \int_0^1 F(t)dt$ کدام است؟

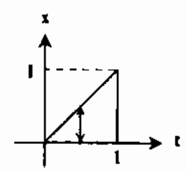
۱) $\frac{e-1}{2}$ ۲) $\frac{1-e}{2}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I = \int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \int_1^x e^{t^2}dtdx = -\int_0^1 \int_x^1 e^{t^2}dtdx$$

محاسبه e^{t^2} ممکن نیست و لذا ناحیه انتگرال را رسم و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \le t \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$$



$$I = -\int_0^1 \int_0^t e^{t^2}dxdt = -\int_0^1 [xe^{t^2}]_0^t dt = \int_0^1 -te^{t^2}dt = [-\frac{e^{t^2}}{2}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1-e}{2}$$

محاسبه بعضی از انتگرالها با استفاده از انتگرال‌گیری دوگانه

مثال ۱۶ : مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ $(a>0, b>0)$ برابر کدام است؟

۱) $e^{\frac{a}{b}}$ ۲) $\ln\frac{b}{a}$ ۳) $e^{\frac{b}{a}}$ ۴) $\ln\frac{a}{b}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $\int_0^\infty e^{-xy}dx=\frac{1}{y}$ با انتگرال‌گیری از طرفین این تساوی در فاصله a تا b داریم:

$$\int_a^b\int_0^\infty e^{-xy}dxdy=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}$$

با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

$$\Rightarrow \int_0^\infty\left(\int_a^b e^{-xy}dy\right)dx=\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

روش تستی: اگر $a = b$ در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار تابع زیر انتگرال برابر صفر و نتیجتاً انتگرال برابر صفر خواهد بود، لذا یکی از گزینه‌های ۲ و ۴ باید جواب باشد.

حال اگر $b > a$ در نظر گرفته شود آنگاه $e^{-ax}>e^{-bx}$ خواهد بود و لذا تابع زیر انتگرال مثبت می‌شود و از بین گزینه‌های دوم و چهارم مقدار مثبت زمانی اتفاق می‌افتد که $\frac{b}{a}>1$ باشد، پس گزینه (۲) صحیح است.

تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت حجم

اگر $z=f(x,y)$ در نظر گرفته شود، آنگاه انتگرال دوگانه f روی ناحیه D را می‌توان حجم جسمی تعبیر کرد که از پائین به D و از بالا به رویه $z=f(x,y)$ محدود است.

$$\boxed{V=\iint_D f(x,y)dxdy}$$

مثال ۱۷ : حجم محدود بین رویه $z=x^2+4y^2$ روی ناحیه $y^2=x$ و $x^2=y$ داخل صفحه xoy کدام است؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{3}{14}$ ۴) $\frac{9}{7}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt x}(x^2+4y^2)dydx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{4y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt x}dx=\int_0^1\left(x^2\sqrt x+\frac{4x^{\frac32}}{3}-x^4-\frac43x^6\right)dx$$

$$=\left[\frac27x^{\frac72}+\frac25\times\frac43x^{\frac52}-\frac{x^5}{5}-\frac{4}{21}x^7\right]_0^1=\frac27+\frac{8}{15}-\frac15-\frac4{21}=\frac37$$

مثال ۱۸ : حجم محدود بین رویه $x^2+y^2=4z$ و استوانه $x^2+y^2=8y$ و صفحه $z=0$ کدام است؟

۱) 45π ۲) 96π ۳) 46π ۴) 25π

پاسخ : گزینه «۴» معادلات رویه‌های داده شده را در مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم.

$$z=\frac{x^2+y^2}{4}=\frac14r^2\ ,\ x^2+y^2=8y\Rightarrow r^2=8r\sin\theta\Rightarrow r=8\sin\theta$$

$$V=\iint_A zdA=\int_0^\pi\int_0^{8\sin\theta}zrdrd\theta=\frac14\int_0^\pi\int_0^{8\sin\theta}r^3drd\theta=\frac1{16}\int_0^\pi[r^4]_0^{8\sin\theta}d\theta=256\int_0^\pi\sin^4\theta d\theta=96\pi$$

مثال ۱۹ : حجم یک جسم که از برش عرضی استوانه $y^2+4x^2=a^2$ توسط صفحه $z=my$ و $z=0$ پدید می‌آید، کدام است؟

۱) $\frac{ma^3}{2}$ ۲) $\frac{ma^3}{3}$ ۳) $\frac{ma^3}{6}$ ۴) $\frac{ma^3}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$V=2\int_0^{\frac a2}\int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}}mydydx=m\int_0^{\frac a2}[y^2]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}}dx=\frac{ma^3}{3}$$

مثال ۲۰ : حجم محدود بین صفحات $z=4-y$ ، $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=4$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ۴) 16π

پاسخ : گزینه «۴»

$$V=\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)dxdy=2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)dxdy=2\int_{-2}^2(4-y)[x]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$=2\int_{-2}^2 4\sqrt{4-y^2}-2\int_{-2}^2 y\sqrt{4-y^2}dy=16\pi$$

تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت مساحت

هرگاه در رابطه حجم $f(x,y)=1$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه مسطح D از انتگرال زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{S=\iint_D dxdy}$$

مثال ۲۱ : سطح محصور بین منحنی $y=4x-x^2$ و $y=x$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۴/۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲/۲۵

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}y=x\\y=4x-x^2\end{cases}\Rightarrow 4x-x^2=x\Rightarrow x=0\ ,\ x=3$$

$$S=\iint_D dydx=\int_0^3\int_x^{4x-x^2}dydx=\int_0^3[y]_x^{4x-x^2}dx=\int_0^3(4x-x^2-x)dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left[\frac32x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=4/5$$

توضیح: به دست آوردن سطح فوق با استفاده از فرمولهای سطح محصور بیان شده در کتاب ریاضی (۱) نیز صورت می‌گیرد.

محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

در انتگرالهایی که محاسبه آنها در مختصات قائم مشکل باشد، می‌توان با استفاده از روابط مختصات قطبی انتگرال را در دستگاه قطبی محاسبه نمود:

$(dydx=rdrd\theta\ ,\ y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta)$

تذکر ۱ : معمولاً در مسائل اگر عبارت x^2+y^2 زیر انتگرال مشاهده شود و یا ناحیه انتگرال گیری دایره و نیم‌دایره عنوان گردد استفاده از این روش پیشنهاد می‌شود.

مثال ۲۲ : مقدار انتگرال $I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt\pi}{2}$ ۴) $\sqrt\pi$

پاسخ : گزینه «۱» به هیچ طریقی محاسبه انتگرال در مختصات قائم ممکن نیست لذا در مختصات قطبی مسئله را حل می‌کنیم :

$$I=\int_0^{\frac\pi2}\int_0^\infty re^{-r^2}drd\theta=\int_0^{\frac\pi2}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty d\theta=\int_0^{\frac\pi2}\frac12d\theta=\frac\pi4$$

مثال ۲۳ : انتگرال دوگانه $z=\cos(x^2+y^2)$ در ناحیه محصور به دایره $x^2+y^2=\frac\pi6$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) 2π

پاسخ : گزینه «۱» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac\pi6}}\cos r^2\, rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac\pi6}}r\cos r^2dr=2\pi\times\left[\frac12\sin r^2\right]_0^{\sqrt{\frac\pi6}}=\pi\times\sin\frac\pi6=\frac\pi2$$

مثال ۲۴ : حاصل انتگرال $\int_D\int y\,dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به محور xها و نیم‌دایره $y=\sqrt{4-x^2}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{20}{3}$ ۴) $\frac{32}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta\ ,\ \theta = \pi \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow r\sin\theta = \sqrt{4 - r^2\cos^2\theta} \Rightarrow 0 = \sqrt{4 - r^2} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi}\int_0^{2}(r\sin\theta)r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{2} r^2\sin\theta\,dr\right]d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^2 d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \left[-\frac{8}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{16}{3}$$

تذکر ۲ : بعضاً مشاهده می‌شود در مسائل به جای r از نماد ρ استفاده می‌شود.

مثال ۲۵ : حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\rho\sin\theta\,d\rho\,d\theta$ کدام است؟

۱) 6 ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) π

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\rho\sin\theta\,d\theta\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\theta\times\frac{\cos^2\theta}{2}\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^2\theta}_{u^2}\ \underbrace{\sin\theta\,d\theta}_{-du} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

مثال ۲۶ : مقدار $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ را با فرض این که D ناحیه‌ای محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I = \iint_D\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,dydx$$

ملاحظه می‌گردد محاسبه انتگرال در مختصات دکارتی کار مشکلی خواهد بود لذا از مختصات قطبی کمک می‌گیریم ناحیه D در واقع به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$D = \{(r,\theta)\,|\,0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

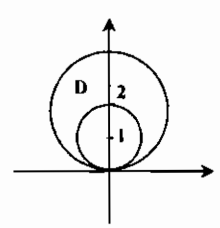
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{1 - r^2}\,r\,dr\,d\theta\ ,\ u = 1 - r^2 \Rightarrow \begin{cases} r\,dr = -\dfrac{du}{2} \\ r = 0 \Rightarrow u = 1\ ,\ r = 1 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\,du\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\theta = \frac{1}{3}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

مثال ۲۷ : مقدار $I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$ در صورتی که D ناحیه‌ای بین دایره‌های $x^2 + y^2 = 2y$ و $x^2 + y^2 = 4y$ باشد، کدام است؟

۱) $22/5\pi$ ۲) 25π ۳) 45π ۴) 50π

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»



$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r\sin\theta \Rightarrow r = 2\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r^2 = 4r\sin\theta \Rightarrow r = 4\sin\theta$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^{\pi}\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}d\theta = \int_0^{\pi}60\sin^4\theta\,d\theta$$

$$= 60\int_0^{\pi}\left(\frac{1 - \cos2\theta}{2}\right)^2 d\theta = 15\int_0^{\pi}(1 - 2\cos2\theta + \cos^2 2\theta)\,d\theta = 15\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos2\theta + \frac{1}{2} - \frac{\cos4\theta}{2}\right)d\theta$$

حاصل انتگرالهای $\cos4\theta$ و $\cos2\theta$ برابر عبارت sin کمانهای نظیر خواهد بود و می‌دانیم مقادیر سینوس این کمانها در نقاط ۰ و π صفر می‌شود، پس داریم:

$$I = 15\int_0^{\pi}\frac{3}{2}d\theta = 15\times\frac{3\pi}{2} = \frac{45\pi}{2} = 22/5\pi$$

مثال ۲۸ : مقدار $I = \iint_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول دایره $x^2 + y^2 = a^2$ و $x \ge 0$ و $y \ge 0$ است، برابر کدام است؟

۱) a ۲) صفر ۳) a^2 ۴) $-a^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I = \iint_D \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r(\cos\theta + \sin\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}[\sin\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\times 2 = a^2$$

مثال ۲۹ : حاصل انتگرال دوگانه $I = \int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2}\,dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi a^5}{5}$ ۲) $\frac{\pi a^5}{4}$ ۳) $\frac{\pi a^5}{20}$ ۴) $\frac{\pi a^5}{10}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\begin{cases} x = a \\ x = 0 \end{cases},\ \begin{cases} y = \sqrt{a^2 - x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$$

ناحیه موردنظر ربع اول دایره‌ای به شعاع a می‌باشد:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^2\sin^2\theta\times r\times r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^4\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a d\theta = \frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{a^5}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^5}{20}$$

مثال ۳۰ : اگر R ناحیه $x^2 + y^2 \le 1$، آنگاه حاصل $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA$ کدام است؟

۱) $\pi(1 + \frac{1}{e})$ ۲) $\pi(e - 1)$ ۳) $\pi(1 - \frac{1}{e})$ ۴) $\pi(e + 1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{-r^2}.r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^{1} re^{-r^2}dr = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

فرمولهای حجم و سطح در مختصات قطبی

$$\boxed{V = \iint_D f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta} \quad و \quad \boxed{S = \iint_D r\,dr\,d\theta}$$

مثال ۳۱ : مساحت سطح محصور بین دایره $r = 1$ و منحنی $r = 2 + \cos\theta$ کدام است؟

۱) $2/5\pi$ ۲) $3/5\pi$ ۳) 5π ۴) 7π

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$S = \iint_D r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{2+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2+\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(2 + \cos\theta)^2 - 1]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 + \cos^2\theta + 4\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3 + 4\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{7}{2}d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{7\times 2\pi}{2} = 3/5\pi$$

مثال ۳۲ : حجم محصور بین سطوح $z = 0$ و $z = 1 - x^2 - y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{1}{4}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۳ : مساحت خارج دایره $r = 2$ و داخل کاردیونید $r = 2(1+\cos\theta)$ کدام است؟

۱) $\pi + 4$ ۲) $\pi + 8$ ۳) $2(\pi + 4)$ ۴) $\pi^2 + 8$

پاسخ : گزینه «۲» چون منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است، لذا نیمه واقع در ربع اول را حساب می‌کنیم و عبارت را در عدد دو ضرب می‌کنیم.

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = 4\left[2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 8$$

نکته ۴ : حجم یک جسم فضائی محصور بین منحنی‌های $z_1 = f(x,y)$ و $z_2 = f_2(x,y)$ که D تصویر جسم مذکور بر صفحه xy می‌باشد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{V = \iint_D |f_2(x,y) - f_1(x,y)|\,dydx}$$

مثال ۳۴ : حجم محصور بین سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + y^2$ کدام است؟

۱) 8π ۲) 16π ۳) 4π ۴) 2π

پاسخ : گزینه «۲»

$$x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2(x^2+y^2) = 8 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

ملاحظه می‌گردد از تقاطع دو سطح فوق جسمی حاصل می‌شود که تصویرش بر صفحه xy یک دایره به شعاع ۲ می‌باشد، لذا ناحیه D به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D = \{(r,\theta) \mid -2 \le r \le 2 \;,\; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,dxdy = \iint_D [(8 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)]\,dxdy = \iint_D [8 - 2(x^2+y^2)]\,dxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(8 - \frac{16}{4}\right)d\theta = 8[\theta]_0^{2\pi} = 16\pi$$

تغییر متغیر در انتگرال دو گانه (استفاده از ژاکوبین)

در بعضی موارد که محاسبه انتگرال دو گانه نسبت به متغیرهای زیر انتگرال پیچیده باشد و یا ناحیه انتگرال‌گیری نامنظم باشد، می‌توانیم x و y را به صورت تابعی از متغیرهای جدید u و v تعریف کنیم که در این تغییر به جای $dxdy$ عبارت $|J|\,dudv$ قرار می‌دهیم، که J به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}$$

واضح است که ناحیه D در صفحه مختصات دکارتی در دستگاه جدید (uv) تغییر می‌کند و اگر این ناحیه جدید را D' بنامیم داریم:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f[\varphi(u,v), \psi(u,v)]\,|J|\,dudv$$

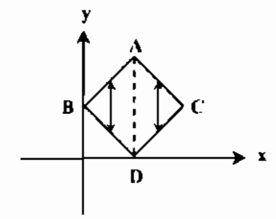
مثال ۳۵ : اگر A سطح درون یک چهار ضلعی با رئوس $(\pi,0)$ ، $(2\pi,\pi)$ ، $(\pi,2\pi)$ ، $(0,\pi)$ باشد، حاصل $I = \iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4}{3}$ ۲) $\frac{\pi^4}{6}$ ۳) $\frac{\pi^4}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{6}$

پاسخ : گزینه «۱» توجه شود ناحیه انتگرال‌گیری منظم نیست چون باید دو سر فلش در انتها و ابتدای مرز شامل یک منحنی باشد، اما ملاحظه می‌گردد در طرفین خط‌چین نشان داده شده معادلات خط دو سر فلش تغییر می‌کند. (AC و CD به معادله خط AB و BD تبدیل می‌شوند.)

$$\left.\begin{matrix} u = x - y \\ v = x + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

با رسم ناحیه در مختصات دکارتی داریم:



$$\begin{cases} AB \Rightarrow y = x + \pi \Rightarrow x - y = -\pi \\ AC \Rightarrow y = -x + 3\pi \Rightarrow x + y = 3\pi \\ BD \Rightarrow y = -x + \pi \Rightarrow x + y = \pi \\ DC \Rightarrow y = x - \pi \Rightarrow x - y = \pi \end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد $-\pi \le u \le \pi$ و $\pi \le v \le 3\pi$ می‌باشد:

$$I = \int_\pi^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v\,|J|\,dudv = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\sin^2 v\,dv = \frac{\pi^3}{3}\int_\pi^{3\pi}\left(\frac{1-\cos 2v}{2}\right)dv = \frac{\pi^3}{6}\left[v - \frac{1}{2}\sin 2v\right]_\pi^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}$$

مثال ۳۶ : اگر D ناحیه محصور بین $x = 0$ ، $y = 0$ و $x + y = 1$ باشد، آنگاه مقدار $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ برابر است با:

۱) $\frac{e - e^{-1}}{4}$ ۲) $\frac{e - e^{-1}}{3}$ ۳) $\frac{e^2 - 1}{2e}$ ۴) 2

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{matrix} u = x + y \\ v = x - y \end{matrix}\right\} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = y \\ v = -y \end{cases} \Rightarrow u = -v$$

$$\Rightarrow -u \le v \le u$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v$$

$$x + y = 1 \Rightarrow v = 1 \;,\; v = 0$$

$$I = \int_0^1\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \times \frac{1}{2}\,dvdu = \frac{1}{2}\int^1 \left[ue^{\frac{v}{u}}\right]_{-u}^{u} dv = \int_0^1\left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)dv = \frac{e - e^{-1}}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{4}$$

مثال ۳۷ : مساحت محصور بین $xy = 1$ ، $xy^{1/4} = 1$ و $xy^{1/4} = 2$ ، $xy = 3$ کدام است؟

۱) $Ln10$ ۲) $5Ln2$ ۳) 5 ۴) $2Ln10$

پاسخ : گزینه «۲» نواحی کاملاً نامنظم هستند، لذا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$u = xy \;,\; v = xy^{1/4}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^{1/4} & 1/4xy^{0/4} \end{vmatrix}} = \frac{1}{1/4xy^{1/4} - xy^{1/4}} = \frac{1}{0/4xy^{1/4}} = \frac{10}{4xy^{1/4}} = \frac{2/5}{xy^{1/4}} = \frac{2/5}{v}$$

$$S = \iint_D dxdy = \int_1^3\int_1^2 \frac{2/5}{v}\,dvdu = 2/5[Lnv]_1^2 = \int_1^3 2/5Ln2\,du = 2/5Ln2[u]_1^3 = 5Ln2$$

مثال ۳۸ : مقدار $I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$ را در صورتی‌که D ناحیه بین خطوط $y = x$ ، $y = -x$ ، $y = x - 2$ و $y = 2 - x$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{16}{6}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\left.\begin{matrix} x + y = u \\ x - y = v \end{matrix}\right\} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y + x = 2 \Rightarrow u = 2 \;,\; y = -x \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x - y = 2 \Rightarrow v = 2 \;,\; y = x \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \iint_D \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x+y)^2]\,dxdy = \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\frac{1}{2}\,dudv = \frac{8}{3}$$

مثال ۳۹ : مقدار انتگرال $I=\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}dxdy$ در صورتی که D ناحیه داخل مثلثی که در بین صفحات $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$ باشد، کدام است؟

۱) $\cos 1$ ۲) $\sin 1$ ۳) $\frac{\sin 1}{2}$ ۴) $\frac{\cos 1}{2}$

☑ پاسخ : گزینه «۳»

$$\left.\begin{matrix} x-y=u \\ x+y=v \end{matrix}\right\} \Rightarrow J=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-y \\ v=y \end{cases} \Rightarrow u=-v$$

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} u=x \\ v=x \end{cases} \Rightarrow u=v \qquad \Rightarrow \boxed{-v\le u\le v}$$

$$x+y=1 \Rightarrow v=1 \ , \ v=0$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 v[\sin\frac{u}{v}]_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}[\sin(1)-\sin(-1)]\int_0^1 vdv=\frac{2\sin 1}{2}[\frac{v^2}{2}]_0^1=\frac{\sin 1}{2}$$

مقدار متوسط تابع f

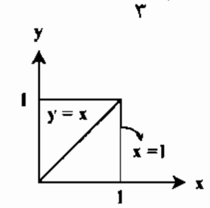
مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه D از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boxed{\bar{f}=\frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{\text{مساحت ناحیه } D}}$$

مثال ۴۰ : مقدار متوسط تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را بر روی سطح مثلثی به رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(1,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ پاسخ : گزینه «۴»



$$\begin{cases} I=\iint_D f(x,y)dxdy \\ D \text{ مساحت ناحیه } =\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{f}=\frac{\int_0^1\int_0^x(x^2+y^2)dydx}{\frac{1}{2}}=2\int_0^1[x^2y+\frac{y^3}{3}]_0^x dx=2\int_0^1(x^3+\frac{x^3}{3})dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{2}{3}$$

جرم، مرکز ثقل و گشتاور ماند یک صفحه مسطح

اگر D یک ناحیه مسطح باشد که در نقطه (x,y) دارای چگالی $\rho(x,y)$ باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

$$D \text{ جرم صفحه } = M=\iint_D \rho(x,y)dxdy$$

$$\text{مختصات مرکز ثقل}=\begin{cases} \bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy=\frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} \\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)dxdy=\frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} \end{cases}$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور x ها} = I_{x^2}=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور y ها} = I_{y^2}=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به مبدأ مختصات} = I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$$

مثال ۴۱ : جرم یک جسم دایره‌ای شکل با شعاع ۱ و تابع چگالی $\rho=\sqrt{1-x^2-y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}\pi$ ۴) 2π

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$M=\iint_D \rho.dxdy=\iint_D\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

با توجه به مشاهده (x^2+y^2) بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم، ناحیه D دایره‌ای به شعاع یک است، لذا داریم:

$$D:\{(r,\theta)|0\le r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\}\ ,\ dxdy=rdrd\theta$$

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdrd\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\underbrace{(1-r^2)}_{u}^{\frac{1}{2}}\underbrace{(-2r)dr}_{du}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{3}\times[\theta]_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}$$

مثال ۴۲ : جرم یک صفحه مربعی با رئوس $(0,0)$،$(0,a)$،$(a,0)$ و (a,a)، که چگالی آن در نقطه (x,y) سه برابر مربع فاصله آن نقطه از مبدأ مختصات می‌باشد، کدام است؟

۱) a^4 ۲) $2a^4$ ۳) $\frac{2}{3}a^4$ ۴) $\frac{3}{2}a^4$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$\rho(x,y)=3(x^2+y^2)$$

$$M=\int_0^a\int_0^a 3(x^2+y^2)dydx=3\int_0^a[x^2y+\frac{y^3}{3}]_0^a dx=3\int_0^a[x^2a+\frac{a^3}{3}]dx=3[\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3}{3}x]_0^a=2a^4$$

مثال ۴۳ : گشتاور ماند یک صفحه دایره‌ای به شعاع ۲ و چگالی سطحی $\rho=1$ نسبت به محور x ها و مبدأ مختصات به ترتیب کدام است؟

۱) $8\pi, 4\pi$ ۲) $4\pi, 8\pi$ ۳) $4\pi, 4\pi$ ۴) $8\pi, 16\pi$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$I_0=\iint(x^2+y^2)\rho dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3drd\theta=8\pi$$

$$I_{x^2}=I_{y^2}=\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}\times 8\pi=4\pi$$

انتگرالهای سه‌گانه

روش حل برای انتگرالهای سه‌گانه نیز مانند انتگرالهای دوگانه می‌باشد. اگر انتگرال سه گانه $I=\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ رادر نظر بگیریم و داشته باشیم:

$$a\le x\le b\ ,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\ ,\ \psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)$$

در این حالت ابتدا باید نسبت به z انتگرال‌گیری کرده پس از آن نسبت به y و در نهایت نسبت به x .

$$I=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\int_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)}f(x,y,z)dzdydx$$

مثال ۴۴ : مقدار $I=\iiint_V x^2ydV$ ناحیه محدود به صفحات مختصات و خطوط $z=1$ و $y=1$ و $x=1$ است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ پاسخ : گزینه «۳»

$$I=\iiint_V x^2ydV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2ydzdydx=\int_0^1\int_0^1 x^2ydydx=\int_0^1 x^2[\frac{y^2}{2}]_0^1dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=[\frac{x^3}{6}]_0^1=\frac{1}{6}$$

مثال ۴۵ : حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z\int_0^y \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

پاسخ : گزینه «۱»

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z\int_0^y \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z[-\cos(x+y+z)]_0^y\,dy\,dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z[-\cos(2y+z)+\cos(y+z)]dy\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{2}\sin(2y+z)+\sin(y+z)]_0^z\,dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\sin 3z+\sin 2z+\frac{1}{2}\sin z-\sin z)dz=[\frac{1}{6}\cos 3z+\cos z-\frac{1}{2}\cos 2z-\frac{1}{2}\cos z]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

مثال ۴۶ : حاصل انتگرال $I=20\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}x^2y\,dz\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{20}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{32}{3}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$I=20\int_0^1\int_0^x(\int_0^{xy}dz)x^2y\,dy\,dx=20\int_0^1[\int_0^x x^4y^2dy]dx=20\int_0^1[x^4(\frac{y^3}{3})]_0^x dx=20\int_0^1(\frac{x^7}{3})dx=20[\frac{x^8}{24}]_0^1=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

نکته ۵ : حجم محصور در ناحیه D را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\boxed{V=\iiint_D dxdydz}$$

مثال ۴۷ : حجم محصور بین صفحات $z=0$ ، $x+z=1$ و منحنی $x=y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{16}{15}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{8}{15}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$(z=1-x\ ,\ z=0)\ ,\ z=0\Rightarrow x=1\xrightarrow{x=y^2}y^2=1\Rightarrow -1\le y\le 1$$

$$V=\int_{-1}^1\int_{y^2}^1\int_0^{1-x}dzdxdy=\int_{-1}^1\int_{y^2}^1(1-x)dxdy=\int_{-1}^1[x-\frac{x^2}{2}]_{y^2}^1dy=\int_{-1}^1(1-\frac{1}{2}-y^2+\frac{y^4}{2})dy$$

$$=[\frac{1}{2}y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{10}]_{-1}^1=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10})-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10})=\frac{8}{15}$$

مثال ۴۸ : حجم جسمی قائم که قاعده آن در صفحه xoy ، محدود به محور xها و نیمساز ناحیه اول و خط $x=1$ و از بالا به صفحه $z=x+1+y$ محدود است، کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» $V=\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y+1}dzdydx=\int_0^1\int_0^x(x+y+1)dydx=\int_0^1[xy+\frac{y^2}{2}+y]_0^x dx=\int_0^1(\frac{3x^2}{2}+x)dx=1$

مثال ۴۹ : حجم محصور بین دو استوانه $x^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2=a^2$ کدام است؟

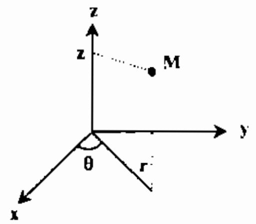
۱) $\frac{8a^3}{5}$ ۲) $\frac{16a^3}{3}$ ۳) $\frac{41a^3}{3}$ ۴) $\frac{7a^3}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» با تبدیل x به $-x$، y به $-y$ و z به $-z$ معادلات تغییر نمی‌کنند، پس ناحیه نسبت به صفحات مختصات متقارن است و در هر ۸ ناحیه فضا وجود دارد، پس با محاسبه حجم در $\frac{1}{8}$ فضا و در نهایت ضرب جواب در عدد ۸ پاسخ به دست می‌آید:

$$V=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dzdydx=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}dydx=8\int_0^a(a^2-x^2)dx$$

$$=8\times[a^2x-\frac{x^3}{3}]_0^a=8\times[a^3-\frac{a^3}{3}]=\frac{16a^3}{3}$$

محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه با استفاده از مختصات استوانه‌ای



هر نقطه به صورت M(x,y,z) در مختصات دکارتی به صورت زیر با مختصات استوانه‌ای در ارتباط می‌باشد.

$$x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta\ ,\ z=z\ ,\ dxdydz=rdrd\theta dz$$

تذکر ۱ : همواره $0\le\theta\le 2\pi$ و $r\ge 0$ خواهد بود.

مثال ۵۰ : حجم محدود به رویه $x^2+y^2+z=4$ و $z\ge 0$ و استوانه $x^2+y^2=2$ کدام است؟

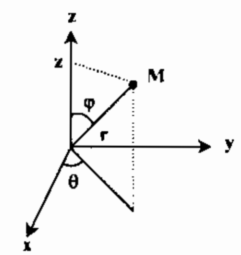
۱) 2π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 8π

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از مختصات استوانه‌ای مسأله را حل می‌کنیم:

$$z=4-(x^2+y^2)=4-r^2\quad ,\quad x^2+y^2=2\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{4-r^2}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}[4r-r^3]dr=2\pi\times[2r^2-\frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{2}}=2\pi\times(4-1)=6\pi$$

محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه با استفاده از مختصات کروی



هر نقطه به صورت M(x,y,z) در مختصات دکارتی به صورت زیر با مختصات کروی در ارتباط می‌باشد.

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta\ ,\ z=r\cos\varphi\\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \theta=\text{Arctg}\frac{y}{x}\ ,\ \varphi=\text{Arccos}\frac{z}{r}\\ dxdydz=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi\end{cases}$$

تذکر ۲ : همواره $0\le\varphi\le\pi$ ، $0\le\theta\le 2\pi$ و $r\ge 0$ خواهد بود.

مثال ۵۱ : حجم محدود به کره‌ای به معادله $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل مخروط دوار $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ ۲) $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ ۳) $\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{3}$ ۴) $\frac{\pi(\sqrt{2}+2)}{3}$

پاسخ : گزینه «۱» کره مورد نظر دارای معادله $\rho=1$ و مخروط داده شده دارای معادله‌ای به صورت $\varphi=\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، پس داریم:

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ 0\le\rho\le 1$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\times\int_0^1\rho^2d\rho=2\pi\times[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}\times[\frac{\rho^3}{3}]_0^1=\frac{2\pi}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$$

نکته ۶ : اگر ناحیه D در مسائل به صورت بیضی با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیان گردد، در این صورت جایگزینی‌های زیر می‌تواند مفید باشد:

$$x=ar\cos\theta\ ,\ y=br\sin\theta\ ,\ J=abr$$

که ناحیه D به دایره‌ای به شعاع یک تبدیل می‌شود.

مثال ۵۲ : حجم محدود به سطوح $4z=x^2+4y^2$ و $x^2+4y^2=48-8z$ در ناحیه $x>0$ ، $y>0$ و $z>0$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 5π ۳) 6π ۴) 8π

پاسخ : گزینه «۳»

$$V=\iiint dzdxdy=\iint_D\int_{\frac{1}{4}(x^2+4y^2)}^{\frac{1}{8}(48-x^2-4y^2)}dzdxdy=\iint_D(-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}y^2+6)dxdy$$

$$2\begin{cases}x^2+4y^2=4z\\ x^2+4y^2=48-8z\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو معادله با هم}}3x^2+12y^2=48\Rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

چون ناحیه D بیضی با a = ۴ و b = ۲ می‌باشد، داریم:

$$x=4r\cos\theta\ ,\ y=2r\sin\theta\ ,\ J=2\times4\times r\ ,\ 0\le r<1\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(6-6r^2)(8r)drd\theta=6\pi$$

نکته ۷: اگر ناحیه V به شکل بیضی گون با معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیان گردد با تبدیل زیر این بیضی به کره به معادله $\rho=1$ تبدیل می‌گردد:

$$J=abc\rho^2\sin\varphi\ ,\ x=a\rho\cos\theta\sin\varphi\ ,\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z=c\rho\cos\varphi$$

مقدار متوسط تابع f (x, y, z)

مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه V از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boxed{\bar f=\frac{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz}{\text{حجم ناحیه } V}}$$

مثال ۵۳ : مقدار متوسط تابع $f(x,y,z)=xyz$ روی یک مکعب که در یک هشتم اول واقع و به صفحات $x=2$ ، $y=2$ و $z=2$ محدود است کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۶۰

پاسخ : گزینه «۱»

$$I=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyzdxdydz=\int_0^2\int_0^2 yz[\frac{x^2}{2}]_0^2dydz=\int_0^2\int_0^2 2yzdydz=\int_0^2[y^2z]_0^2dz=\int_0^2 4zdz=80$$

$$\text{مقدار متوسط } xyz=\frac{I}{V_{\text{مکعب}}}=\frac{80}{2\times2\times2}=10$$

جرم، گشتاور ماند و مرکز ثقل اجسام (دارای حجم)

اگر یک جسم با حجم V با تابع چگالی حجم $\rho=f(x,y,z)$ در نقطه (x,y,z) واقع در ناحیه ρ تعریف شود، آنگاه روابط جرم جسم، گشتاور ماند نسبت به محورهای مختصات و مبدأ مختصات و مختصات مرکز ثقل جسم به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\text{جرم جسم}=M=\iiint_D\rho dV$$

$$\text{مختصات مرکز ثقل}=\begin{cases}\bar x=\dfrac{\iiint_D x\rho dV}{M}\\[2mm] \bar y=\dfrac{\iiint_D y\rho dV}{M}\\[2mm] \bar z=\dfrac{\iiint_D z\rho dV}{M}\end{cases}$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور y ها}=\iiint_D\rho(x^2+z^2)dV\quad,\quad\text{گشتاور ماند نسبت به مبدأ مختصات}=\iiint_D\rho(x^2+y^2+z^2)dV$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور z ها}=\iiint_D\rho(x^2+y^2)dV\quad,\quad\text{گشتاور ماند نسبت به محور x ها}=\iiint_D\rho(y^2+z^2)dV$$

مثال ۵۴ : جرم یک سه وجهی محصور بین صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ درصورتی که تابع چگالی $\rho=1$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{60}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$M=\iiint_D dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx=\int_0^1[y-xy-\frac{y^2}{2}]_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1[1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}]dx=\int_0^1[1-2x+x^2-\frac{1}{2}(1+x^2-2x)]dx=\int_0^1(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2)dx=[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}]_0^1=\frac{1}{6}$$

مثال ۵۵ : گشتاور ماند حول محور zها برای حجم محدود به کره $r=1$ (از بالا) و مخروط $\varphi=\frac{\pi}{3}$ (از پائین) با چگالی $\rho=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$I_{zz}=\iiint_V\rho(x^2+y^2)dv$$

با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$I_{zz}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\times r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)d\varphi\times\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1 r^4dr$$

$$=[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{3}}\times[\theta]_0^{2\pi}\times[\frac{r^5}{5}]_0^1=\frac{\pi}{12}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ مساحت مقطع بیضیوار $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ با صفحه $z=4$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{36\pi}{25}$ ۲) $\frac{42\pi}{25}$ ۳) $\frac{48\pi}{25}$ ۴) $\frac{54}{25}\pi$

۲ـ حاصل $\iint_R xy\,dA$ وقتی R ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=1$ و محورهای مختصات در ربع اول باشد، کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳ـ مقدار انتگرال $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است، برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}\pi ab$ ۲) $\frac{2}{3}\pi ab$ ۳) πab ۴) $\frac{4}{3}\pi ab$

۴ـ مقدار $\int^{1}\int_x^{1}\sqrt{1-y^2}\,dydx$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

۵ـ حاصل $\int^{1}(\int^{x^2}(x^2+y^2)dydx)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{26}{21}$ ۲) $\frac{26}{50}$ ۳) $\frac{26}{75}$ ۴) $\frac{26}{105}$

۶ـ حاصل $\iint_D e^{\frac{y}{x}}dA$ وقتی D ناحیهٔ درون مثلث حاصل از خطوط به معادله $y=x$ ، $y=0$ و $x=1$ باشد، کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $2(e-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۳) $2e-\frac{1}{2}$ ۴) $2e+\frac{1}{2}$

۷ـ حجم جسم محدود به رویه‌های به معادلات $36x^2+9y^2+4z=36$ و $4x^2+y^2-z=4$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) 10π ۲) 11π ۳) 13π ۴) 12π

۸ـ حجم محدود به صفحه $z=0$ از پائین، مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از بالا و استوانه $x^2+y^2-2ax=0$ از اطراف، با کدام رابطه برابر است؟

(عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ۲) $\frac{8}{3}a^3$ ۳) $\frac{32}{9}a^3$ ۴) $\frac{16}{3}\pi a^3$

۹ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\cos(y^3)dydx$ چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\sin 8}{6}$ ۲) $\frac{\sin 8}{3}$ ۳) $\frac{\sin 8}{2}$ ۴) ۱/۳۳۳۳

۱۰ـ مقدار $\int^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}\sqrt{x^3+1}\,dxdy$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{17}{3}$ ۲) $\frac{26}{3}$ ۳) $\frac{26}{9}$ ۴) $\frac{52}{9}$

۱۱ـ حاصل $\int^{5}\int^{\sqrt{25-x^2}}dydx$ ، کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{15\pi}{2}$ ۲) $\frac{25\pi}{2}$ ۳) $\frac{15\pi}{4}$ ۴) $\frac{25\pi}{4}$

۱۲ـ حاصل $\iint_D e^{2y-x}dxdy$ که در آن میدان D مثلثی با سه رأس (۱ و ۲) و (۰ و ۲) و مبدأ مختصات باشد، کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}+e^{-2}$ ۲) $1-e^{-2}$ ۳) $\frac{1}{2}(1+e^{-2})$ ۴) $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

۱۳ـ حاصل $\int^{2}\int^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dydx$ برابر کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}5$ ۳) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{4}\text{Ln}5$

۱۴ـ اگر D مساحت مربع واحد به رئوس $(0,0)$، $(0,1)$، $(1,0)$، $(1,1)$ و $f(x,y)=yx^{\frac{-1}{2}}$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D f(x,y)dxdy$ چقدر است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

۱۵ـ حجم محصور به سهمی‌گون $az=x^2+y^2$، صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=2ax$ و $(a>0)$، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^3$

۱۶ـ مقدار انتگرال $\iint\limits_D x^2dxdy$ که در آن D ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi a^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi a^3 b}{4}$ ۳) $\frac{\pi a^3 b}{3}$ ۴) $\frac{\pi a^3}{4}$

۱۷ـ تابع $f(x,y)$ با دامنه تعریف $0\le x,y\le 2$ به صورت تابع $f(x,y)=\begin{cases}x(2+y) & 0\le x\le y\\ y(1+x^2) & y\le x\le 2\end{cases}$ تعریف شده مقدار $\iint_D f(x,y)dxdy$ چقدر باشد؟

(عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) ۹/۲ ۲) ۱۰/۲ ۳) ۱۱/۲ ۴) ۱۲/۲

۱۸ـ جواب انتگرال $\int^{2}\int_1^{e^x}x\,dydx$ چیست؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) e^2-1 ۲) e^2-3 ۳) e^2+1 ۴) e^2

۱۹ـ حاصل $\int^{1}\int_1^{x}x^2e^{xy}dydx$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}e-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}e+\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}$

۲۰ـ حاصل $\int_1^{e}\int^{x}\frac{dydx}{(x+y)^2}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۲۱ـ حاصل $\int^{1}dx\int_x^{\sqrt{x}}\phi(x,y)dy$ با کدام گزینه برابر است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\int_0^{1}dy\int_y^{\sqrt{y}}\phi(x,y)dx$ ۲) $\int^{1}dy\int_0^{\sqrt{y}}\phi(x,y)dx$ ۳) $\int^{1}dy\int_{y^2}^{y}\phi(x,y)dx$ ۴) $\int_0^{1}dy\int_0^{1}\phi(x,y)dx$

۲۲ـ حجم محدود بین استوانه به معادله‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{11}{2}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{17}{3}$

۲۳ـ حاصل $\iint_E \cos(x+y)dxdy$ وقتی E ناحیهٔ محدود به خط $y=x$ و $y=\pi$ و $x=۰$ باشد، کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

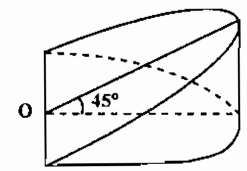
۲۴ـ جرم جسم محدود به دو استوانه به معادله‌های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+z^۲=۱$ با چگالی در نقطه (x,y,z) برابر $|xyz|$، کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۵ـ مقدار انتگرال $\int^{\frac{\pi}{۲}}\int_x^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin y}{y}dydx$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

۲۶ـ جسم شکل زیر (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعدهٔ نیم‌دایره به شعاع واحد بوده و زاویه صفحهٔ P و صفحهٔ قاعده جسم ۴۵° درجه می‌باشد، حجم این جسم کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۷ـ حاصل $\iiint \frac{dxdydz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ در ناحیه بین دو کره به شعاع ۱ و ۴ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $۴\pi Ln۴$ ۲) $۸\pi Ln۴$ ۳) $۴\pi Ln۲$ ۴) $۸\pi Ln۲$

۲۸ـ جرم جسمی که درون استوانهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ و خارج مخروط به معادلهٔ $z^۲=x^۲+y^۲$ قرار داشته با چگالی در نقطهٔ (x,y,z) برابر $\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد، کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۲۹ـ اگر $D=\{(x,y)\in R^۲ \mid |x|+|y|\le ۱\}$ و $I=\int_{-۱}^{۱} f(u)du$ ، $\iint\limits_D f(x+y)dxdy$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-I$ ۲) $\frac{۱}{۲}I$ ۳) I ۴) $۲I$

۳۰ـ مقدار $\iint \frac{x+y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy$ روی ربع اول دایرهٔ به معادله $x^۲+y^۲=a^۲$ عبارتست از: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) πa ۲) $a^۲$ ۳) $\pi a^۲$ ۴) $\frac{a^۲}{۲}$

۳۱ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int^{۴}\int_{x/۲}^{۲} e^{y^۲}dydx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $e^۳-۱$ ۲) $e^۳+۱$ ۳) $e^۴+۱$ ۴) $e^۴-۱$

۳۲ـ با تغییر متغیرهای $۲xy=v$ ، $x^۲-y^۲=u$ مقدار انتگرال $\iint_D (x^۲+y^۲)dxdy$ که در آن D ناحیه محصور به منحنی‌های زیر می‌باشد، کدام است؟
(عمران ـ سراسری ۸۱)

$$x^۲-y^۲=۱\ ,\ x^۲-y^۲=۹\ ,\ xy=۲\ ,\ xy=۴$$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۳ـ حاصل $\int_{-۱}^{۱}\int^{\sqrt{۱-x^۲}} (x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}dydx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۵}$

۳۴ـ انتگرال چندگانه $\int^{۲}\int_{۲x}^{۴}\int^{۱} dzdydx$ نشانگر کدامیک از حالات زیر است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۱)

۱) یک منشور مثلث القاعده ۲) یک هرم مثلث القاعده ۳) یک مکعب مستطیل ۴) یک متوازی‌السطوح

۳۵ـ مساحت محدود به سهمی‌های $y^۲=۴-x$ و $y^۲=۴-۴x$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\int_{-۲}^{۲}\int_{\frac{y^۲}{۴}-۱}^{۴-y^۲} dxdy$ ۲) $\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{۴-y^۲} dxdy$ ۳) $۲\int_{۰}^{۲}\int_{۱-\frac{y^۲}{۴}}^{۴-y^۲} dxdy$ ۴) $\int_{-۲}^{۲}\int_{\sqrt{۴-x}}^{\sqrt{۴-۴x}} dxdy$

۳۶ـ اگر D ناحیه $\begin{cases} ۱\le x^۲+y^۲\le ۴ \\ y\ge ۰ \end{cases}$ در صفحه باشد، حاصل $\iint_D Ln(x^۲+y^۲)dA$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $۲\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۲) $\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۳) $۴\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۴) $۴۲\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$

۳۷ـ D را ناحیه $x^۲+y^۲+۲y\le ۰$ در نظر بگیرید. مقدار $\iint_D (x+y)dA$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) π ۲) ۲π ۳) $-\pi$ ۴) -۲π

۳۸ـ حاصل $\int_{-۱}^{۱}\int^{\sqrt{۱-x^۲}} (x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}dydx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۵}$

۳۹ـ حجم ناحیهٔ محدود به استوانهٔ به معادله $y=x^۲$ و صفحهٔ به معادله $y+z=۴$ و صفحات xy و yz و واقع در ناحیهٔ اول از ۸ ناحیهٔ فضا کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۶۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۶۴}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۲۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۳۰}$

۴۰ـ اگر چگالی یک جسم مکعب شکل به ابعاد واحد در هر نقطه (x,y,z) از ناحیه‌ای که اشغال می‌کند به صورت $\delta(x,y,z)=۱+x+yz$ باشد، جرم این جسم برابر است با:
(معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۴۱ـ حجم چنبرهٔ به معادله $\rho=۳\sin\phi$ در مختصات کروی کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۹\pi^۲}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi^۲}{۴}$ ۳) $\frac{۲۷\pi^۲}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷\pi^۲}{۴}$

۴۲ـ کدام روش برای محاسبه مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y=x$ و $y=x^۲$ نادرست است؟
(معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\int_{۰}^{۱}\int_{x^۲}^{x} dxdy$ ۲) $\int_{۰}^{۱}\int_{y}^{\sqrt{y}} dxdy$ ۳) $\int_{۰}^{۱}\int_{x^۲}^{x}(x^۲-x)dxdy$ ۴) $\int_{۰}^{۱}(x-x^۲)dx$

۴۳ـ اگر A ناحیه محدود به دایره به معادله $x^۲+y^۲=۱$ در ناحیهٔ اول مختصات باشد حاصل $\iint\limits_A e^{-(x^۲+y^۲)}dA$ کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{۴}e^{-۱}$ ۲) $\pi e^{-۱}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\pi(۱-e^{-۱})$ ۴) $\pi(۱-e^{-۱})$

۴۴ـ حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار داشته و محدود به سطح به معادله $z=x^۲+y^۲+۱$ صفحهٔ به معادله $۲x+y=۲$ و صفحات مختصات می‌باشد کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲۲}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲۲}{۴}$

۴۵ـ مقدار انتگرال سه‌گانه $\iiint_R \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz$ که در آن R ناحیه محصور بین صفحه $z=0$، دو کره به مرکز مبدأ و شعاع‌های ۱ و ۲ و خارج نیم مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{6}$

۴۶ـ حجم ناحیه T محدود به سهموی به معادلهٔ $z=4-x^2-y^2$ و صفحه xy کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 5π ۲) 6π ۳) 7π ۴) 8π

۴۷ـ مقدار انتگرال $\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dV$ بر روی کره ۱ $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{4}\pi e$ ۲) $\frac{4}{3}\pi e$ ۳) $\frac{3}{4}\pi(e-1)$ ۴) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

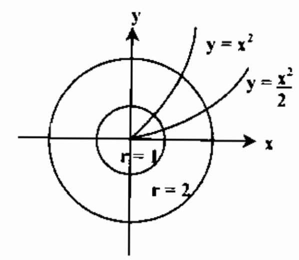
۴۸ـ به فرض آنکه V ناحیه محصور بین نمودارهای $Z=x^2+2y+1$ و $Z=y+2$ در یک هشتم اول باشد، حجم V کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۴۹ـ مقدار انتگرال $\iint_D (\frac{x-2y}{x+2y})^2 dxdy$ که در آن D ناحیـه محـصور بـه خطـوط، $x-2y=1$ ، $x-2y=2$ ، $x+2y=1$ و $x+2y=3$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵۰ـ حاصل $\iint_D \frac{2y^2+x^2}{x^3}dxdy$ که در آن D به صورت زیر است، چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)



۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) 1

۵۱ـ مقدار انتگرال $\int^{\infty}\int^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) e ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $+\infty$

۵۲ـ مقدار انتگرال دو گانه $\iint_R (x\sin y - ye^x)dxdy$ ، که در آن $R=\{(x,y)|-1\le x\le 1,\ 0<y\le\frac{\pi}{2}\}$ برابر است با: (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) $(\frac{1}{e}-e^2)\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $(\frac{1}{e}-e^{-2})\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $(\frac{1}{e}+e^2)\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $(\frac{1}{e}-e)\frac{\pi^2}{8}$

۵۳ـ حجم هرم مثلث القاعده‌ای که قاعدهٔ آن در صفحه $z=-6$ قرار دارد و وجوه آن صفحات قائم $y=0$ و $y-x=4$ و صفحهٔ مورب $2x+y+z=4$ است برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $\int_0^6\int_{y-4}^{\frac{1-y}{2}}\int_{-6}^{4-2x-y}dzdxdy$ ۲) $\int_0^6\int_{y-4}^{\frac{6-y}{4}}\int_{-6}^{4-2x-y}dzdxdy$

۳) $\int_0^4\int_{y-4}^{\frac{1-y}{2}}\int_{-6}^{4-2x-y}dzdxdy$ ۴) $\int_0^4\int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}}\int_{-6}^{4-2x-y}dzdxdy$

۵۴ـ انتگرال معین $\int_{-3}\int_{-\sqrt{9-x^2}} 2xydydx$: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) مساحت ربع دایرهٔ $x^2+y^2=9$ است.
۲) مساحت نیم دایرهٔ $x^2+y^2=9$ است
۳) مساحت نواری از دایرهٔ $x^2+y^2=9$ محدود به محور yها و خط $x=-2$ است.
۴) مساحت نیم‌نواری از دایرهٔ $x^2+y^2=9$ محدود به محور xها و yها و خط $x=-2$ است.

۵۵ـ حاصل $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\cos(x^2+y^2)dydx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) $\pi\sin 1$ ۳) π ۴) $\pi\cos 2$

۵۶ـ مقدار $\int^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}dydx$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۵۷ـ حجم هرم محدود به صفحهٔ $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ و صفحات مختصات کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 6

۵۸ـ اگر $R=[1,2]\times[0,1]$ ، $\iint_R\frac{1}{x+y}dxdy$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $\mathrm{Ln}\frac{9}{4}$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{27}{16}$ ۴) $+\infty$

۵۹ـ مقدار انتگرال $\int_D \exp(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dV$ درصورتیکه Dگوی یکه در R^3 باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{4}\pi(e-1)$ ۲) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$ ۳) $\frac{4}{3}\pi(1-e)$ ۴) $\frac{3}{4}\pi(1-e)$

۶۰ـ حجم محدود به دو رویه $2z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{3}$

۶۱ـ انتگرال $I=\int^{\infty}\int^{x} xe^{-x^2/y}dydx$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۶۲ـ حجم محصور بین سطوح $z=1-x^2-y^2$ و $z=0$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) 1 ۲) 4π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۳ـ اگر A درون یک چهار ضلعی با رئوس $(0,\pi)$ و $(\pi,2\pi)$ و $(2\pi,\pi)$ و $(\pi,0)$ باشد، آنگاه $I=\iint_A (x-y)^2\sin^2(x+y)dxdy$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\pi^4}{6}$ ۲) $\frac{\pi^4}{3}$ ۳) $\frac{\pi^3}{3}$ ۴) $\frac{\pi^3}{6}$

۶۴ـ مساحت محصور به منحنی‌های، $xy=4, xy=8, xy^3=5, xy^3=15$ برابرکدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $4\mathrm{Ln}3$ ۲) $2\mathrm{Ln}3$ ۳) $2\mathrm{Ln}5$ ۴) $4\mathrm{Ln}5$

۶۵ـ حاصل انتگرال $\iint xe^{x+y}dxdy$ روی ناحیه $(x,y)\in[1,2]\times(-\infty,-2]$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) e ۲) -1 ۳) 1 ۴) $e-1$

۶۶ـ حجم محدود به رویه $z=9-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=4$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) 14π ۲) 16π ۳) 18π ۴) 28π

۶۷ـ قاعدهٔ جسمی قائم منطبق بر دایره $x^2+y^2=9$ و مقطع آن با هر صفحه عمود بر محور x ها یک مربع است، حجم آن کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) 72 ۲) 108 ۳) 126 ۴) 144

۶۸ـ مقدار $\int^{1}\int_{y}^{1}\sin x^2dxdy$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\cos 1-1$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$

۶۹ـ اگر $f(x,y)=\mathrm{Max}\{x,y\}$ به ازای هر (x,y) در مربع D، که در آن $0\le x\le 1$، $0\le y\le 1$، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)dxdy$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۰ـ در یک هشتم اول فضا (ناحیه $x>0$، $y>0$ و $z>0$) حجم محدود به رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=1$ و صفحات yz, xz برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{18}$

۷۱ـ حاصل $\iint_R e^{-x^2}dxdy$ که در آن R ناحیه محدود به محور xها، خط $x=1$ و $y=x$ می‌باشد کدامیک از اعداد زیر است؟

(معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{e-1}{2e}$ ۳) $\frac{e\sqrt{\pi}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}(1+e)}{2}$

۷۲ـ حجم محدود به رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه به معادله $x+y=1$ و صفحات مختصات کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۳ـ مقدار $\iint_E \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ وقتی E ناحیه محدود به $x=0$، $y=0$ و $x+y\le 1$ باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۴ـ مقدار $\int^{1}\int^{1}[x+y]dxdy$ (که در آن [ ] علامت جزءصحیح است) کدام عدد است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۷۵ـ مقدار $\iiint_E \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ وقتی E حجم محدود به کره به مرکز مبدأ و به شعاع واحد است، کدام عدد است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۷۶ـ جرم ستاره‌ای کروی شکل به شعاع a که دارای چگالی $\rho(x,y,z)=30e^{-\left[\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$ می‌باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $40\pi a^3(1-\frac{1}{e})$ ۲) $20\pi a^3(1-\frac{1}{e})$ ۳) $40\pi a^3(1+\frac{1}{e})$ ۴) $20\pi a^3(1+\frac{1}{e})$

۷۷ـ مقدار انتگرال $\int^{1}\int^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $e-1$ ۲) $\frac{e-1}{2}$ ۳) $e+1$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

۷۸ـ مقدار انتگرال $\iiint_B (x^2+y^2)dxdydx$ که در آن B ناحیه (گوی) $x^2+y^2+z^2\le a^2$ می‌باشد کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{8\pi a^5}{15}$ ۲) $\frac{4\pi a^5}{15}$ ۳) $\frac{8\pi a^5}{5}$ ۴) $\frac{4\pi a^5}{5}$

۷۹ـ مقدار انتگرال $(\lambda>0)$ $I=\int^{1}dx\int_{x}^{1}\frac{y^{\lambda}}{x^2+y^2}dy$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{\lambda}$ ۲) $\frac{\pi}{4\lambda}$ ۳) $\frac{2\pi}{\lambda}$ ۴) $\frac{\pi}{2\lambda}$

۸۰ـ مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ روی ناحیه $R:\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{9}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۳) $\pi(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\pi\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

۸۱ـ مرکز جرم ناحیه $a>0$ و $y\ge 0$، $x^2+y^2\le a^2$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ ۲) $\left(0,\frac{4}{3\pi}a\right)$ ۳) $\left(\frac{4}{3\pi}a,0\right)$ ۴) $\left(\frac{2}{3\pi}a,\frac{2}{3\pi}a\right)$

۸۲ـ مقدار انتگرال $\int^{1}dy\int_{y}^{1}\sin\pi x^2dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸۳ـ مقدار انتگرال دو گانه $\iint_D xdA$ روی ناحیه مثلثی D به رأس‌های $(1,0)$، $(2,2)$ و $(2,0)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۸۴ـ حجم ناحیه محدود به صفحه‌های $x-2y+z=\pm 2$، $x+y+2z=\pm 3$ و $4x+y+z=\pm 6$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) 3 ۳) 16 ۴) 26

۸۵ـ اگر جسم S توسط سطوح به معادله‌های $z=xy$ و $y=x^2$ و $y^2=x$ و صفحه $z=0$ محدود شده باشد، حجم آن کدام است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۸۶ـ حجم محدود شده توسط مخروط به معادلهٔ $z^2=x^2+y^2$ و کره به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=4z$ و در بالای مخروط کدام است؟

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) 9π ۲) 8π ۳) 7π ۴) 6π

۸۷ـ مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x^2+y^2+1}dydx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴)

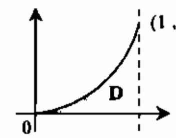
۱) $\frac{\pi}{3}Ln(1+\sqrt{2})$ ۲) $\frac{\pi}{4}Ln(1+\sqrt{2})$ ۳) $\frac{\pi}{3}Ln(1+\sqrt{3})$ ۴) $\frac{\pi}{3}Ln(1+\sqrt{3})$

۸۸ـ حاصل $\iint_R x^2y^2dA$ وقتی R ناحیهٔ محدود به خطوط به معادله‌های $y=1$ ، $x=0$ و $x=y$ باشد کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{5}$

۸۹ـ اگر $D=\{(x,y): 0\le y\le x^2 \ , \ 0\le x\le 1\}$ ، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه ناسره $\iint_D\frac{dA}{(x-y)^2}$ ، کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)



۱) صفر
۲) ۱
۳) Ln۲
۴) ∞

۹۰ـ اگر $D=\{(x,y)\in R^2 : 0\le y\le x^2 , 0\le x\le 1\}$ ، آنگاه مقدار انتگرال غیرعادی (ناسره) $\iint_D\frac{dA}{(x+y)^2}$ ، کدام است؟

(معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲Ln۲ ۲) ۱ ۳) Ln۲ ۴) ∞

۹۱ـ حجم ناحیه‌ای از فضای سه بعدی R^3 که مقطع آن با صفحهٔ xy مثلث توپر با رئوس $(0,0),(1,0),(0,1)$ بوده و برشهای آن توسط صفحاتی عمود بر محور y، نیم‌دایره هستند عبارتست از .... (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{30}$ ۲) $\frac{\pi}{24}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۹۲ـ حجم جسمی که در ناحیهٔ اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و محدود به صفحات مختصات و سطوح به معادله‌های $z=2+x^2+3y^2$ و $x^2+y^2=1$ باشد، کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{6\pi}{4}$ ۳) $\frac{2\pi}{4}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۹۳ـ حاصل $\int_0^1\int_0^{\sin x}\frac{xdydx}{\sqrt{1-y^2}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۹۴ـ مقدار حجم ناحیه محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمیگون $x^2+y^2+3z=4$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۹۵ـ حاصل $\iiint_R\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ وقتی R ناحیه محدود به دو کره $x^2+y^2+z^2=2$ و $x^2+y^2+z^2=1$ باشد، کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲πLn۲ ۲) ۴πLn۲ ۳) ۲πLn۳ ۴) ۴πLn۳

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ گزینه «۴» مقطع بیضیوار با صفحه داده شده، بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{9}{25}$ می‌باشد. که اگر معادله آن را به فرم $\frac{x^2}{(\frac{6}{5})^2}+\frac{y^2}{(\frac{9}{5})^2}=1$ بنویسیم،

آنگاه: $S=\pi ab=\pi\times\frac{6}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{54\pi}{25}$

۲ـ گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R xydA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta\times r\sin\theta\times rdrd\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta\times\int_0^1 r^3dr=\frac{-1}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$

۳ـ گزینه «۲» از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=ar\sin\theta\end{cases} , \ J=abr$$

$$\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\times abrdrd\theta=2\pi ab\times\frac{-1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab$$

۴ـ گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^1\int_x^1\sqrt{1-y^2}dydx=\int_0^1\int_0^y\sqrt{1-y^2}dxdy=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=\frac{-1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

۵ـ گزینه «۴»

$$\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dydx=\int_0^1(x^4+\frac{1}{3}x^6)dx=\frac{26}{105}$$

۶ـ گزینه «۲»

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}dA=\int_0^1\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dydx=\int_0^1 xe^{\frac{y}{x}}\Big|_0^x dx=\int_0^1(xe-x)dx=\frac{1}{2}(e-1)$$

۷ـ گزینه «۳» معادلات رویه‌های داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}z=4x^2+y^2-4\\ z=9-\frac{9}{4}y^2-9x^2\end{cases}$$

دو رویه همدیگر را روی بیضی $4x^2+y^2=4$ و یا $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ در صفحه $z=0$ قطع می‌کنند.

حجم موردنظر از بالا محدود به رویه $z=9-\frac{9}{4}y^2-9x^2$ و از پایین محدود به رویه $z=4x^2+y^2-4$ می‌باشد. بنابراین اگر ناحیه درون بیضی $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ را D فرض کنیم، آنگاه:

$$V=\iint_D((9-\frac{9}{4}y^2-9x^2)-(4x^2+y^2-4))dA=13\iint_D(1-x^2-\frac{y^2}{4})dA$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$x=r\cos\theta \ , \ y=2r\sin\theta\Rightarrow J(r,\theta)=2r$$

بنابراین:

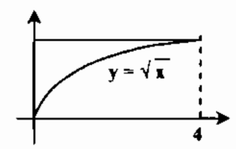
$$V=13\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\times 2rdrd\theta=13\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1(2r-2r^3)dr=13\pi$$

۸ـ گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $z = r$ و معادله استوانه به صورت $r = 2a\cos\theta$ و $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ در می‌آید. بنابراین:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^r r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{8a^3}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32a^3}{9}$$

۹ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:



$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\,dy = \int_0^2 y^2\cos(y^3)\,dy = \frac{1}{3}\sin(y^3)\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\sin 8$$

۱۰ـ گزینه «۴» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,dy\,dx = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{52}{9}$$

۱۱ـ گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 r\,dr\,d\theta = \frac{25\pi}{4}$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\iint_D e^{2y-x}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{2y-x}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2y-x}\Big|_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}\right)dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1+e^{-2})$$

۱۳ـ گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{1}{1+r^2} \times r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\,dr = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+r^2)\Big|_0^2 = \frac{\pi}{4}\mathrm{Ln}5$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 yx^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 \times \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = 1$$

۱۵ـ گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله سهمیگون به صورت $az = r^2$ و معادله استوانه به صورت $r = 2a\cos\theta$ ، $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ در می‌آید. بنابراین:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{\frac{1}{a}r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \frac{1}{a}r^3\,dr\,d\theta = 4a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi a^3}{2}$$

۱۶ـ گزینه «۲» از دستگاه مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta \times abr\,dr\,d\theta = a^3b\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

۱۷ـ گزینه «۱»

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^y x(2+y)\,dx\,dy + \int_0^2 \int_y^2 y(1+x^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{2} + y^2\right)dy + \int_0^2 \left(-\frac{y^4}{3} - y^2 + \frac{14}{3}\right)dy = \frac{14}{3} + \frac{68}{15} = 9.2$$

۱۸ـ گزینه «۱»

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} x\,dy\,dx = \int_0^2 x(e^x - 1)\,dx = \left(xe^x - e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = e^2 - 1$$

۱۹ـ گزینه «۲»

$$I = \int_0^1 \int_1^x x^2e^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 xe^{xy}\Big|_1^x dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx - \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 - (xe^x - e^x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۱»

$$\int_1^e \int_0^x \frac{dy}{(x+y)^2}\,dx = \int_1^e \frac{-1}{x+y}\Big|_0^x dx = \int_1^e \left(\frac{-1}{2x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}x\Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

۲۱ـ گزینه «۳»

۲۲ـ گزینه «۳» به متن درس مراجعه کنید.

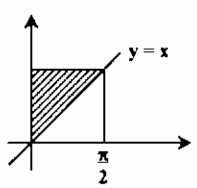
۲۳ـ گزینه «۴»

$$\iint_E \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^y \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^\pi (\sin 2y - \sin y)\,dy = \left(\frac{-1}{2}\cos 2y + \cos y\right)\Big|_0^\pi = -2$$

۲۴ـ گزینه «۲» با توجه به وجود تقارن ناحیه انتگرال‌گیری و چگالی داده شده نسبت به محورهای مختصات، کافی است مقدار جرم در یک هشتم اول را محاسبه کرده و حاصل را در هشت ضرب کنیم. بنابراین:

$$M = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xyz\,dz\,dy\,dx = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2)\,dy\,dx = 2\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{3}$$

۲۵ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy = 1$$

۲۶ـ گزینه «۳» صفحه P موردنظر صفحه $z = y$ می‌باشد. بنابراین:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

۲۷ـ گزینه «۱ و ۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^4 \frac{1}{\rho^3} \times \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^4 \frac{1}{\rho}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\phi\,d\phi \int_1^4 \frac{1}{\rho}\,d\rho = 2\pi \times 2 \times \mathrm{Ln}4 = 4\pi\mathrm{Ln}4 = 8\pi\mathrm{Ln}2$$

۲۸ـ گزینه «۱» ناحیه درون دایرهٔ $x^2+y^2=1$ را D می‌نامیم، در این صورت جرم جسم موردنظر برابر است با:

$$M=\iint_D\left(\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right)dxdy=\iint_D 2(x^2+y^2)\,dxdy$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1 2r^3dr=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$$

۲۹ـ گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac12 & \frac{-1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

با تغییر متغیر فوق ناحیه D در صفحه uv به صورت روبرو در می‌آید: $R:-1\le u\le 1\ ,\ -1\le v\le 1$

بنابراین:

$$\iint_D f(x+y)dxdy=\iint_R f(u)\,|J(u,v)|\,dudv=\frac12\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(u)dudv=\frac12\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}f(u)du\right)=\frac12\int_{-1}^{1}Idv=I$$

۳۰ـ گزینه «۲» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r}\times rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\times\int_0^a rdr=a^2$$

۳۱ـ گزینه «۴» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{2}e^{y^2}dydx=\int_0^2\int_0^{2y}e^{y^2}dxdy=\int_0^2 2ye^{y^2}dy=e^{y^2}\Big|_0^2=e^4-1$$

۳۲ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4x^2+4y^2$$

با تعویض متغیرهای داده شده مرزها به صورت $1\le u\le 9$ و $2\le v\le 4$ در می‌آیند. بنابراین:

$$I=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_1^9\int_2^4(x^2+y^2)\times\frac{1}{4x^2+4y^2}dudv=\frac14\int_1^9\int_2^4 dudv=4$$

۳۳ـ گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{\frac32}dydx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(r^2)^{\frac32}rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^4dr=\frac{\pi}{5}$$

۳۴ـ گزینه «۱» ناحیه $0\le x\le 2$ و $2x\le y\le 4$ یک مثلث تشکیل می‌دهد و با توجه به اینکه $0\le z\le 1$، پس ناحیه مـوردنظر یک منـشور مثلث‌القاعده می‌باشد.

۳۵ـ گزینه «۳»

۳۶ـ گزینه «۱» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D Ln(x^2+y^2)dA=\int_0^{\pi}\int_1^2 Ln(r^2)\times rdrd\theta=2\int_0^{\pi}d\theta\times\int_1^2 rLnr\,dr=2\pi(Ln4-\frac34)$$

۳۷ـ گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه D به صورت زیر در می‌آید:

$$D=\{0\le r\le -2\sin\theta\}\ ,\ \pi\le\theta\le 2\pi$$

بنابراین:

$$\iint_D(x+y)dA=\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{-2\sin\theta}(r\sin\theta+r\cos\theta)\times rdrd\theta$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{-2\sin\theta}r^2(\sin\theta+\cos\theta)drd\theta=\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{-8}{3}\sin^4\theta-\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta=-\pi$$

۳۸ـ گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\times rdrd\theta=\int_0^{\pi}d\theta\times\int_0^1 r^4dr=\frac{\pi}{5}$$

۳۹ـ گزینه «۴» حجم محصور به زیر صفحه $z=4-y$ مدنظر می‌باشد، بنابراین:

$$V=\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}}(4-y)dxdy=\int_0^4(4\sqrt{y}-y\sqrt{y})dy=\frac{128}{15}$$

۴۰ـ گزینه «۴»

$$\iiint_V\delta(x,y,z)dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1+x+yz)dxdydz=\int_0^1\int_0^1\left(\frac32+yz\right)dydz=\int_0^1\left(\frac32+\frac12 z\right)dz=\frac74$$

۴۱ـ گزینه «۳»

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3\sin\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\Big|_0^{3\sin\phi}d\phi d\theta=9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\phi\,d\phi d\theta$$

$$=9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)d\phi d\theta=9\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(\frac14-\frac12\cos2\phi+\frac14\cos^2 2\phi\right)d\phi$$

$$=18\pi\int_0^{\pi}\left(\frac14-\frac12\cos2\phi+\frac18(1+\cos4\phi)\right)d\phi=18\pi\times\frac{3\pi}{8}=\frac{27\pi^2}{4}$$

۴۲ـ گزینه «۳»

۴۳ـ گزینه «۳» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 e^{-r^2}\times rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\times\int_0^1 re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{2}\left(\frac12-\frac{e^{-1}}{2}\right)=\frac14\pi(1-e^{-1})$$

۴۴ـ گزینه «۱»

$$V=\int_0^1\int_0^{2-2x}(x^2+y^2+1)dydx=\int_0^1\left((x^2+1)(2-2x)+\frac13(2-2x)^3\right)dx=\frac{11}{6}$$

۴۵ـ گزینه «۲» تابع تحت انتگرال نسبت به x فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال‌گیری توصیف شده در مسأله نسبت به متغیر x متقارن است. پس انتگرال برابر صفر است.

۴۶ـ گزینه «۴» محل تلاقی سهموی و صفحه xy، دایره $D:x^2+y^2=4$ می‌باشد. بنابراین:

$$V=\iint_D(4-x^2-y^2)dA\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^2(4r-r^3)dr=8\pi$$

۴۷ـ گزینه «۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\times\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\times\int_0^1\rho^2e^{\rho^3}d\rho=2\pi\times2\times\left(\frac13e-\frac13\right)=\frac{4\pi}{3}(e-1)$$

۴۸ـ گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو رویه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y + 1 \\ z = y + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y + 1 = y + 2 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2+2y+1}^{y+2} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x^2 - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2)^2 dx = \frac{4}{15}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $u = x - 2y$ و $v = x + 2y$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow J = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3 dx\,dy = \int_1^2 \int_1^2 \left(\frac{u}{v}\right)^3 \times \frac{1}{4} du\,dv = \frac{1}{4}\int_1^2 \int_1^2 \frac{u^3}{v^3} du\,dv = \frac{15}{16}\int_1^2 \frac{dv}{v^3} = \frac{5}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «۳» با توجه به مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x^2}$ و $v = x^2 + y^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \frac{-4y^2}{x^3} - \frac{2x}{x^2} = \frac{-4y^2 - 2x^2}{x^3}$$

بنابراین $|J| = \frac{x^3}{2x^2 + 4y^2}$. و کرانهای ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $\frac{1}{2} \le u \le 1$ و $1 \le v < 4$ در می‌آید. در نتیجه:

$$\iint_D \frac{2y^2 + x^2}{x^2} dA = \int_1^4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x^2 + y^2}{x^3} \times \frac{x^3}{2x^2 + 4y^2} du\,dv = \int_1^4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} du\,dv = \frac{3}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال مزبور از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۴» چون تابع $x\sin y$ فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x متقارن است، بنابراین انتگرال آن برابر صفر می‌شود.

$$\iint_R (x\sin y - ye^x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 -ye^x dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -y\,dy \times \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{-\pi^2}{8}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۴»

◆ ◆ ◆ ◆

۵۵ـ گزینه «۲» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos r^2\,dr\,d\theta = \theta\Big|_0^{2\pi} \times \frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^1 = \pi \sin 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۶ـ گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{y} dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \frac{\cos y}{y} dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۷ـ گزینه «۱» به طور کلی حجم هرم محدود به صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ و صفحات مختصات برابر $V = \frac{abc}{6}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸ـ گزینه «۳»

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx\,dy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{x+y} dx\,dy = \int_0^1 \mathrm{Ln}(2+y) - \mathrm{Ln}(1+y)\,dy$$

$$= [(2+y)\mathrm{Ln}(2+y) - (2+y) - (1+y)\mathrm{Ln}(1+y) + (1+y)]\Big|_0^1 = \mathrm{Ln}\frac{27}{16}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹ـ گزینه «۲» به تست (۴۷) مراجعه کنید.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۰ـ گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادلات رویه‌ها به صورت $z = \frac{r^2}{2}$ و $z = r$ در می‌آید. دو رویه همدیگر را در $r = \frac{r^2}{2}$ و یا $r = 2$ قطع می‌کنند، بنابراین:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2 - \frac{r^3}{2}\right) dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱ـ گزینه «۳»

$$\int_0^{\infty} \int_0^x xe^{\frac{-x^2}{y}} dy\,dx = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} xe^{\frac{-x^2}{y}} dx\,dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2}$$

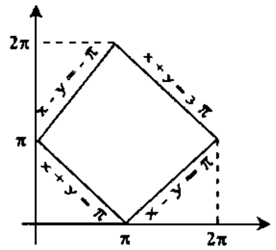
◆ ◆ ◆ ◆

۶۲ـ گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \times r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 (r - r^2)\,dr = \frac{\pi}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۳ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = x + y$ و $v = x - y$ استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل مرزهای چهارضلعی به صورت $\pi < u < 3\pi$ و $-\pi < v < \pi$ در می‌آیند.



$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} v^2 \sin^2 u\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} v^2 dv \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u\,du = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi^3}{3} \times \pi = \frac{\pi^4}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۴ـ گزینه «۲» با تغییر متغیرهای $u = xy^2$ و $v = xy$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ y & x \end{vmatrix} = -2xy^2 = -2u \Rightarrow |J| = \frac{1}{2u}$$

بنابراین:

$$S = \int_4^8 \int_5^{15} \frac{1}{2u} du\,dv = \frac{1}{2}\int_4^8 dv \times \int_5^{15} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \times 4 \times (\mathrm{Ln}15 - \mathrm{Ln}5) = 2\mathrm{Ln}3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۵ـ گزینه «۳»

$$\int_1^2 \int_{-\infty}^{-2} xe^{x+y} dy\,dx = \int_1^2 xe^x dx \times \int_{-\infty}^{-2} e^y dy = (xe^x - e^x)\Big|_1^2 \times e^y\Big|_{-\infty}^{-2} = e^2 \times e^{-2} = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۶ـ گزینه «۴» برای محاسبه، حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^2 (9r - r^3)\,dr = 28\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۷ـ گزینه «۴» مقطع موردنظر مربعی به ضلع $2y$ می‌باشد که مساحت آن برابر $4y^2$ است، بنابراین:

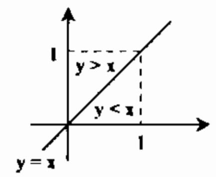
$$V = \int_{-3}^3 4y^2 dx = 4\int_{-3}^3 (9 - x^2)\,dx = 144$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۸ـ گزینه «۴» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم، در این صورت:

$$\int_0^1\int_y^1 \sin x^2 dxdy = \int_0^1\int_0^x \sin x^2 dydx = \int_0^1 x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

۶۹ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل:



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x xdydx + \int_0^1\int_0^y ydxdy = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 y^2dy = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۷۰ـ گزینه «۳» حجم محصور به زیر صفحه $z=1$ و بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ مدنظر می‌باشد. برای محاسبه حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. معادله مخروط به صورت $z=r$ در می‌آید. بنابراین:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_r^1 rdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (1-r)rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^1 r(1-r)dr = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{\pi}{12}$$

۷۱ـ گزینه «۲»

$$\iint_R e^{-x^2}dxdy = \int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{e-1}{2e}$$

۷۲ـ گزینه «۳» می‌خواهیم حجم محدود به زیر رویه $z=x^2+y^2$ را در فاصله $0\le y\le 1$ و $0\le x\le 1$ به دست آوریم.

$$V = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dydx = \int_0^1 (x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3})dx = (\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{12})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

۷۳ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{+1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

ناحیه E با تغییر متغیر فوق به صورت $0\le v\le 1$ و $-v\le u\le v$ در می‌آید. بنابراین:

$$\iint_E \sin(\frac{x-y}{x+y})dxdy = \int_0^1\int_{-v}^v \sin\frac{u}{v}\times\frac{1}{2}dudv$$

تابع $\sin\frac{u}{v}$، نسبت به متغیر u تابعی فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به u متقارن است، بنابراین حاصل انتگرال برابر صفر است.

۷۴ـ گزینه «۱»

$$I = \int_0^1\int_0^1 [x+y]dydx = \int_0^1\int_0^{1-x}[x+y]dydx + \int_0^1\int_{1-x}^1 [x+y]dydx$$

در فاصله $0\le y<1-x$، عبارت $0\le x+y<1$ و بنابراین $[x+y]=0$، ولی در فاصله $1-x\le y<1$، $1\le x+y<1+x<2$ و بنابراین $[x+y]=1$. در نتیجه:

$$I = \int_0^1\int_{1-x}^1 dydx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

۷۵ـ گزینه «۴» با توجه به شکل ناحیه انتگرال‌گیری و انتگرالده بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم.

$$I = \iiint_E \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2\sin\phi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\phi+4}}d\rho d\phi d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

۷۶ـ گزینه «۱»

$$M = \iiint_V \delta dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a 20e^{-\frac{\rho^2}{a^2}}\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = 20\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin\phi\times\int_0^a \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{a^2}}d\rho = 40\pi a^3(1-\frac{1}{e})$$

۷۷ـ گزینه «۲» از تغییر مختصات $u=y$ و $v=x+y$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |J| = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1\int_0^v e^{\frac{u}{v}}dudv = \int_0^1 ve^{\frac{u}{v}}\Big|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1)dv = \frac{e-1}{2}$$

۷۸ـ گزینه «۱» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a \rho^2\sin^2\phi\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^a \rho^4 d\rho = 2\pi\times\frac{4}{3}\times\frac{a^5}{5} = \frac{8\pi a^5}{15}$$

۷۹ـ گزینه «۲»

$$\int_0^1\int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}dydx = \int_0^1\int_0^y \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 y^{\lambda-1}\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^y dy = \frac{\pi}{4}\int_0^1 y^{\lambda-1} = \frac{\pi}{4\lambda}$$

۸۰ـ گزینه «۲» با توجه به شکل ناحیه انتگرال‌گیری و همچنین انتگرالده، لازم است برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده کنیم. در این صورت:

$$\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{9} \Rightarrow \frac{\pi^2}{16}\le r^2\le\frac{\pi^2}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{4}\le r\le\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin r}{r}\times rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin rdr$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi}\times(-\cos r)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi\times(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pi(\sqrt{2}-1)$$

۸۱ـ گزینه «۲» چون شکل ناحیه نسبت به محور yها متقارن است، پس $\bar{x}=0$. برای محاسبهٔ $\bar{y}$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{y} = \frac{\iint_D ydA}{\iint_D dA}$$

مقدار $\iint_D dA$ برابر مساحت ناحیه داده شده می‌باشد و چون ناحیه داده شده نیم‌دایره‌ای به شعاع a است، پس $\iint_D dA = \frac{\pi a^2}{2}$. از طرفی:

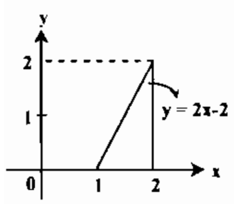
$$\iint_D ydA = \int_{-a}^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydydx = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2-x^2)dx = \frac{2a^3}{3}$$

در نتیجه $\bar{y} = \dfrac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \dfrac{4a}{3\pi}$.

۸۲ـ گزینه «۳» محاسبه مستقیم انتگرال امکان‌پذیر نیست، بنابراین انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_0^1 dy\int_y^1 \sin(\pi x^2)dx = \int_0^1\int_0^x \sin(\pi x^2)dydx = \int_0^1 x\sin(\pi x^2)dx = \frac{-1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

۸۳ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل:



$$\iint_C xdA = \int_1^2\int_0^{2x-2} xdydx = \int_1^2 (2x^2-2x)dx = \frac{5}{3}$$

۸۴ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = x-2y+z \\ v = x+y+2z \\ w = 4x+y+z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

بنابراین $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{-1}{18}$. پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-6}^{6} |J|\,dwdvdu = \frac{1}{18}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-6}^{6} dwdvdu = \frac{1}{18}\times 12\times 6\times 4 = 16$$

۸۵ـ گزینه «۲» از تلاقی $y = x^2$ ، $y^2 = x$ ، مقادیر ۰ و ۱ برای به x به دست می‌آید، بنابراین:

$$S = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xydydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)dx = \frac{1}{12}$$

۸۶ـ گزینه «۲» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در مختصات کروی معادلات مخروط و کره داده شده به ترتیب $\phi = \frac{\pi}{4}$ و $\rho = 4\cos\phi$ می‌باشد. بنابراین:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{64}{3}\cos^3\phi\sin\phi d\phi d\theta = \frac{64}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} \times \frac{-1}{4}\cos^4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{128\pi}{3}\times(\frac{-1}{4}(\frac{+1}{4}-1)) = 8\pi$$

۸۷ـ گزینه «۲»

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dydx}{(\sqrt{x^2+1})^2 + y^2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{Arctg}\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_0^{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$$

۸۸ـ گزینه «۱»

$$\iint_R x^2y^2 dA = \int_1^2\int_1^y x^2y^2 dxdy = \frac{1}{3}\int_1^2 y^5 dy = \frac{7}{2}$$

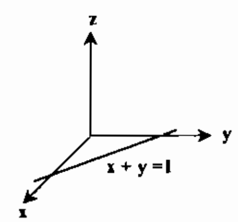
۸۹ـ گزینه «۴»

$$\iint_D \frac{dA}{(x-y)^2} = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{1}{(x-y)^2}dydx = \int_0^1 \frac{1}{x-y}\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 (\frac{1}{x-x^2} - \frac{1}{x})dx = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \infty$$

۹۰ـ گزینه «۳»

$$\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2} = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{dydx}{(x+y)^2} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \mathrm{Ln}2$$

۹۱ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل مساحت مقاطع مربوطه برابر مساحت یک نیم‌دایره به شعاع $\frac{1-x}{2}$ می‌باشد، بنابراین مساحت مقطع برابر $\frac{1}{2}\pi(\frac{1-x}{2})^2$ است و در نتیجه:



$$V = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi(\frac{1-x}{2})^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{\pi}{24}$$

۹۲ـ گزینه «۱» ناحیه موردنظر زیر سهمیگون $z = 2 + x^2 + 3y^2$ و بالای صفحه xy در ربع اول و درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. بنابراین:

$$V = \iint_C (2+x^2+3y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (2+r^2+2r^2\sin^2\theta)\times rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{5}{4}+\frac{1}{4}(1-\cos 2\theta))d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

۹۳ـ گزینه «۴»

$$\int_0^1\int_0^{\sin x} \frac{xdydx}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 x\mathrm{Arcsin}\,y\Big|_0^{\sin x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

۹۴ـ گزینه «۳» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $z = r$ و معادله سهمیگون به صورت $z = \frac{4-r^2}{3}$ در می‌آید. بنابراین:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2}} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\frac{4-r^2}{3} - r)drd\theta = \frac{\pi}{2}$$

۹۵ـ گزینه «۱» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم، در این صورت معادله کره‌ها به ترتیب $\rho = \sqrt{2}$ و $\rho = 1$ خواهد بود. بنابراین:

$$\iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^3}\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\pi}\sin\phi \times \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi\times 2\times\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2 = 2\pi\mathrm{Ln}2$$

تست‌های تکمیلی فصل سوم

۱ـ حاصل $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\int^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta+\varphi)d\theta d\varphi$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۲ـ حاصل $I=\iint_R xydxdy$ در صورتی که R محدود به نواحی $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $x^2+y^2=a^2$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{a^4}{4}$ ۲) $\frac{a^4}{2}$ ۳) $\frac{a^4}{8}$ ۴) $\frac{a^4}{12}$

۳ـ حاصل $I=\iint_S\sqrt{xy-y^2}dxdy$ در صورتی که S مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(1,0)$ باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۸

۴ـ حاصل $I=\int^{4a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}}dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{16a^2}{3}$ ۲) $\frac{8a^2}{3}$ ۳) $\frac{4a^2}{3}$ ۴) $\frac{8a^2}{3}$

۵ـ حاصل $I=\int^{a}\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}xydydx$ کدام است؟

۱) $\frac{3a^3}{8}$ ۲) $\frac{3a^4}{8}$ ۳) $\frac{6a^4}{8}$ ۴) $\frac{6a^3}{8}$

۶ـ حاصل $I=\int^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dydx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۷ـ حاصل $I=\int^{\pi}\int^{a\sin\theta}rdrd\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi a^2}{2}$ ۲) $\frac{\pi a^2}{4}$ ۳) πa^2 ۴) $\frac{\pi a^3}{2}$

۸ـ حاصل $I=\int^{2}\int^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{xdydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۹ـ حاصل $I=\int_{-1}^{2}\int_{-3}^{3}(y^2-3xy)dxdy$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳

۱۰ـ حاصل $I=\int_1^2\int^2 e^{x+y}dxdy$ کدام است؟

۱) $(e-1)(e+1)^2$ ۲) $e(e^2+1)$ ۳) $e(e^2-1)$ ۴) $e(e+1)(e-1)^2$

۱۱ـ حاصل $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x+y)dxdy$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) صفر ۴) -1

۱۲ـ حاصل $I=\int^{1}\int^{\sqrt{1+x^2}}\frac{dydx}{x^2+y^2+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})}{4}$ ۲) $\frac{\pi\mathrm{Ln}(\sqrt{2}-1)}{4}$ ۳) $\frac{\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)}{4}$ ۴) $\frac{\mathrm{Ln}(\sqrt{2}-1)}{4}$

۱۳ـ انتگرال دوگانه $I=\int^{4}\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)dydx$ با کدام انتگرال زیر برابر است؟

۱) $I=\int_0^4\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)dxdy$

۲) $I=\int_0^4\int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2}f(x,y)dxdxy$

۳) $I=\int_0^4\int_{\frac{y^2}{2}}^{y}f(x,y)dxdy$

۴) $I=\int_0^4\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y^2}{2}}f(x,y)dxdy$

۱۴ـ حاصل $I=\int^{1}\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{8}$ ۲) $\frac{3\pi}{8}+1$ ۳) $\frac{3\pi}{8}-1$ ۴) $\frac{3\pi}{4}+1$

۱۵ـ حاصل انتگرال سه‌گانه $I=\int^{\infty}\int^{\infty}\int^{\infty}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+\pi^2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) ۸ ۴) 8π

۱۶ـ حاصل $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}\frac{a}{b}$ ۲) $\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$ ۳) صفر ۴) $e^{\frac{a}{b}}$

۱۷ـ حاصل $I=\int^{1}\frac{x^b-x^a}{\mathrm{Ln}x}dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{a+1}{b+1}$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{b+1}{a+1}$

۱۸ـ حاصل $I=\int^{4}\int^{2\sqrt{x}}\int^{\sqrt{4z-x^2}}dydzdx$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) 8π ۴) 16π

۱۹ـ مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_D(4-x^2-y^2)dxdy$ در صورتی که D ناحیه محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ و $y=\frac{3}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{35}{8}$ ۲) $\frac{35}{4}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{5}{7}$

۲۰ـ حجم محدود به رویه $z+\log(x^2+y^2)=0$ و صفحه xy کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۱ـ حاصل انتگرال دوگانه $I=\int^{1}\int^{1}\frac{x-y}{x+y}dxdy$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

۲۲ـ حجم محدود به صفحات $x^2+y^2=1$ و $z=0$ و $z=e^{-(x^2+y^2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(e+1)}{e}$ ۲) $\frac{\pi(e-1)}{e}$ ۳) πe ۴) صفر

۲۳ـ مساحت ناحیه درون دایره $r = 1$ و خارج منحنی $r^2 = \cos 2\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۲) $\frac{\pi}{2} + 1$ ۳) $\pi - 1$ ۴) $\pi + 1$

۲۴ـ حاصل انتگرال دوگانه $I = \iint (x^2 + y^2)dxdy$ بر روی ناحیه محدود به خطوط $y = 0$ ، $y = 2$ ، $y = 4x$ و $x + y = 3$ کدام است؟

۱) $\frac{463}{48}$ ۲) $\frac{461}{48}$ ۳) $\frac{463}{31}$ ۴) $\frac{461}{31}$

۲۵ـ سطح محصور بین دو منحنی $y^2 = 4 - 4x$ و $y^2 = 4 - x$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 8 ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۶ـ حجم محدود بین رویه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = z$ و صفحه xy کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۷ـ حاصل انتگرال دوگانه $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به منحنی $x^2 + y^2 = 2ax$ می‌باشند، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}\pi a^4$ ۲) $3\pi a^4$ ۳) $\frac{3\pi}{4}a^4$ ۴) $6\pi a^4$

۲۸ـ مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های $x^2 = ay$ و $x + y = 2a$ $(a > 0)$ کدام است؟

۱) $7a^2$ ۲) $9a^2$ ۳) $4/5a^2$ ۴) $3/5a^2$

۲۹ـ حاصل انتگرال سه گانه $I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$ که در آن D کره‌ای به شعاع r می‌باشد؟

۱) πr^4 ۲) πr^2 ۳) πr^3 ۴) $2\pi r^2$

۳۰ـ جرم ناحیه محدود به کره‌هایی به مراکز مبدأ و شعاع‌های ۱ و ۲ و چگالی حجمی $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) $\frac{124\pi^2}{5}$ ۲) $\frac{124\pi}{5}$ ۳) $\frac{124\pi^2}{5}$ ۴) $\frac{124}{5}$

۳۱ـ حاصل انتگرال دوگـانه $I = \iint_D \frac{dxdy}{x^4 + y^2}$ در صورتی که D ناحیه محصور بین نواحی $x \ge 1$ و $y \le x^2$ باشد، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

۳۲ـ مقدار میانگین تابع $f(x,y) = xy^2$ در ناحیه $S : \{0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۳ـ مقدار میانگین مجذور فاصله نقطه $m(x,y)$ روی دایره $(x - a)^2 + y^2 \le R^2$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $a^2 + \frac{R^2}{4}$ ۲) $a^2 + R^2$ ۳) $a^2 + \frac{R^2}{2}$ ۴) $\frac{a^2 + R^2}{4}$

۳۴ـ انتگرال $I = \int^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$ با کدامیک از انتگرالهای زیر برابر است؟

۱) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_0^{1+x} f(x,y)dy$

۲) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

۳) $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

۴) $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

۳۵ـ انتگرال $I = \int^{\pi} dx \int^{\sin x} f(x,y)dy$ با کدامیک از انتگرالهای زیر برابر است؟

۱) $\int_0^1 dy\int_{-\arcsin y}^{\arcsin y} f(x,y)dx$

۲) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dx$

۳) $\int^1 dy\int_{\pi - \arcsin y}^{\pi + \arcsin y} f(x,y)dx$

۴) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{2\arcsin y} f(x,y)dx$

۳۶ـ حاصل $I = \int^{\pi} dx \int^{1+\cos x} y^2 \sin x dy$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) 2

۳۷ـ حاصـل $I = \iint_S \frac{xdxdy}{x^2 + y^2}$ در صـورتی کـه S قطعـه‌ای از سهمـی محدود به سهمی $y = \frac{x^2}{2}$ و خط $y = x$ باشد، کدام است؟

۱) $2\ln 2$ ۲) $\ln 2$ ۳) $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ ۴) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

۳۸ـ مقدار انتگرال $I = \iint_S xydxdy$ که S ناحیه محدود بین محور ox و نیم‌دایره بالائی دایره $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۹ـ مقدار $I = \iint_S \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy$ در صورتی که S مثلثی به رئوس $A(0,0)$ ، $B(1,1)$ و $C(1,0)$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۴۰ـ حاصل انتگرال $I = \iint_S xdxdy$ در صورتی‌که S ناحیه محدود بین خطی که از نقطه‌های $A(2,0)$ و $B(0,2)$ عبـور مـی‌کنـد و قـوس دایره‌ای به شعاع ۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۴۱ـ حجم جسمی که محدود به سهموی $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$ و صفحه $x = a$ است، کدام است؟

۱) $\pi a^2 bc$ ۲) $\pi ab^2 c$ ۳) πabc^2 ۴) πabc

۴۲ـ حجم یک جسم که در استوانه $x^2 + y^2 = 4$ محصور و از بالا به سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و از پایین به صـفحه xoy محـدود اسـت، کدام است؟

۱) 8π ۲) 4π ۳) 2π ۴) 6π

۴۳ـ حاصل $I = \int^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2} dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{e^6 + 1}{6}$ ۲) $\frac{e^6 - 1}{6}$ ۳) $\frac{e^9 + 1}{6}$ ۴) $\frac{e^9 - 1}{6}$

۴۴ـ حاصل $I = \iiint_V zdxdydz$ در صورتی که V حجم محدود به صفحه $z = 0$ و نیمه بالائی بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi a^2 bc}{4}$ ۲) $\frac{\pi ab^2 c}{4}$ ۳) $\frac{\pi abc}{4}$ ۴) $\frac{\pi abc^2}{4}$

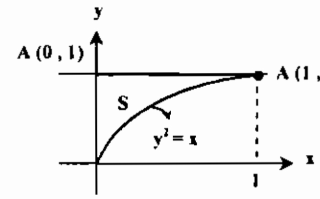
۴۵ـ حاصل $I = \iiint_V zdxdydz$ در صورتی که V ناحیه محدود به مخروط $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ و صفحه $z = h$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi h R^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi h R}{4}$ ۴) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$

۴۶ـ حجم قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2ax$ که بین سهموی $x^2+y^2=2az$ و صفحه xoy قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi a^3}{2}$ ۲) $\frac{3\pi a^3}{4}$ ۳) $\frac{3\pi a^4}{4}$ ۴) $\frac{3\pi a^4}{2}$

۴۷ـ مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_S e^{\frac{x}{y}}dxdy$ در صورتی که S ناحیه نشان داده شده در شکل زیر باشد، کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

۴۸ـ به ازای چه مقادیری از p انتگرال دو گانه $\iint_S \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$ همگراست؟ (در صورتی که S شامل تمام صفحه xoy باشد.)

۱) $p>1$ ۲) $p<1$ ۳) $p>-1$ ۴) $p<-1$

۴۹ـ حاصل $I=\int^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}mx}{x(1+x^2)}dx$ کدام است؟

۱) $2\pi \operatorname{Ln}(1+m)$ ۲) $\pi \operatorname{Ln}(1+m)$ ۳) $\operatorname{Ln}(1+m)$ ۴) $\frac{\pi}{2}\operatorname{Ln}(1+m)$

۵۰ـ حاصل $I=\int^{\infty}dx\int^{\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}, (a>0)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4a^2}$ ۲) $\frac{\pi}{2a^2}$ ۳) $\frac{\pi}{a^2}$ ۴) $\frac{2\pi}{a^2}$

۵۱ـ حاصل $I=\int^{\infty}dx\int^{\infty}dy\int^{\infty}\frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^3}{4}$ ۴) $\frac{\pi^3}{8}$

۵۲ـ حاصل $I=\iint_S \operatorname{Ln}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ که در آن S ناحیه $x^2+y^2\le 1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\pi$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۵۳ـ جرم مکعب مستطیل $0\le x\le a$، $0\le y\le b$، $0\le z\le c$ به شرطی که چگالی آن در نقطه (x,y,z) به صورت $\rho=x+y+z$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{abc(a+b+c)}{2}$ ۲) $\frac{a+b+c}{2}$ ۳) $\frac{abc}{2}$ ۴) $abc(a+b+c)$

۵۴ـ اگر E ناحیه محدود بین خطوط $y-x=-1$، $y-x=3$ و $3y+x=5$ و $3y+x=7$ باشد، حاصل $\iint_E (y-x)dA$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵ـ حاصل $I=\int^{1}\int^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{e+1}{2}$ ۲) $\frac{e+1}{4}$ ۳) $\frac{e-1}{4}$ ۴) $\frac{e-1}{2}$

۵۶ـ مقدار $I=\iint_R \frac{x^2}{y^4}dxdy$ که در آن R ناحیه محصور به منحنی‌هایی با معادلات $xy=2$، $xy=4$، $x=y^2$ و $y^2=3x$ است، برابر است با:

۱) $\frac{2}{27}$ ۲) $\frac{4}{27}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ۴) $\frac{1}{27}$

۵۷ـ مقدار انتگرال سه‌گانه تابع $f(x,y,z)=2xyz$ بر ناحیه R محدود بین صفحات $z=y=0$ و $y=x$ و استوانه $z=2-\frac{x^2}{2}$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵۸ـ حجم محدود به سهموی $z=x^2+y^2$ و صفحات $x=1$ و $y=x$ و دو صفحه xoy و xoz کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۹ـ حجم محصور بین سطوح $x^2+y^2=8z$ و $x^2+y^2=2x$ و $z=0$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{2\pi}{5}$ ۴) $\frac{3\pi}{16}$

۶۰ـ مقدار $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ در صورتی که D ناحیه محدود بین دایره‌های $x^2+y^2=16$ و $x^2+y^2=25$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{122\pi}{3}$ ۲) $\frac{120\pi}{3}$ ۳) $\frac{121\pi}{3}$ ۴) $-\frac{121\pi}{3}$

۶۱ـ تابع $f(x,y)$ با دامنه تعریف D که مربع $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ می‌باشد، به صورت $f(x,y)=\begin{cases} x-xy & 0\le x<y \\ y-xy & y<x\le 1\end{cases}$ تعریف شده است، مقدار انتگرال $\iint_D f(x,y)dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۶۲ـ اگر D ناحیه $0<y<b$ و $x+y<0$ باشد، آنگاه مقدار $I=\iint_D e^{\frac{x}{y}}dydx$ کدام است؟

۱) $\frac{b^2}{2e}$ ۲) $\frac{b^2}{e}$ ۳) $\frac{b^2}{e^2}$ ۴) $\frac{b^2}{2}$

۶۳ـ جرم سطحی بین دو منحنی $x=y^2$ و $y=x^2$ محصور است، در صورتی که چگالی در نقطه (x,y) به صورت $\rho=k(x^2+y^2)$ بیان گردد، کدام است؟

۱) $\frac{23k}{101}$ ۲) $\frac{46k}{105}$ ۳) $\frac{23k}{105}$ ۴) $\frac{46k}{101}$

۶۴ـ جرم سطحی که شامل یک ربع از بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد و دارای چگالی سطح در نقطه (x,y) به صورت $\rho=kxy$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{kab}{8}$ ۲) $\frac{ka^2b}{8}$ ۳) $\frac{kab^2}{8}$ ۴) $\frac{ka^2b^2}{8}$

۶۵ـ مقدار $I=\iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن R ناحیه محصور بین گره‌های $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$ است، کدام است؟

۱) $4\pi \operatorname{Ln}\frac{a}{b}$ ۲) $2\pi \operatorname{Ln}\frac{a}{b}$ ۳) $2\pi \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$ ۴) $4\pi \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$

۶۶ـ حجم ناحیه محصور بین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمیگون $z=x^2+y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۶۷ـ حجم ناحیه محصور بین سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و $z = 2x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۸ـ حجم ناحیه واقع در یک هشتم اول صفحات مختصات و محدود به $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ که در آن a ، b و c اعدادی مثبت هستند، کدام است؟

۱) $\frac{abc}{2}$ ۲) $\frac{abc}{3}$ ۳) $\frac{abc}{6}$ ۴) $\frac{abc}{12}$

۶۹ـ مقدار متوسط تابع $f(t) = \int_1^a e^{-x^2}dx$ در ناحیه $0 \le t \le a$ کدام است؟

۱) $\frac{1+e^{-a^2}}{a}$ ۲) $\frac{1-e^{-a^2}}{a}$ ۳) $\frac{1+e^{-a^2}}{2a}$ ۴) $\frac{1-e^{-a^2}}{2a}$

۷۰ـ حاصل $\iiint_D (3+2xy)dV$ در صورتی که D ناحیه $z \ge 0$ و $1 \le x^2+y^2+z^2$ باشد، کدام است؟

۱) 4π ۲) 8π ۳) 2π ۴) 32π

احساس دل، بالاتر از منطق است. (ژان ژاک روسو)

دی رفت و باز نیامد، فردا را اعتماد نشاید، حال را غنیمت دان که دیر نپاید. (خواجه عبدالله انصاری)

فصل چهارم

«میدانهای برداری و انتگرال‌گیری روی مسیرها و سطوح»

در این فصل بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال را با بحث بردارها، خمها و رویه‌ها ترکیب می‌کنیم. در ابتدا مطلب را با انتگرال روی خم (انتگرال خمیده خطی، انتگرال منحنی‌الخط یا انتگرال مسیری) آغاز می‌کنیم، و به بحث میدانهای برداری پایستار و روش تعیین توابع پتانسیل این میدانها خواهیم پرداخت.

سپس قضیه گرین را بررسی می‌کنیم که یکی از قضایای مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. و پس از آن به بررسی انتگرال روی سطح (انتگرال رویه‌ای) می‌پردازیم و همچنین روش محاسبه مساحت رویه و شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه واقع در فضا را یاد خواهیم گرفت. و در انتها قضایای دیورژانس و استوکس را مطرح خواهیم کرد.

انتگرال روی خم

فرض کنید تابع $f: R^3 \to R$ تابعی پیوسته باشد، می‌خواهیم از تابع f در امتداد خم (مسیر) $\sigma:[a,b]\to R^3$ که $\sigma(t) = (x(t),y(t),z(t))$ انتگرال بگیریم.

❖ **تعریف ۱ :** انتگرال مسیری $f(x,y,z)$ در امتداد مسیر σ به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\int_\sigma f ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\sigma'(t)|\,dt$

که در آن $|\sigma'(t)| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}$ و تابع f تابعی پیوسته و خم σ، خمی قطعه، قطعه هموار می‌باشد.

مثال ۱ : فرض کنید c مارپیچ $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$، $0 \le t \le 2\pi$ و $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. در این صورت مطلوبست محاسبه $\int_c f(x,y,z)ds$.

☑ **پاسخ :** ابتدا توجه کنید که:

$$f(x(t),y(t),z(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = t^2 + 1$$

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow |c'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} (t^2+1)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(4\pi^2+3)$$

نکته ۱ : در انتگرال روی خم c هرگاه $f(x,y,z) = 1$، انتگرال طول منحنی c را به دست می‌دهد.

نکته ۲ : انتگرال f روی خم c تنها به ماهیت f و شکل خم بستگی دارد و مقدار آن را می‌توان از روی هر صورت پارامتر مناسب دلخواهی محاسبه کرد.

نکته ۳ : اگر خم c به صورت $a \le x \le b, y = g(x)$ داده شده باشد، آنگاه: $\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$

نکته ۴ : اگر خم c به صورت قطبی $r = r(\theta)$، $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ داده شده باشد، آنگاه:

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

نکته ۵ : اگر $f(x,y,z)$ چگالی سیم در (x,y,z) باشد. انتگرال روی خم c جرم سیم موردنظر را می‌دهد.

مثال ۲ : حاصل $\int_c y\,ds$ در طول منحنی c با معادله $y = 2\sqrt{x}$ از $x = 3$ تا $x = 24$ کدام است؟

۱) ۱۴۷ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۵۳ ۴) ۱۵۶

پاسخ : گزینه «۴»

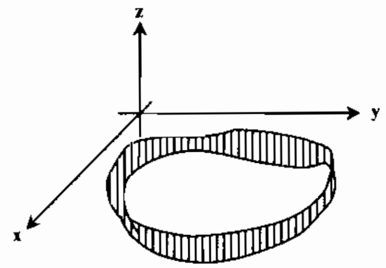
$$\int_c y\,ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\sqrt{1+(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}\,dx = 2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\,dx = 156$$

مثال ۳ : سیمی در امتداد خم زیر قرار دارد $\overline{R(t)} = (t^2-1)\vec{j} + 2t\vec{k}$ ، $0 \le t \le 1$ اگر چگالی سیم برابر $\delta = \frac{3t}{2}$ باشد. جرم آن را بیابید.

پاسخ :

$$R'(t) = 2t\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |R'(t)| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1}$$

$$\text{جرم سیم} = \int_0^1 \frac{3t}{2}.2\sqrt{t^2+1}\,dt = \int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}\,dt = (t^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}-1$$



نکته ۶ : یک حالت خاص مهم انتگرال مسیری وقتی است که مسیر c یک منحنی مسطح باشد. فرض کنید تمام نقاط منحنی c در صفحه xy باشند. همچنین $f(x,y) \ge 0$.
در این صورت انتگرال مسیری زیر برابر «مساحت یک حصار» می‌باشد.

$$S = \int_c f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$

در واقع S برابر مساحت حصاری است که قاعده آن c و ارتفاع آن $f(x,y)$ می‌باشد.

مثال ۴ : مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=4$ که داخل استوانه $x^2+z^2=4$ قرار دارد را بیابید.

پاسخ : چون شکل متقارن است (با تبدیل x به $-x$، y به $-y$ یا z به $-z$ عوض نمی‌شود.) کافی است مساحت قسمتی که در $z>0$ و y و x وجود دارد را محاسبه کنیم و سپس حاصل را در ۸ ضرب کنیم. خم c همان دایره $x^2+y^2=4$ می‌باشد که حصاری به ارتفاع $z=\sqrt{4-x^2}$ روی آن ساخته شده است. با توجه به اینکه معادله پارامتری خم $x^2+y^2=4$ به صورت $c(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ ، $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$c'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \Rightarrow |c'(t)| = 2$$

$$S = \int_c \sqrt{4-x^2}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\cos^2 t}\times 2dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt = 4$$

بنابراین مساحت کل برابر $8\times 4 = 32$ خواهد بود.

محاسبه جرم و گشتاور

فرض کنید سیمی در امتداد خم c در فضا قرار دارد و چگالی سیم در نقطه (x,y,z) واقع بر خم برابر $\delta(x,y,z)$ می‌باشد. در این صورت جرم، مرکز جرم و گشتاورهای سیم را می‌توان با استفاده از فرمولهای زیر محاسبه کرد.

$$\text{جرم}\quad M = \int_c \delta(x,y,z)\,ds$$

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz} = \int_c x\delta ds \qquad M_{xz} = \int_c y\delta ds \qquad M_{xy} = \int_c z\delta ds$$

مختصات مرکز جرم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ بطوریکه داریم:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

گشتاورهای لختی (گشتاور دوم)

$$I_x = \int_c (y^2+z^2)\delta ds \qquad I_y = \int_c (x^2+z^2)\delta ds \qquad I_z = \int_c (x^2+y^2)\delta ds$$

مثال ۵ : سیمی به شکل حلقه مستدیر با چگالی ثابت δ روی دایره $x^2+y^2=a^2$ در صفحه xy واقع است. گشتاور لختی حلقه را حول محور z بیابید.

پاسخ : معادله پارامتری دایره (خم) به صورت $c(t) = (a\cos t, a\sin t)$ ، $0 \le t \le 2\pi$ می‌باشد. بنابراین:

$$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t) \Rightarrow |c'(t)| = a$$

$$I_z = \int_c (x^2+y^2)\delta ds = \int_0^{2\pi} a^2\delta a\,dt = 2\pi a^3\delta$$

مثال ۶ : سیمی بر خم $R(t) = (t^2-1)\vec{j} + (2t)\vec{k}$ ، $0 \le t \le 1$ قرار دارد. اگر چگالی سیم در نقطه (x,y,z) از خم برابر $\delta(x,y,z) = \sqrt{y+2}$ باشد. مرکز جرم سیم را بیابید.

پاسخ :

$$R'(t) = (2t)\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |R'(t)| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1}$$

$$M = \int_c \sqrt{y+2}\,ds = \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\times 2\sqrt{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 (t^2+1)dt = \frac{8}{3}$$

$$M_{yz} = \int_c x\sqrt{y+2}\,ds = 0$$

$$M_{xz} = \int_c y\sqrt{y+2}\,ds = \int_0^1 (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\times 2\sqrt{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 (t^4-1)dt = 2(\frac{t^5}{5}-t)\Big|_0^1 = \frac{-8}{5}$$

$$M_{xy} = \int_c z\sqrt{y+2}\,ds = \int_0^1 2t\sqrt{t^2+1}\times 2\sqrt{t^2+1}\,dt = \int_0^1 (4t^3+4t)dt = t^4+2t^2\Big|_0^1 = 3$$

بنابراین نقطه $(\frac{0}{\frac{8}{3}}, \frac{-\frac{8}{5}}{\frac{8}{3}}, \frac{3}{\frac{8}{3}})$ یا $(0, \frac{-3}{5}, \frac{9}{8})$ مرکز جرم سیم خواهد بود.

مثال ۷ : جرم سیمی را که از تقاطع دو رویه $Z = x^2$ و $Z = 2-x^2-2y^2$ بین نقاط $(0,1,0)$ و $(1,0,1)$ واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات دکارتی قرار دارد را طوری بیابید که چگالی سیم در نقطه (x,y,z) برابر $\delta(x,y,z) = xy$ باشد.

پاسخ : ابتدا لازم است خم موردنظر (c) را به نحوی مناسب به شکل پارامتری در آوریم. از آنجا که خم روی $z = x^2$ قرار دارد و x از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، لذا می‌توانیم قرار دهیم $x = t$ و $z = t^2$ و بنابراین:

$$2y^2 = 2-x^2-z = 2-2t^2 \Rightarrow y^2 = 1-t^2$$

پس منحنی c را می‌توان به صورت پارامتری روبرو نوشت:

$$x = t\ ,\ y = \sqrt{1-t^2}\ ,\ z = t^2$$

و در نتیجه:

$$\frac{dx}{dt} = 1\ ,\ \frac{dy}{dt} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\ ,\ \frac{dz}{dt} = 2t$$

$$ds = \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}+4t^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

بنابراین جرم سیم برابر است با:

$$m = \int_c xy\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt$$

با تغییر متغیر $u = t^2$ ، $du = 2tdt$ ، انتگرال به شکل روبرو در می‌آید.

$$m = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-(2u-1)^2}\,du$$

مجدداً از تغییر متغیر $v = 2u-1$ ، $dv = 2du$ به دست می‌آید:

$$m = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-v^2}\,dv = \frac{\pi+2}{8}$$

انتگرال خط میدانهای برداری

نوع دیگر انتگرال روی خط، انتگرال یک میدان برداری روی یک خم می‌باشد.

❖ تعریف ۲ : کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}$ در امتداد خم $\sigma:[a,b]\to R^3$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\text{کار} = \int_\sigma F.dr = \int_a^b F(\sigma(t)).\sigma'(t)dt}$$

مثال ۸ : فرض کنید $\overline{F(x,y)} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$. حاصل $\int_\sigma \vec{F}.\overrightarrow{dr}$ را روی هر یک از خم‌های زیر از $(0,0)$ تا $(1,1)$ به دست آورید.

الف) خط راست $y = x$ **ب)** منحنی $y = x^2$

☑ **پاسخ :**

الف) خط راست $y = x$ را می‌توان به فرم پارامتری $\overline{\sigma(t)} = t\vec{i} + t\vec{j}$ ، $0 \le t \le 1$ نوشت. بنابراین:

$$\overline{\sigma'(t)} = \vec{i} + \vec{j} \ , \ \overline{F(\sigma(t))} = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}$$

$$\int_\sigma \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_0^1 (t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}).(\vec{i} + \vec{j})dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

ب) خم $y = x^2$ را می‌توان به صورت پارامتری $\sigma(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ ، $0 \le t \le 1$ نوشت. بنابراین:

$$\overline{\sigma'(t)} = \vec{i} + 2t\vec{j} \ , \ \overline{F(\sigma(t))} = t^4\vec{i} + 2t^3\vec{j}$$

$$\int_\sigma \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_0^1 (t^4\vec{i} + 2t^3\vec{j}).(\vec{i} + 2t\vec{j})dt = \int^1 5t^4 dt = 1$$

مثال ۹ : کار انجام شده توسط میدان $F(x,y,z) = (\cos z, e^x, e^y)$ در امتداد مسیر $\sigma(t) = (1, t, e^t)$ ، $0 \le t \le 2$ را بیابید.

☑ **پاسخ :**

$$\sigma'(t) = (0, 1, e^t) \ , \ F(\sigma(t)) = (\cos e^t, e, e^t)$$

$$\text{کار} = \int^2 F(\sigma(t)).\sigma'(t)dt = \int_0^2 (\cos e^t\vec{i} + e\vec{j} + e^t\vec{k}).(\vec{j} + e^t\vec{k})dt \int_0^2 (e + e^{2t})dt = \left(et + \frac{1}{2}e^{2t}\right)\Big|_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$$

نکته ۷ : با توجه به اینکه $T = \frac{dR}{ds}$ ، فرمول محاسبه کار را می‌توان به صورت روبرو نیز نوشت:

$$\int_c \vec{F}.\overrightarrow{dR} = \int_c \vec{F}.\vec{T}ds$$

نکته ۸ : روش معمول دیگر برای نوشتن فرمول محاسبه کار به صورت روبرو است:

$$\int_c F.dR = \int_c F_1dx + F_2dy + F_3dz$$

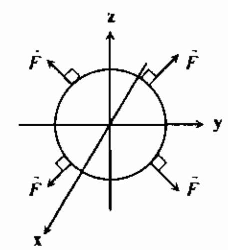
که در آن F_1 ، F_2 و F_3 مؤلفه‌های میدان برداری F می‌باشند.

نکته ۹ : فرض کنید $F(x,y,z)$ میدان سرعت شارش (جریان) سیالی در ناحیه‌ای از فضا باشد و نیز فرض کنید $\overline{R(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ خمی در این ناحیه باشد. در این صورت انتگرال $\vec{F}.\vec{T}$ نسبت به طول قوس (ds) را انتگرال شارش F روی خم می‌نامیم و وقتی خم بسته باشد، مقدار انتگرال شارش را گردش در امتداد خم می‌نامیم.

تذکر ۱ : $\vec{F}.\vec{T}$ مؤلفه عددی $\vec{F}$ در جهت بردار واحد مماس بر خم می‌باشد و بنابراین اگر میدان F در تمام نقاط بر T عمود باشد، انتگرال شارش برابر صفر خواهد بود.

مثال ۱۰ : کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ روی خم $R(t) = (0, a\cos t, a\sin t)$ ، $0 \le t \le 2\pi$ چقدر است؟

☑ **پاسخ :**



روش اول: با توجه به شکل روبرو چون میدان نیروی F در هر نقطه از دایره به آن عمود است، لذا F بر ذره متحرک در امتداد دایره کار انجام نمی‌دهد و بنابراین کار انجام شده توسط F برابر صفر است.

روش دوم: مستقیماً به کمک فرمول نیز می‌توان این مطلب را نشان داد:

$$\text{کار} = \int_c \vec{F}.\overrightarrow{dR} = \int_c x^3dx + ydy + zdz = \int_0^{2\pi} (0 - a^2\cos t\sin t + a^2\cos t\sin t)dt = 0$$

مثال ۱۱ : مقدار $\int_c \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ که درآن c دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است که یکبار در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود برابر است با:

۱) -2π ۲) 0 ۳) 2π ۴) π

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را به صورت پارامتری روبرو می‌نویسیم: $x = a\cos t \ , \ y = a\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

بنابراین:

$$\int_c \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t dt) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t dt)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2}{a^2}dt = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi$$

مثال ۱۲ : انتگرال شارش میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ را روی خم $\overline{R(t)} = (a\cos t)\vec{i} + (b\sin t)\vec{j} + bt\vec{k}$ ، $0 \le t \le 2\pi$ بیابید.

☑ **پاسخ :**

$$\vec{F}(\overline{R(t)}) = -b\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\overline{R'(t)} = -a\sin t\vec{i} + b\cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

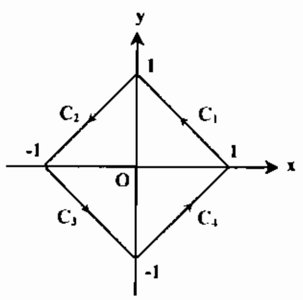
$$\vec{F}(\vec{R}(t)).\vec{R}'(t) = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t + b^2 = ab + b^2$$

بنابراین:

$$\int_c \vec{F}.\vec{T}ds = \int_c \vec{F}.\overrightarrow{dR} = \int_0^{2\pi} (ab + b^2)dt = 2(ab + b^2)\pi$$

مثال ۱۳ : c مرز (پیرامون) مربع با رئوس $(\pm1, 0)$ و $(0, \pm1)$ در جهت مثلثاتی است. مقدار انتگرال $\int_c \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ برابر است با:

۱) 2 ۲) -2 ۳) 4 ۴) 0



☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به شکل، خم C از چهار منحنی هموار C_1, C_2, C_3, C_4 تشکیل شده است. بنابراین لازم است مقدار انتگرال روی هر مسیر محاسبه و مقادیر با هم جمع شوند.

در روی خم C_1 ، $y = 1 - x$ و $0 \le x \le 1$. بنابراین: $|x| = x \ , \ |y| = y \ , \ dy = -dx$

$$\int_{C_1} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = -\int_0^1 \frac{dx - dx}{x + 1 - x} = 0$$

(توجه کنید که علامت منفی پشت انتگرال به خاطر جهت پیمودن خم C_1 می‌باشد.)

روی خم C_2 ، $y = x + 1$ ، $-1 \le x \le 0$. بنابراین: $|x| = -x \ , \ |y| = y \ , \ dy = dx$

$$\int_{C_2} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = -\int_{-1}^0 \frac{dx + dx}{-x + x + 1} = -2\int_{-1}^0 dx = -2$$

روی خم C_3 ، $y = -1 - x$ و $-1 \le x \le 0$. بنابراین: $|x| = -x \ , \ |y| = -y \ , \ dy = -dx$

$$\int_{C_3} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{-1}^0 \frac{dx - dx}{-x - (-1 - x)} = 0$$

و بالاخره روی خم C_4 ، $y = x - 1$ و $0 \le x \le 1$. بنابراین: $|x| = x \ , \ |y| = -y \ , \ dy = dx$

$$\int_{C_4} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \frac{dx + dx}{x - (x - 1)} = 2\int_0^1 dx = 2$$

در نتیجه:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$$

مثال ۱۴ : هرگاه $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ و C دایره به شعاع a باشد، در صورتیکه $\vec{T}$ بردار یکانی مماس بر C باشد مقدار $\int_C T.dR$ برابر است با:

۱) $2\pi a$ ۲) πa^2 ۳) 0 ۴) a

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به نکته (۷) می‌دانیم:

$$\int_C T.dR = \int_C T.Tds = \int_C |T|^2 ds = \int_C ds$$

انتگرال اخیر همان محیط دایره به شعاع a می‌باشد، بنابراین:

$$\int_C T.dR = 2\pi a$$

نتیجه : فرض کنید $\vec{T}$ برداریکه مماس بر منحنی C باشد، در این صورت:

$$\int_C T.dR = (\text{طول منحنی } C)$$

استقلال از مسیر و میدانهای پایستار (کنسرواتیو یا ابقایی)

فرض کنید A و B دو نقطه واقع در یک ناحیه باز از فضا مانند D باشند. کاری که میدان F برای جابه‌جا کردن ذره‌ای از A تا B انجام می‌دهد یعنی $\int \vec{F}.d\vec{R}$ معمولاً به مسیر انتخاب شده بستگی دارد. اما در مورد برخی میدانها، مقدار انتگرال تنها به نقاط A و B بستگی دارد و برای همه مسیرها از A تا B یکسان است. اگر چنین امری برای هر دو نقطه دلخواه از D برقرار باشد، انتگرال $\int \vec{F}.d\vec{R}$ در D مستقل از مسیر است و میدان F بر D پایستار است.

❖ **تعریف ۳:** میدان برداری $\vec{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر تابعی حقیقی چون f موجود باشد به طوریکه $F=\nabla.f$ تابع حقیقی f را پتانسیل F می‌نامند.

قضیه: فرض کنید F یک میدان برداری پایستار با پتانسیل f باشد، در این صورت:

۱. کار انجام شده توسط F مستقل از مسیر است و برابر اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی انتها و ابتدای مسیر می‌باشد. یعنی اگر C یک مسیر دلخواه از A تا B باشد، آنگاه:

$$\int_{C\ \text{دلخواه}} F.dR = f(B)-f(A)$$

۲. کار انجام شده در هر مسیر بسته برابر صفر است (نقاط A و B یکی هستند.)

۳. اگر F دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه $CurlF=0$.

تذکر ۲: از قضیه بالا نتیجه می‌شود که $CurlF=0$ شرط لازم برای پایستار بودن F می‌باشد. یعنی اگر $CurlF=0$ نمی‌توان نتیجه گرفت F میدان پایستار است. ولی اگر $CurlF\neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت که F پایستار نیست.

فرض کنید D یک ناحیه باز در فضا باشد. اگر بخواهیم از $CurlF=0$ نتیجه بگیریم که F پایستار است به شرط دیگری در مورد ناحیه D نیاز است. و آن این است که D ساده همبند باشد؛ یعنی هر مسیر بسته‌ای در D را بتوان منقبض و در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه از ناحیه خارج شویم.

ساده همبند است — ساده همبند نیست — ساده همبند است

نتیجه: اگر F بر یک ناحیه ساده همبند تعریف شده باشد، آنگاه F پایستار (نگهدار) است اگر و تنها اگر $CurlF=0$.

نکته ۱۰: فرض کنید میدان $F=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$، در این صورت $CurlF=0$ معادل سه شرط زیر است:

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y} \quad,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x} \quad,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

تعیین پتانسیل برای میدانهای پایستار

فرض کنید می‌دانیم F یک میدان پایستار است. می‌خواهیم یک تابع پتانسیل یا پتانسیل برای F به دست آوریم. یعنی می‌خواهیم تابعی حقیقی چون f بیابیم به طوریکه: $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$

بنابراین برای محاسبه f از روابط زیر انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=F_3 \quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=F_2 \quad,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=F_1$$

تذکر ۳: روش فوق برای محاسبه f، روش معمول و استاندارد می‌باشد. ولی همانطور که در مثال زیر خواهید دید این روش اغلب طولانی و پیچیده می‌باشد. شاید استفاده از فرمول زیر بتواند ما را سریعتر به جواب نهایی برساند:

$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,0,0)\,dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\,dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\,dt$$

مثال ۱۵: نشان دهید $\vec{F}=(e^x\cos y+yz)\vec{i}+(xz-e^x\sin y)\vec{j}+(xy+z)\vec{k}$ پایستار است و سپس تابع پتانسیلی برای آن بیابید.

پاسخ:

روش اول: ابتدا توجه کنید که: $F_1=e^x\cos y+yz \quad,\quad F_2=xz-e^x\sin y \quad,\quad F_3=xy+z$

بنابراین:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=-e^x\sin y+z \quad,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=y \quad,\quad \frac{\partial F_2}{\partial x}=z-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=x \quad,\quad \frac{\partial F_3}{\partial x}=y \quad,\quad \frac{\partial F_3}{\partial y}=x$$

چون $\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$ ، $\frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}$ ، $\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}$ بنابراین طبق نتیجه فوق میدان پایستار است.

اگر f را تابع پتانسیل فرض کنیم، برای محاسبه f باید از روابط زیر انتگرال بگیریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^x\cos y+yz\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=xz-e^x\sin y\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}=xy+z\end{cases}$$

از یکی از معادلات به دلخواه شروع می‌کنیم. به طور مثال از معادله نخست با ثابت گرفتن y و z نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+g(y,z)$$

ثابت انتگرال‌گیری را به صورت تابعی از y و z نوشتیم زیرا هر تابعی از y و z نسبت به x ثابت است. حال از این رابطه $\frac{\partial f}{\partial y}$ را به دست می‌آوریم و آن را با $\frac{\partial f}{\partial y}$ در دستگاه فوق مقایسه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$-e^x\sin y+xz+\frac{\partial g}{\partial y}=xz-e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=0$$

بنابراین g تنها تابعی از z است و $f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+h(z)$ حال از این معادله $\frac{\partial f}{\partial z}$ را محاسبه می‌کنیم و آن را با فرمول $\frac{\partial f}{\partial z}$ در دستگاه فوق تطبیق می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم:

$$xy+\frac{dh}{dz}=xy+z \Rightarrow \frac{dh}{dz}=z \Rightarrow h(z)=\frac{z^2}{2}+c$$

پس:

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+c$$

به ازای هر c یک تابع پتانسیل برای F وجود دارد، بنابراین بی‌نهایت تابع پتانسیل وجود دارد.

روش دوم: برای محاسبه تابع پتانسیل از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,0,0)\,dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\,dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\,dt$$

$$f(x,y,z)=\int_0^x e^t dt+\int_0^y -e^x\sin t\,dt+\int_0^z (xy+t)\,dt=e^x+e^x\cos y-e^x+xyz+\frac{z^2}{2}+c=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+c$$

تذکر ۴: شرط پایستار بودن میدان $F=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ آن است که $\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$.

مثال ۱۶: مقدار $\int_C Lny^2dx+2xy^{-1}dy$ بر روی منحنی C از نقطه $(-3,1)$ تا نقطه $(4,4)$ کدام است؟

۱) $8Ln2$ ۲) $10Ln2$ ۳) $12Ln2$ ۴) $16Ln2$

پاسخ: گزینه «۴» اگر F را به صورت $F(x,y)=Lny^2\vec{i}+2xy^{-1}\vec{j}$ در نظر بگیریم، به سادگی نتیجه می‌شود که $\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=2y^{-1}$

و بنابراین F پایستار است. لذا تابع پتانسیلی مانند f را می‌یابیم به قسمی که:

$$\nabla f=F \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=Lny^2\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy^{-1}\end{cases} \Rightarrow f(x,y)=xLny^2+c$$

بنابراین:

$$\int_C Lny^2dx+2xy^{-1}dy=xLny^2\Big|_{(-3,1)}^{(4,4)}=4Ln16=16Ln2$$

مثال ۱۷ : حاصل $\int_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ که در آن C دایره‌ای به معادلات $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x+y+z=0$ باشد، کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2π ۴) $2\pi a$

پاسخ : گزینه «۱» به سادگی می‌توان نشان داد میدان $\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(z+x)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ یک میدان پایستار است و چون منحنی C یک منحنی بسته است. پس مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

مثال ۱۸ : اگر مقدار $\int_C (2xy+4yz)dx+(x^2+4xz-2z^2)dy+(4xy-4yz)dz$ از نقطه $(-1,1,2)$ تا نقطه $(3,-2,1)$ مستقل از مسیر باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) -21 ۲) -23 ۳) -19 ۴) -17

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به اینکه $\int_C$ مستقل از مسیر است، میدان پایستار است. پس ابتدا لازم است تابع پتانسیل f را به دست آوریم.

$$f(x,y,z)=\int_0^x 0\,dt+\int_0^y (x^2)dt+\int_0^z (4xy-4yt)dt=x^2y+4xyz-2yz^2$$

بنابراین:

$$\int_C=(x^2y+4xyz-2yz^2)\Big|_{(-1,1,2)}^{(3,-2,1)}=-23$$

مثال ۱۹ : مقادیر A و B را طوری تعیین کنید که میدان برداری زیر پایستار باشد. سپس حاصل $\int_C F.dr$ را روی منحنی C که از تقاطع سهمیگون $z=x^2+4y^2$ و صفحه $z=3x-2y$ از $(0,0,0)$ تا $(1,\frac{1}{2},2)$ به وجود می‌آید را بیابید.

$$F=Ax\sin(\pi y)\vec{i}+(x^2\cos(\pi y)+Bye^{-z})\vec{j}+y^2e^{-z}\vec{k}$$

پاسخ : برای اینکه F پایستار باشد، لازم است $\operatorname{Curl}F=0$، در نتیجه: $A\pi x\cos(\pi y)=2x\cos(\pi y)\ ,\ -Bye^{-z}=2ye^{-z}$

پس $A=\frac{2}{\pi}$ و $B=-2$ خواهد بود. به ازای این مقادیر F میدان برداری پایستار می‌باشد، بنابراین تابع پتانسیل مانند f وجود دارد به طوریکه $F=\nabla f$ به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\pi}x^2\sin(\pi y)-y^2e^{-z}$$

بنابراین برای محاسبه کار انجام شده روی منحنی C خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\left(\frac{1}{\pi}x^2\sin(\pi y)-y^2e^{-z}\right)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)}=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4e^2}$$

مثال ۲۰ : حاصل $I=\int_C (e^x\sin y+3y)dx+(e^x\cos y+2x-2y)dy$ روی بیضی $4x^2+y^2=4$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) 0 ۴) 4π

پاسخ : گزینه «۲»

انتگرال موردنظر برابر $I=\int_C F.dr$ است که در آن F میدان برداری $\vec{F}=(e^x\sin y+3y)\vec{i}+(e^x\cos y+2x-2y)\vec{j}$ می‌باشد. این میدان برداری پایستار نیست. ولی اگر به جای $3y$ در F_1، $2y$ قرار داشت میدان پایستار می‌شد. بنابراین I را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_C (e^x\sin y+2y)dx+(e^x\cos y+2x-2y)dy+\int_C ydx$$

انتگرال اول برابر صفر است، زیرا میدان پایستار و مسیر C بسته است. برای محاسبه انتگرال دوم منحنی C را به شکل پارامتری می‌نویسیم:

$$C: x=\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ 0\le t\le 2\pi$$

و در این صورت:

$$I=\int_C ydx=-2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=-2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-2\pi$$

مثال ۲۱ : مقدار انتگرال $\int_C y^2dx+x^2dy$ که در آن C نیمه بالایی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ پیموده شده در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{-4}{3}ab^2$ ۲) $\frac{4}{3}a^2b$ ۳) $\frac{-4}{3}ab^2+\frac{4}{3}a^2b$ ۴) $\frac{-2}{3}ab^2+\frac{2}{3}a^2b$

پاسخ : گزینه «۱» بیضی داده شده را می‌توان به صورت روبرو پارامتری کرد: $x=a\cos t\ ,\ y=b\sin t\ ,\ 0\le t\le\pi$

در این صورت:

$$\int_C y^2dx+x^2dy=\int_0^{\pi}(-ab^2\sin^3 t+a^2b\cos^3 t)dt$$

$$=-ab^2\int_0^{\pi}\sin^3 t+\underbrace{a^2b\int_0^{\pi}\cos^3 t\,dt}_{\text{صفر}}=-ab^2\int_0^{\pi}\sin t(1-\cos^2 t)dt=-ab^2\left(-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{-4}{3}ab^2$$

شارگذرنده از یک خم واقع در صفحه

فرض کنید می‌خواهیم آهنگ وارد شدن یک سیال به ناحیه محدود به خمی چون C واقع در صفحه xy را به دست آوریم. در این صورت انتگرال $\vec{F}.\vec{n}$ (مؤلفه عددی میدان سرعت سیال در جهت بردار واحد قائم برونسو) را نسبت به طول قوس روی C محاسبه می‌کنیم. مقدار این انتگرال را **شار F** گذرنده از رویه محدود به خم C می‌نامیم. بنابراین: شار F گذرنده از خم بسته C = $\int_C \vec{F}.\vec{n}\,ds$

تذکر ۵ : شار، انتگرال مؤلفه قائم F نسبت به طول قوس می‌باشد، ولی گردش انتگرال مؤلفه مماس $(F.T)F$ نسبت به طول قوس می‌باشد.

نکته ۱۱ : اگر $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ و C یک خم بسته واقع در صفحه xy باشد، آنگاه: $\int_C F.nds=\int_C F_1dy-F_2dx$

مثال ۲۲ : شار میدان $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ گذرنده از دایره $C: x=\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi$ چقدر است؟

پاسخ : با توجه به نکته (۱۱) داریم:

$$\int_C F.nds=\int_0^{2\pi}\left[(\cos t-\sin t)(\cos t\,dt)-\cos t(-\sin t)dt\right]=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pi$$

قضیه گرین

قضیه گرین انتگرال خط در امتداد منحنی بسته C درصفحه R^2 را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به C به هم ربط می‌دهد.

قضیه اول گرین :

فرض کنید C یک خم ساده، بسته قطعه قطعه هموار (قطعه قطعه مشتق‌پذیر) باشد. که ناحیه R در آن محصور است اگر $\vec{F}=F_1(x,y)\vec{i}+F_2(x,y)\vec{j}$ یک میدان برداری پیوسته روی خم C باشد و $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ نیز در ناحیه R پیوسته باشند، آنگاه:

$$\int_C F.dr=\int_C F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

تذکر ۶ : جهت صحیح (مثبت) برای منحنی C که ناحیه R را در برگرفته به صورت زیر تعیین می‌شود: «اگر در امتداد منحنی C در جهت مثلثاتی یا پادساعتگرد صحیح حرکت کنید، ناحیه D سمت چپ شما خواهد بود.» و اغلب جهت موردنظر، جهت مثبت مثلثاتی می‌باشد.

مثال ۲۳ : مقدار انتگرال $\int xydy-y^2dx$ در امتداد مربعی که خطوط $x=1$ و $y=1$ از ربع اول جدا می‌کند چقدر است؟

پاسخ : مربع یک خم قطعه قطعه هموار می‌باشد، و داریم: $F_1=-y^2\ ,\ F_2=xy\Rightarrow\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=y-(-2y)=3y$

بنابراین طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\int xydy-y^2dx=\int_0^1\int_0^1 3ydxdy=\int_0^1 3xy\Big|_0^1dy=\int_0^1 3ydy=\frac{3}{2}$$

مثال ۲۴ : مقدار انتگرال $\int_C ydx+3xdy$ روی بیضی $C: x^2+4y^2=1$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $F_1=y\ ,\ F_2=3x \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=3-1=2$

بنابراین با توجه به قضیه گرین داریم:

$$\int_C ydx+3xdy=\iint_R 2dxdy=2\times(\text{مساحت بیضی})=2\times\pi\times1\times\frac{1}{2}=\pi$$

مثال ۲۵ : حاصل $\int_C(\sin^4 x+e^{2x})dx+(\cos^2 y-e^y)dy$ وقتی معادله C به صورت $x^4+y^4=16$ باشد، کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم، بنابر قضیه گرین داریم:

$$\int_C(\sin^4 x+e^{2x})dx+(\cos^2 y-e^y)dy=\iint_R(0-0)dxdy=0$$

مثال ۲۶ : مقدار انتگرال خط $I=\int_C\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx+y(xy+Ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2}))dy$ روی دایره $C: x^2+y^2=a^2$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi a^4}{4}$ ۳) $\frac{-\pi a^4}{4}$ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$F_1=\sqrt{1+x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$F_2=y(xy+Ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2}))\Rightarrow\frac{\partial F_2}{\partial x}=y\left(y+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{x+\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)=y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

بنابراین طبق قضیه گرین:

$$I=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=\iint_R y^2dxdy$$

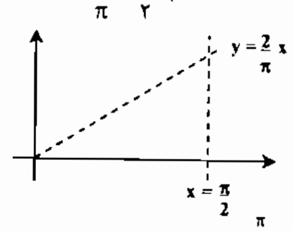
برای محاسبه انتگرال اخیر از روش قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\sin^2\theta\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\times\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{4}$$

مثال ۲۷ : مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int_C[(y-\sin x)dx+\cos xdy]$ به طوریکه C مثلث محصور شده توسط خطوط $y=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=\frac{2}{\pi}x$ است.

۱) $-(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi})$ ۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$ ۳) $-(\frac{4}{\pi}+\frac{\pi}{2})$ ۴) $\frac{4}{\pi}-\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» ناحیه محصور شده توسط منحنی C به شکل مقابل است.



$$F_1=y-\sin x\Rightarrow\frac{\partial F_1}{\partial y}=1\ ,\ F_2=\cos x\Rightarrow\frac{\partial F_2}{\partial x}=-\sin x$$

طبق قضیه گرین انتگرال فوق برابر است با:

$$\int_C(y-\sin x)dx+\cos xdy=\int_0^1\int_{\frac{\pi y}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x-1)dxdy=\int_0^1(\cos x-x)\Big|_{\frac{\pi y}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy=\int_0^1\left(\frac{-\pi}{2}-\cos\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi y}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{-\pi y}{2}-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{4}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{-\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$$

مثال ۲۸ : اگر ناحیه R و مرز آن یعنی خم بسته ساده C مفروضات قضیه گرین را برآورده سازند، نشان دهید مساحت ناحیه R را می‌توان از هر یک از فرمولهای روبرو محاسبه کرد: $\text{مساحت } R=\int_C xdy=-\int_C ydx=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx$

پاسخ : در هر سه مورد حاصل $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}$ برابر یک می‌باشد، بنابراین طبق قضیه گرین هر سه انتگرال فوق مقداری برابر $\iint_R 1dxdy$ دارند که همان مساحت ناحیه R می‌باشد.

مثال ۲۹ : C را یک خم ساده بسته فرض کنید که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند و ناحیه R در آن محصور شده است. نشان دهید.

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\begin{cases}0 & \text{اگر مبدأ خارج ناحیه R باشد}\\ 2\pi & \text{اگر مبدأ داخل ناحیه R باشد}\end{cases}$$

پاسخ : ابتدا توجه کنید که:

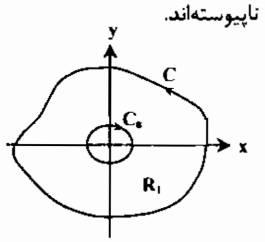
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

حال اگر مبدأ در ناحیه R نباشد، طبق قضیه گرین:

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\iint_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy=\iint_R 0dxdy=0$$

توجه کنید که اگر مبدأ در ناحیه R باشد، نمی‌توانیم قضیه گرین را به کار ببریم زیرا توابع F_1 و F_2 در $(0,0)$ ناپیوسته‌اند.



حال فرض کنید مبدأ داخل ناحیه R باشد. در این صورت دایره C_ε به مرکز مبدأ و شعاع ε وجود دارد که کاملاً داخل ناحیه R است. (شکل روبرو) همچنین فرض کنید خم C_ε در جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده باشد. در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=-2\pi$$

خم‌های C و C_ε مرزهای ناحیه R_1 را تشکیل می‌دهد که به طور صحیح جهت‌دار شده‌اند. بنابراین طبق قضیه گرین:

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+\int_{C_\varepsilon}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0$$

حال نتیجه موردنظر حاصل خواهد شد:

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=-\int_{C_\varepsilon}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=-(-2\pi)=2\pi$$

مثال ۳۰ : مقدار $\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ را روی خم ساده دلخواه C که از مبدأ عبور نمی‌کند بیابید.

پاسخ : انتگرال داده شده، انتگرال میدان برداری $F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ روی خم C می‌باشد. در مثال قبل دیدیم که F شرط لازم برای پایستار بودن را دارد ولی دامنه آن مجموعه $R^2-\{(0,0)\}$ می‌باشد. بنابراین نمی‌توان نتیجه‌ای در مورد پایستار بودن آن در کل R^2 گرفت ولی چون در صورت سؤال قید شده خم C از $(0,0)$ عبور نمی‌کند اشکالی ایجاد نمی‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد تابع پتانسیل میدان فوق برابر $f(x,y)=Arctg\frac{y}{x}$ می‌باشد. از طرفی توجه کنید که عبارت $Arctg\frac{y}{x}$ زاویه نقطه (x,y) در مختصات قطبی می‌باشد. بنابراین تحت شرایط مناسب داریم:

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=(\text{زاویه نقطه انتهایی خم C})-(\text{زاویه نقطه ابتدایی خم C})$$

توجه : نتایج دو مثال قبل در کنکورهای سالهای اخیر بارها مورد سؤال قرار گرفته، لذا دانشجویان می‌توانند این نتایج را به خاطر بسپارند.

مثال ۳۱: کدام گزاره برای میدان برداری $F(x,y)=\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$ صحیح نیست؟

۱) $\int_C F.dR=-2\pi$ ، C مربع $|x|+|y|=1$ با جهت منفی مثلثاتی

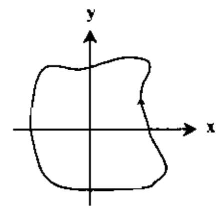
۲) $\int_C F.dR=0$ ، C بیضی $(x-9)^2+\frac{(y-10)^2}{4}=1$ با جهت مثبت مثلثاتی

۳) $\int_C F.dR=0$ ، C دایره $x^2+y^2=1$ با جهت مثبت مثلثاتی

۴) $\int_C F.dR=2\pi$ ، C دایره $x^2+y^2=1$ با جهت مثبت مثلثاتی

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در گزینه (۱) خم C شامل مبدأ می‌باشد و چون جهت خم خلاف جهت مثلثاتی است پس طبق مثال (۲۹) مقدار انتگرال برابر -2π می‌باشد. در گزینه (۲) خم بسته C شامل مبدأ نمی‌باشد بنابراین طبق مثال (۲۹) مقدار انتگرال برابر صفر است. در گزینه (۳) خم C شامل مبدأ و جهت آن، جهت مثلثاتی می‌باشد پس مقدار انتگرال برابر 2π است.

مثال ۳۲ : اگر C منحنی شکل روبرو باشد، مقدار $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ کدام است؟



۱) -2π
۲) 0
۳) π
۴) 2π

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» خم شکل داده شده یک خم ساده بسته همواره جهت مثلثاتی می‌باشد، بنابراین طبق نتیجه مثال (۲۹) مقدار انتگرال موردنظر برابر 2π می‌باشد.

مثال ۳۳ : اگر خم C قسمتی از دایره $x^2+y^2=9$ از $A(3,0)$ تا نقطه $B(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد، مقدار $\int_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{9}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$A(3,0)\Rightarrow tg\theta=\frac{0}{3}=0\Rightarrow\theta=0$$

$$B(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})\Rightarrow tg\theta=\frac{3\sqrt{3}/2}{3/2}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

بنابراین طبق نتیجه مثال (۳۰) خواهیم داشت:

$$\int_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

مثال ۳۴ : اگر $F(x,y)=y\vec{i}+4x\vec{j}$ و T بردار مماس واحد بر دایره C به معادله $x^2+y^2=1$ باشد، حاصل $\int_C F.Tds$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\int_C F.Tds=\int_C F.dR \overset{\text{گرین}}{=} \iint_R(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy=\iint_R(4-1)dxdy=3\times(R \text{ مساحت ناحیه})=3\pi$$

مثال ۳۵ : فرض کنید تابع $f(x,y)$ و مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم آن پیوسته باشند و C یک منحنی ساده هموار و بسته باشد. اگر f هارمونیک باشد، حاصل $\int_C(\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy)$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 0 ۳) $2\pi a$ ۴) πa^2

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم، طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\int_C(\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy)=\iint_R(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-\partial f}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}))dxdy=-\iint_R(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy$$

و چون f هارمونیک است، پس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ و در نتیجه حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

قضیه : (شکل برداری قضیه گرین). فرض کنید C یک خم ساده بسته هموار بوده که ناحیه R را در برگرفته است و $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ یک میدان برداری پیوسته و $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ نیز در ناحیه R پیوسته باشند، آنگاه:

$$\int_C F.dr=\iint_R(\text{curl}F.\vec{k})dxdy=\iint_R[(\nabla\times F).k]dxdy$$

قضیه دوم گرین (قضیه دیورژانس در صفحه). فرض کنید C یک خم ساده، بسته قطعه قطعه هموار (قطعه قطعه مشتق‌پذیر) باشد که ناحیه R در آن محصور شده است و میدان $F=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ روی خم C پیوسته و $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ در R پیوسته باشند، آنگاه:

$$\int_C F.nds=\int_C F_1dy-F_2dx=\iint_R(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y})dxdy=\iint_R \text{div}Fdxdy$$

مثال ۳۶ : هرگاه $F(x,y)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$ و C دایره $x^2+y^2=1$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی دایره مزبور باشد، حاصل $\int_C F.nds$ چقدر است؟

☑ **پاسخ :** ابتدا توجه کنید که:

$$\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}\Rightarrow\text{div}\vec{F}=2x+2y$$

بنابراین طبق قضیه دوم گرین داریم:

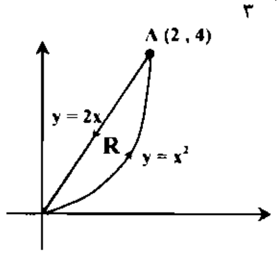
$$\int_C F.nds=\iint_R(2x+2y)dxdy$$

و چون ناحیه R نسبت به متغیرهای x و y زوج می‌باشد (ناحیه R نسبت به محور x و y متقارن است) و $2x$ و $2y$ توابع فرد هستند. حاصل انتگرال اخیر برابر صفر است.

مثال ۳۷ : حاصل $\int_C 2ydx+4xdy$ وقتی C قوس از سهمی $y=x^2$ از مبدأ تا نقطه $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل از نقطه A تا مبدأ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طبق قضیه گرین و با توجه به شکل داریم:



$$\int_C 2ydx+4xdy=\iint_R(4-2)dxdy=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}2dydx=\int_0^2(4x-2x^2)dx=\frac{8}{3}$$

مثال ۳۸ : اگر C یک خم بسته ساده با جهت مثبت باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد انتگرال زیر صدق می‌کند؟

$$I=\int_C -y^2dx+x^2dy$$

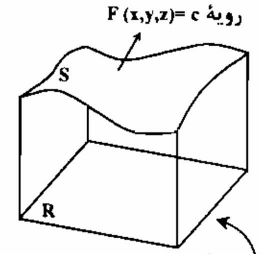
۱) همواره برابر طول خم C می‌باشد. ۲) همواره عددی مثبت است.
۳) همواره برابر مساحت ناحیه محدود به C است. ۴) مقدار انتگرال به خم C ارتباطی ندارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به خم C را با R نشان دهیم، طبق قضیه گرین:

$$I=\int_C -y^2dx+x^2dy=\iint_R(\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(-y^2))dxdx=\iint_R 2(x^2+y^2)dxdy$$

با توجه به اینکه $x^2+y^2\geq0$ ، پس حاصل انتگرال اخیر همواره مثبت است یعنی $I>0$.

انتگرالهای رویه‌ای (انتگرال روی سطح)



«تصویر قائم یا «سایهٔ» S روی یکی از صفحات مختصات»

در فصل قبل یاد گرفتیم که چگونه از یک تابع روی ناحیه‌ای مسطح واقع در صفحه انتگرال بگیریم. حال می‌خواهیم ببینیم اگر تابع روی رویه‌ای خمیده تعریف شود چه باید کرد؟
روش محاسبه این انتگرالها که **انتگرال رویه‌ای** نام دارند این است که انتگرال آنها را به صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای واقع در یکی از صفحات مختصات که زیر رویه قرار دارد بنویسیم (شکل زیر). و بدین ترتیب انتگرال به نوعی انتگرال تبدیل می‌شود که روش محاسبه آنها را قبلاً دیده‌ایم.

تعریف و روش محاسبه انتگرال رویه‌ای

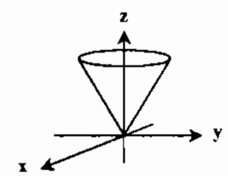
رویه‌ای مانند S به معادلهٔ $F(x,y,z)=c$ که در بالای ناحیه مسطحی چون R قرار دارد را در نظر بگیرید و فرض کنید F و مشتقات جزیی مرتبه اول آن همگی پیوسته باشند. در این صورت اگر تابعی مانند $g(x,y,z)$ بر S پیوسته باشد، انتگرال g بر S با نماد $\iint_S g\,dS$ یا $\iint_S g\,d\sigma$ نشان داده می‌شود و برابر است با:

$$\iint_S g\,d\sigma=\iint_R g(x,y,z)\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.P|}dA$$

که در رابطه بالا P بردار واحد عمود بر R می‌باشد.
برای استفاده از فرمول فوق لازم است ابتدا سطح S را بر یکی از صفحات مختصات تصویر کنیم و در این صورت بردار P یکی از بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ خواهد بود. به طور مثال اگر صفحه تصویر را صفحه xy فرض کنیم، بردار $\vec{k}$ خواهد بود. برای یادگیری دقیق‌تر این روش به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳۹ : انتگرال رویه‌ای $\iint_S zdS$ را روی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ بیابید.

پاسخ :



ناحیه S را بر صفحه xy تصویر می‌کنیم و آن را R می‌نامیم. با توجه به شکل ناحیه R داخل دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد.

معادله مخروط را به شکل $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$\nabla F=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}\Rightarrow|\nabla F|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=\sqrt{8z^2}=2z\sqrt{2}$$
$$\nabla F.k=-2z\Rightarrow|\nabla F.k|=2z$$

بنابراین :

$$\iint_S zdS=\iint_R z\times\frac{2z\sqrt{2}}{2z}dA=\sqrt{2}\iint_R zdA$$

از آنجا که ناحیه R داخل دایره است برای محاسبه انتگرال اخیر بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم و چون z مختص سوم نقطه‌ای است که روی مخروط واقع است به جای آن $\sqrt{x^2+y^2}$ قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$\iint_S zdS=\sqrt{2}\iint_R\sqrt{x^2+y^2}\,dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\times rdrd\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2d\theta=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

نکته ۱۲ : صفحه تصویر باید طوری انتخاب شود که $\nabla F.p=0$ نشود، و این انتخاب همیشه امکان‌پذیر است.

نکته ۱۳ : اگر در فرمول انتگرال رویه‌ای، تابع g تابع ثابت ۱ باشد، این انتگرال مساحت رویه را به دست می‌دهد، یعنی:

$$S\ \text{مساحت رویه}=\iint_R\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.p|}dA$$

نکته ۱۴ : اگر $g(x,y,z)$ چگالی ورقه نازکی باشد که رویه S مدلی از آن است، حاصل انتگرال رویه‌ای جرم ورقه خواهد بود.

نکته ۱۵ : dS یا dσ را **دیفرانسیل مساحت رویه** می‌گویند و از رابطه $dS=\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.P|}$ به دست می‌آید.

نکته ۱۶ : انتگرال رویه‌ای همه ویژگیهای جبری معمول انتگرالهای دوگانه از جمله خاصیت جمع‌پذیری دامنه‌ها را دارد. منظور از این خاصیت این است که به طور مثال برای محاسبه انتگرال یک تابع روی یک رویهٔ مکعبی، انتگرال را روی هر وجه مکعب محاسبه نموده و سپس نتایج حاصله را با هم جمع می‌کنیم.

نکته ۱۷ : اگر سطح S قسمتی از رویه $z=f(x,y)$ باشد، که تصویر قائم آن روی صفحه xy ناحیه R باشد. آنگاه:

$$\iint_S g(x,y,z)dS=\iint_R g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}dxdy$$

به طور مشابه فرمول فوق برای حالتی که $y=f(x,z)$ و $x=f(y,z)$ باشد برقرار است.

مثال ۴۰ : مساحت قسمت پایینی سهمیواره $x^2+y^2-z=0$ که به صفحه $z=1$ محدود است را محاسبه کنید.

پاسخ : برای محاسبه مساحت به جای تابع g، تابع ثابت یک را قرار می‌دهیم. تصویر ناحیه S روی صفحه xy، قرص $x^2+y^2\le 1$ می‌باشد. بنابراین با توجه به نکته (۱۷) خواهیم داشت:

$$\text{مساحت}=\iint_S dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\text{مساحت}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\,dr=\theta\Big|_0^{2\pi}\times\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

مثال ۴۱ : مساحت عرقچینی از نیم‌کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$ و $z\ge 0$ که استوانهٔ $x^2+y^2=1$ از نیم‌کره جدا می‌کند چقدر است؟

پاسخ : صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. تصویر عرقچین موردنظر بر صفحه xy قرص $R:x^2+y^2\le 1$ می‌باشد.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2=0\Rightarrow\nabla F=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}\Rightarrow|\nabla F|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{2}\ ,\ |\nabla F.p|=|\nabla F.\vec{k}|=2z$$

بنابراین، مساحت عرقچین موردنظر برابر است با:

$$S=\iint_R\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.p|}dA=\iint_R\frac{2\sqrt{2}}{2z}dA=\sqrt{2}\iint_R\frac{1}{z}dA$$

چون z مختص سوم نقطه‌ای روی کرهٔ مورد بحث است، لذا $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ و برای ساده‌تر شدن محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$S=\sqrt{2}\iint_R\frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{rdrd\theta}{\sqrt{2-r^2}}=2\pi(2-\sqrt{2})$$

مثال ۴۲ : اگر S قسمتی از سطح $x=1-z^2$ محدود به صفحات $x=0$ و $y=2$ و $y=-2$ باشد، انتگرال رویه‌ای $\iint_S yzdS$ برابر است با:

۱) ۴-　　۲) ۰　　۳) ۴　　۴) ۸

پاسخ : گزینه «۲» اگر تصویر S به معادله $F(x,y,z)=x+z^2=1$ را بر صفحه yz ناحیه R بنامیم، داریم:

$$R:-2\le y\le 2\ ,\ -1\le z\le 1$$

بنابراین ناحیه R یک مستطیل است (توجه کنید که محدودهٔ z از تلاقی سطح $x=1-z^2$ و صفحه yz یعنی $x=0$ به دست آمده است.)
حال اگر سطح S را به صورت $x=1-z^2$ در نظر بگیریم، با توجه به نکته (۱۷) خواهیم داشت:

$$\iint_S yzdS=\iint_R yz\sqrt{1+(-2z)^2}\,dydz=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}yz\sqrt{1+4z^2}\,dzdy$$

چون تابع تحت انتگرال نسبت به y (یا z) فرد است و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به y (یا z) متقارن است حاصل انتگرال فوق برابر صفر می‌باشد.

مثال ۴۳ : مساحت ناحیه بریده شده از صفحه $x+y+z=a$ توسط استوانه $x^2+y^2=a^2$ چقدر است؟

پاسخ : صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. تصویر ناحیه موردنظر بر صفحه xy قرص $x^2+y^2\le a^2$ می‌باشد. از طرفی $z=a-x-y$، بنابراین طبق نکته (۱۷) داریم:

$$S=\iint_S dS=\iint_R\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dA=\iint_R\sqrt{3}\,dA=\sqrt{3}\times(\text{مساحت دایره به شعاع a})=\sqrt{3}\pi a^2$$

مثال ۴۴: مرکز جرم یک پوسته نازک نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$ با چگالی ثابت δ را بیابید.

☑ **پاسخ:** با توجه به شکل نیم‌کره داده شده واضح است که مرکز جرم بر محور z واقع است.

یعنی $\bar{x}=\bar{y}=0$ پس کافی است $\bar{z}$ را از فرمول $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}$ بیابیم.

$$M=\iint_S \delta dS=\delta\iint_S dS=\delta(\text{مساحت نیم‌کره})=2\pi a^2\delta$$

برای محاسبه M_{xy} به ترتیب روبرو عمل می‌کنیم:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \Rightarrow \nabla F=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$|\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2a \ , \ |\nabla F.p|=|\nabla F.k|=|2z|=2z \Rightarrow dS=\frac{2a}{2z}dA=\frac{a}{z}dA$$

بنابراین:

$$M_{xy}=\iint_S z\delta dS=\delta\iint_R z\times\frac{a}{z}dA=\delta a\iint_R dA=\pi a^3\delta$$

در نتیجه $\bar{z}=\dfrac{\pi a^3\delta}{2\pi a^2\delta}=\dfrac{a}{2}$ و مختصات مرکز جرم نقطه $(0,0,\frac{a}{2})$ می‌باشد.

مثال ۴۵: مساحت قسمتی از رویه نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$ که توسط استوانه $x^2+y^2=ax$ بریده می‌شود، را بیابید.

☑ **پاسخ:** صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. تصویر ناحیه موردنظر روی صفحه xy داخل دایره $x^2+y^2=ax$ قرار دارد. از طرفی:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \Rightarrow \frac{|\nabla F|}{|\nabla F.k|}dA=\frac{a}{z}dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dA$$

بنابراین:

$$\iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F.k|}dA=\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در مختصات قطبی رابطه $x^2+y^2=ax$ به $r=a\cos\theta$ تبدیل می‌شود، بنابراین انتگرال فوق برابر است با:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\times rdrd\theta=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=a^2(\frac{\pi}{2}-1)$$

مثال ۴۶: مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2ay$ را که داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ قرار می‌گیرد را بیابید.

☑ **پاسخ:** معادله استوانه را به صورت زیر می‌نویسیم و صفحه تصویر را صفحه yz انتخاب می‌کنیم (توجه کنید که این تنها صفحهٔ مختصات است که می‌تواند انتخاب شود.)

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-2ay=0 \Rightarrow \nabla f=2x\vec{i}+(2y-2a)\vec{j}$$

$$|\nabla F|=\sqrt{4x^2+4(y-a)^2}=2\sqrt{\underbrace{x^2+y^2-2ay}_{\text{صفر}}+a^2}=2a$$

$$|\nabla F.i|=2x \Rightarrow dS=\frac{2a}{2x}dA=\frac{a}{x}dA$$

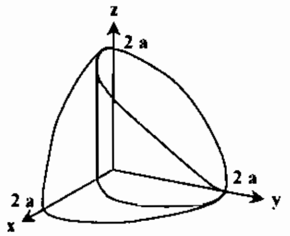
از طرفی برای به دست آوردن تصویر ناحیه موردنظر روی صفحه yz لازم است. متغیر x را مابین دو معادله زیر حذف کنیم.

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\ x^2+y^2=2ay\end{cases}\Rightarrow z^2+2ay=4a^2 \Rightarrow R: 0\le y\le 2a \ , \ 0\le z\le\sqrt{4a^2-2ay}$$

بنابراین مساحت ناحیه موردنظر برابر است با:

$$S=\iint_S dS=\iint_R \frac{a}{x}dA=\iint_R\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}dA=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{4a^2-2ay}}\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}dzdy$$

$$=\int_0^{2a}\frac{az}{\sqrt{2ay-y^2}}\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{4a^2-2ay}}dy=\int_0^{2a}\frac{a\sqrt{4a^2-2ay}}{\sqrt{2ay-y^2}}dy=a\sqrt{2a}\int_0^{2a}\frac{dy}{\sqrt{y}}=4a^2$$



توجه کنید که مقدار فوق $\frac{1}{4}$ مساحت موردنظر می‌باشد، که در یک هشتم اول قرار دارد پس مساحت کل برابر $16a^2$ می‌باشد (با توجه به شکل روبرو).

مثال ۴۷: از $g(x,y,z)=xyz$ روی مکعبی که صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند انتگرال بگیرید.

☑ **پاسخ:** با توجه به شکل زیر روی وجوهی که بر صفحات مختصات منطبق‌اند، داریم $xyz=0$ و بنابراین انتگرال روی هر یک از این وجوه برابر صفر است. بنابراین انتگرال روی مکعب به صورت زیر در می‌آید.

$$\iint_{\text{مکعب}} xyzdS=\iint_{\text{وجه A}} xyzdS+\iint_{\text{وجه B}} xyzdS+\iint_{\text{وجه C}} xyzdS$$

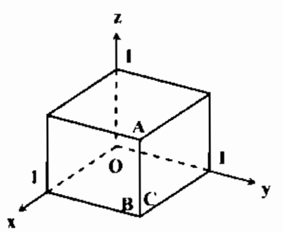
وجه A، رویهٔ $F(x,y,z)=z=1$ می‌باشد که تصویر آن در صفحه xy ناحیه $0\le y\le 1$ و $R: 0\le x\le 1$ می‌باشد.

$$\nabla F=\vec{k} \Rightarrow |\nabla F|=1 \ , \ |\nabla F.\vec{k}|=1 \ , \ dS=\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.k|}dxdy=dxdy$$

چون می‌خواهیم انتگرال g را روی رویهٔ $z=1$ محاسبه کنیم، در ضابطه g به جای z مقدار یک را قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$\iint_{\text{وجه A}} xyzdS=\int_0^1\int_0^1 xydxdy=\frac{1}{4}$$

به خاطر وجود تقارن انتگرال g روی وجوه B و C نیز برابر $\frac{1}{4}$ خواهد بود. بنابراین:



$$\iint_{\text{مکعب}} xyzdS=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال ۴۸: رویه جانبی استوانه‌ای از دو قسمت به معادلات $x=y^2$ و $x=2-y^2$ تشکیل شده است. مساحت ناحیه‌ای که این استوانه از صفحه $x+2y+2z=5$ جدا می‌کند چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. اگر تصویر ناحیه S روی صفحه xy را با R نشان دهیم، ناحیه R، سطح محصور بین $x=y^2$ و $x=2-y^2$ می‌باشد یعنی:

$$\begin{cases}x=2-y^2\\ x=y^2\end{cases}\Rightarrow y^2=2-y^2\Rightarrow y=\pm 1\Rightarrow R: y^2\le x\le 2-y^2, -1\le y\le 1$$

از طرفی اگر معادله صفحه را به صورت $F(x,y,z)=x+2y+2z=5$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$dS=\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.k|}dA=\frac{|\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}|}{|(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}).|(\vec{k})|}=\frac{3}{2}$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=\iint_R\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.k|}dA=\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{2-y^2}\frac{3}{2}dxdy=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(2-2y^2)dy=4$$

انتگرال میدان برداری روی سطوح (شار)

❖ **تعریف ۴:** اگر F یک میدان برداری پیوسته روی رویهٔ S باشد، انتگرال $\bar{F}.\vec{n}$، یعنی مؤلفه عددی F در جهت n، را شار گذرنده از S در جهت مثبت می‌نامیم. یعنی:

$$\text{شار گذرنده } F \text{ از } S \text{ در جهت } n=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

در فرمول فوق اگر S بخشی از رویهٔ $G(x,y,z)=c$ باشد، آنگاه n را می‌توان یکی از دو بردار زیر، بسته به اینکه کدامیک از آنها جهت مطلوب را به دست می‌دهد، اختیار کرد:

$$n=+\frac{\nabla G}{|\nabla G|} \qquad \text{یا} \qquad n=-\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

مثال ۴۹: رویه S عبارت است از رویه‌ای که صفحات $x=0$ و $x=a$ از استوانه $y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$ جدا می‌کنند. شار برونسوی $\vec F=yz\vec j+z^2\vec k$ گذرنده از رویه S چقدر است؟

۱) a^4 ۲) $2a^4$ ۳) $3a^4$ ۴) $4a^4$

پاسخ: گزینه «۲» اگر G را به صورت $G(x,y,z)=y^2+z^2-a^2=0$ در نظر بگیریم. بردار واحد قائم برونسو بر S برابر است با:

$$n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}=\frac{2y\vec j+2z\vec k}{\sqrt{4y^2+4z^2}}=\frac{y}{a}\vec j+\frac{z}{a}\vec k$$

از طرفی:

$$d\sigma=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G.k|}dA=\frac{2a}{|2z|}dA=\frac{a}{z}dA$$

اگر تصویر S را بر صفحه xy با R نشان دهیم، ناحیه R به صورت روبرو خواهد بود: $R: 0\le x\le a \ , \ -a\le y\le a$

بنابراین:

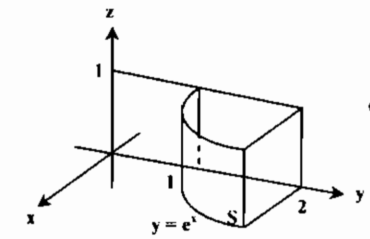
$$\iint_S F.nd\sigma=\iint_R(yz\vec j+z^2\vec k).(\frac{y}{a}\vec j+\frac{z}{a}\vec k)\frac{a}{z}dA=\iint_R\frac{z(y^2+z^2)}{a}\times\frac{a}{z}dA=\iint_R a^2dxdy=a^2\times(\text{مساحت } R)=2a^4$$

مثال ۵۰: فرض کنید S آن قسمتی از استوانه $y=e^x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yz، مستطیل $R: 1\le y\le 2$ و $0\le z\le 1$ باشد. همچنین فرض کنید n بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه yz است. شار میدان $F(x,y,z)=-2\vec i+2y\vec j+z\vec k$ گذرنده از S در جهت n چقدر است؟

پاسخ: اگر استوانه را به صورت $G(x,y,z)=e^x-y=0$ در نظر بگیریم، آنگاه بردار قائم مورد نظر عبارت است از:

$$n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}=\frac{e^x i-j}{\sqrt{e^{2x}+1}}\Rightarrow \vec F.\vec n=\frac{-2e^x-2y}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\frac{-4e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

در رابطه بالا برای نوشتن تساوی آخر به جای y، e^x قرار دادیم. از طرفی:



$$d\sigma=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G.i|}dA=\frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x}dA$$

بنابراین:

$$\iint_S F.nd\sigma=\iint_R\frac{-4e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\times\frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x}dA=-4\int_1^2\int_0^1 dzdy=-4$$

نکته ۱۸: انتگرال شار را با نمادهای زیر نیز نشان می‌دهند:

الف) اگر حاصل $\vec n d\sigma$ را $d\vec S$ فرض کنیم، شار را با $\iint_S F.d\vec S$ نیز می‌توان نشان داد.

ب) اگر α، β و γ زوایای بردار قائم یکه $\vec n$ با محورهای مختصات باشند، آنگاه $\vec n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ و بنابراین شار را با $\iint_S(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)d\sigma$ نیز می‌توان نشان داد.

ج) گاهی شار را با نماد $\iint_S(F_1dydz+F_2dxdz+F_3dxdy)$ نیز نشان می‌دهند.

نکته ۱۹: می‌دانیم اگر صفحه تصویر، صفحه xy انتخاب شود، آنگاه $n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ و $d\sigma=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G.k|}dxdy$. بنابراین در این حالت انتگرال شار از فرمول روبرو سریعتر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\iint_S\vec F.\vec n d\sigma=\iint_R\frac{F.\nabla G}{|\nabla G.k|}dxdy$$

و به طور مشابه وقتی صفحه تصویر، صفحه xz و yz انتخاب شود فرمول فوق به ترتیب به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_S F.nd\sigma=\iint_R\frac{F.\nabla G}{|\nabla G.j|}dxdz$$ (وقتی صفحه تصویر، صفحه xz باشد)

$$\iint_S F.nd\sigma=\iint_R\frac{F.\nabla G}{|\nabla G.i|}dydz$$ (وقتی صفحه تصویر، صفحه yz باشد)

مثال ۵۱: حاصل انتگرال سطح $I=\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$ روی نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=1$، $z\ge 0$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» صفحه تصویر را صفحه xy، انتخاب می‌کنیم همچنین توجه کنید که انتگرال داده شده شار میدان $\vec F=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ می‌باشد و اگر معادله نیم‌کره را به صورت $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ بنویسیم، آنگاه:

$\nabla G=2x\vec i+2y\vec j+2z\vec k\Rightarrow \vec F.\nabla G=2(x^2+y^2+z^2)=2$

$|\nabla G.k|=2z=2\sqrt{1-x^2-y^2}$

از طرفی توجه کنید که تصویر کره مزبور بر صفحه xy قرص $x^2+y^2\le 1$ می‌باشد. بنابراین:

$$I=\iint_R\frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint_R\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}=\int_0^{2\pi}(-\sqrt{1-r^2})\Big|_0^1d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$ (تغییر مختصات قطبی)

مثال ۵۲: شار برونسوی میدان $F=y\vec i-x\vec j+4\vec k$ گذرنده از سطح $z=1-x^2-y^2$ واقع در یک هشتم اول را بیابید.

پاسخ: صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. در این صورت اگر سطح موردنظر را به صورت $G(x,y,z)=x^2+y^2+z=1$ در نظر بگیریم، آنگاه: $\nabla G=2xi+2yj+k\Rightarrow F.\nabla G=2xy-2xy+4=4 \ , \ |\nabla G.k|=1$

و از طرفی تصویر سطح موردنظر بر صفحه xy، قرص $x^2+y^2\le 1$، $x\ge 0$ و $y\ge 0$ می‌باشد. بنابراین:

$$\iint_S F.nd\sigma=\iint_R 4dxdy=4\times(\text{ساحت تصویر})=4\times\frac{\pi}{4}=\pi$$

قضیه دیورژانس (قضیه گاوس یا قضیه واگرایی)

ناحیه D را یک ناحیه ۳ بعدی منظم فرض کنید که مرز آن S، یک سطح بسته جهت‌دار باشد و قائم یکه $\vec n$ همواره رو به خارج ناحیه D اشاره کند. اگر مشتقات جزئی F روی ناحیه D پیوسته باشند، آنگاه:

$$\iint_S F.ndS=\iiint_D divFdV$$

مثال ۵۳: شار میدان $F(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ روی کره $x^2+y^2+z^2=R^2$ چقدر است؟

پاسخ: ناحیه محدود به کره را D می‌نامیم. در این صورت بنابر قضیه دیورژانس:

$$\text{شار}=\iint_S F.ndS=\iiint_D divFdV=\iiint_D(1+1+1)dV=3\iiint_D dV=3(\frac{4}{3}\pi R^3)=4\pi R^3$$

مثال ۵۴: مقدار $\iint_S\vec F.\vec ndS$ که در آن $F(x,y,z)=(xy^2,yz^2,zx^2)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $\vec n$ بردار قائم یکه خارجی می‌باشد برابر است با:

۱) $\frac{4}{5}\pi a^5$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^5$ ۳) $4\pi a^5$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^5$

پاسخ: گزینه «۱» ناحیه محدود به کره S را D می‌نامیم، و $div=y^2+z^2+x^2$. بنابراین طبق قضیه دیورژانس.

$$\text{شار}=\iiint_D divFdV=\iiint_D(x^2+y^2+z^2)dV$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$\text{شار}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2(\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta)=\frac{4}{5}\pi a^5$$

مثال ۵۵: شار میدان $F(x,y,z)=xy\vec i+yz\vec j+xz\vec k$ بر رویهٔ مکعبی که صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 2

پاسخ : گزینه «۲» به جای محاسبه شار به صورت مجموع شش انتگرال جداگانه، می‌توان شار را به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کرد.

$$F(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}\Rightarrow \operatorname{div}F=y+z+x$$

$$\text{شار}=\iiint \operatorname{div}F\,dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\frac{3}{2}$$

مثال ۵۶ : مقدار انتگرال $\iint_S F.ndS$ در صورتی که $F(x,y,z)=(x,y,z)$ و S سطح بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد، چقدر است؟

۱) πabc ۲) $6\pi abc$ ۳) $2\pi abc$ ۴) $4\pi abc$

پاسخ : گزینه «۴» اگر ناحیه درون S را با R نشان دهیم، طبق قضیه دیورژانس:

$$\iint_S F.ndS=\iiint_R \operatorname{div}F\,dV=\iiint_R \operatorname{div}F\,dV=3\times(\text{حجم } R)=4\pi abc$$

مثال ۵۷ : مقدار انتگرال سطح $\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$ روی رویه $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ۴) 16π

پاسخ : گزینه «۳» انتگرال داده شده شار میدان $F(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ است. بنابراین طبق قضیه دیورژانس:

$$\text{شار}=\iiint \operatorname{div}F\,dV=3\iiint dV=3\times(\text{حجم درون رویه})=3\times\frac{8\pi}{3}=8\pi$$

مثال ۵۸ : فرض کنید $F=bxy^2\vec{i}+bx^2y\vec{j}+(x^2+y^2)z^2\vec{k}$ و S مرز محصور کنندهٔ استوانهٔ $x^2+y^2\le a^2$ و $0\le z\le b$ باشد. مقدار $\iint_S F.ndS$ چقدر است؟

پاسخ : ناحیه محصور شده توسط S را D می‌نامیم، طبق قضیه دیورژانس:

$$I=\iint_S F.ndS=\iiint_D \operatorname{div}F\,dV=\iiint_D(x^2+y^2)(b+2z)\,dV$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^b(b+2z)\,dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2r\,dr=(b^2+b^2)\times 2\pi\times\frac{a^4}{4}=\pi a^4b^2$$

شکلهای دیگر قضیه دیورژانس:

قضیه : اگر ناحیه D در شرایط قضیه دیورژانس صدق کند و دارای مرز S باشد، و همچنین F یک میدان برداری و ϕ یک میدان اسکالر که شرایط قضیه دیورژانس را دارند باشند، آنگاه:

a) $\iiint_D \operatorname{Curl}F\,dV=-\iint_S F\times\vec{n}\,dS$ ($\vec{n}$ بردار قائم یکه عمود بر سطح)

b) $\iiint_D \operatorname{grad}\phi\,dV=-\iint_S \phi\vec{n}\,dS$

مثال ۵۹ : اگر S یک رویه بسته باشد، که ناحیه R با حجم V را در برگرفته است آنگاه مقدار $\iint_S \mathit{Curl}f.ndS$ کدام است؟

۱) S ۲) V ۳) 0 ۴) $\iiint_R f\,dV$

پاسخ : گزینه «۳» با فرض برقرار بودن شرایط قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S(\operatorname{Curl}f.n)dS=\iiint_R \operatorname{div}(\operatorname{Curl}f)dV=0$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کردیم که $\operatorname{div}(\operatorname{Curl}f)=0$.

مثال ۶۰ : فرض کنید تابع f در سرتا سر ناحیه D همساز باشد و S مرز ناحیه D باشد، $\vec{n}$ بردار واحد قائم برونسو بر S باشد. همچنین $\frac{\partial f}{\partial n}$ مشتق جهتی f در جهت n باشد، در این صورت مقدار $\iint_S\frac{\partial f}{\partial n}dS$ کدام است؟

۱) $\iiint_D|f|\,dU$ ۲) $\iiint_D|\nabla f|^2\,dU$ ۳) $\iiint_D|f|^2\,dU$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به تعریف مشتق جهتی می‌دانیم $\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f.n$، بنابراین به کمک قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\iint_S\frac{\partial f}{\partial n}dS=\iint_S\nabla f.ndS=\iiint_D \operatorname{div}(\nabla f)dV=\iiint_D\nabla^2f\,dV$$

با توجه به اینکه f تابعی همساز می‌باشد، پس $\nabla^2f=0$ و در نتیجه مقدار انتگرال اخیر برابر صفر است.

مثال ۶۱ : اتحادهای گرین را ثابت کنید:

۱) $\iint_S f\nabla g.ndS=\iiint_D(f\nabla^2g+\nabla f.\nabla g)dV$ ۲) $\iint_S(f\nabla g-g\nabla f).ndS=\iiint_D(f\nabla^2g+g\nabla^2f)dV$

پاسخ :

ابتدا توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(f\nabla g)=\nabla f.\nabla g+f\operatorname{div}(\nabla g)=\nabla f.\nabla g+f\nabla^2g$$

بنابراین با به کار بردن قضیه دیورژانس برای تابع $f\nabla g$ خواهیم داشت:

$$\iint_S f\nabla g.ndS=\iiint_D(\nabla f.\nabla g+f\nabla^2g)dV$$

برای اثبات اتحاد دوم، کافی است در مورد توابع $f\nabla g$ و $g\nabla f$ اتحاد اول را بنویسیم و حاصل را از هم کم کنیم.

مثال ۶۲ : اگر f تابعی همساز باشد، آنگاه حاصل $\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\iiint_D|\nabla f|\,dV$ ۲) $\iiint_D|\nabla f|^2\,dV$ ۳) $\iiint_D\frac{1}{2}f^2dV$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial f}{\partial n}$، مشتق جهتی f در راستای بردار n، یعنی $\nabla f.n$ می‌باشد. بنابراین به کار بردن اتحاد اول گرین در مورد انتگرال داده شده خواهیم داشت:

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}dS=\iint f\nabla f.ndS=\iiint_R(\nabla f.\nabla f+f\nabla^2f)dV$$

با توجه به اینکه طبق فرض f همساز است، پس $\nabla^2f=0$ و یا $f\nabla^2f=0$ و همچنین از آنجا که $\nabla f.\nabla f=|\nabla f|^2$، پس گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۶۳ : تابع $u(x,y,z)$ که ثابت نیست، مقدارش روی کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\rho=a>0$ برابر صفر می‌باشد. اگر قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u\nabla u$ در داخل و روی سطح کره به کار ببریم، آنگاه مقدار $\iiint_{\rho<a}u\nabla^2u\,dx\,dy\,dz$.

۱) منفی است. ۲) مثبت است. ۳) صفر است. ۴) علامت ثابتی ندارد.

پاسخ : گزینه «۱» همانطور که در صورت سؤال آمده، قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u\nabla u$ به کار می‌بریم، با کمک اتحاد اول گرین خواهیم داشت:

$$\iint_S u\nabla u.ndS=\iiint_D(|\nabla u|^2+u\nabla^2u)dV$$

طبق فرض $u\nabla^2u$ روی سطح کره صفر است، پس:

$$\iiint_D u\nabla^2u\,dV=-\iiint_D|\nabla u|^2\,dV$$

و چون طبق فرض تابع u ثابت نیست، پس $|\nabla u|^2>0$ و در نتیجه $\iiint_D|\nabla u|^2\,dV$ بزرگتر از صفر خواهد بود. از بحث فوق نتیجه می‌شود مقدار انتگرال خواسته شده در صورت مسأله منفی می‌باشد.

مثال ۶۴ : فرض کنید تابع u در ناحیه D همساز باشد و در تمام نقاط رویه S که مرز ناحیه D می‌باشد $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. در این صورت مقدار ∇u در ناحیه D :

۱) مثبت است. ۲) منفی است. ۳) صفر است. ۴) ثابت است.

پاسخ : گزینه «۳» طبق اتحاد اول گرین می‌دانیم:

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_D(|\nabla u|^2+u\nabla^2u)dV$$

طبق فرض u همساز است یعنی $\nabla^2u=0$ و در روی رویه S داریم $\frac{\partial u}{\partial n}=0$، بنابراین از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\iiint_D|\nabla u|^2\,dV=0$ و این انتگرال تنها در صورتی برابر صفر است که $\nabla u=0$ باشد (یعنی u در ناحیه D ثابت باشد.)

تذکر ۷ : مسأله فوق به مسأله نیومن معروف است.

قضیه استوکس

قضیه استوکس نشان می‌دهد که گردش یک میدان برداری چون F در امتداد مرز یک رویه در فضا، در جهتی که نسبت به بردار قائم n بر رویه خلاف جهت ساعت است، برابر انتگرال دوگانه $\mathrm{Curl}\vec{F}.\vec{n}$ روی رویه می‌باشد. و از این جهت شباهت زیادی به قضیه گرین دارد.

قضیه : فرض کنید S یک سطح قطعه قطعه هموار در فضای سه بعدی باشد، که $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج آن است و C مرز سطح S است که از یک یا چند قطعهٔ هموار بسته تشکیل شده است و دارای جهتی است که از سطح S به آن القاء شده است. حال اگر F یک میدان برداری با مشتقات جزئی پیوسته روی S باشد، آنگاه:

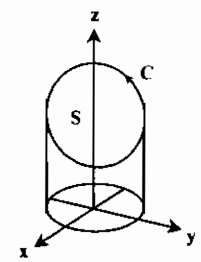
$$\int_C F.dr = \iint_S \mathrm{Curl}F.ndS$$

تذکر ۸ : منظور از جهت القاء شده از سطح S در قضیه فوق این است که: اگر ناظر در امتداد مرز سطح (یعنی C) با قائم رو به بیرون حرکت کند وی در صورتی در جهت صحیح (مثبت) حرکت می‌کند که سطح S سمت چپ وی باشد و این جهت بر C را اغلب جهت القاء شده به وسیله بردار قائم رو به خارج $\vec{n}$ می‌نامند.

مثال ۶۵ : فرض کنید $\vec{F} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} - z^3\vec{k}$، و C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $2x + 2y + z = 3$ می‌باشد که طوری جهت‌دار شده که تصویر آن بر صفحه xy در جهت مثبت دایره مثلثاتی است. در این صورت $\int_C F.dr$ چقدر است؟

☑ **پاسخ :** محاسبه مستقیم انتگرال فوق طولانی و وقت‌گیر است. بنابراین بهتر است از قضیه استوکس استفاده کنیم.

خم C، مرز بستهٔ قرص بیضوی S در صفحه $2x + 2y + z = 3$ می‌باشد که تصویر آن بر صفحه xy، قرص $R : x^2 + y^2 \le 1$ می‌باشد. (به شکل روبرو توجه کنید.) بر روی سطح S داریم: $\vec{n}dS = (2\vec{i} + 2\vec{j} + k)dxdy$



و همچنین:

$$\mathrm{Curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = 3(x^2 + y^2)k$$

بنابراین طبق قضیه استوکس

$$\int_C F.dr = \iint_S \mathrm{Curl}F.ndS = \iint_R 3(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3r^3dr = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{(مختصات قطبی)}$$

نکته ۲۰ : دو سطح S و S' با مرز مشترک C را در نظر بگیرید، طبق قضیه استوکس:

$$\iint_S \mathrm{Curl}F.ndS = \iint_{S'} \mathrm{Curl}F.ndS = \int_C F.dr$$

> **توجه : نکته فوق هنگامیکه بخواهیم $\iint_S \mathrm{Curl}F.nds$ را به دست آوریم و محاسبه مستقیم آن و یا به کمک $\int_C F.dr$ ساده نباشد می‌تواند مفید باشد. بدین صورت که به جای سطح S، سطح ساده‌تر و مناسب‌تری مانند S' با همان مرز S را در نظر می‌گیریم.**

مثال ۶۶ : مقدار $I = \iint_S \mathrm{Curl}F.ndS$ را بیابید، بطوریکه S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد و $F = y^2\cos zi + x^3e^{yz}j - e^{-xyz}k$ می‌باشد.

☑ **پاسخ :** مرز ناحیه S را C می‌نامیم. در این صورت C دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy خواهد بود. محاسبه مستقیم I همانند مثال قبل ساده نخواهد بسود و همچنین محاسبهٔ I به کمک قضیه استوکس برحسب $\int_C F.dr$ نیز امکان‌پذیر نیست. اما از طرفی C مرز قرص $z = 0$ و $D : x^2 + y^2 \le 4$ با بردار نرمال $\vec{n} = \vec{k}$ می‌باشد. لذا طبق نکته (۲۰) داریم:

$$I = \iint_S \mathrm{Curl}F.ndS = \iint_D \mathrm{Curl}F.kdA$$

روی سطح D داریم:

$$\mathrm{Curl}F.k = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos xz)\right)\Bigg|_{z=0} = 3x^2 - 2y$$

چون $-2y$ فرد است و ناحیه D نسبت به y متقارن است لذا $\iint_D -2y = 0$. بنابراین:

$$I = \iint_D 3x^2dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2\theta rdrd\theta = 3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\int_0^2 r^3dr = 12\pi$$

مثال ۶۷ : فرض کنید C خم حاصل از تقاطع کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و صفحه $x + y + z = 0$ باشد. در این صورت مقدار $\int_C ydx + zdy + xdz$ کدام است؟

۱) πa^2 ۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{3}\pi a^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال فوق از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. (محاسبه مستقیم انتگرال نیاز به پارامتری کردن خم C دارد که چندان ساده نیست.) خم C قسمتی از صفحه $x + y + z = 0$ را در برگرفته که داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد، بنابراین بردار قائم بر سطح برابر است با:

$$G : x + y + z = 0 \Rightarrow n = \pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

و از طرفی:

$$F = yi + zj + xk \Rightarrow \mathrm{Curl}F = (-1,-1,-1)$$

پس بنابر قضیه استوکس:

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \iint_S \mathrm{Curl}F.ndS = \iint_S \sqrt{3}dS = \sqrt{3}\iint_S dS$$

با توجه به اینکه S دایره‌ای به شعاع a می‌باشد، پس مقدار انتگرال اخیر πa^2 و در نتیجه مقدار موردنظر $\sqrt{3}\pi a^2$ خواهد بود (توجه کنید که در محاسبات بالا علامتی را برای بردار n انتخاب کردیم، که نتیجه موردنظر طراح حاصل شود.)

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ کار انجام شده توسط میدان نیرویی به صورت $F(x,y)=y^2\vec{i}+(2xy)\vec{j}$ از مبدأ تا نقطه (۱,۱) بر مسیر دلخواه C کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ـ فرض کنیم u و v توابع با مقادیر حقیقی و از کلاس C^2 باشند و F یک میدان برداری از کلاس C^2 و $\Delta=\nabla^2$ اپراتور لاپلاس باشد، کدام گزینه نادرست است؟
(عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$
۲) $\operatorname{div}(uF)=u\operatorname{div}F+\operatorname{grad}u.\vec{F}$
۳) $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u$
۴) $\operatorname{curl}(uF)=u\operatorname{curl}F+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$

۳ـ مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}$ که در آن $F(x,y,z)=(xy^2,yz^2,zx^2)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ بردار قائم یکه خارجی است برابر است با:
(عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{4}{5}\pi a^5$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^5$ ۳) $4\pi a^5$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^5$

۴ـ حاصل $\oint_C 2ydx+4xdy$ وقتی c قوسی از سهمی $y=x^2$ از مبدأ تا نقطه $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل از نقطهٔ A تا مبدأ باشد، کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۵ـ مقدار کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y)=y^2i+x^2j$ روی مسیر $y=x^2$ از نقطه (۰,۰) تا نقطه (۱,۱) چقدر است؟
(آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{12}{20}$ ۲) $\frac{13}{20}$ ۳) $\frac{14}{20}$ ۴) $\frac{15}{20}$

۶ـ اگر $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$ و نیز $\vec{A}=A_1i+A_2j+A_3j$ باشد تحت چه شرایطی رابطه زیر دیفرانسیل کامل است؟

$$(1)\qquad d\phi=A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

(مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) شرط کافی برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$ باشد.
۲) شرط لازم و کافی برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$ باشد.
۳) شرط لازم برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$ باشد.
۴) تحت هیچ شرایطی رابطه (۱) دیفرانسیل کامل نمی‌شود.

۷ـ مقدار انتگرال $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است در صورتی که در آن $F(x,y,z)=(x,y,z)$ سطح بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بردار قائم یکه خارجی s است؟
(عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}\pi abc$ ۲) $\frac{4}{3}\pi abc$ ۳) $2\pi abc$ ۴) $4\pi abc$

۸ـ حاصل $\int_C F.dr$ را که در آن $F(x,y,z)=xi-zj+yk$ و $r(t)=2ti+3tj-t^2k$ از نقطه نظیر $t=-1$ تا $t=1$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۲-

۹ـ حاصل $\int_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ که در آن منحنی C دایره‌ای به معادلات $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x+y+z=0$ باشد، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

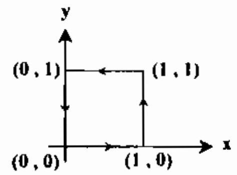
۱۰ـ مقدار $I=\int_C e^y dx+xe^y dy$ بر روی نیم‌دایره $y=\sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱ـ اگر $F=ix+j(1-y)+k(2z+1)$ و $d\delta$ عنصر برداری مساحت کره Σ به معادله $x^2+y^2+z^2=9$ باشد حاصل $\iint_\Sigma F.d\delta$ کدام است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

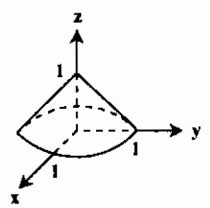
۱) 24π ۲) 36π ۳) 48π ۴) 72π

۱۲ـ با استفاده از قضیهٔ Green مقدار انتگرال خطی $\oint_C [(e^{-x^2}+y^2)dx+(Lny-x^2)dy]$ را که در آن C مربع نشان داده شده است کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۰)



۱) ۲-
۲) ۴
۳) ۱۱-
۴) $2Ln2$

۱۳ـ با استفاده از شکل داده شده که در آن V حجم مخروط قائم می‌باشد، اگر $\vec{V}=Z^2\hat{k}$ و $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$ بردارهای یکه معمول و $\vec{\nabla}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ باشند. مقدار انتگرال حجمی $I=\int \vec{\nabla}.\vec{V}d\tau$ برابر است با:
(مکانیک ـ آزاد ۸۰)



۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۴ـ به ازای کدام مقادیر a و b، انتگرال $\int_A^B (2axz+y^2)dx+y(bx+az)dy+(ax^2+y^2)dz$ مستقل از مسیر است؟
(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $a=b=1$ ۲) $a=b=2$ ۳) $a=1\ ,\ b=2$ ۴) $a=2\ ,\ b=1$

۱۵ـ مقدار انتگرال $\oint_C (6y+x)dx+(y+2x)dy$ که در آن C، دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ پیموده شده (یکبار) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد، کدام است؟
(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) -16π ۲) -4π ۳) صفر ۴) 32π

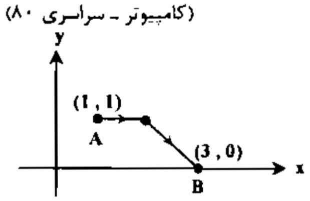
۱۶ـ مقدار انتگرال $\iint_S \operatorname{Curl}\vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن S سطح $x^2+y^2+3z^2=1, z\geq 0$ و $\vec{n}$، بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x,y,z)=y\vec{i}-x\vec{j}+zx^3y^2\vec{k}$، با کدام گزینه برابر است؟
(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) 2π ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

۱۷ـ مقدار انتگرال $\oint_C x^2y^3dx+dy+zdz$ که در آن C دایره $z=0$ ، $x^2+y^2=R^2$ می‌باشد، با کدام گزینه برابر است؟
(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3\pi R^3}{20}$ ۲) $-\frac{3\pi R^5}{8}$ ۳) $-\frac{\pi R^6}{4}$ ۴) $-\frac{\pi R^6}{8}$

۱۸ـ اگر $f(x,y)=2x^2+xy+y^2$ در این صورت مقدار انتگرال $\int_C \nabla f(X).dX$ $(X=(x,y))$ که در آن C منحنی زیر از نقطهٔ A تا نقطهٔB می‌باشد، برابر است با ....
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)



۱) ۱۴
۲) صفر
۳) ۱۸
۴) ۱

۱۹ـ اگر C نیم‌دایرهٔ $x^2+y^2=1$، $y\geq 0$ که در جهت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال $\int_C (x^2+y^2)dx+2xydy$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) 2 ۴) -2

۲۰ـ اگر منحنی C مربعی $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ و $(0,1)$ باشد که در جهت مثلثاتی جهتگذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال $\int_C e^x \sin ydx+e^x\cos ydy$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) صفر

۲۱ـ اگر منحنی C خط $y=x$ از نقطهٔ $(0,0)$ تا نقطهٔ $(1,1)$ باشد در این صورت مقدار انتگرال $\int_C (x+y)dx+(x-y)dy$ برابر است با ...... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۲۲ـ میدان برداری $F(x,y,z)=(x\sin xz, y, xz)$ را در نظر بگیرید در این صورت divF (دیورژانس F) در نقطهٔ $(1,1,\pi)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) 1 ۲) $2-\pi$ ۳) $1-\pi$ ۴) صفر

۲۳ـ هرگاه $\vec{F}=xe^{-y}\vec{i}+e^{-y}\vec{j}+z\vec{k}$، S رویهٔ بستهٔ مکعب مستطیلی به ابعاد ۱ و ۲ و ۳ و $F.dR=4t+2t^3+12t^2(4t^5-2t)=48t^7-22t^3+4t$ بردار یکانی قائم خارجی رویهٔ S، و ds عنصر سطح S باشد. مقدار انتگرال $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) -18 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 18

۲۴ـ اگر تابع f در معادلهٔ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق نماید و C منحنی‌ای هموار و بسته و f و مشتقات نسبی آن روی C و داخل آن پیوسته باشند، مقدار $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2π

۲۵ـ اگر S سطح خارجی کرهٔ به معادله $x^2+y^2+z^2=R^2$ و $\vec{n}$ بردار و به خارج بر S و نیز اگر $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$، آنگاه $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{5}{12}\pi R^5$ ۲) $2\pi R^5$ ۳) $\frac{12}{5}\pi R^5$ ۴) $\frac{7}{3}\pi R^5$

۲۶ـ اگر میدان اسکالر $\varphi\neq 0$ دارای خواص $div(\varphi\nabla\varphi)=10\varphi$ و $\|\nabla\varphi\|^2=4\varphi$ آنگاه مقدار $\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$ به طوری که s کرهٔ یکه‌ای به مرکز مبداء مختصات و $\vec{n}$ برداریکه خارجی آن باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) 14π ۲) 8π ۳) 6π ۴) 4π

۲۷ـ با کدام مقادیر a و b تابع $u(x,y)=x^2+ay^2+by$ همساز است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $a=b=+1$ ۲) $a=-1$ و b دلخواه ۳) $a=-1$ و فقط $b=0$ ۴) هیچ مقدار a و b

۲۸ـ مقدار $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$ که در آن C یک خم به معادلات پارامتری $x=\frac{t}{1+t}$ و $y=\frac{1}{1+t}$، $0\leq t\leq 2$ باشد، برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۹ـ حاصل $I=\oint_C [(x^2+xy)dx+(y^2+x^2)dy]$ که در آن C مربعی به معادلات اضلاع $|x|^2=1$ و $|y|=1$ باشد، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) -1 ۳) $+1$ ۴) 4

۳۰ـ اگر $\vec{\nabla}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ و $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$ بردارهای یکه «معمول» و u یک تابع اسکالر از متغیرهای مستقل (x,y,z) و $\vec{v}$ یک بردار و تابعی از (x,y,z) و نقطه بین دو بردار به معنی ضرب داخلی بین آن دو باشند، عبارت $\vec{\nabla}.(u\vec{v})$ به کدام عبارت زیر ساده می‌شود؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})-\nabla^2\vec{v}$ ۲) $(\vec{v}.\vec{\nabla})u-u\vec{v}$

۳) $\vec{\nabla}u.\vec{v}+u\vec{\nabla}.\vec{v}$ ۴) $u\vec{\nabla}\times\vec{v}+\vec{\nabla}u\times\vec{v}$ (× به معنی ضرب خارجی بین دو بردار)

۳۱ـ مقدار انتگرال خط $\int_C (2xy^2-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$ که در آن C سهمی $2x=xy^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(\frac{\pi}{2},1)$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

۳۲ـ مقدار انتگرال سطح $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $F(x,y,z)=x^6\vec{i}+y\cos^2 x\vec{j}+2z\vec{k}=(x^6,y\cos^2 x,2z)$ و S سطح استوانه $y^2+4z^2\leq 4$، $-\pi\leq x\leq\pi$ و $\vec{n}$ بردار یکه خارجی S است. با کدام گزینه برابر می‌باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $2\pi^2$ ۲) $4\pi^2$ ۳) $6\pi^2$ ۴) $8\pi^2$

۳۳ـ اگر $\vec{F}=i(e^x\cos y+yz)+j(xz-e^x\sin y)+k(xy+z)$ باشد. f را پیدا کنید به طوریکه $\vec{F}=\vec{\nabla}f$ باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $f(x,y,z)=e^x\cos y+z+C$ ۲) $f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+C$

۳) $f(x,y,z)=e^x\sin y+xyz+C$ ۴) $f(x,y,z)=e^x\sin y+\frac{z^2}{2}+C$

۳۴ـ مقدار $\int_C xy^2ds$ وقتی معادلهٔ پارامتری C به صورت $x=\cos t$، $y=\sin t$ و $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 3 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۵ـ اگر $B=xy^2\vec{i}+2x^2yz\vec{j}-3yz^2\vec{k}$ در این صورت مقدار divB در نقطهٔ $(1,1,0)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

۳۶ـ اگر $B=xy^2\vec{i}+2x^2yz\vec{j}-3yz^2\vec{k}$ در این صورت مقدار CurlB در نقطهٔ $(1,0,1)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-3,0,0)$ ۲) $(-3,0,1)$ ۳) $(-3,1,0)$ ۴) $(-3,0,-1)$

۳۷ـ اگر C قسمت از منحنی $y=(1+x)^2$ باشد که نقطه $(-1,0)$ را به نقطه $(0,1)$ وصل می‌کند. مقدار انتگرال $\int_C (1+2xy)dx+x^2dy$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) 1 ۴) -1

۳۸ـ مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ که زیر صفحه $z=\frac{1}{3}x+2$ و بالای صفحه $z=0$ قرار دارد، برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) 4π ۲) $\frac{13\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{9\pi}{-3}$

۳۹ـ حاصل $\oint_C (e^{x^2}+y)dx+(x^2-Arctg\sqrt{y})dy$ وقتی C مستطیل با رئوس به مختصات $(1,2)$، $(5,2)$، $(5,4)$ و $(1,4)$ باشد کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) 10 ۲) 20 ۳) 30 ۴) 40

۴۰ـ اگر $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}-3z^2\vec{k}$، $Curl\vec{F}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) بردار صفر ۲) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۳) $6x\vec{i}+2y\vec{j}-4z\vec{k}$ ۴) $(2y-6z)\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

۴۱ـ به ازای کدام مقدار a، حاصل انتگرال $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (ax^2y - 3xy^2)dy$ بستگی به مسیر ندارد؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) 3 ۲) هر مقدار a ۳) 6 ۴) هیچ مقدار a

۴۲ـ مقدار $\iint_\Sigma (x+y+z)ds$ که در آن Σ قسمتی از صفحهٔ $x+y=1$ با شرط $y \geq 0$ و $0 \leq z \leq 1$ برابر کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۴۳ـ اگر $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ آنگاه $\text{div}\vec{F}$ و $\text{Curl}\vec{F}$ به ترتیب کدام اند؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر و $2(x+y)\vec{k}$ ۲) صفر و $2(x-y)\vec{k}$ ۳) غیر صفر و $2(x+y)\vec{k}$ ۴) غیر صفر و $2(x-y)\vec{k}$

۴۴ـ مقدار انتگرال منحنی‌الخط $\int \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ روی منحنی $C: x^2+y^2-x-y=0$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

۴۵ـ اگر C نیم‌دایرهٔ بالائی $x^2+y^2=1$ باشد، که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، مقدار انتگرال خطی $\int_C 2xydx + x^2dy$ چیست؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۴۶ـ مقدار کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y) = yi + 2xj$ در امتداد مسیر $y = x + \sin x$ از نقطهٔ $(0,0)$ تا نقطهٔ (π,π) چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3\pi^2}{2} - 2$ ۲) $\frac{3\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{3\pi^2}{2} + 2$ ۴) $\frac{3\pi^2}{2} + 6$

۴۷ـ مقدار $\int_{(2,\ )}^{(\ ,3)} (-2x+3y)dx + (3x+2y)dy$ روی مسیری به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ واقع در ربع اول صفحه مختصات کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) 13 ۲) 5 ۳) -13 ۴) -5

۴۸ـ فرض کنید V ناحیه محصور به نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=4$ از بالا و صفحه $z=0$ از پایین و S مرز V باشد. اگر $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج S باشد و $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{192}{3}\pi$ ۲) $\frac{96}{3}\pi$ ۳) $\frac{96}{5}\pi$ ۴) $\frac{192}{5}\pi$

۴۹ـ مقدار انتگرال $\int_C xydx + (\frac{1}{2}x^2 + xy)dy$ که در آن C از بازه $[-1,1]$ روی محور x و نیمه بالایی بیضی $x^2+4y^2=1$ تشکیل شده است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵۰ـ اگر حجم V به وسیله سطح S محصور شده باشد و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S و به سمت خارج از جسم باشد، ϕ و Ψ توابع عددی تعریف شده در حجم V باشد، $\int_V \phi\nabla^2\Psi dV$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) $\int_S \phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS$ ۲) $\int_S (\phi\vec{\nabla}\Psi).\vec{n}dS$

۳) $\int_S \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\Psi dS$ ۴) $\int_S \phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS - \int_V \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\Psi dV$

۵۱ـ مساحت آن قسمت از نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=2$ ، $z \geq 0$ که به وسیله مخروط $z^2 = x^2+y^2$ قطع می‌شود، چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sqrt{2}\pi$ ۲) $\pi(2-\sqrt{2})$ ۳) $2\pi(2-\sqrt{2})$ ۴) $\pi(2+\sqrt{2})$

۵۲ـ کدامیک از توابع گرادیان یک تابع است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\cos xyi + \sin xyj$ ۲) $e^{xy}\cos xy(yi+xi)$

۳) $ye^{xy}\cos xyi + xe^{xy}\sin xyj$ ۴) $ye^{xy}(\cos xy + \sin xy)i + xe^{xy}(\cos xy + \sin xy)j$

۵۳ـ فرض کنید f در معادله $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ صدق کند. C یک منحنی هموار و بسته باشد و f و مشتق‌های نسبی آن روی C و داخل آن پیوسته باشند. در این صورت مقدار $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2π

۵۴ـ اگر $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ مقدار $\text{div}(\text{Curl}\vec{A})$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $A_1 + A_2 + A_3$ ۳) $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ ۴) $A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

۵۵ـ اگر $\phi = 2x^2y - xz^3$ باشد آنگاه $\nabla^2\phi$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $4y - 6xz$ ۲) $4x - 6xz$ ۳) $4y - 3xz$ ۴) $4 - 6xz$

۵۶ـ نیروی $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (yz-x)\vec{k}$ در امتداد مسیر $0 \leq t \leq 1$ و $\vec{R}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + 4t^3\vec{k}$ چند واحد کار انجام می‌دهد؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) 12 ۳) 2 ۳) 3 ۴) 5

۵۷ـ مساحت این قسمت از رویهٔ $z = x^2 + y^2$ که بین صفحات $z=0$ و $z=4$ قرار دارد کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17}+1)$ ۲) $\frac{1}{6}\pi(\sqrt[3]{17}-1)$ ۳) $\pi(17\sqrt{17}+1)$ ۴) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17}-1)$

۵۸ـ انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C (3x+y)dx + (2x-7y)dy$ روی منحنی C به معادله $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 5π

۵۹ـ بردار $F = i(z-y) + j(x-z) + k(y-x)$ و منحنی C فصل مشترک $z = 4 - x^2 - y^2$ با صفحه xoy باشد. $\oint_C F.dR$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) 6π ۲) 8π ۳) 4π ۴) صفر

۶۰ـ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن S سطح بسته محدود به نیم‌کره $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ از بالا و صفحه $z=0$ از پایین است و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2\pi a^5}{3}$ ۲) $\frac{4\pi a^5}{3}$ ۳) $\frac{4\pi a^5}{5}$ ۴) $\frac{2\pi a^5}{5}$

۶۱ـ به ازای چه مقدار λ، انتگرال $\int_A^B (z^2dx + 2ydy + \lambda xzdz$ مستقل از مسیر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $\lambda = 2$ ۲) $\lambda = 1$ ۳) $\lambda = 0$ ۴) $\lambda = -1$

۶۲ـ اگر $F(x,y,z) = (a^2x, y, c^2z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $\vec{n}$ قائم یکه رو به خارج کره باشد، آنگاه مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{4}{3}\pi$ ۲) $4\pi(a+1+c^2)$ ۳) (a^2+1+c^2) ۴) $\frac{4\pi}{3}(a^2+1+c^2)$

۶۳ـ کرل بردار $I = 3x^2y\hat{i} + 7xz\hat{j} + 4zy\hat{k}$ در نقطه $(1,2,3)$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $5\hat{i} + 19\hat{k}$ ۲) $5\hat{i} + 18\hat{k}$ ۳) صفر ۴) $6\hat{i} + 18\hat{k}$

۶۴ـ کدامیک از جملات زیر نادرست است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) گرادیان یک میدان اسکالر دارای خاصیت خطی است.
۲) کرل گرادیان صفر است.
۳) دیورژانس کرل صفر است.
۴) دیورژانس یک میدان برداری با تغییر محورهای مختصات تغییر می‌کند.

۶۵ـ اگر $\vec{F} = xi + yj + zk$ حاصل $\int_C \vec{F}.dR$ بر روی مسیر $z = t^3$ و $y = t^2$ و $x = 2t$ از نقطه نظیر $t = 0$ تا $t = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

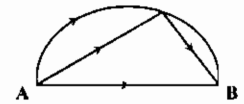
۱) 2 ۳) 3 ۳) 4 ۴) 5

۶۶ـ اگر تابع اسکالر f در شرط $\vec{\nabla f} = (2x - \frac{y}{x^2})\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}$ صدق کند و $f(1,1) = 4$ باشد، حاصل $f(2,2)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) 3 ۲) 5 ۳) 7 ۴) 9

۶۷ـ نقطه اثر نیروی $F = z^2 i + 2yj + 2xzk$ در طول منحنی C از نقطه $A(0,1,1)$ به نقطه $B(1,2,3)$ نقل مکان می‌کند. کار انجام شده در کدام مسیر :«نیم‌دایره ـ خط شکسته ـ خط راست» کمتر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)



۱) نیم‌دایره ۲) خط شکسته

۳) خط راست ۴) در هر سه مسیر برابر است.

۶۸ـ مساحت آن قسمت از استوانه $x^2 + y^2 = ax$ که داخل کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار می‌گیرد چقدر است؟

(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $2a^2$ ۲) $3a^2$ ۳) $4a^2$ ۴) $5a^2$

۶۹ـ اگر $F = (x^2 - y^2)i + xzj + y^2zK$ مقدار $div(curlF)$ چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۷۰ـ برای اینکه میدان برداری $F(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z)i + (b_1x + b_2y + b_3z)j + (c_1x + c_2y + c_3z)k$ غیر چرخشی باشد لازم و کافی است که: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $b_3 = c_2$ و $a_3 = c_1$ و $a_3 = b_2$ ۲) $b_3 = c_2$ و $a_1 = c_1$ و $a_2 = b_1$

۳) $b_3 = c_2$ و $a_3 = c_1$ و $a_2 = b_1$ ۴) $b_3 = c_2$ و $a_3 = c_1$ و $a_2 = b_1$

۷۱ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = 3x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ که ذره‌ای را در امتداد سهمی $y = 4x^2$ از نقطه $(0,0)$ به (۴ و ۱) به حرکت می‌آورد برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) 7 ۲) 37 ۳) $\frac{37}{5}$ ۴) 35

۷۲ـ مساحت قسمت از رویه $x^2 - y^2 = z^2$ در ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ محدود به صفحه $y + z = a$، کدام است؟

(معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $2a^2$ ۲) $\frac{1}{2}a^2$ ۳) $\sqrt{2}a^2$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

۷۳ـ مقدار $\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy$ وقتی C بیضی به معادله $4x^2 + 9y^2 = 36$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) 6 ۲) 4 ۳) 2 ۴) صفر

۷۴ـ اگر $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری و C یک منحنی با معادلات پارامتری $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد. در این صورت کدام حکم در مورد $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}_1$ و $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}_2$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) فقط در صورتی برابرند که $\vec{F}$ میدان گرادیان باشد.

۲) فقط در صورتی برابرند که منحنی C بسته باشد.

۳) فقط در صورتی برابرند که $\vec{F}$ میدان گرادیان و منحنی C بسته باشد.

۴) با هم برابرند.

۷۵ـ انتگرال خطی $I = \int_{(1,4)}^{(2,1)} 2xy^2dx + (1 + 3x^2y^2)dy$ برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $I = 45$ ۲) $I = -58$ ۳) $I = 28$ ۴) $I = -32$

۷۶ـ اگر G جسمی باشد که از بالا با نیمکرهٔ $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و از پایین با صفحهٔ $z = 0$ محصور شده باشد، مقدار انتگرال دوگانه $I = \iint_\sigma \vec{F}.\hat{n}d\sigma$، که در آن $\vec{F}(x,y,z) = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ و σ سطح G و $\hat{n}$ بردار عمود بر این سطح به سمت خارج می‌باشد، برابر است با:

(مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $I = \frac{2\pi}{3}$ ۲) $I = \frac{4\pi}{5}$ ۳) $I = \frac{3\pi}{8}$ ۴) $I = \frac{6\pi}{5}$

۷۷ـ حاصل $\int ydx - xdy$ در امتداد یک قوس از بیضی $x = \cos t$ و $y = 2\sin t$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) -2π ۲) -4π ۳) -3π ۴) $+\pi$

۷۸ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ در طول منحنی $\vec{R} = (t, t^2, t^3)$ با فرض $0 \le t \le 1$ برابر است با:(عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) 7 ۲) $\frac{32}{11}$ ۳) 11 ۴) $\frac{27}{28}$

۷۹ـ مقدار انتگرال $\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ که در آن C مرز ناحیه محصور به وسیله منحنی‌های $y = x^2$ و $x = y^2$ است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۸۰ـ مساحت قسمتی از سطح، $z = 2 - (x^2 + y^2)$ که در بالای صفحه‌xy قرار دارد چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{11\pi}{3}$ ۲) $\frac{13\pi}{3}$ ۳) $\frac{11\pi}{5}$ ۴) $\frac{13\pi}{5}$

۸۱ـ مقدار انتگرال $\oint_C (\sin x + 3y^2)dx + (2x - e^{-y^2})dy$ که در آن C منحنی بسته مرز ناحیه $x^2 + y^2 \le a^2$ و $y \ge 0$ می‌باشد و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\pi a^2 - 4a^2$ ۲) $\pi a^2 - 2a^3$ ۳) $\pi a^2 - 4a^2$ ۴) $\pi a^2 - 6a^2$

۸۲ـ مقدار انتگرال $\oint_C (x\sin y^2 - y^2)dx + (x^2y\cos y^2 + 3x)dy$ که در آن C ذوزنقه به رئوس $(-2,0)$، $(-1,1)$، $(1,1)$ و $(2,0)$ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) 6 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 12

۸۳ـ به ازای کدام مقدار a انتگرال منحنی‌الخط $\int_C z^2dx + 2ydy + axzdz$ بر روی منحنی بسته C به معادله $(x^2 + y^2 = 1 , x + y + z = 2)$ برابر صفر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) -2 ۲) 2 ۳) -1 ۴) 1

۸۴ـ مقدار انتگرال $\oint -x^2ydx + xy^2dy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ است، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) 2π ۴) $16\frac{\pi}{3}$

۸۵ـ اگر $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + 2xz\vec{j} - 3yz\vec{k}$ آنگاه: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\overline{curl}(\overline{curl}F) = \vec{0}$ ۲) $div(\overline{curl}F) = 0$ ۳) $\overline{curl}(\overline{curl}F) = (2x - 3)\vec{j}$ ۴) $div(\overline{curl}F) = xy$

۸۶ـ قسمتی از مساحت رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) 2π ۴) $2\pi\sqrt{2}$

۸۷ـ بردار $F = (x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$ و S سطح ناحیه D محدود به $|x| \le 1$ و $|y| \le 1$، $|z| \le 1$ است. حاصل $\iint_S F.nd\sigma$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) 6 ۲) 12 ۳) 18 ۴) 24

۸۸ـ اگر $F=(z-y)i+(z+x)j-(x+y)k$ و سطح S قسمتی از سهمی‌گون به معادله $z=1-x^2-y^2\ge 0$ باشد حاصل $\iint_S \text{curl}F.nd\sigma$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

۸۹ـ کار انجام شده توسط نیروی $F=yi+(x+z)j+yk$ در تمام محیط بیضی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه $z+2x=3$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۹۰ـ اگر سطح Γ بخشی از رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود به $z=0$ و $z=1$ باشد، آنگاه انتگرال رویه‌ای $\iint_\Gamma (x^2+y^2)d\sigma$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{9}{10}\pi$ ۲) $\frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ ۳) $\frac{4\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ ۴) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$

۹۱ـ اگر $F(x,y,z)=\frac{m}{r^3}(xj+yj+zk)$، که در آن $m>0$ ثابت و $r^2=x^2+y^2+z^2$، آنگاه $\text{div}F=\nabla.F$ در نقاط $r\neq 0$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $-\frac{m}{r^3}$ ۳) $\frac{6m}{r^3}$ ۴) $-\frac{4m}{r^3}$

۹۲ـ حاصل $\int_C xy^2dy$ وقتی C سهمی به معادلهٔ $y=x^2$ از نقطهٔ $(0,0)$ تا نقطهٔ (۴ و ۲) است، کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{257}{7}$ ۲) $\frac{256}{7}$ ۳) $\frac{255}{7}$ ۴) $\frac{254}{7}$

۹۳ـ فرض کنیم Σ قسمتی از مخروط به معادلهٔ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که $1\le x^2+y^2\le 4$. مقدار $\iint_\Sigma z^2ds$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

۹۴ـ اگر S قسمتی از رویهٔ به معادلهٔ $z=2xy$، واقع در داخل استوانه به معادلهٔ $x^2+y^2=4$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \frac{2ds}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) 2π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 8π

۹۵ـ حاصل $\oint_C (xy^2dy-x^2ydx)$ وقتی مسیر C در جهت مثلثاتی روی نمودار تابع قطبی $r=1+\cos\theta$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{25}{8}\pi$ ۲) $\frac{25}{16}\pi$ ۳) $\frac{35}{8}\pi$ ۴) $\frac{25}{16}\pi$

۹۶ـ حاصل $\nabla\times(\nabla u)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $|u|$ ۴) $|u|^2$

۹۷ـ Q متوازی‌السطوح محدود به صفحات مختصات و صفحات به معادله‌های $x=1$، $y=2$ و $z=3$ است. اگر $F(x,y,z)=-x^2\vec{i}+xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$، شار F بر سطح S از متوازی‌السطوح Q کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳۵ ۴) ۵۴

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)$، بنابراین میدان $\vec{F}$ پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y)=xy^2$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\int_C F.dR=f(1,1)-f(0,0)=1$$

۲ـ گزینه «۳»

۳ـ گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.ndS=\iiint_V \text{div}F.dV=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(yz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(zx^2)\right)dV$$

$$=\iiint_V(y^2+z^2+x^2)dV \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\int_0^{a}\rho^4d\rho=\frac{4}{5}\pi a^5$$

۴ـ گزینه «۴» چون منحنی c بسته است، می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\int_C 2ydx+4xdy=\iint_R\left(\frac{\partial}{\partial x}(4x)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)\right)dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}2dydx=\int_0^2(4x-2x^2)dx=\frac{8}{3}$$

۵ـ گزینه «۳»

$$\text{کار}=\int_C F.dR=\int_C y^2dx+x^2dy=\int_0^1(x^4+2x^3)dx=\frac{14}{20}$$

۶ـ گزینه «۱»

۷ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.ndS=\iiint_V \text{div}FdV=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right)dV=\iiint_V 3dV=4\pi abc$$

۸ـ گزینه «۴» میدان F روی خم شده به صورت $F=2ti+t^2j+3tk$ در می‌آید و همچنین داریم:

$$r(t)=2ti+3tj-t^2k \Rightarrow dr=(2i+3j-2tk)dt$$

بنابراین:

$$\int_C F.dr=\int_{-1}^{1}(4t+3t^2-6t^2)dt=\int_{-1}^{1}(4t-3t^2)dt=(2t^2-t^3)\Big|_{-1}^{1}=-2$$

۹ـ گزینه «۱» در متن درس حل شده است.

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)=e^y\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}(e^y)=e^y$$

بنابراین میدان پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y)=xe^y$ می‌باشد. از طرفی نیم‌دایره $y=\sqrt{1-x^2}$ از نقطه $(1,0)$ آغاز و به نقطه $(-1,0)$ ختم می‌شود، بنابراین:

$$I=\int_C e^ydx+xe^ydy=f(-1,0)-f(1,0)=-1-1=-2$$

۱۱ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_\Sigma F.nd\delta=\iiint_V \text{div}FdV=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(1-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z+1)\right)dV=\iiint_V 2dV=2\times\text{حجم کره}=72\pi$$

۱۲ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(\text{Ln}y-x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2}+y^2)\right)dA=-2\int_0^1\int_0^1(x+y)dxdy=-2\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=-2$$

۱۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r}2z\times r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1-r)^2\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{6}$$

۱۴ـ گزینه «۲» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl}F=0$ بنابراین:

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2axz+y^2 & bxy+azy & ax^2+y^2\end{vmatrix}=(2y-ay\ ,\ 2ax-2ax\ ,\ by-2y)=(0,0,0)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود $a=b=2$.

۱۵ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int_C(6y+x)dx+(y+2x)dy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+2x)-\frac{\partial}{\partial y}(6y+x)\right)dA$$

$$=\iint_D(2-6)dA=-4\iint_D dA=-4\times \text{مساحت دایره}=-16\pi$$

۱۶ـ گزینه «۱» مرز سطح S دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می‌باشد. در این صورت طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_S \text{Curl}F.nds=\int_C F.dr$$ (چون قائم S رو به پایین است، بنابراین مرز C باید در جهت خلاف مثلثاتی پیموده شود.)

خم C را به صورت پارامتری روبرو می‌نویسیم: $r(t)=(\cos t,\sin t,0)\Rightarrow F(r(t))=(\sin t,-\cos t,0)\Rightarrow dr=(-\sin t,\cos t,0)dt$

در نتیجه:
$$\int_C F.dr=-\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t+0)dt=2\pi$$

۱۷ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده، انتگرال میدان $F=(x^2y^3,1,z)$ را خم بسته C می‌باشد. بنابراین از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم، چون خم C در صفحه $z=0$ قرار دارد، بنابراین $\vec{n}=\vec{k}$ و همچنین $dS=dA$. از طرفی:

$$\text{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=(0,0,-3x^2y^2)\Rightarrow \text{curl}F.\vec{k}=-3x^2y^2$$

در نتیجه:
$$\int_C F.dr=\iint_S \text{curl}F.ndS=\iint_S -3x^2y^2dA\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta\times r\,dr\,d\theta$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\times\int_0^R r^5dr=-3\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{6}R^6=\frac{-\pi R^6}{8}$$

۱۸ـ گزینه «۱» انتگرال داده شده برابر کار میدان پایستار ∇f روی مسیر C می‌باشد. چون میدان پایستار است بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن برابر f است. بنابراین:

$$I=\int_C\nabla f(X).dX=f(3,0)-f(1,1)=18-4=14$$

۱۹ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y$

بنابراین انتگرال داده شده مستقل از مسیر است و به سادگی می‌توان نشان داد تابع پتانسیل آن به صورت $f(x,y)=xy^2+\frac{x^3}{3}$ می‌باشد. از طرفی نقطه $(-1,0)$ نقطه آغاز خم C و نقطه $(1,0)$ انتهای خم C می‌باشد. بنابراین:

$$I=\int_C(x^2+y^2)dx+2xydy=f(1,0)-f(-1,0)=\frac{2}{3}$$

۲۰ـ گزینه «۴» $\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)=e^x\cos y\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y)=e^x\cos y$

بنابراین میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر داده شده یک مسیر بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

۲۱ـ گزینه «۲» منحنی C را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم: $x=t,y=t,dx=dt,dy=dt,0\le t\le 1$

بنابراین:
$$I=\int_C(x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^1((t+t)+(t-t))dt=\int_0^1 2tdt=1$$

۲۲ـ گزینه «۲» $F=(x\sin xz,y,xz)\ \Rightarrow \text{div}F=\sin xz+xz\cos xz+1+x\Big|_{(1,1,\pi)}=-\pi+2$

۲۳ـ گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال داده شده، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=xe^{-y}\vec{i}+e^{-y}\vec{j}+z\vec{k}\ \Rightarrow \text{div}\vec{F}=e^{-y}-e^{-y}+1=1$$

$$\iint_S F.nds=\iiint_V \text{div}FdV=\iiint_V dV=\text{حجم مکعب مستطیل}=1\times2\times3=6$$

۲۴ـ گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم، طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\int_C\left(\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy\right)=\iint_R\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)dxdy=-\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

و چون f هارمونیک است، پس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ و در نتیجه حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

۲۵ـ گزینه «۲» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.nd\sigma=\iiint_v \text{div}FdV=3\iiint_v(x^2+y^2+z^2)dV=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R\rho^4\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{3R^5}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi=\frac{12\pi R^5}{5}$$

۲۶ـ گزینه «۲» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial\phi}{\partial n}$، مشتق جهتی ϕ در راستای بردار $\vec{n}$ یعنی $\nabla\phi.n$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_s\frac{d\phi}{\partial n}ds=\iint_s\nabla\phi.nds=\iiint_v \text{div}(\nabla\phi)dV=\iiint_v\nabla^2\phi\, dV$$

از طرفی توجه کنید که:
$$\text{div}(\phi\nabla\phi)=\nabla\phi.\nabla\phi+\phi\,\text{div}(\nabla\phi)=|\nabla\phi|^2+\phi\nabla^2\phi=4\phi+\phi\nabla^2\phi$$

بنابراین:
$$4\phi+\phi\nabla^2\phi=10\phi\Rightarrow\phi\nabla^2\phi=6\phi\Rightarrow\nabla^2\phi=6$$

در نتیجه:
$$I=\iiint_v 6dV=6\times\text{حجم کره واحد}=6\times\frac{4\pi}{3}=8\pi$$

۲۷ـ گزینه «۲» $\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=2+2a+0=2+2a$

برای اینکه u همساز باشد، لازم است $\nabla^2u=0$، در نتیجه $2+2a=0$ و یا $a=-1$.

۲۸ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=1$. بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. تابع پتانسیل میدان مزبور $f=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}$ می‌باشد. از طرفی دو سر خم C، $A(0,1)$ و $B(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ می‌باشد. بنابراین:

$$I=f(B)-f(A)=f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)-f(0,1)=\frac{8}{9}$$

۲۹ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:
$$I=\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2+x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy)\right)dA=\iint_D x\,dA=0$$
چون x تابعی فرد و ناحیه D نسبت به x متقارن می‌باشد، پس حاصل انتگرال موردنظر برابر صفر است.

۳۰ـ گزینه «۳»

۳۱ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:
$$\frac{\partial}{\partial x}(1-2y\sin x+3x^2y^2)=-2y\cos x+6xy^2$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3-y^2\cos x)=6xy^2-2y\cos x$$
بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن $f=y-y^2\sin x+x^2y^3$ می‌باشد.
$$I=\int_C (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=f(\frac{\pi}{2},1)-f(0,0)=\frac{\pi^2}{4}$$

۳۲ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:
$$\iint_S F.nds=\iiint_V divF dV=\iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^6)+\frac{\partial}{\partial y}(y\cos^3 x)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)\right)dV=\iiint_V (6x^5+\cos^3 x+2)dV$$
در فاصله $-\pi\le x\le\pi$، انتگرال توابع $\cos^3 x$ و $6x^5$ برابر صفر می‌باشد، بنابراین:
$$\iint_S F.nds=\iiint_V 2dV=2\times \text{حجم استوانه}=2\times \text{مساحت بیضی}\times\text{ارتفاع}=2\times 2\pi\times 2\pi=8\pi^2$$

۳۳ـ گزینه «۲» اگر F به صورت $F=F_1i+F_2j+F_3k$ در نظر بگیریم. آنگاه تابع پتانسیل f از فرمول زیر به دست می‌آید.
$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,0,0)dt+\int_0^y F_2(x,t,0)dt+\int_0^z F_3(x,y,t)dt$$
بنابراین:
$$f(x,y,z)=\int_0^x e^t dt+\int_0^y -e^x\sin t\,dt+\int_0^z (xy+t)dt=e^x+e^x\cos y-e^x+xyz+\frac{z^2}{2}+c=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+c$$

۳۴ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:
$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}\,dt=dt$$
بنابراین:
$$\int_C xy^2ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^2 t\,dt=\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

۳۵ـ گزینه «۴»
$$divB=y^2+2x^2z-6yz\Big|_{(1,1,0)}=1$$

۳۶ـ گزینه «۱»
$$CurlB=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2\end{vmatrix}=(-3z^2-2x^2y,0,4xyz-2xy)\Big|_{(1,0,1)}=(-3,0,0)$$

۳۷ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:
$$\frac{\partial}{\partial y}(1+2xy)=2x\ ،\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2)=2x$$
بنابراین میدان پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. تابع پتانسیل $f(x,y)=x+x^2y$ می‌باشد. بنابراین:
$$\int_C (1+2xy)dx+x^2dy=f(0,1)-f(-1,0)=0-(-1)=1$$

۳۸ـ گزینه «۱» مساحت موردنظر را می‌توان مساحت حصاری به ارتفاع $z=\frac{1}{3}x+2$ فرض کرد که روی دایره $x^2+y^2=1$ ساخته شده است.
بنابراین:
$$S=\int_C fds=\int_C (\frac{1}{3}x+2)ds$$
با توجه به اینکه x تابعی فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x متقارن است، لذا $\int \frac{1}{3}xds$ برابر صفر است. در نتیجه:
$$S=\int_C 2dS=2\times 2\pi=4\pi$$

۳۹ـ گزینه «۴» چون C یک مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.
$$\int_C (e^{x^2}+y)dx+(x^2-Arctg\sqrt{y})dy=\iint_D (2x-1)dA=\int_1^5\int_2^4 (2x-1)dydx=\int_1^5(4x-2)dx=40$$

۴۰ـ گزینه «۱»
$$CurlF=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2+y^2 & 2xy & -3z^2\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

۴۱ـ گزینه «۳» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $CurlF=0$. و چون میدان F دو متغیره است، کافی است $\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی:
$$2axy-3y^2=12xy-3y^2\Rightarrow 2a=12\Rightarrow a=6$$

۴۲ـ گزینه «۱» انتگرال داده شده، یک انتگرال رویه‌ای می‌باشد. صفحه تصویر را صفحه xz در نظر می‌گیریم تصویر ناحیه Σ در صفحه xz مربع $0\le x\le 1$ و $0\le z\le 1$ می‌باشد. اگر Σ را به صورت $F(x,y,z)=x+y-1=0$ در نظر بگیریم، آنگاه:
$$ds=\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.j|}dxdz=\sqrt{2}dxdz$$
بنابراین:
$$I=\iint_\Sigma (x+y+z)ds=\int_0^1\int_0^1 (x+(1-x)+z)\sqrt{2}dxdz=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^1(1+z)dxdz=\sqrt{2}x\Big|_0^1\times(z+\frac{z^2}{2})\Big|_0^1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴۳ـ گزینه «۲»
$$\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}\Rightarrow divF=0+0=0$$
$$CurlF=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & x^2 & 0\end{vmatrix}=(2x-2y)\vec{k}$$

۴۴ـ گزینه «۳» با توجه به مثال (۳۰) در متن درس کافی است، مقدار زاویه نقاط داده شده را در مختصات قطبی به دست آوریم. نقطه (۱,۰) روی محور xها واقع است، بنابراین $\theta_1=0$، و نقطه (۰,۱) روی محور yها واقع است و بنابراین $\theta_2=\frac{\pi}{2}$. در نتیجه:
$$\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{2}$$

۴۵ـ گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy)$، بنابراین میدان داده شده پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y) = x^2y$ می‌باشد. از طرفی نقاط ابتدایی و انتهای مسیر $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ می‌باشند، بنابراین:

$$\int_C 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = 0 - 0 = 0$$

۴۶ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\text{کار} = \int_C ydx + 2xdy$$

از طرفی روی مسیر $y = x + \sin x$ داریم: $dy = (1+\cos x)dx$. در نتیجه انتگرال فوق روی این مسیر به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_C ydx + 2xdy = \int_0^\pi (x+\sin x)dx + 2x(1+\cos x)dx$$

$$= \int_0^\pi (3x + \sin x + 2x\cos x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right)\Big|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi^2 - 2$$

۴۷ـ گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial x}(3x+2y) = 3 = \frac{\partial}{\partial y}(-2x+3y)$، پس انتگرال مستقل از مسیری باشد و تابع پتانسیل مربوط به آن $f = -x^2 + 3xy + y^2$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\int_{(2,0)}^{(0,3)} (-2x+3y)dx + (3x+2y)dy = f(0,3) - f(2,0) = 9 - (-4) = 13$$

۴۸ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.ndS = \iiint_V divFdV = \iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)dV \xlongequal{\text{مختصات کروی}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 3\rho^2 \times \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \int_0^2 \rho^4 d\rho = \frac{192\pi}{5}$$

۴۹ـ گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)dA = \iint_D ydA = \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} ydydx = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(1-x^2)dx = \frac{1}{6}$$

۵۰ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \nabla\psi.n$. در این صورت طبق قضیه اول گرین داریم:

$$\int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = \int_V \phi\nabla^2\psi dV + \int\vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi dV$$

۵۱ـ گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن ناحیه تصویر در صفحه xy به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2 = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$$

بنابراین ناحیه تصویر درون دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد. از طرفی توجه کنید که:

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dA = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dA$$

$$S = \iint_S dS = \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} \times rdrd\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}dr = \sqrt{2} \times \theta\Big|_0^{2\pi} \times \left(-\sqrt{2-r^2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi(2-\sqrt{2})$$

۵۲ـ گزینه «۴» برای اینکه میدان F، گرادیان یک تابع باشد، لازم است که میدان F پایستار باشد یعنی $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xye^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xe^{xy}(-y\sin xy + y\cos xy) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy + 2xy\cos xy)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xye^{xy}(\cos xy + \sin xy) + ye^{xy}(-x\sin xy + x\cos xy) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy + 2xy\cos xy)$$

۵۳ـ گزینه «۱» در متن درس حل شده است.

۵۴ـ گزینه «۱»

۵۵ـ گزینه «۱»

$$\phi = 2x^2y - xz^2 \Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4y + 0 - 6xz = 4y - 6xz$$

۵۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشند. در امتداد مسیر $R(t)$، میدان F به صورت زیر در می‌آید.

$$F = x\vec{i} + y\vec{j} + (yz - x)\vec{k} \Rightarrow F(R(t)) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + (4t^5 - 2t)\vec{k}$$

از طرفی:

$$R(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + 4t^3\vec{k} \Rightarrow dR = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + 12t^2\vec{k}$$

بنابراین:

$$F.dR = 4t + 2t^3 + 12t^2(4t^5 - 2t) = 48t^7 - 22t^3 + 4t$$

$$\text{مقدار کار انجام شده} = \int_0^1 F.dR = \int_0^1 (48t^7 - 22t^3 + 4t)dt = \frac{5}{2}$$

۵۷ـ گزینه «۴» معادله رویه داده شده را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ می‌نویسیم، و صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم.
در این صورت تصویر ناحیه موردنظر داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ خواهد بود. از طرفی:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1)$$

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dR = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}dR = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dR$$

بنابراین مساحت ناحیه موردنظر برابر است با:

$$\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dR = \iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}dR$$

با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و عبارت مقابل انتگرال بهتر است از مختصات قطبی برای محاسبه استفاده کنیم:

$$\iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}R = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1} \times rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}dr = \theta\Big|_0^{2\pi} \times \frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$$

۵۸ـ گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C (3x+y)dx + (2x-7y)dy = \iint_C \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x-7y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x+y)\right)dxdy = \iint_D dxdy = \text{مساحت ناحیه } D$$

از طرفی می‌دانیم مساحت محصور درون بیضی به معادله $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ $(AC - B^2 > 0, C > 0)$ برابر $\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$ می‌باشد. بنابراین مساحت درون بیضی $\frac{5}{9}x^2 + \frac{8}{9}xy + \frac{5}{9}y^2 = 1$ برابر $\frac{\pi}{\sqrt{\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} - (\frac{4}{9})^2}} = 3\pi$ خواهد بود.

تذکر: به طور کلی مساحت محصور درون بیضی به معادله روبرو: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (AC - B^2 > 0)$

برابر است با:

$$S = \frac{-\pi \times \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\sqrt{(AC - B^2)^3}}$$

۵۹ـ گزینه «۲» خم C، دایره $x^۲+y^۲=۴$ در صفحه $z=۰$ می‌باشد. بنابراین:

$$I=\int_C F.dR=\int_C(۰-y)dx+(x-۰)dy=\int_C -ydx+xdy \xlongequal{\text{قضیه گرین}}$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)dA=۲\iint_D dA=۲\times \text{مساحت دایره}=۸\pi$$

۶۰ـ گزینه «۲» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$F=(xz^۲, x^۲y-z^۳, ۲xy+y^۲z)\Rightarrow divF=z^۲+x^۲+y^۲$$

$$\iint_S F.nds=\iiint_V divFdV=\iiint_V(x^۲+y^۲+z^۲)dV \xlongequal{\text{مختصات کروی}} \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^a \rho^۲\times\rho^۲\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta=\frac{۲\pi}{۵}a^۵$$

۶۱ـ گزینه «۱» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $curlF=۰$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^۲ & ۲y & \lambda xz \end{vmatrix}=(۰,۲z-\lambda z,۰)$$

از $curlF=۰$ نتیجه می‌شود $۲z=\lambda z$ و یا $\lambda=۲$.

۶۲ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.nds=\iiint_V divFdV=\iiint_V(a^۲+۱+c^۲)dv=(a^۲+۱+c^۲)\times(\text{حجم کره})=\frac{۴\pi}{۳}(a^۲+۱+c^۲)$$

۶۳ـ گزینه «۲»

$$Curl\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۳x^۲y & ۷xz & ۴yz \end{vmatrix}=(۴z-۷x, ۰, ۷z-۳x^۲)\Big|_{(۱,۲,۳)}=(۵,۰,۱۸)$$

۶۴ـ گزینه «۴»

۶۵ـ گزینه «۲»

روش اول: میدان برداری F یک میدان پایستار می‌باشد (زیرا $CurlF=۰$) و تابع پتانسیل آن $f(x,y,z)=\frac{x^۲}{۲}+\frac{y^۲}{۲}+\frac{z^۲}{۲}$ است. از طرفی نقطه متناظر با $t=۰$، نقطه $(۰,۰,۰)$ و نقطه متناظر با $t=۱$ نقطه $(۲,۱,۱)$ می‌باشد. بنابراین: $\int_C F.dR=f(۲,۱,۱)-f(۰,۰,۰)=۳$

روش دوم: روی مسیر داده شده، میدان F به صورت $F=۲ti+t^۲j+t^۳k$ در می‌آید. از طرفی:

$$R(t)=(۲t,t^۲,t^۳)\Rightarrow dR=(۲,۲t,۳t^۲)dt\Rightarrow dt\Rightarrow F.dR=(۴t+۲t^۳+۳t^۵)dt$$

بنابراین:

$$\int_C F.dR=\int_۰^{۲\pi}(۴t+۲t^۳+۳t^۵)dt=\left(۲t^۲+\frac{۱}{۲}t^۴+\frac{۱}{۲}t^۶\right)\Big|_۰^۱=۳$$

۶۶ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲x-\frac{y}{x^۲}\Rightarrow f(x,y)=x^۲+\frac{y}{x}+g(y)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۱}{x}+g'(y)=\frac{۱}{x}\Rightarrow g'(y)=۰\Rightarrow g(y)=c$$

بنابراین $f(x,y)=x^۲+\frac{y}{x}+c$. از رابطه $f(۱,۱)=۴$، مقدار $c=۲$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$f(x,y)=x^۲+\frac{y}{x}+۲\Rightarrow f(۲,۲)=۴+۱+۲=۷$$

۶۷ـ گزینه «۴» میدان F پایستار می‌باشد ($curlF=۰$). بنابراین کار انجام شده مستقل از مسیر می‌باشد.

۶۸ـ گزینه «۳» سطح موردنظر روی دایره $x^۲+y^۲=ax$ و به ارتفاع $z=\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}$ می‌باشد. بنابراین:

$$S=\int_C fds=\int_C\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}\,ds$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. معادله دایره $x^۲+y^۲=ax$ در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آید:

$$r^۲\cos^۲\theta+r^۲\sin\theta=ar\cos\theta\Rightarrow r^۲=ar\cos\theta\Rightarrow r=a\cos\theta$$

بنابراین: $ds=\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta=\sqrt{a^۲\cos^۲\theta+a^۲\sin^۲\theta}\,d\theta=ad\theta$

در نتیجه: $S=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{a^۲-r^۲}\times ad\theta \xlongequal{r=a\cos\theta} a\int_۰^{۲\pi}\sqrt{a^۲-a^۲\cos^۲\theta}\,d\theta=a^۲\int_۰^{۲\pi}|\sin\theta|d\theta=۴a^۲$

۶۹ـ گزینه «۲»

۷۰ـ گزینه «۴» برای اینکه میدان F غیرچرخشی باشد، لازم است $CurlF=۰$. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_۱x+a_۲y+a_۳z & b_۱x+b_۲y+b_۳z & c_۱x+c_۲y+c_۳z \end{vmatrix}=(c_۲-b_۳, a_۳-c_۱, b_۱-a_۲)$$

برای اینکه $CurlF=۰$ باشد، لازم است $b_۱=a_۲$ ، $a_۳=c_۱$ ، $c_۲=b_۳$ باشد.

۷۱ـ گزینه «۳» سهمی داده شده را می‌توان به صورت پارامتری $R(x)=(x,۴x^۲)$ در نظر گرفت. در این صورت:

$$dR=(۱,۸x)dx, F(R(x))=(۳x^۲,۴x^۲)\Rightarrow F.dR=(۳x^۲+۳۲x^۴)dx$$

بنابراین: $\text{کار انجام شده}=\int_۰^۱ F.dR=\int_۰^۱(۳x^۲+۳۲x^۴)dx=\frac{۳۷}{۵}$

۷۲ـ گزینه «۴» صفحه تصویر را، صفحه yz انتخاب می‌کنیم بنابراین بردار یکه عمود بر صفحه تصویر بردار $\vec{i}$ می‌باشد. در این صورت ناحیه تصویر مثلث محدود به خطوط $y=۰$ ، $z=۰$ و $y+z=a$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $f(x,y,z)=-x^۲+y^۲+z^۲=۰$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$dS=\frac{|\nabla f|}{|\nabla f.i|}dR=\frac{|(-۲x,۲y,۲z)|}{۲x}=\frac{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}{۲x}=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}{x}=\frac{\sqrt{x^۲+x^۲}}{x}=\sqrt{۲}$$

بنابراین: $S=\iint_R\frac{|\nabla f|}{|\nabla f.i|}dR=\sqrt{۲}\iint_R dR=\sqrt{۲}\times\text{مساحت}=\sqrt{۲}\times\frac{a^۲}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a^۲$

۷۳ـ گزینه «۴» میدان داده شده پایستار می‌باشد و منحنی C یک مسیر بسته می‌باشد، بنابراین مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

۷۴ـ گزینه «۴» کار انجام شده توسط میدان F روی خم C مستقل از نحوه پارامتری کردن خم می‌باشد.

۷۵ـ گزینه «۲» چون $\frac{\partial}{\partial y}(۲xy^۳)=\frac{\partial}{\partial x}(۱+۳x^۲y^۲)=۶xy^۲$، بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن $f=y+x^۲y^۳$ است. در نتیجه:

$$I=f(۳,۱)-f(۱,۴)=۱۰-۶۸=-۵۸$$

۷۶ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_\sigma F.nd\sigma=\iiint_V divFdV=\iiint_V(۳x^۲+۳y^۲+۳z^۲)dV=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱\rho^۲\times\rho^۲\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta=\frac{۶\pi}{۵}$$

۷۷ـ گزینه «۲» $\int_C ydx - xdy = \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t - 2\cos^2 t)dt = -2\int_0^{2\pi} dt = -4\pi$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۸ـ گزینه «۴» $R(t) = (t, t^2, t^3) \Rightarrow dR = (1, 2t, 3t^2)dt\ ,\ F(R(t)) = (t^2, t^5, t^4)$

$$\int_C F.dR = \int_0^1 (t^2 + 2t^6 + 3t^6)dt = \frac{27}{28}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۹ـ گزینه «۱» منحنی‌های داده شده همدیگر را در نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قطع می‌کنند. خم C از دو خم $C_1 : y = x^2$ و $C_2 : x = y^2$ تشکیل شده است، بنابراین:

$$I = \int_0^1 (2x^2 - x^2)dx + (x + x^4)\times 2xdx + \int_1^0 (2y^2 - y^4)\times 2ydy + (y^2 + y^2)dy$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^6}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{4}{5}y^5 - \frac{y^6}{3} + \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{1}{30}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۰ـ گزینه «۲» $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, 1) \Rightarrow dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dA$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} \times rdrd\theta = \frac{13\pi}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۱ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

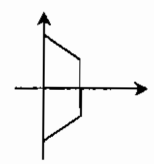
$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x - e^{-y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y^2)\right)dA = \iint_D (2 - 6y)dA$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{a} (2 - 6r\sin\theta)rdrd\theta = \int_0^{\pi} (a^2 - 2a^3\sin\theta)d\theta = \pi a^2 - 4a^3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲ـ گزینه «۳» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y\cos y^2 + 3x) - \frac{\partial}{\partial y}(x\sin y^2 - y^2)\right)dA = \iint (3 + 2y)dA = 3 \times (D\ \text{مساحت}) = 3 \times \frac{2+4}{2} = 9$$



توجه کنید که $\iint_D ydA$ برابر صفر می‌باشد، زیرا تابع y فرد و ناحیه D نسبت به y متقارن می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۳ـ گزینه «۲» برای اینکه انتگرال روی مسیر بسته برابر صفر باشد کافی است $\text{curlf} = 0$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & axz \end{vmatrix} = (0, 2z - az, 0) = (0,0,0) \Rightarrow a = 2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه انتگرال داده شده از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_C -x^2ydx + xy^2dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y)\right)dxdy = \iint_D (y^2 + x^2)dxdy$$

برای محاسبه انتگرال فوق، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2 \times rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{2} r^3dr = 8\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۵ـ گزینه «۳»

$$\text{CurlF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2xz & -3yz \end{vmatrix} = (-3z - 2x)\vec{i} + (2z - x^2)\vec{k}$$

$$\text{CurlCurlF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3z - 2x & 0 & 2z - x^2 \end{vmatrix} = (2x - 3)\vec{j}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۶ـ گزینه «۲» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم، در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 2x$ می‌باشد. معادله مخروط را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z}dA = \frac{\sqrt{4z^2 + 4z^2}}{2z}dA = \sqrt{2}dA$$

بنابراین:

$$S = \iint_D \sqrt{2}dA = \sqrt{2} \times (\text{مساحت دایره}) = \sqrt{2}\pi$$

توجه کنید که معادله دایره $x^2 + y^2 = 2x$ را می‌توان به صورت $(x-1)^2 + y^2 = 1$ نوشت که دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۷ـ گزینه «۴» $\iint_S F.nd\sigma = \iiint_V \text{divF}dV = \iiint_V 3dV = 3 \times (D\ \text{حجم ناحیه}) = 24$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۸ـ گزینه «۳» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. مرز سطح S دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد. بنابراین: $\iint_S \text{curlF}.nd\sigma = \int_C F.dR$

دایره $x^2 + y^2 = 1$ را می‌توان به صورت پارامتری زیر نوشت:

$$R(t) = (\cos t, \sin t, 0)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow dR = (-\sin t, \cos t, 0)dt\ ,\ F(R(t)) = (-\sin t, \cos t, -\cos t - \sin t)$$

بنابراین:

$$\int_C F.dR = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + 0)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۹ـ گزینه «۱» میدان F پایستار می‌باشد و چون مسیر یک منحنی بسته است، پس کار انجام شده برابر صفر است.

◆ ◆ ◆ ◆

۹۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. صفحه تصویر را، صفحه xy انتخاب می‌کنیم در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می‌نویسیم، در این صورت:

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.i|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z}dA = \frac{\sqrt{8z^2}}{2z}dA = \sqrt{2}dA$$

بنابراین:

$$\iint_S (x^2 + y^2)d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2 + y^2)\sqrt{2}dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r^2 \times rdrd\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۱ـ گزینه «۱»

$$F_1 = \frac{mx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3mx^2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2) - 3mx^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{mr^2 - 3mx^2}{r^5}$$

به طور مشابه $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ و $\frac{\partial F_3}{\partial z}$ به دست می‌آیند. در این صورت:

$$\text{div}\vec{F} = \frac{mr^2 - 3mx^2}{r^5} + \frac{mr^2 - 3my^2}{r^5} + \frac{mr^2 - 3mz^2}{r^5} = \frac{3mr^2 - 3m(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۲ـ گزینه «۲» در روی منحنی $y = x^2$ ، $dy = 2xdx$ بنابراین:

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 x(x^2)^2 \times 2xdx = 2\int_0^2 x^6 dx = \frac{256}{7}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۳ـ گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. در این صورت ناحیه تصویر به صورت $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ در می‌آید. معادله مخروط داده شده را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$ds = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z}dA = \frac{\sqrt{8z^2}}{2z}dA = \sqrt{2}dA$$

بنابراین:

$$\iint_\Sigma z^2 ds = \iint_D (x^2 + y^2) \times \sqrt{2}dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 \times rdrd\theta = \sqrt{2} \times \theta\Big|_0^{2\pi} \times \frac{1}{4}r^4\Big|_1^2 = \frac{15\sqrt{2}}{2}\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۴ـ گزینه «۴» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم، در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 4$ می‌باشد. اگر معادله رویه داده شده را به صورت $f(x,y,z) = 2xy - z = 0$ بنویسیم، در این صورت:

$$ds = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.k|}dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{1}dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}dA$$

بنابراین:

$$\iint_s \frac{2ds}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \iint_D \frac{2\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}dA = 2\iint_D dA = 2 \times \text{مساحت دایره} = 8\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C (-x^2 ydx + xy^2 dy) = \iint_D (y^2 + x^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^2 \times rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^3 drd\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^4 d\theta = \frac{69\pi}{32}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۶ـ گزینه «۱»

◆ ◆ ◆ ◆

۹۷ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.ndS = \iiint_Q divFdV = \iiint_Q (-2x + 2xy + 3z^2)dV$$

$$= \int_0^3\int_0^2\int_0^1 (-2x + 2xy + 3z^2)dxdydz = \int_0^3\int_0^2 (-1 + y + 3z^2)dydz = \int_0^3 6z^2 dz = 54$$

◆ ◆ ◆ ◆

تست‌های تکمیلی فصل چهارم

۱ـ سیمی به شکل حلقهٔ مستدیر با چگالی ثابت δ روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در صفحه xy قرار دارد. گشتاور لختی حلقه حول محور z چقدر است؟

۱) δa^3 ۲) $\pi\delta a^3$ ۳) $2\delta a^3$ ۴) $2\pi\delta a^3$

۲ـ فرض کنید $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2 + y^2 + z^2}$ و c خم $R(t) = ti + tj + tk$ ، $1 \le t \le 2$ باشد در این صورت مقدار $\int_c fds$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 3 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ـ میله نازکی به طول L و چگالی ثابت δ روی بازهٔ $0 \le x \le L$ از محور xها قرار دارد. گشتاور لختی میله حول محور z چقدر است؟ (M جرم میله)

۱) L^2M ۲) $\frac{L^2M}{2}$ ۳) $\frac{L^2M}{3}$ ۴) $\frac{L^2M}{4}$

۴ـ خم c با رابطه $r(t) = a\cos t\sin ti + a\sin^2 tj + a\cos tk$ ، $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ داده شده باشد، در این صورت مقدار $\int_C zds$ چقدر است؟

۱) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + Ln(\sqrt{2} - 1))$ ۲) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + Ln(\sqrt{2} + 1))$

۳) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} - Ln(\sqrt{2} - 1))$ ۴) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} - Ln(1 + \sqrt{2}))$

۵ـ اگر c پاره خط حاصل از تقاطع دو صفحه $x + y + 2z = 0$ و $x - y + z = 0$ از $(0,0,0)$ تا $(3,1,-2)$ باشد حاصل $\int_c x^2 ds$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{14}$ ۲) $2\sqrt{14}$ ۳) $3\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{14}$

۶ـ حاصل $\int_c \dfrac{ds}{(2y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن c، خم حاصل از تقاطع $z^2 = x^2 + y^2$ و $x + y = 1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) 2π ۴) π

۷ـ فرض کنید c مارپیچ $R(t) = \cos ti + \sin tj + tk$ ، $0 \le t \le 2\pi$ باشد و $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، در این صورت $\int_c f(x,y,z)ds$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2)$ ۳) $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}(3 + 4\pi^2)$ ۴) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}(3 + 4\pi^2)$

۸ـ حاصل انتگرال مسیری $\int_c \dfrac{x+y}{y+z}ds$ که c خم $c : t \to (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$ و $1 \le t \le 2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{28}{3} - 2\sqrt{3}$ ۲) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$ ۴) $\frac{28}{3} - \sqrt{3}$

۹ـ یک سیم به شکل اشتراک گرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 0$ می‌باشد. در صورتی که چگالی آن در (x,y,z) مساوی $\rho(x,y,z) = x^2$ باشد، جرم سیم چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۰ـ سیمی به شکل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است. در صورتی که چگالی در (x,y) برابر $|x| + |y|$ باشد. گشتاور ماند آن حول یک قطر کدام است؟

۱) $2\pi a^4$ ۲) πa^4 ۳) $\frac{\pi a^4}{2}$ ۴) $\frac{\pi a^4}{4}$

۱۱ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = xi + yi + zk$ در طول مارپیچ $r(t) = \cos t i + \sin t j + 3tk$ در فاصله $0 \le t \le 2\pi$ کدام است؟

۱) π^2 ۲) $4\pi^3$ ۳) 0 ۴) $18\pi^2$

۱۲ـ فرض کنید c بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ باشد که در جهت مثلثاتی جهت‌گذاری شده است. در این صورت مقدار $\int_c xdy + ydx$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) -2π

۱۳ـ مقدار $\int_c e^y dx + xe^y dy$ بر نیم‌دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۴ـ اگر c بیضی $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مقدار $\int_c (3x^2 + y^2)dx + (3xy^2 + 2x)dy$ چقدر است؟

۱) π ۲) 0 ۳) 2π ۴) 4π

۱۵ـ اگر $F(x,y) = yi + 4xj$ و T بردار مماس واحد بر دایره c به معادله $x^2 + y^2 = 1$ باشد، حاصل $\int_c F.Tds$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۱۶ـ کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y) = y^2 i + 2xyj$ از مبدأ تا نقطه $(1,1)$ بر مسیر دلخواه c کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۷ـ ناحیه D محدود به منحنی بسته و هموار c است. اگر $\int_c F.dR$، آنگاه $\vec{F}$ کدام است؟

۱) $\vec{F} = yi$ ۲) $\vec{F} = yi + 2xj$ ۳) $\vec{F} = -xj$ ۴) $\vec{F} = \frac{1}{2}yi - \frac{1}{2}xj$

۱۸ـ مقدار $\int_c 2x^2ydy + 2xy^2dx$ وقتی c نمودار تابع $y = \mathrm{Arctg}\sqrt{x^2 - 1}$ از نقطه $A(1,0)$ تا $B(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۱۹ـ حاصل $\int_c ydx + (3y^2 - x)dy + zdz$ روی مسیر $R(t) = ti + t^n j + 0k$، $0 \le t \le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{n-1}{n+1}$ ۲) $\frac{3}{4} - \frac{n-1}{n+1}$ ۳) $\frac{n+1}{n-1}$ ۴) $\frac{3}{4} - \frac{n+1}{n-1}$

۲۰ـ فرض کنید $\sigma(t)$ یک مسیر و T بردار یکه مماس باشد، حاصل $\int_c T.dR$ کدام است؟

۱) 0 ۲) طول σ ۳) مساحت محصور درون σ ۴) هیچکدام

۲۱ـ فرض کنید میدان برداری $F = AxLnzi + By^2zj + (\frac{x^2}{z} + y^2)k$ پایستار باشد، مقدار $A + B$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 0 ۳) -3 ۴) 3

۲۲ـ مقدار $\int_c e^{x+y}\sin(y+z)dx + e^{x+y}(\sin(y+z) + \cos(y+z))dy + e^{x+y}\cos(y+z)dz$ روی قطعه خطی که نقاط $(0,0,0)$ و $(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ را به هم وصل می‌کند چقدر است؟

۱) $e^{\frac{\pi}{4}+1}$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}+1}$ ۳) $e^{\frac{\pi}{4}-1}$ ۴) $e^{\frac{\pi}{2}-1}$

۲۳ـ اگر c خم حاصل از تقاطع $z = Ln(1+x)$ و $y = x$ از $(0,0,0)$ تا $(1,1,Ln2)$ باشد، مقدار $\int_c (2x\sin(\pi y) - e^z)dx + (\pi x^2\cos(\pi y) - 3e^z)dy - xe^z dz$ کدام است؟

۱) $\frac{-11}{2}$ ۲) $\frac{-13}{2}$ ۳) $\frac{-15}{2}$ ۴) $\frac{-17}{2}$

۲۴ـ فرض کنید T بردار یکه مماس بر خم بسته c باشد، شار گذرنده از خم c برابر کدام است؟

۱) 0
۲) مساحت محصور به خم c می‌باشد.
۳) طول قوس c
۴) 2π

۲۵ـ شار میدان $F(x,y) = xi + yj$ گذرنده از خم $R(t) = (\cos t)i + (4\sin t)j$ وقتی $0 \le t \le 2\pi$ برابر است با:

۱) 0 ۲) 4π ۳) 8π ۴) 6π

۲۶ـ فرض کنید c یک خم بسته هموار باشد، در این صورت حاصل $\int_c xy^2ydx + x^4dy$ کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) 0 ۴) 4π

۲۷ـ هرگاه خم c یک مربع دلخواه باشد، حاصل $\int_c xy^2dx + (x^2y + 2y)dy$ برابر است با:

۱) مساحت مربع ۲) 0 ۳) محیط مربع ۴) دو برابر مساحت مربع

۲۸ـ انتگرال $\int_c [(2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy]$ روی سهمی $2x = \pi y^2$ از $(0,0)$ تا $(\frac{\pi}{2}, 1)$ برابر است با:

۱) π^2 ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $2\pi^2$

۲۹ـ مساحت قسمتی از رویهٔ سهمیگون $2z = x^2 + y^2$ که خارج مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد، چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$ ۲) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$ ۳) $\frac{\pi}{2}(3\sqrt{3} - 1)$ ۴) $\frac{\pi}{4}(3\sqrt{3} - 1)$

۳۰ـ مساحت رویه ناحیه مشترک بین دو استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$، برابر کدام است؟

۱) $4a^3$ ۲) $4\pi a^2$ ۳) $16a^2$ ۴) $16\pi a^3$

۳۱ـ مقدار $\iint_s (x^2 + y^2)dS$، که در آن S قسمتی از مخروط $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ بین $z = 0$ و $z = 3$ است، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) π ۳) 3π ۴) 9π

۳۲ـ مساحت قسمتی از صفحه $2x + y + 2z = 16$ که به وسیله $x = 0$، $y = 0$، $x = 2$ و $y = 3$ بریده می‌شود، چقدر است؟

۱) 4 ۲) 9 ۳) 16 ۴) 12

۳۳ـ مساحت بخشی از رویه $x^2 - 2y - 2z = 0$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy محدود به خطوط $x = 2$، $y = 0$ و $y = 3x$ قرار دارد برابر است با:

۱) $6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3} - 1$ ۴) $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

۳۴ـ مساحت بیضی که استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ از صفحه $z = cx$ جدا می کند، چقدر است؟

۱) $\pi\sqrt{c^2 + 1}$ ۲) $2\pi\sqrt{c^2 + 1}$ ۳) $\pi|c|$ ۴) $2\pi|c|$

۳۵ـ مساحت رویه‌ای که صفحه $y = 0$ از سهمیوار $x^2 + y + z^2 = 1$ جدا می‌کند، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ ۲) $\frac{\pi}{2}(5\sqrt{5} - 1)$ ۳) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ ۴) $\frac{\pi}{4}(5\sqrt{5} - 1)$

۳۶ـ مقدار انتگرال $g(x,y,z) = x + y + z$ بر بخشی از صفحه $2x + 2y + z = 2$ که در یک هشتم اول واقع است برابر است با:

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۷ـ فرض کنید $F(x,y,z) = z^2i + xj - 3zk$. در این صورت شار برونسوی میدان F گذرنده از رویه‌ای که صفحات $x = 0$، $x = 1$ و $z = 0$ از استوانه سهموی $z = 4 - y^2$ جدا می‌کنند چقدر است؟

۱) 16 ۲) 32 ۳) -32 ۴) -16

۳۸ـ مرکز جرم بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ که چگالی آن ثابت و در یک هشتم اول واقع است، کدام است؟

۱) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۳۹ـ رویه S را یک پوستهٔ بسیار نازک به شعاع a فرض کنید، به طوریکه چگالی آن در هر نقطه برابر با فاصله آن نقطه تا قطر ثابتی از کره باشد. در این صورت جرم پوسته چقدر است؟

۱) $\frac{\pi^2}{3}a^3$ ۲) $\pi^2 a^3$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}a^3$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}a^3$

۴۰ـ مقدار $\iint_S ydS$ که S قسمتی از صفحه $z=1+y$ است که درون مخروط $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ قرار می‌گیرد، برابر است با:

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 6π

۴۱ـ فرض کنید P صفحه $Ax+By+Cz=D$ ، $(D\neq 0)$ باشد، در این صورت مقدار $\iint_P \frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ چقدر است؟

۱) $\pi\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|D|}$ ۲) $2\pi\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|D|}$ ۳) $\pi\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{2|D|}$ ۴) $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|D|}$

۴۲ـ اگر $F(x,y,z)=(ax,by,cz)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج باشد، مقدار $\iint_S F.ndS$ برابر است با:

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $4\pi(a+b+c)$ ۳) $\frac{4\pi}{3}(a+b+c)$ ۴) هیچکدام

۴۳ـ مساحت مثلثی که یک هشتم اول از صفحه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ جدا می‌کند، برابر چند است؟

۱) $\frac{1}{6}abc$ ۲) $\frac{1}{2}abc$ ۳) $\frac{1}{3}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

۴۴ـ سوراخی به مقطع مربع و به ضلع $2\sqrt{2}$ به صورت متقارن در کره‌ای به شعاع ۲ ایجاد می‌شود. مقدار مساحت رویه جدا شده برابر کدام است؟

۱) $16\pi(\sqrt{2}-1)$ ۲) $8\pi(2\sqrt{2}-1)$ ۳) $16(2-\sqrt{2})$ ۴) $8\pi(2-\sqrt{2})$

۴۵ـ شار برونسوی میدان $F(x,y,z)=x^2i-2xyj+3xzk$ گذرنده از ناحیه‌ای که کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ از یک هشتم اول جدا می‌کند، چقدر است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۴۶ـ شار برونسوی بردار مکان $F=xi+yj+zk$ گذرنده از یک رویه بسته قطعه قطعه هموار برابر است با: (V حجمی است که رویه در بر می‌گیرد.)

۱) V ۲) 3V ۳) ۰ ۴) هیچکدام

۴۷ـ حاصل $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$ ، که در آن S رویهٔ ناحیه محصور بین استوانه $x^2+y^2=9$ و صفحات $z=0$ و $z=3$ است، کدام است؟

۱) 9π ۲) 27π ۳) 81π ۴) 243π

۴۸ـ حاصل $\iint_S 4xzdydz-y^2dzdx+yzdxdy$ که در آن S رویه مکعب محصور بین صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$ ، $x=1$ ، $y=1$ و $z=1$ است، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۹ـ فرض کنید n بردار قائم یکه برونسوی بر رویه بسته S باشد، در این صورت مقدار $\iint_S \vec{n}d\vec{S}$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) مساحت رویه S ۳) حجم محصور در رویه S ۴) 2π

۵۰ـ اگر n بردار قائم یکه برونسوی بر رویه بسته S باشد، و رویه S ناحیه V را در بر گرفته باشد، در این صورت مقدار $\iiint_V divndV$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) S ۳) V ۴) 2π

۵۱ـ اگر V ناحیه محصور در رویهٔ بسته‌ای مانند S باشد و $B=\nabla\times A$. آنگاه مقدار $\iint_S B.ndS$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) S ۳) V ۴) divA

۵۲ـ فرض کنید میدان F بر سطح بسته S از ناحیه V مماس باشد، در این صورت مقدار انتگرال $\iiint_V (divF)dV$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) S ۳) V ۴) 2π

۵۳ـ مقدار $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx+(x^2+z^2)dy+2yzdz$ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) بستگی به مسیر دارد.

۵۴ـ اگر C مرز مربع $[-2,2]\times[-2,2]$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\oint ydx-xdy$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۲- ۳) ۰ ۴) ۱۶

۵۵ـ شار برونسوی میدان $F=(y,1)$ از دایره $x^2+y^2=1$ کدام است؟

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) ۰

هر کس از چیزی بترسد از او می‌گریزد ولی هر کس که از خدا بترسد به او پناه می‌برد. «ارسطو»

«در میان دو کس دشمنی نیفکن که ایشان چون صلح کنند، تو در میانه شرمسار باشی. «سعدی»

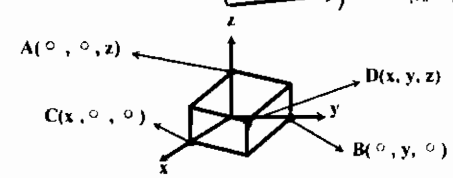
فصل پنجم

«بردار»

کمیت اسکالر: کمیت‌هایی مانند زمان، وزن، دما و .... که بر حسب واحدهائی مشخص بیان می‌شود، اسکالر نامیده می‌شود.

کمیت برداری: کمیاتی مانند سرعت، شدت میدان الکتریکی، نیرو و .... که برای مشخص کردن آنها علاوه بر اندازه(طول)، جهت نیز لازم است کمیت برداری محسوب می‌شوند. یک بردار را معمولاً با یک پاره‌خط جهت‌دار نمایش می‌دهیم. ($\overrightarrow{AB}$)

تذکر ۱ : به جهت اینکه اکثر مسائل در فضای R^3 مطرح می‌شود یعنی یک نقطه دارای طول، عرض و ارتفاع می‌باشد، پس مطالب را در فضای سه بعدی شرح می‌دهیم:



دستگاه مختصات قائم

در این دستگاه همان طور که اشاره شد نقطه‌دارای سه پارامتر طول، عرض و ارتفاع می‌باشد.برای مثال نقطه $A(0 , 0 , z)$ فقط دارای ارتفاع، نقطه $B(0 , y , 0)$ فقط دارای عرض و نقطه $C(x , 0 , 0)$ فقط دارای طول می‌باشد و نقطه‌ای مانند $D(x , y , z)$ دارای هر سه پارامتر ارتفاع، طول و عرض می‌باشد.

فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1 , z_1)$ و $B(x_2 , y_2 , z_2)$ (اندازه بردار $\overline{AB}$):

اندازه یک بردار از رابطه $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بدست می‌آید که اگر اندازه بردار $\overline{OA}$ یا بعبارت دیگر فاصله نقطه A از مبدأ مختصات خواسته شود از رابطه $|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ بدست خواهد آمد.

مثال ۱ : دو نقطه $A(3 , 1 , -9)$ و $B(-1 , 1, -12)$ مفروض هستند فاصله بین این دو نقطه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{13}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2 + (-12+9)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بردار: یک بردار در فضا عبارت است از پاره‌خطی جهت‌دار. دو بردار را با هم برابر یا یکسان می‌گوییم هرگاه طول و جهتشان یکی باشد.

ضرب اسکالر در بردار:

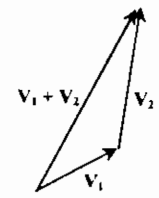
حاصلضرب یک عدد حقیقی مانند λ در بردار $\vec{A}$، برداری مانند $\vec{B}$ است که اگر λ مثبت باشد، $\vec{B}$ برداری است هم جهت با $\vec{A}$ و اگر λ منفی باشد $\vec{B}$ برداری است در خلاف جهت $\vec{A}$. و اندازهٔ $\vec{B}$، λ برابر اندازه بردار $\vec{A}$ خواهد بود. $(\vec{B} = \lambda\vec{A})$

حاصل جمع دو بردار:

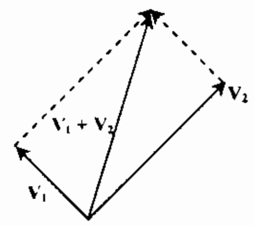
اگر دو بردار $\vec{A}(x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{B}(x_2 , y_2 , z_2)$ مفروض باشند. آنگاه خواهیم داشت :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$$

نکته ۱ : از لحاظ هندسی، جمع دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار می‌باشد. و همچنین اگر دو بردار اضلاع یک مثلث باشند، حاصل‌جمع دو بردار ضلع سوم مثلث خواهد بود. (مطابق شکل زیر)



قانون مثلث



قانون متوازی‌الاضلاع

(این قانون را ارسطو برای توصیف اثر دو نیرو به کار برد.)

مثال ۲ : اگر $\vec{A} = (1,3,4)$ و $\vec{B} = (2,1,2)$ باشد، آنگاه حاصل $\vec{C} = 3\vec{B} - 2\vec{A}$ کدام است؟

۱) $(4 , 9 - 2)$ ۳) $(4, -3 , -2)$ ۳) $(8 ,9 , 14)$ ۴) $(8 , 9 ,2)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\vec{C} = 3(2,1,2) - 2(1,3,4) = (6,3,6) + (-2 , -6 , -8) = (4 , -3, -2)$$

کسینوسهای هادی یک بردار:

اگر α، β و γ زوایایی باشند که بردار دلخواه $\vec{u} = (a,b,c)$ با جهت‌های مثبت محورهای x، y و z می‌سازد، آنگاه $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوسهای هادی بردار یا خط می‌گوییم و از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|u|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{b}{|u|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{c}{|u|}$$

با توجه به تعریف فوق بلافاصله نتیجه می‌شود که: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

مثال ۳ : اگر α، β و γ زوایایی باشند که خط d با محورهای مختصات می‌سازد، کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ ۲) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

۳) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$ ۴) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه α، β و γ زوایای هادی هستند، پس:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

حاصلضرب داخلی دو بردار (حاصلضرب اسکالر)

ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با حاصلضرب اندازه‌های دو بردار در کسینوس زاویه بین دو بردار:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|\cos\theta}$$

نکته ۲ : هر بردار $A(x , y , z)$ را به صورت ترکیب خطی بردارهای $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ می‌توان نوشت یعنی $\vec{A}(x,y,z) = (x\vec{i} + y\vec{i} + k\vec{z})$

اگر دو بردار برحسب تصاویرشان (ترکیب نکته فوق) بیان شده باشند، آنگاه حاصلضرب داخلی آنها برابر است با:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}$$

که با توجه به رابطه فوق زاویه بین دو بردار از فرمول زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

مثال ۴ : زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1(10,11,-2)$ و $\vec{V}_2 = (3, 0 ,4)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) $\mathrm{Arccos}\frac{1}{3}$ ۴) $\mathrm{Arccos}\frac{22}{75}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\cos\theta = \frac{(3\times10) + (11\times0) - (4\times2)}{\sqrt{100+121+4}.\sqrt{9+16}} = \frac{22}{15\times5} = \frac{22}{75} \Rightarrow \theta = \mathrm{Arcos}(\frac{22}{75})$$

شرط عمود بودن دو بردار:

دو بردار $\vec{A}(x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{B}(x_2 , y_2 , z_2)$ در صورتی بر هم عمود هستند که داشته باشیم :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0}$$

خواص ضرب داخلی:

۱) $A.B=B.A$ (حاصلضرب داخلی خاصیت جابجایی دارد.)

۲) $A.A=|A|^2$

۳) $|A.B|\le|A||B|$

۴) $A.(B+C)=A.B+A.C$

شرط موازی بودن دو بردار:

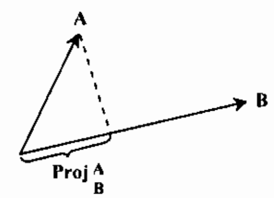
دو بردار A و B با هم موازیند اگر یکی از آنها مضربی از بردار دیگر باشد : $\boxed{\vec B=\lambda\vec A\ (\lambda\in R)}$

مثال ۵ : کدامیک از بردارهای زیر با بردار $V_1(1,-1,1)$ موازی است؟

۱) $-2\vec i+2\vec j+2\vec k$ ۲) $-3\vec i+3\vec j-3\vec k$ ۳) $-3\vec i+3\vec j-\vec k$ ۴) $-3\vec i+\vec j-3\vec k$

پاسخ : با توجه به توضیح فوق $(\lambda=-3)$ گزینه (۲) صحیح است.

طول تصویر یک بردار:



تصویربردار A را بر بردار B که آن را بصورت $Proj_B^A$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$Proj_B^A=\frac{A.B}{|B|^2}B=(\frac{A.B}{B.B})B$$

و طول این تصویر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{|proj_B^A|=A.\frac{B}{|B|}}$$

مثال ۶ : طول تصویر بردار $A=\vec i+\vec j+\vec k$ بر بردار $B=\frac{\vec i+\vec k}{\sqrt2}$ کدام است؟

۱) $\sqrt2$ ۲) $\frac{\sqrt2}{2}$ ۳) $2\sqrt2$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۱»

$$Proj_B^A=\frac{A.B}{|B|}=\frac{(\frac{1}{\sqrt2}\times1)+(\frac{1}{\sqrt2}\times1)}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt2})^2+(\frac{1}{\sqrt2})^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}}{\sqrt{\frac12+\frac12}}=\frac{2}{\sqrt2}=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2$$

حاصلضرب خارجی دو بردار

هرگاه دو بردار $\vec A$ و $\vec B$ بر حسب تصاویرشان مشخص شده باشند یعنی $\vec A=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ و $\vec B=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ آنگاه حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec A$ و $\vec B$ برابر است با :

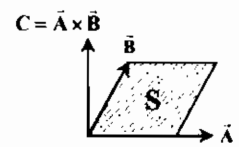
$$\vec C=\vec A\times\vec B=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec i+(z_1x_2-x_1z_2)\vec j+(x_1y_2-x_2y_1)\vec k$$

تذکر ۲ : اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec A$ و $\vec B$ که با نماد $\vec A\times\vec B$ نشان داده می‌شود برابر است با :

$$\boxed{|\vec C|=|\vec A\times\vec B|=|\vec A|.|\vec B|\sin\theta}$$

که θ زاویه بین دو بردار $\vec A$ و $\vec B$ می‌باشد

نکته ۳ : اندازه $\vec A\times\vec B$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط دو بردار $\vec A$ و $\vec B$ ساخته شده است. و همچنین مساحت مثلث حاصل از دو بردار A و B برابر $\frac12|\vec A\times\vec B|$ می‌باشد.



نکته ۴ : بردار $\vec C=\vec A\times\vec B$ بر دو بردار A و B عمود می‌باشد.

مثال ۷ : اگر $\vec A(1,-1,2)$ و $\vec B(2,1,3)$ باشد.آنگاه حاصل $\vec C=\vec A\times\vec B$ کدام است؟

۱) $-5\vec i+\vec j-\vec k$ ۲) $-5\vec i+\vec j+3\vec k$ ۳) $\vec i+7\vec j-\vec k$ ۴) $-\vec i+7\vec j+\vec k$

پاسخ :گزینه «۲»

$$\vec C=\vec A\times\vec B=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&-1&2\\2&1&3\end{vmatrix}=[(-1\times3)-(2\times1)]\vec i+[(2\times2)-(3\times1)]\vec j+[(1\times1)-(-1\times2)]\vec k=-5\vec i+\vec j+3\vec k$$

خواص ضرب خارجی دو بردار

۱) $A\times B=-(B\times A)$ (خاصیت جابجایی ندارد.)

۲) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

۳) $B.(A\times B)=0\ ,\ A.(A\times B)=0$

۴) $|A\times B|^2+|A.B|^2=|A|^2|B|^2$

مثال ۸ : مساحت مثلثی که سه رأس آن به ترتیب $A(2,0,0)$ ، $B(0,0,2)$ و $C(1,2,0)$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$AB=(-2,0,2)\ ,\ AC=(-1,2,0)$$

$$AB\times AC=\begin{vmatrix}i&j&k\\-2&0&2\\-1&2&0\end{vmatrix}=-4i+2j-4k\Rightarrow|AB\times AC|=6$$

بنابراین مساحت مثلث موردنظر برابر $\frac12|AB\times AC|$ می‌باشد.

ضرب مختلط سه بردار

اگر سه بردار $\vec A=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ و $\vec B=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ ، $\vec C=x_3\vec i+y_3\vec j+z_3\vec k$ را در نظر بگیریم ضرب مختلط آنها عبارت خواهد بود از $\vec A.(\vec B\times\vec C)$ و اندازه آن برابر است با حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec A$ و $\vec B$ و $\vec C$ ساخته می‌شود.

$$\vec A.(\vec B\times\vec C)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

مثال ۹ : حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار $\vec a=i+j+k$ ، $\vec b=i-j+k$ و $c=-i+j$ برابر است با:

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ : گزینه «۲»

$$\vec a.(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-2\Rightarrow \text{حجم}=2$$

تذکر ۳ : اگر حاصلضرب فوق صفر باشد آنگاه سه بردار در یک صفحه واقعند.

خواص ضرب مختلط

۱) $A.(B\times C)=B.(C\times A)=C.(A\times B)$

۲) حجم چهار وجهی حاصل از سه بردار A ، B و C برابر $\frac16A.(B\times C)$ می‌باشد.

۳) $A.(B\times C)=-B.(A\times C)$

تصویر متوازی الاضلاع بر صفحه

اگر A و B اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع و $\vec n$ بردار واحدی باشد، $(A\times B).n$ برابر است با مساحت تصویر قائم متوازی‌الاضلاع بر هر صفحه عمود بر n.

نکته ۵ : از فرمول فوق نتیجه می‌شود:

$(A\times B).k=$ مساحت تصویر بر صفحه xy

$(A\times B).j=$ مساحت تصویر بر صفحه xz

$(A\times B).i=$ مساحت تصویر بر صفحه yz

مثال ۱۰ : متوازی‌الاضلاعی با نقاط $P(0,0,3)$ ، $Q(2,-1,2)$ و $R(3,2,1)$ و $S(1,3,2)$ مشخص می‌شود. مساحت تصویر بر صفحه xy کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۳»

$$(\overline{PQ}\times\overline{PS}).\vec{k}=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&3&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=7$$

تذکر ۴ : با توجه به تعریف ضرب داخلی $A.(B\times C)=|A||B\times C|\cos\theta$ ، و حاصل عبارت فوق برابر حجم جعبه‌ای با وجوه متوازی‌الاضلاع که با اضلاع A ، B و C مشخص می‌شود است، مقدار $|B\times C|$ مساحت متوازی‌الاضلاع قاعده و $|C|\cos\theta$ طول ارتفاع وارد از راس C بر صفحه A ، B و C باشد. اگر θ بیش از 90° باشد باید قدر مطلق $A.(B\times C)$ را در نظر گرفت. حاصل‌ضرب فوق را به خاطر این تعبیر هندسی گاهی حاصل‌ضرب جعبه‌ای نیز می‌گویند.

ضرب برداری سه بردار (حاصل‌ضرب سه‌گانه)

معمولاً حاصل‌ضربهای $(A\times B)\times C$ و $A\times(B\times C)$ با هم برابر نیستند. ولی با فرمولهای زیر می‌توان حاصل هر یک از آنها را به سادگی به دست آورد.

$$A\times(B\times C)=(A.C)B-(A.B)C$$

خواص ضرب برداری سه بردار

۱) $A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=0$

۲) اگر $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ ، آنگاه A ، B و C یک مجموعه متعامد را شکل خواهند داد. بنابراین i ، j و k یک مجموعه متعامد هستند.

مثال ۱۱ : عبارت $(A\times B)\times(C\times D)$ با کدامیک از عبارات زیر همواره برابر است؟

۱) $(A.C\times D)B+(B.C\times D)A$ ۲) $(A.C\times D)B-(B.C\times D)A$

۳) $(A.B\times C)D+(D.A\times B)C$ ۴) $(A.B\times C)D+(D.A\times C)C$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا فرض می‌کنیم $V=C\times D$ ، در این صورت طبق تعریف حاصل‌ضرب سه‌گانه داریم:

$$(A\times B)\times V=-V\times(A\times B)=(A.V)B-(B.V)A$$

و یا:

$$(A\times B)\times(C\times D)=(A.C\times D)B-(B.C\times D)A$$

مثال ۱۲ : فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر هم‌صفحه باشند. در این صورت حجم متوازی‌الاضلاع بنا شده بر سه بردار $c\times a$ ، $b\times c$ و $a\times b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}|(a\times b).c|^2$ ۲) $|a\times b|^2+|c|^2$ ۳) $|(a\times b).c|^2$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۳» حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر سه بردار $c\times a$ ، $b\times c$ و $a\times b$ برابر است با: $V=|(a\times b)\times(b\times c).(c\times a)|$

از طرفی:

$$(a\times b)\times(b\times c)=(a.b\times c)b-(b.b\times c)a=(a.b\times c)b$$

و بنابراین:

$$(a.b\times c)b.(c\times a)=(a.b\times c)(b\times c).a=(a.b\times c)(a.b\times c)=(a.b\times c)^2$$

در نتیجه:

$$V=(a.b\times c)^2=(a\times b.c)^2=|(a\times b).c|^2$$

مثال ۱۳ : اگر A برداری یکه باشد، حاصل $A\times(A\times(A\times B))$ برابر است با:

۱) $(A.B)A$ ۲) $-A\times B$ ۳) $(A.B)B$ ۴) $(A.B)(A\times B)$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $A\times(A\times B)=(A.B)A-(A.A)B=(A.B)A-B$

بنابراین: $A\times(A\times(A\times B))=A\times((A.B)A-B)=(A.B)(A\times A)-A\times B=(A.B)(\vec{0})-A\times B=-A\times B$

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه بردارهای $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\dots,\vec{A}_n$ را مستقل خطی گوئیم هرگاه به ازای جمیع مقادیر m_j رابطه $\sum_{j=1}^{n}m_jA_j=0$ ایجاب نماید که همهٔ m_j ها صفر باشند، و وابسته خطی گوئیم هرگاه m_j هائی مخالف صفر وجود داشته باشد که $\sum_{j=1}^{n}m_jA_j=0$ گردد.

به عبارتی این n بردار را مستقل خطی می‌گوییم، هرگاه نتوان هیچ‌یک از این بردارها را برحسب ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت.

نکته ۶ : شرط اینکه سه بردار $\vec{A}(a_1,a_2,a_3),\vec{B}(b_1,b_2,b_3),\vec{C}(c_1,c_2,c_3)$ وابستگی خطی داشته باشند، این است که دترمینان مربوط به این سه بردار برابر صفر باشد یعنی:

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$$

مثال ۱۴ : اگر سه بردار $\vec{V}_1(1,1,2),\vec{V}_2(a,2,1),\vec{V}_3(2,3,4)$ وابسته خطی باشند، آنگاه a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\a&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(8+3+4a)-(6a+2+8)=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

تذکر ۵ : شرط اینکه دو بردار $\vec{A}(a,b)$ و $\vec{B}(c,d)$ وابسته خطی باشند این است که:

$$\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{ad-bc=0}$$

نکته ۷ : سه بردار مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر در یک صفحه نباشند (سه بردار را هم صفحه می‌گوییم، اگر در یک صفحه واقع باشند.)

❖ **تعریف ۱ :** تعداد سطرها یا ستونهای مستقل خطی یک ماتریس A را رتبه ماتریس A می‌گویند و آن را با $r(A)$ یا $\mathrm{rank}(A)$ نشان می‌دهند.

نکته ۸ : اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، آنگاه $r(A)\le\min(m,n)$.

مثال ۱۵ : رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&3\\-1&-8&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۳» چون $|A|=0$ ، پس رتبه A از ۳ کمتر است (سه سطر ماتریس مستقل نیستند) و از طرفی دو سطر اول و دوم مستقل هستند، پس رتبه ماتریس ۲ می‌باشد.

مثال ۱۶ : کدام دسته از بردارهای زیر مستقل خطی‌اند؟

۱) $\{u,v,u+u\}$ ۲) $\{u,u+v,u-v\}$ ۳) $\{u,u\times v,v\times u\}$ ۴) $\{u,v,u\times v\}$

پاسخ : گزینه «۴» با فرض اینکه u و v دو بردار مستقل باشند، بردار $u\times v$ برداری عمود بر آنهاست، پس برداری مستقل است.

معادله خط

هر خط راست d در فضای R^3 را می‌توان بوسیله نقطه‌ای مانند $A(x_0,y_0,z_0)$ که روی آن قرار دارد و یک بردار مانند $\vec{V}=(p,q,r)$ که موازی d است و بردار هادی خط نامیده می‌شود مشخص نمود.

معادله خط d را می‌توان به دو شکل پارامتری و متقارن نمایش داد.

معادلات متقارن d: $(p,q,r\neq0)$

$$\boxed{d:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}}$$

معادلات پارامتری d:

$$\boxed{d:\begin{cases}x-x_0=pt\\y-y_0=qt\\z-z_0=rt\end{cases}}$$

مثال ۱۷ : معادله خط گذرا از نقطه $A(1,-1,0)$ و موازی با بردار $\vec{V}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ ۲) $x-1=-y-1=\frac{z}{2}$ ۳) $x-1=y+1=z$ ۴) $\frac{x-1}{2}=y+1=z$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{(x-1)}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{2}\Rightarrow \boxed{x-1=-1-y=\frac{z}{2}}$$

تذکر ۶ : اگر یکی از مقادیر p، q یا r صفر باشد، در این حالت صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و خط با یکی از صفحات مختصات موازی است.

مثال ۱۸ : معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(2,3,2)$ و $B(3,3,0)$ را حل بیابید؟

پاسخ : بردارهای خط موردنظر را می‌توان بردار AB در نظر گرفت، بنابراین:

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{z-2}{-2}\ ,\ y=3$$

نکته ۹ : برای به دست آوردن فاصله نقطه دلخواه P از خط d، ابتدا یک نقطه دلخواه مانند P_0 روی خط در نظر می‌گیریم، اگر برداری هادی خط d را $\vec{u}$ فرض کنیم در این صورت:

$$\text{فاصله نقطه } P \text{ از خط } d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

مثال ۱۹ : فاصله نقطه $P(-1,3,-1)$ از خط $\begin{cases}x=2t+1\\ y=1\\ z=t\end{cases}$ **چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۲» بردار هادی خط $u=(2,0,1)$ است و نقطه دلخواه $P_0(1,1,0)$ را نیز روی خط در نظر می‌گیریم. در این صورت:

$$\overrightarrow{PP_0}=(2,-2,+1)\Rightarrow \overrightarrow{PP_0}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2i+4k\Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=2$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

۱) اگر دو خط راست d و d' با بردارهای هادی $\vec{V}=(a,b,c)$ و $\vec{V'}=(a',b',c')$ مفروض باشند شرط اینکه دو خط d و d' با هم موازی باشند آنستکه بردارهای هادی دو خط با هم موازی باشند.

۲) برای اینکه دو خط d و d' با بردارهای هادی $V(a,b,c)$ و $V'(a',b',c')$ متقاطع باشند، لازم است $PP'.(V\times V')=0$ باشد که P و P' به ترتیب نقاط دلخواه روی دو خط d و d' هستند. و اگر حاصل‌ضرب مختلط فوق برابر صفر نشود، دو خط متنافر هستند.

مثال ۲۰ : دو خط $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) موازی ۲) متنافر ۳) منطبق ۴) متقاطع

پاسخ : گزینه «۴» دو نقطه $P(2,3,4)$ و $P'(1,2,3)$ به ترتیب روی دو خط داده شده قرار دارند و $V(3,4,5)$ و $V'(2,3,4)$ بردارهای هادی دو خط موردنظر هستند، بنابراین:

$$PP'=(-1,-1,-1)\Rightarrow PP'.(V\times V')=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$$

پس دو خط متقاطع هستند (توجه کنید که بردارهای V و V' موازی نیستند، پس دو خط موازی یا منطبق نخواهند بود.)

نکته ۱۰ : اگر دو خط d و d' متنافر باشند، خطی وجود دارد که هر دو خط d و d' را قطع می‌کند و بر دو خط عمود است. این خط را عمود مشترک دو خط d و d' می‌گویند. چون طبق تعریف عمود مشترک بر دو خط عمود است، لذا بردارهای آن حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی d و d' خواهد بود، و می‌توان به سادگی نشان داد که طول عمود مشترک یا همان فاصله دو خط d و d' برابر است با:

$$\text{طول عمود مشترک}=\frac{|PP'.(V\times V')|}{|V\times V'|}$$

مثال ۲۱ : کوتاهترین فاصله بین دو خط $\frac{z-3}{2}=y=\frac{x-1}{3}$ و $z=\frac{y}{3}=\frac{x}{2}$ را بیابید.

پاسخ : بردارهای هادی دو خط به صورت $V(3,1,2)$ و $V'(2,3,1)$ می‌باشند و نقاط $P(1,0,3)$ و $P'(0,0,0)$ نقاط دلخواهی روی دو خط هستند. بنابراین:

$$PP'=(-1,0,-3)\Rightarrow PP'.(V\times V')=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=26$$

$$V\times V'=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-5i+j+7k\Rightarrow |V\times V'|=\sqrt{25+1+49}=5\sqrt{3}$$

پس کوتاهترین فاصله بین دو خط $\frac{26}{5\sqrt{3}}$ یا $\frac{26\sqrt{3}}{15}$ می‌باشد.

زاویه بین دو خط: زاویه بین دو خط d و d' در فضای R^3 همان زاویه بین بردارهای هادی آنها می‌باشد.

معادله صفحه

اگر یک نقطه مانند $M(x_0,y_0,z_0)$ در صفحه p و $\vec{N}=(a,b,c)$ بردار نرمال صفحه p باشد، آنگاه معادله صفحه p بصورت زیر خواهد بود.

$$p:a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(y-y_0)=0 \qquad (1)$$

$$p:ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

اگر فرض کنیم $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ (که d عددی ثابت است) آنگاه:

$$\boxed{p:ax+by+cz+d=0}$$

مثال ۲۲ : معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1,2,3)$ عمود بر بردار $\vec{N}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $p:x-y+2z-3=0$ ۲) $x+y-2z-3=0$ ۳) $x-y+2z+3=0$ ۴) $x+y-2z+3=0$

پاسخ : گزینه «۴»

$$p:ax+by+cz+d=0\Rightarrow p:x+y-2z+d=0$$

$$\xrightarrow{A\in P} 1+2-2(3)+d=0\rightarrow d=3\Rightarrow P:x+y-2z+3=0$$

فاصله یک نقطه از یک صفحه

فاصله نقطه‌ای مانند $M(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه به معادله $ax+by+cz+d=0$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مثال ۲۳ : فاصله نقطه $A(1,2,3)$ از صفحه $P:2x-y+2z+9=0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{15}{2\sqrt{2}}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$d=\frac{|2\times1+2\times(-1)+3\times2+9|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{15}{3}=5$$

وضعیت دو صفحه نسبت به هم

اگر $p:ax+by+cz+d=0$ و $p':a'x+b'y+c'z+d'=0$ معادلات دو صفحه باشند:

۱) $P\parallel P'\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

۲) $P=P'\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$

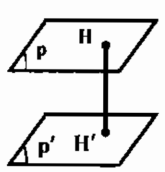
۳) $P\perp P'\Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$

زاویه بین دو صفحه: زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه همان زاویه بین دو صفحه خواهد بود.

فاصله دو صفحه موازی از هم

اگر $P:ax+by+cz+d=0$ و $P':ax+by+cz+d'=0$ دو صفحه موازی باشند فاصله این دو صفحه از رابطه زیر بدست خواهد آمد :

$$\boxed{HH'=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



مثال ۲۴ : اگر دو صفحهٔ $P:(2-a)x+y-2z=2$ و $P':2x+(b+1)y-2z=1$ با هم موازی باشند آنگاه حاصل $\frac{2a-b+3}{3}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{2-a}{2}=\frac{1}{b+1}=\frac{-2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}b+1=1\\2-a=2\end{cases}\Rightarrow a=b=0\Rightarrow\frac{2a-b+3}{3}=\frac{3}{3}=1$$

نکته ۱۱ : اگر زاویه بین بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط α باشد، آنگاه زاویه بین خط و صفحه مربوطه $\frac{\pi}{2}-\alpha$ خواهد بود.

مثال ۲۵ : خط به معادله $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$، صفحه به معادله $x+y+z=15$ را در نقطه (x_0,y_0,z_0) قطع کرده است. x_0 کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ : گزینه «۴» نقطه برخورد خط و صفحه روی هر دو آنها واقع است، بنابراین:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{4}\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\ ,\ z=2x+1$$

با جایگذاری در معادله صفحه خواهیم داشت:

$$x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+2x+1=15\Rightarrow x=3$$

مثال ۲۶ : خط به معادله $\frac{3z+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{2x-1}{3}$ نسبت به صفحه $4x+4y-21z=1$ چه وضعیتی دارد؟

۱) در صفحه ۲) عمود بر صفحه ۳) موازی صفحه ۴) زاویه با صفحه $\frac{\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» بردار $V(\frac{3}{2},2,\frac{2}{3})$ بردار هادی خط و بردار $N(4,4,-21)$ بردار نرمال صفحه است و $N.V=0$، پس خط موازی صفحه است. و چون نقطه $(\frac{1}{2},1,\frac{-1}{3})$ روی خط قرار دارد و در معادله صفحه صدق نمی‌کند پس خط در صفحه قرار ندارد.

مثال ۲۷: معادله صفحه‌ای که از فصل مشترک دو صفحه $D_1=x+y+z=6$ و $D_2=2x+3y+4z+5=0$ و نقطه $P(1,1,1)$ می‌گذرد عبارت است از:

۱) $20x+23y+26z-69=0$ ۲) $20x-23y+26z-69=0$

۳) $20x+23y-26z+69=0$ ۴) $20x+23y+26z+69=0$

پاسخ : گزینه «۱»

روش اول: معادله دسته صفحاتی که از فصل مشترک D_1 و D_2 عبور کند به صورت زیر است:

$$2x+3y+4z+5+k(x+y+z-6)=0$$

و چون صفحه مورد نظر از $P(1,1,1)$ عبور می‌کند، لذا:

$$2+3+4+5+k(1+1+1-6)=0\Rightarrow k=\frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow 2x+3y+4z+5+\frac{14}{3}(x+y+z-6)=0\Rightarrow 20x+23y+26z-69=0$$

روش دوم: در بین گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که نقطه $P(1,1,1)$ در آن صدق می‌کند گزینه (۱) است.

مثال ۲۸ : دو صفحه به معادله‌های $2x+y-z=1$ و $x+2y+z=1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) بر هم عمودند. ۲) با هم موازیند.

۳) یکدیگر را در زاویه 45° قطع می‌کنند. ۴) یکدیگر را در زاویه 60° قطع می‌کنند.

پاسخ : گزینه «۴» بردار نرمال دو صفحه به ترتیب $N(2,1,-1)$ و $N'(1,2,1)$ می‌باشند. اگر زاویه بین دو صفحه را θ فرض کنیم:

$$\cos\theta=\frac{N.N'}{|N||N'|}=\frac{1\times2+2\times1+1\times(-1)}{\sqrt{4+1+1}\times\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

مثال ۲۹ : فاصله عمودی بین دو صفحه $4x-8y-z+9=0$ و $4x-8y-z=6$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ : گزینه «۴» بردار نرمال دو صفحه یکی است، پس دو صفحه موازی یکدیگرند و با توجه به فرمول فاصلهٔ دو صفحه موازی داریم:

$$\text{فاصله}=\frac{|9-(-6)|}{\sqrt{4^2-8^2+1}}=\frac{5}{3}$$

مثال ۳۰ : اگر نقطه $(1,0,-1)$ مرکز یک مکعب و صفحه $x-2y+2z=3$ یکی از وجوه آن باشد، حجم مکعب چقدر است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{64}{27}$ ۳) $\frac{512}{27}$ ۴) $\frac{27}{8}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا فاصله نقطه داده شده را از صفحه موردنظر به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|1\times1+(-2)\times0+2(-1)-3|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{4}{3}$$

و با توجه به آنکه فاصله مرکز مکعب از هر یک از وجوه آن، نصف طول یال مکعب است، بنابراین حجم مکعب برابر است با:

$$V=(2\times\frac{4}{3})^3=\frac{512}{27}$$

مثال ۳۱ : حجم چهار وجهی به رئوس $A(1,3,0)$، $B(2,-1,3)$، $C(-2,2,-1)$ و $D(-1,1,2)$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 4

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$\overline{AB}=(1,-4,3)\ ,\ \overline{AC}=(-3,-1,-1)\ ,\ \overline{AD}=(-2,-2,2)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{6}AB.(AC\times AD)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&-4&3\\-3&-1&-1\\-2&-2&-1\end{vmatrix}=-4\Rightarrow V=4$$

ماتریس

آرایشی از اعداد حقیقی به صورت مقابل $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$ را یک ماتریس و اعداد $a_{11},a_{12},\dots,a_{mn}$ را درایه‌ها یا عضوهای ماتریس A می‌نامند. در حالت کلی یک درایه از A را بصورت a_{ij} نشان می‌دهیم که i نماینده سطر و j نماینده ستون است که این عضو در محل تلاقی آنها واقع می‌باشد، مثلاً a_{11} درایه‌ای در تلاقی سطر اول و ستون اول و a_{24} درایه‌ای در تلاقی سطر دوم و ستون چهارم می‌باشند. a_{mn} درایه‌ای در تلاقی سطر mام و ستون nام است. ماتریس A که دارای m سطر و n ستون است، یک ماتریس $m\times n$ (ماتریس با مرتبه $m\times n$) نامیده می‌شود، هرگاه در این ماتریس $m=n$ باشد، آنگاه A را یک **ماتریس مربعی مرتبهٔ n** می‌نامیم. در یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n، عضوهای $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ را اعضای **قطر اصلی** ماتریس می‌نامند.

برا ی مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&2&6\\0&1&5\end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی 3×3 (مرتبهٔ ۳) می‌باشد که عضوهای ۱ ، ۲ و ۵ درایه‌های قطر اصلی را تشکیل می‌دهند.

ماتریس قطری:

ماتریس مربع A را قطری می‌نامیم هرگاه، درایه‌های طرفین قطر اصلی آن صفر باشد. به عنوان مثال ماتریسهای $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{bmatrix}$ ماتریسهایی قطری هستند.

ماتریس همانی:

ماتریس مربعی را که درایه‌های قطر اصلی آن یک و سایر درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس همانی (واحد) می‌نامیم و آنرا با I_n یا I نمایش می‌دهیم.

ماتریس‌های مساوی: دو ماتریس را مساوی گوئیم هرگاه، درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

ماتریس‌های هم مرتبه : دو ماتریس را هم مرتبه گوئیم هرگاه تعداد سطرها و ستونهای آنها با هم برابر باشند.

با توجه به تعریف فوق اگر دو ماتریس هم مرتبه نباشند، می‌توان نتیجه گرفت آنها با هم مساوی نیستند.

ماتریس صفر: هرگاه تمام درایه‌های یک ماتریس صفر باشد، آن را ماتریس صفر می‌نامند و با نماد $\bar{o}$ نمایش می‌دهند .

قرینهٔ ماتریس: قرینه ماتریس A را که بصورت $-A$ نشان می‌دهیم، ماتریسی است که از قرینه کردن تک‌تک درایه‌های ماتریس A به دست می‌آید.

مثال ۳۲ : قرینه ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ به صورت $-A=\begin{bmatrix}+1 & +3\\ -2 & -4\end{bmatrix}$ می‌باشد .

جمع ماتریسها و خواص مربوط به آن

حاصل جمع و تفاضل دو ماتریس:

برا ی جمع یا تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم، توضیح اینکه مرتبه ماتریس حاصل جمع (یا تفاضل) همان مرتبه ماتریسهای اولیه می‌باشد .

مثال ۳۳ : حاصل جمع دوماتریس $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+6 & 1+3\\ 2+7 & 3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 9 & 9\end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریسها :

۱) $A+B=B+A$ (جابجائی)

۲) $\bar{o}+A=A$ (عضو خنثی)

۳) $A+(-A)=\bar{o}$ (عضو قرینه)

۴) $A+C=B+C \Leftrightarrow A=B$ (حذفی جمع)

۵) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (شرکت‌پذیری)

ضرب یک عدد در یک ماتریس (ضرب اسکالر):

برای ضرب عدد k در ماتریس A باید عدد k را در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم، و ماتریس حاصل را با kA نمایش می‌دهیم .

مثال ۳۴ :

$$4\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 12 & 4\end{bmatrix}$$

تذکر ۷ : اگر A و B دو ماتریس و k و r اعداد حقیقی باشند، روابط زیر را خواهیم داشت :

۱) $r(A+B)=rA+rB$ ۲) $(r+k)A=rA+kA$ ۳) $r(kA)=(rk)A$

۴) $1\times A=A$ ۵) $\bar{o}\times A=\bar{o}$ ۶) $kA=Ak$

ضرب ماتریسها :

هر گاه A و B دو ماتریس باشند، ماتریس $A\times B$ موجود است هرگاه، تعداد ستونهای ماتریس A برابر تعداد سطرهای ماتریس B باشد و تعداد سطرهای ماتریس $A\times B$ برابر با تعداد سطرهای ماتریس A و تعداد ستونهای آن برابر تعداد ستونهای ماتریس B خواهد بود .

به عبارت دیگر داریم: $\boxed{A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}}$

برای تعیین درایه c_{ij} در ماتریس حاصلضرب c باید سطر i ام از ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم .

مثال ۳۵ : هر گاه $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$، ماتریس‌های $A\times B$ و $B\times A$ را بدست آورید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1\times 2+2\times 4+0\times 1 & 1\times(-2)+2\times 3+0\times 0\\ 3\times 2+(-1)\times 4+2\times 1 & 3(-2)+(-1)\times 3+2\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 4\\ 4 & -9\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}2\times 1-2\times 3 & 2\times 2-2\times(-1) & 2\times 0-2\times 2\\ 4\times 1+3\times 3 & 4\times 2+3\times(-1) & 4\times 0+3\times 2\\ 1\times 1+0\times 3 & 1\times 2+0\times(-1) & 1\times 0+0\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & -4\\ 13 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ملاحظه می‌شود که ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجائی نیست.

خواص ضرب ماتریسها:

۱) حاصل ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابجائی نیست .

۲) اگر حاصلضرب دو ماتریس صفر باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که یکی از دو ماتریس برابر صفر است.

مثال ۳۶ : اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ باشد داریم :

$$A\times B=\begin{bmatrix}2\times 0+0\times 3 & 2\times 0+0\times 2\\ -3\times 0+0\times 3 & -3\times 0+0\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

۳) قانون حذف در ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B=C$ است .

۴) ضرب ماتریسها شرکت پذیر است: $(AB)C=A(BC)$

۵) ضرب ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع دارای خاصیت پخشی است:

$$\begin{cases}A(B+C)=AB+AC\\ (B+C)A=BA+CA\end{cases}$$

به توان رساندن یک ماتریس مربعی:

هرگاه A یک ماتریس مربعی باشد $AA=A^2,\ A.A^2=A^3,\ldots,A.A^{n-1}=A^n$ می‌باشد $(n\in N)$.

نکته ۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}0 & k\\ k & 0\end{bmatrix}$ آنگاه :

$$\begin{cases}A^n=\begin{bmatrix}k^n & 0\\ 0 & k^n\end{bmatrix} & (\text{زوج } n)\\ A^n=\begin{bmatrix}0 & k^n\\ k^n & 0\end{bmatrix} & (\text{فرد } n)\end{cases}$$

نکته ۱۲ : اگر A یک ماتریس قطری باشد ، برای محاسبه ماتریس A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به توان n برسانیم.

اگر $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}$ باشد آنگاه :

$$A^n=\begin{bmatrix}(ab)^{\frac{n}{2}} & 0\\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix} \quad , \quad A^n=\begin{bmatrix}0 & a^{\frac{n+1}{2}}.b^{\frac{n-1}{2}}\\ a^{\frac{n-1}{2}}.b^{\frac{n+1}{2}} & 0\end{bmatrix}$$

(n زوج باشد) (n فرد باشد)

ماتریس ترانهاده:

هر گاه در ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ جای سطرها و ستونها را عوض کنیم، ماتریس دیگری از مرتبه $n\times m$ بدست می‌آید که آنرا ترانهاده ماتریس A می‌نامیم و با A^t یا A' نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۷ : ماتریس ترانهاده $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ به فرم $A'=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ خواهد بود.

ویژگیهای عمل ترانهاده کردن در ماتریس‌ها :

فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $\lambda\in R$، در این صورت روابط زیر را داریم :

۱) $(A')'=A$ ۲) $(AB)'=B'A'$ ۳) $(\lambda A)'=\lambda A'$

۴) $(A')^n=(A^n)'$ ۵) $(A\pm B)'=A'\pm B'$

ماتریسهای بالا مثلثی و پائین مثلثی :

ماتریس مربعی A مرتبه n، را ماتریس بالا مثلثی گویند، هرگاه تمام درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی صفر باشند و ماتریس A را پائین مثلثی گویند هرگاه تمام درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی صفر باشد.

برای مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&3&4\\0&5&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ را ماتریس بالا مثلثی و ماتریس $B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ را ماتریس پایین مثلثی گویند.

تذکر ۸ : ماتریس همانی (واحد) ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی و قطری می‌باشد .

ماتریس متقارن:

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را متقارن گویند، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم: $a_{ij}=a_{ji}$

به بیان دیگر ماتریس مربع A را متقارن می‌نامند، هرگاه $A=A'$ باشد. برای مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&1&2\\1&5&0\\2&0&6\end{bmatrix}$ را یک ماتریس متقارن گویند.

ماتریس پاد متقارن:

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را پاد متقارن گویند، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم : $a_{ij}=-a_{ji}$. به بیان دیگر ماتریس مربع A را پاد متقارن گویند هرگاه $A=-A'$ باشد. برای مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&4\\-2&-4&0\end{bmatrix}$ را یک ماتریس پاد متقارن گویند.

تذکر ۹ : ماتریس صفر، ماتریس قطری، اسکالر، با لا مثلثی، پائین مثلثی، متقارن و پاد متقارن می‌باشند.

تذکر ۱۰ : ترانهاده ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی بوده و ترانهاده ماتریس پائین مثلثی، بالا مثلثی می‌باشد.

تذکر ۱۱ : ماتریس‌های قطری و همانی متقارن هستند.

تذکر ۱۲ : اگر A ماتریس مربعی باشد، ماتریس $A+A'$ متقارن است.

تذکر ۱۳ : مجموع و تفاضل دو ماتریس متقارن هم مرتبه، ماتریسی متقارن است.

تذکر ۱۴ : در ماتریس پادمتقارن عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند.

تذکر ۱۵ : اگر A ماتریس مربعی باشد، ماتریس $A-A'$ پاد متقارن است.

تذکر ۱۶ : مجموع و تفاضل دو ماتریس پاد متقارن هم مرتبه، ماتریس پاد متقارن است.

دترمینان

دترمینان ماتریس A را با det A نمایش می‌دهیم و فقط برای ماتریسهای مربعی تعریف می‌شود و عددی حقیقی می‌باشد.

دترمینان هر ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را بصورت روبرو تعریف می‌کنیم: $\det A=|A|=ad-bc$

دترمینان ماتریسهای ۳×۳:

برای هر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ دترمینان A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}$$

هر یک از دترمینانهای سمت راست به این ترتیب بدست می‌آیند که در دترمینان اصلی سطر و ستونی که شامل ضریب آن دترمینان است حذف می‌شود:

$$|A|=a\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}-b\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

برای تعیین علامت دترمینانهای سمت راست بایداز دستور $(-1)^{i+j}$ استفاده کنیم که در آن i نماینده سطر و j نماینده ستون است که ضریب آن دترمینان در آن قرار دارد، برای مثال a در سطر اول و ستون اول قرار دارد پس $1=(-1)^{1+1}$ لذا علامتش مثبت خواهد بود، b در سطر اول و

ستون دوم قرار دارد. پس $-1=(-1)^{1+2}$ لذا علامتش منفی خواهد بود و C در سطر اول و ستون سوم قرار دارد پس $1=(-1)^{1+3}$ لذا علامتش مثبت خواهدبود.

مثال ۳۸ : دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}$ را محاسبه کنید .

$$|A|=2\times(2\times1-1\times2)-1\times(1\times1-3\times1)+0\times(2\times1-2\times3)=2$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های مرتبه ۳:

برای محاسبه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ با روش ساروس بصورت زیر عمل می‌کنیم که دترمینان ماترس فوق را عیناً در کنار خودش قرار می‌دهیم و حاصلضرب قطرهای فرعی را از حاصلضرب قطرهای اصلی کم می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=(aei+bfg+cdh)-(ceg+bdi+afh)$$

مثال ۳۸ : دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}5&2&3\\2&1&4\\-2&-3&-1\end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید.

روش اول : $|A|=(-1)^{1+1}\times5\times(1\times-1-4\times-3)+(-1)^{2+1}\times2\times(2\times-1-4\times-2)+(-1)^{3+1}\times3\times(2\times-3-1\times-2)=31$

روش دوم: $\begin{vmatrix}5&2&3\\2&1&4\\-2&-3&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5&2&3\\2&1&4\\-2&-3&-1\end{vmatrix}=$

$$[(5\times1\times-1)+(2\times4\times(-2))+(3\times2\times-3)]-[(3\times1\times-2)+(2\times2\times-1)+(5\times4\times-3)]=-39+70=31$$

خواص دترمینان

۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالا مثلثی و پائین مثلثی عبارتست از حاصلضرب درایه‌های موجود روی قطر اصلی آن ماتریس.

۲) اگر تمام عناصر یک سطر یا ستون از ماتریسی برابر صفر باشد، دترمینان آن ماتریس برابر صفر است.

۳) دترمینان ماتریس A با دترمینان ترانهاده آن برابر است: $|A|=|A'|$

۴) اگر کلیه عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد ثابت C ضرب شوند، آنگاه مقدار دترمینان در C ضرب می‌شود .

۵) اگر در یک دترمینان جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم، مقدار دترمینان در (۱-) ضرب می‌شود.

۶) اگر یک سطر یا ستون در یک ماتریس ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، (ویا ماتریس دارای دو سطر یا دو ستون مانند یکدیگر باشد) آنگاه حاصل دترمینان برابر صفر است.

۷) اگر مضربی از یک سطر یا یک ستون دترمینان را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۸) اگر A وB دو ماتریس قابل ضرب کردن در یکدیگر باشند آنگاه: $|A.B|=|A|.|B|=|B|.|A|$

۹) اگر کلیه درایه‌های ماتریس مرتبهٔ n، در عدد Cضرب شود دترمینان آن در C^n ضرب می‌شود.

ماتریس همسازه

دترمینان کهاد، ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی :

در ماتریس A، ماتریس کهاد نظیر عضو a_{ij}، ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریسA ایجاد می‌شود و آن را با نماد M_{ij} نشان می‌دهیم و اگر دترمینان کهاد عضو a_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ ضرب کنیم، همسازه نظیر عضو a_{ij} بدست می‌آید که با Δ_{ij} نمایش می‌دهیم، ماتریس همسازه $N=[\Delta_{ij}]$ ماتریسی است که در ماتریسA به جا ی هر عنصر a_{ij} همسازه نظیر همان عضو را قرار دهیم. ترانهاده ماتریس همسازه را ماتریس الحاقی می‌نامند و آن را با N' یا N^t نشان می‌دهند.

مثال ۳۹ : ماتریس همسازه و الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ را بدست آورید:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}=-3 \quad , \quad \Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}=6$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}=6 \quad , \quad \Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}=112$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&6\\7&8\end{vmatrix}=-3 \quad , \quad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}=6$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=-3 \quad , \quad \Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=6$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3 \qquad \Rightarrow N=\begin{bmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N'=N=\begin{bmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}$$

ماتریس وارون (معکوس) یک ماتریس مرتبه n

وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم و همواره داریم: $A^{-1}.A=A.A^{-1}=I$ شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس A دارای وارون باشد آنست که $|A|\neq 0$ باشد. بطور کلی برای محاسبه وارون ماتریس A از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

N' : ماتریس الحاقی A می‌باشد.

$|A|$: دترمینان ماتریس A می‌باشد.

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}.N'}$$

دستور عملی برای محاسبه وارون ماتریس ۲×۲:

وارون هر ماتریس ۲×۲ به فرم کلی $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$A^{-1}=\frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

مثال ۴۰ : ماتریس معکوس $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&-1\end{bmatrix}$ را بدست آورید .

$$A^{-1}=\frac{1}{(3\times -1)-(4\times 1)}\begin{bmatrix}-1&-4\\-1&3\end{bmatrix}=\frac{-1}{7}\begin{bmatrix}-1&-4\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{-3}{7}\end{bmatrix}$$

مثال ۴۱ : وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|A|=-9\ ,\ N'=\begin{bmatrix}-3&-3&0\\-3&0&3\\-3&3&-3\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

مثال ۴۲ : وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&6\\1&3&2\end{bmatrix}$ را حساب کنید .

$$\text{همسازه } A=N=\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\\Delta_{21}&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\\Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&6&-1\\8&-2&-1\\8&-6&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{الحاقی } A=N'=\begin{bmatrix}-16&8&8\\6&-2&-6\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$|A|=1\begin{vmatrix}1&6\\3&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&6\\1&2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}=1(2-18)-2(0-6)+4(0-1)=-8$$

طبق دستورالعمل داریم :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}N'=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-16&8&8\\6&-2&-6\\-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

خواص وارون یک ماتریس:

۱) وارون یک ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است .

۲) $(A^{-1})^{-1}=A$

۳) $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}$

۴) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۵) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^n نیز معکوس پذیر است.

۶) $AB=BA \Leftrightarrow A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۷) معکوس هر ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس پائین مثلثی می‌باشد و بالعکس.

۸) معکوس هر ماتریس قطری A یک ماتریس قطری است با همان درایه‌ها با این تفاوت که عناصر روی قطر اصلی معکوس عناصر روی قطر اصلی ماتریس A می‌باشد .

حل دستگاه معادلات خطی

برای حل دستگاه : $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ به روش دستور کرامر از دستورهای $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta z}{\Delta}$ که در آنها Δ دترمینان ماتریس ضرائب دستگاه می‌باشد، استفاده می‌کنیم و برای تعیین هر یک از آنها کافی است در دترمینان ضرائب دستگاه، ستونی که متناظر با آن مجهول بوده، حذف کرد و بجای آن ماتریس مقادیر را قرار می‌دهیم.

استفاده از معکوس ماتریس:

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}c\\c'\end{bmatrix}}_{B}\rightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال ۴۳ : دستگاه $\begin{cases}5x-3y=9\\2x+y=8\end{cases}$ **را به روش ماتریس وارون حل کنید .**

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5&-3\\2&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}}_{B}\rightarrow\begin{cases}|A|=11\\N'=\begin{bmatrix}1&3\\-2&5\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&\frac{3}{11}\\-\frac{2}{11}&\frac{5}{11}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&\frac{3}{11}\\-\frac{2}{11}&\frac{5}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\rightarrow x=3,\ y=2$$

دستگاه معادلات همگن و غیر همگن

اگر مقادیر معلوم معادلات همگی برابر صفر باشند آنگاه آن دستگاه معادله را **همگن** می‌گوییم و برای بررسی جوابها حالتهای زیر را داریم: ۱) اگر دترمینان ضرایب دستگاه معادله **همگن** برابر صفر باشد در این صورت دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۲) اگر دترمینان ضرایب در یک دستگاه **معادله همگن مخالف صفر** باشد آنگاه دستگاه فقط یک جواب برابر صفر را دارد. $(x_1 = x_2 \dots x_n = 0)$

۳) اگر مقادیر معلوم دستگاه معادلات خطی برابر صفر نباشد **(دستگاه غیرهمگن باشد)** اگر دترمینان ضرایب برابر صفر باشد آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد و یا دستگاه اصلاً جواب ندارد و اگر دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow & \text{دستگاه یک جواب دارد} \\ \text{اگر } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow & \text{دستگاه جواب ندارد} \\ \text{اگر } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow & \text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد} \end{cases}$$

مثال ۴۴ : دستگاه معادلات $\begin{cases} x+ay-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد. a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow [1\times(-1)\times(3)+a\times1\times1+(-1)(2)\times(2)]-[(1)(-1)(-1)+a(2)(3)+1\times1\times2]$$

$$\Rightarrow [a-3-4]-[1+6a+2]=-5a-10=0 \Rightarrow a=-2$$

مقادیر ویژه و بردار ویژه

هرگاه V یک بردار و λ عددی حقیقی باشد و A یک ماتریس مربع $n\times n$ باشد بطوریکه $AV=\lambda V$ در این صورت λ را یک مقدار ویژه و V را یک بردار ویژه می‌گویند.

برای محاسبه مقادیر ویژه ریشه‌های معادله $|A-\lambda I|=0$ را به دست می‌آوریم. به این معادله، معادله مشخصه یا معادله مفسر نیز می‌گویند. پس از محاسبه مقادیر ویژه بردارهای ویژه را می‌توان از معادله $AV=\lambda V$ به دست آورد.

مثال ۴۵ : مقادیر ویژه، و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ : ابتدا توجه کنید که:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I|=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \text{ معادله مشخصه } \Rightarrow \lambda=2,3 \text{ مقادیر ویژه}$$

برای یافتن بردارهای ویژه دستگاه $AV=2V$ و $AV=3V$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2V_1 \\ 2V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4V_1-V_2=2V_1 \\ 2V_1+V_2=2V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_1-V_2=0 \\ 2V_1-V_2=0 \end{cases}$$

معادله اخیر یکسان هستند، بنابراین به یکی از متغیرها مقداری دلخواه می‌دهیم تا مقدار دیگری و در نتیجه بردار ویژه به دست آید. به طور مثال قرار می‌دهیم $V_1=1$ و در این صورت $V_2=2$ به دست می‌آید. بنابراین بردار ویژه $V=(1,2)$ می‌باشد. به طور مشابه می‌توان بردار ویژه متناظر با $\lambda=3$ را به دست آورد.

مثال ۴۶ : مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **کدام است ؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ : گزینه «۱»

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-\lambda I|=(3-\lambda)(1-\lambda)-8=\lambda^2-4\lambda-5=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_1+\lambda_2=4}$$

مثال ۴۷ : حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **کدام است ؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ : گزینه «۴»

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود برای محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس باید λ را از درایه‌های قطر اصلی ماتریس کم کنیم و دترمینان ماتریس حاصل را محاسبه و برابر صفر قرار دهیم، ریشه‌های معادله بدست آمده (بر حسب λ) مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

نکته ۱۳ : مجموع مقادیرویژه یک ماتریس برابر مجموع عناصر روی قطر اصلی می‌باشد. (مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مانند A را با $tr(A)$ نشان می‌دهند.)

نکته ۱۴ : حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس A برابر با $|A|$ می‌باشد.

نکته ۱۵ : مقادیر ویژه ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی و ماتریس قطری همان درایه‌های قطر اصلی می‌باشند.

مثال ۴۸: اگر مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **نصف حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس** $B=\begin{bmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **باشد. آنگاه m کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته فوق مجموع مقادیر ویژه ماتریس A برابر با حاصلجمع درایه‌های واقع بر قطر اصلی می باشد و حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس B نیز بدلیل اینکه B یک ماتریس بالا مثلثی است همان حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی می باشد لذا داریم :

$$-1+4=\frac{1}{2}(m\times3\times-1) \Rightarrow -3m=6 \Rightarrow \boxed{m=-2}$$

نکته ۱۶ : اگر ماتریس B معکوس‌پذیر باشد و λ_1 و λ_2 و ... مقادیر ویژه آن باشند، آنگاه $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\dots$ مقادیر ویژه ماتریس B^{-1} خواهند بود.

نکته ۱۷ : اگر ماتریس A به توان k برسد آنگاه مقادیر ویژه آن نیز به توان k خواهد رسید. $A^k \rightarrow \lambda^k$

نکته ۱۸ : اگر ماتریس A در عدد حقیقی k ضرب شود آنگاه مقادیر ویژه آن نیز در عدد k ضرب خواهند شد. $kA \rightarrow k\lambda$

مثال ۴۹ : اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **باشد آنگاه مجموع مقادیر ویژه ماتریس** A^{-1} **کدام است ؟**

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ : گزینه «۱»

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)-(-1)(2)=0 \Rightarrow 4-5\lambda+\lambda^2+2=0$$

$$\rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

نکته ۱۹ : ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه آن مخالف صفر باشند.

نکته ۲۰ : اگر A ماتریسی متقارن باشد، مقادیر ویژه آن حقیقی و بردارهای ویژه آن دو به دو بر هم عمودند.

نکته ۲۱ : مقادیر ویژه ماتریسهای A و A^T با هم برابرند.

مثال ۵۰ : اگر $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & a \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۳» طبق فرض مقادیر ویژه همگی برابر ۱ هستند و می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر قطر اصلی هستند. بنابراین:

$$5 - 5 + a = 1 + 1 + 1 \Rightarrow a = 3$$

مثال ۵۱ : اگر A یک ماتریس 5×5 با $|xI - A| = (x-1)(x+2)^3 x$ باشد، مقدار $tr(A)$ چقدر است؟

۱) ۵- ۲) ۵+ ۳) ۰ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه «۱» مقادیر ویژه ماتریس A اعداد ۰، ۱، ۲-، ۲-، ۲- می‌باشند و مجموع مقادیر ویژه برابر $tr(A)$ است بنابراین:

$$tr(A) = -2 - 2 - 2 + 1 + 0 = -5$$

نکته ۲۲ : اگر $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + L$، چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، آنگاه:

$$tr(A) = \frac{-b}{a}\ ,\ \det(A) = \frac{(-1)^n L}{a}$$

مثال ۵۲ : اگر A یک ماتریس با چند جمله‌ای مشخصه $f(x) = x^5 + x^2 - 3$ باشد، $\det(A)$ چقدر است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۱» طبق نکته فوق:

$$\det A = \frac{(-1)^5(-3)}{1} = 3$$

ماتریس‌های قطری شدنی

فرض کنید ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشد، و بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر این مقادیر ویژه را به صورت ستونی در یک ماتریس $n \times n$، مانند P قرار دهیم، آنگاه:

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری B به دست آمده، در روی قطر اصلی دارای مقادیر ویژه A و سایر درایه‌های آن صفر می‌باشند.

نکته ۲۳ : اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند، آنگاه ماتریس A لزوماً قطری شدنی است.

مثال ۵۳ : قطری شدهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه A را به دست می‌آوریم.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -2$$

درایه‌های واقع روی قطر اصلی ماتریس قطری شدنی، مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند بنابراین گزینه (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

ماتریس معین مثبت و معین منفی

ماتریس متقارن $A_{n \times n}$ و بردار دلخواه $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر برای هر $V \neq 0$، $V^TAV > 0$، A را **معین مثبت** می‌گوییم، اگر $V^TAV < 0$، A را **معین منفی** می‌گوییم. و اگر V^TAV به ازای بعضی از بردارها مثبت و به ازای بعضی از بردارها منفی باشد، A را نامعین می‌گوییم.

نکته ۲۴ : در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریسهای مربعی را که از گوشه بالا و چپ ماتریس شروع می‌شوند را به ترتیب $H_1 = a_{11}$، $H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ و ... بنامیم، آنگاه:

اگر همهٔ H_i ها مثبت باشند، A را معین مثبت می‌گوییم، اگر H_i ها، برای i فرد منفی و برای i زوج مثبت باشند، A معین منفی است و در غیر این صورت A نامعین است.

مثال ۵۴ : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

۱) معین مثبت است. ۲) معین منفی است. ۳) نامعین است. ۴) شبه معین منفی است.

پاسخ : گزینه «۳»

$$H_1 = 1 > 0\ ,\ H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

نکته ۲۵ : ماتریس A معین مثبت است، اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند و A معین منفی است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن منفی باشند.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱ـ فاصلهٔ نقطه (۱- و ۳ و ۱-) از خط به معادله $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ـ فاصله عمودی بین دو صفحه به معادله‌های $4x - 8y - z + 9 = 0$ و $4x - 8y - z = 6$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۳ـ می‌دانیم که $\lambda = 1$ مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ است و علاوه بر این ماتریس A دارای وارون نیست. دو مقدار ویژه دیگر ماتریس A کدامند؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ و $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ ۳) ۱- و $\frac{5}{4}$ ۴) ۰ و $\frac{5}{4}$

۴ـ در صورتی که رابطه ماتریسی مقابل برقرار باشد: $A_{(n\times n)}X_{(n\times 1)} + B_{(n\times 1)} = X_{(n\times 1)}$ ماتریس X برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $X = B(I-A)^{-1}$ ۲) $X = (I-A)^{-1}.B$ ۳) $X = B(A-I)^{-1}$ ۴) $X = (A-I)^{-1}.B$

۵ـ اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه $\det(A)$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۲-

۶ـ دترمینان ماتریس $\begin{vmatrix} 9 & 5 & -1 & 4 & -18 \\ -11 & -23 & 14 & -45 & 19 \\ 62 & 78 & 12 & -40 & 37 \\ 9 & 5 & -1 & 4 & -18 \\ 18 & -92 & -13 & 47 & 13 \end{vmatrix}$: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) بی‌نهایت

۷ـ فاصله نقطه $(-1,3,-1)$ از خط $\begin{cases} x - 2z = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{5}\sqrt{35}$ ۲) $\frac{3}{5}\sqrt{35}$ ۳) $\frac{3}{5}\sqrt{70}$ ۴) $\frac{2}{5}\sqrt{70}$

۸ـ حجم چهار وجهی به رؤس $(0,3,1)$، $(2,-1,3)$، $(-1,2,-2)$ و $(-1,1,2)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹ـ کدام بردار یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱۰ـ اگر $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & a \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۱۱ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۲ـ اگر نقطه $(1,0,-1)$ مرکز یک مکعب و صفحه $x - 2y + 2z = 3$ یکی از وجوه آن باشد، حجم مکعب برابر کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{64}{27}$ ۳) $\frac{512}{27}$ ۴) $\frac{27}{8}$

۱۳ـ برداری که در جهت بردار $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ بوده و طولش برابر ۹ می‌باشد، کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ۲) $9\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ ۳) $6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ ۴) $3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

۱۴ـ معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ $A\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ می‌گذرد و به بردار $V = (1,-1,3)$ عمود می‌باشد کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $x + y + 3z = 1$ ۲) $x - y + 3z = 6$ ۳) $x - y + 3z = 8$ ۴) $2x - y + 3z = 9$

۱۵ـ اگر A و B ماتریس‌های $n\times n$ متقارن باشند، در این صورت می‌توان گفت .... (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) A معکوس‌پذیر است. ۲) $(A+B)$ متقارن است. ۳) B معکوس‌پذیر است. ۴) $(A-B)$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس A^{100} کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\begin{bmatrix} 2^{100} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 200 & 100 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 101 & 100 \\ -100 & -99 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 201 & 101 \\ 99 & 100 \end{bmatrix}$

۱۷ـ مطلوبست محاسبه کثیرالجمله مشخصه و مقادیر خاص، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_1 = 1$
۲) $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1\ ,\ \lambda_2 = -1\ ,\ \lambda_1 = -1$
۳) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_1 = 2$
۴) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5\ ,\ \lambda_2 = 5\ ,\ \lambda_1 = 1$

۱۸ـ ماتریس $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ را قطری کنید. (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۳) $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۹ـ شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ b^2 & -c^2 & 0 \end{bmatrix}$ مثبت معین باشد کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) ماتریس A هیچوقت نمی‌تواند مثبت معین باشد.
۲) ماتریس A همیشه مثبت معین است.
۳) $-2 < a < 2$ و $b > 0$ و $c > 0$
۴) $-2 < a < 2$ و $-\sqrt{3} < b < \sqrt{3}$

۲۰ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^{100} عبارت است از: (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\begin{bmatrix}100 & 2\\ 0 & 100\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 200\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}100 & 200\\ 0 & 100\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 2^{100}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

۲۱ـ می‌دانیم که $\lambda_1=2$ یک مقدار ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ است و دترمینان A برابر است با ۳۶ مقدار ویژه دیگر A کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $\lambda_2=1\ ,\ \lambda_3=18$ ۲) $\lambda_2=3\ ,\ \lambda_3=6$ ۳) $\lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=9$ ۴) $\lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=7$

۲۲ـ جواب‌های معادله $\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & -3 & 1\end{vmatrix}=0$ کدامند؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $-1,2$ ۲) $2,-3$ ۳) $1,-3$ ۴) جواب حقیقی ندارد.

۲۳ـ اگر $\lambda=3$ یکی از مقادیر ویژه $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ باشد، بردار ویژه متناظر با آن موازی کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $i-j-2k$ ۲) $i+j+k$ ۳) $2i-j+k$ ۴) $i+j-k$

۲۴ـ اگر $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ عنصر سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۵ـ مختصات برداریکه $\vec{N}$ عمود بر دو بردار $\vec{A}=4i-j+3k$ و $\vec{B}=-2i+j+2k$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $(1,-2,2)$ ۲) $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(-1,2,2)$

۲۶ـ تصویر بردار $\vec{A}=-i+2j+3k$ بر $\vec{B}=2i-j+2k$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}j+\frac{1}{2}k$ ۲) $\frac{4}{9}i-\frac{2}{9}j+\frac{4}{9}k$ ۳) $-\frac{2}{9}i+\frac{4}{9}j+\frac{6}{9}k$ ۴) $-\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}j+\frac{3}{4}k$

۲۷ـ در معادله $\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ مجهول x چقدر است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۸ـ رتبه یا Rank ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{bmatrix}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۰)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۲۹ـ رتبه یا Rank ماتریس مقابل کدام است؟ (مهندسی صنایع(مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۰)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۰ـ سه صفحه $x+2y+3z=6$ ، $x+5y+2z=7$ و $2x+7y+az=8$ نقطه مشترکی ندارند. اگر a برابر باشد با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱- ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۱ـ خط L که معادلاتش عبارتند از $y-2z=0$ و $x-2z-3=0$ ، صفحه $x+3y-z+4=0$ را در نقطه P قطع می‌کند. معادله خطی را که در این صفحه بر نقطه P می‌گذرد و بر L عمود است به دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{2}$ ۲) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-9}{2}$ ۳) $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-9}{2}$ ۴) $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4}$

۳۲ـ اگر $A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & a\end{vmatrix}$ و دترمینان ماتریس A^2 برابر ۹ باشد، a کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $-1,1$ ۲) $5,-1$ ۳) $5,-5$ ۴) $1,-5$

۳۳ـ دو خط متنافر L_1 و L_2 در فضا مفروض است. خط L_1 از نقطه $(1,0,1)$ می‌گذرد و با بردار $(1,2,1)$ موازی است. خط L_2 از نقطه $(2,1,4)$ می‌گذرد و با بردار $(1,1,-1)$ موازی است. کوتاهترین فاصله بین این دو خط در فضا برابر است با: (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

۳۴ـ مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}$ کدام‌اند؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $1,0,-1$ ۲) $1,1,1$ ۳) $1,-1,2$ ۴) $1,2,3$

۳۵ـ اگر داشته باشیم $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$ و $B=2\vec{k}$ آنگاه کدام بردار، مماس بر $\vec{A}\times\vec{B}$ خواهد شد؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\vec{i}+\vec{j}$ ۲) $\vec{i}-\vec{j}$ ۳) $2(\vec{i}-\vec{j})$ ۴) $2(\vec{i}+\vec{j})$

۳۶ـ برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا کدام رابطه همواره درست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\vec{a}.\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$ ۲) $\vec{a}.\vec{b}>|\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) $\vec{a}.\vec{b}\le\vec{a}\times\vec{b}$ ۴) $\vec{a}.\vec{b}\ge|\vec{a}||\vec{b}|$

۳۷ـ کدام بردار عمود بر بردارهای $u=4i-j+3k$ و $v=2i+3j-k$ است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $8i-3j-3k$ ۲) $6i-2j-2k$ ۳) $6i+2j+2k$ ۴) $-8i+10j+14k$

۳۸ـ اگر a و b و c سه بردار و b و c غیر موازی و $a.(b\times c)=0$ ، کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) یک بردار عمود بر صفحه دو بردار دیگر است. ۲) $a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$

۳) صفحه a و b بر صفحه b و c عمود است. ۴) یک بردار موازی صفحه دو بردار دیگر است.

۳۹ـ دو خط $\begin{cases}z=1\\ 2x+y=2\end{cases}$ و $\begin{cases}x+2y=-1\\ 3y+z=1\end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) متقاطع هستند. ۲) موازی هستند. ۳) متنافر هستند. ۴) برهم منطق هستند.

۴۰ـ مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ کدام‌اند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳- و ۲- و ۱- ۲) ۳ و ۲ و ۱ ۳) ۱- و ۱- و ۱- ۴) ۱ و ۱ و ۱

۴۱ـ دو تابع از مقادیر مشخصه (eigenvalue) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$، $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ می‌باشد، مقدار مشخصه سوم آن λ_3 برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۴۲ـ با توجه به اینکه معادله مشخصه ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$، $(\lambda+2)^2(\lambda-4)$ می‌باشد. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) ماتریس B قابل قطری شدن هست و ماتریس A قطری شدنی نیست.
۲) ماتریس‌های A و B هر دو قطری شدنی هستند.
۳) ماتریس‌های A و B هیچکدام قطری شدنی نیستند.
۴) ماتریس‌های A قابل قطری شدن هست و ماتریس B قطری شدنی نیست.

۴۳ـ سه صفحه $x+y=2$ و $z-y=2$ و $x+z=4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) موازیند. ۲) دو به دو متقاطعند. ۳) در یک خط مشترکند. ۴) در یک نقطه مشترکند.

۴۴ـ مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 45 & 17 & 3 & -45 & -17 \\ 12 & 21 & 6 & -12 & 21 \\ -3 & -9 & -11 & 3 & 9 \\ 6 & 10 & 9 & -6 & 10 \\ -7 & -8 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) -118 ۲) صفر ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۵۶۸

۴۵ـ یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ برابر $\lambda = 3$ است. اگر $x_1 = c$ انتخاب شود، بردار ویژه مربوطه برابر است با:
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) $ci+cj-2ck$ ۲) $ci-cj-2ck$ ۳) $2ci+2cj$ ۴) $ci-cj+ck$

۴۶ـ بردارهای $\vec{A} = i+2j+3k$ و $\vec{B} = -i+2j+k$ و $\vec{C} = 3i+j$ مفروض است. مقدار t را طوری پیدا کنید که بردار $\vec{A}+t\vec{B}$ بر بردار $\vec{C}$ عمود باشد. (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) $t=-5$ ۲) $t=5$ ۳) $t=1$ ۴) $t=-1$

۴۷ـ معادله صفحه‌ای که شامل محل تقاطع دو صفحه $3x-2y+4z=5$ و $2x+4y-z=7$ بوده و از نقطه $(2,1,2)$ بگذرد، کدام است؟
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۸۲)

۱) $17x+26y-3z+54=0$ ۲) $5x+2y+3z-18=0$
۳) $17x+26y-3z-54=0$ ۴) $13x+18y-z-42=0$

۴۸ـ اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$، به ازاء چه مقادیری از λ دترمینان ماتریس $A-\lambda I$ که $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ صفر می‌شود؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۱ و ۲ و ۳

۴۹ـ مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ عبارتند از: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ و ۰ ۲) -6 و ۱ ۳) ۶ و -1 ۴) ۶ و ۱

۵۰ـ حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار $a = 2i-j+k$، $b = -i-j-2k$ و $c = -i+j-k$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۱ـ اگر $a = i-j+2k$، $b = 2i+j-k$ در این صورت $Proj_b^a$ (تصویر a در امتداد b) عبارت است از: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{3}i-\frac{1}{6}j-\frac{1}{6}k$ ۲) $\frac{1}{3}i+\frac{1}{6}j-\frac{1}{6}k$ ۳) $-\frac{1}{3}i+\frac{1}{6}j+\frac{1}{6}k$ ۴) $-\frac{1}{3}i-\frac{1}{6}j+\frac{1}{6}k$

۵۲ـ فاصله دو صفحه موازی زیر را به دست آورید. (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

$$P_1 : x-y+2z+1=0$$
$$P_2 : 2x-2y+4z+6=0$$

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) ۱

۵۳ـ به ازای چه مقدار b بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} b & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد؟ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $b=1$ ۲) $b=2$ ۳) $b=-1$ ۴) $b=0$

۵۴ـ حاصل عبارت $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{12}$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

۵۵ـ به ازای کدام مقدار k ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix}$ می‌تواند متعامد باشد؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار

۵۶ـ زاویه امتدادهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\mathrm{Arctg}2$

۵۷ـ معادله خط گذرنده از مبدأ مختصات و موازی صفحه $x+y-z=0$ و عمود بر خط $x=2y=z+1$ از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟
(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۳)

۱) $(1,2,3)$ ۲) $(3,-2,1)$ ۳) $(3,-4,-1)$ ۴) $(-3,4,1)$

۵۸ـ معادلهٔ صفحه‌ای شامل خط $2x=2y-2=z$ و موازی نیمساز ربع اول و سوم در صفحه xy، کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $y-x=1$ ۲) $y=2x$ ۳) $y-x=-1$ ۴) $z-2x-2y=2$

۵۹ـ به ازای کدام مقدار m ماتریس $\begin{pmatrix} -1 & 2 & m+1 \\ 1 & 3 & 2m \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ وارون‌پذیر نیست؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۶۰ـ اگر دترمینان ماتریس A برابر ۲ باشد دترمینان ماتریس $2A+4(A^{-1})^2+A^4$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۱ـ ماتریس مرتبه سوم M غیر صفر فرض می‌شود که در آن درایه‌های ماتریس حقیقی هستند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

$$M=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \delta & \sigma\\ \gamma & \sigma & \mu\end{bmatrix}$$

۱) ماتریس مذکور مقادیر ویژهٔ حقیقی با سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.

۲) ماتریس مقادیر ویژه حقیقی دارد اما ممکن است تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی کمتر از ۳ باشد.

۳) یک مقدار ویژه حقیقی دارد اما ممکن است دو مقدار ویژه دیگر مزدوج مختلط یکدیگر باشند.

۴) با فرضهای مذکور در حالت کلی نمی‌توان درباره تعداد مقادیر ویژه حقیقی و نوع بردارهای ویژه اظهارنظر کرد.

۶۲ـ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{bmatrix}$، مقادیر ویژهٔ ماتریس A عبارتند از: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $0, 2, -2$ ۲) $0, 1, -1$ ۳) $2, -1, 1$ ۴) $2, 3, \frac{1}{2}$

۶۳ـ صفحه گذرنده بر خط به معادله $z=\frac{y+1}{-1}=\frac{x-1}{2}$ و نقطه (۱ و ۱ و ۲) محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۴ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ باشد، کدامیک از تساوی‌های زیر صحیح است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $A^2=7A-10I$ ۲) $A^2+7A+10I=0$ ۳) $A^2=5A+I$ ۴) $2A^2+5A+I=0$

۶۵ـ دو خط $\frac{z+4}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{x+5}{3}$, $\begin{cases}x+y-z+3=0\\ x-y-5z=0\end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) موازی‌اند. ۲) متنافرند.

۳) متقاطع و عمود بر هم‌اند. ۴) متقاطع‌اند اما عمود بر هم نیستند.

۶۶ـ اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ باشد در این صورت $-3AB$ کدا است؟

(مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 3 & -12\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}3 & 9\\ 3 & -12\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

۶۷ـ حاصل دترمینان زیر کدام است؟ (مهندسی صنایع(سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ مدیریت سیستم و بهره‌وری) ـ آزاد ۸۴)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}$$

۱) $(1+a)(1+b)(1+c)$ ۲) 1 ۳) صفر ۴) abc

۶۸ـ تابع خطی $f(x,y,z)=(x-y\ ,\ x-z\ ,\ 2x-y-z)$ مفروض است، معادله مشخصه ماتریس آن کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\lambda^3-\lambda=0$ ۲) $\lambda^2+\lambda=0$ ۳) $\lambda^3+\lambda^2-\lambda=0$ ۴) $\lambda^3-\lambda^2+\lambda=0$

۶۹ـ خط به معادله $\begin{cases}x+2y=1\\ 2y-z=2\end{cases}$ موازی صفحهٔ $x+my+(m-1)z=1$ است. m کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۰ـ به ازاء چه مقداری از k، دستگاه معادلات خطی زیر جواب غیر بدیهی دارد؟ $\begin{cases}2x+ky+z=0\\ (k-1)x-y+2z=0\\ 4x+y+4z=0\end{cases}$

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $k=1\ ,\ k=\frac{9}{4}$ ۲) $k=2\ ,\ k=\frac{9}{4}$ ۳) $k=0\ ,\ k=\frac{9}{4}$ ۴) $k=1\ ,\ k=\frac{2}{3}$

۷۱ـ اگر A یک ماتریس m در n، B یک ماتریس m در m ناتکین یا وارون‌پذیر باشد و C یک ماتریس $n\times n$ ناتکین باشد. کدام گزینه در مورد رتبهٔ ماتریس‌ها صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $r(AC)=r(BA)\neq r(A)$ ۲) $r(BAC)\neq r(AC)=r(BA)$

۳) $r(BAC)=r(AC)=r(BA)=r(A)$ ۴) $r(BAC)\neq r(AC)\neq r(A)$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱ـ گزینه «۲» نقطه $A(1,1,0)$ روی خط قرار دارد.

$$\overline{AB}=(-2,2,-1) \Rightarrow AB\times \vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,0,-4) \Rightarrow d=\frac{|\overline{AB}\times \vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{4+0+16}}{\sqrt{4+0+1}}=2$$

۲ـ گزینه «۴»

$$d=\frac{|6-(-9)|}{\sqrt{4^2+(-8)^2+(-1)^2}}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

۳ـ گزینه «۱» ماتریس A وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان A برابر صفر است از طرفی حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر دترمینان ماتریس می‌باشد، پس یکی از مقادیر ویژه برابر صفر است. از طرفی مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین:

$$1+0+\lambda_3=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_3=\frac{1}{4}$$

۴ـ گزینه «۲»

$$AX+B=X \Rightarrow X-AX=B \Rightarrow X(I-A)=B \Rightarrow X=(I-A)^{-1}B$$

۵ـ گزینه «۳»

۶ـ گزینه «۱» سطر اول و سطر چهارم ماتریس با هم برابرند، پس دترمینان ماتریس برابر صفر است.

۷ـ گزینه «۴» می‌دانیم فاصله نقطه دلخواه P_0 از خط d از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{فاصله}=\frac{|PP_0\times u|}{|u|}$$

که در آن P نقطه دلخواهی روی خط می‌باشد.

نقطه $P(3,1,-1)$ روی خط داده شده قرار دارد و $u(2,0,1)$ بردارهای خط می‌باشد، بنابراین:

$$PP_0=(-4,2,1) \Rightarrow PP_0\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,6,-4) \Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|PP_0\times u|}{|u|}=\frac{\sqrt{4+36+16}}{\sqrt{4+1}}=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{70}}{5}$$

۸ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. رئوس داده شده را به ترتیب A، B، C و D فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$AB=(1,-4,3)\ ,\ AC=(-3,-1,-1)\ ,\ AD=(-2,-2,2) \Rightarrow AB.(AC\times AD)=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-24$$

بنابراین حجم چهار وجهی موردنظر برابر است با:

$$V=\frac{1}{6}|AB.(AC\times AD)|=\frac{1}{6}\times 24=4$$

۹ـ گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس داده شده را به دست می‌آوریم:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)-4=\lambda^2-7\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=1,6$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+4y=x \\ x+2y=y \end{cases} \Rightarrow y=-x$$

بنابراین (۱- و ۱) و هر مضربی از آن یک بردار ویژه ماتریس مزبور می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین:

$$1+1+1=5-5+a \Rightarrow a=3$$

۱۱ـ گزینه «۴» به سادگی می‌توان نشان داد $|A|=-3$. برای محاسبه درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A^{-1}، لازم است همسازه درایه a_{23} ماتریس A را به دست آوریم.

$$a_{23}\ \text{همسازه درایه}=(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5 \Rightarrow A^{-1}\ \text{در}\ a_{32}\ \text{درایه}=\frac{-5}{|A|}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

۱۲ـ گزینه «۳» در متن درس حل شده است.

۱۳ـ گزینه «۳»

$$\vec{A}=2i-j+2k \Rightarrow |\vec{A}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

چون طول بردار A برابر ۳ است، پس بردار موردنظر $3A$ خواهد بود.

۱۴ـ گزینه «۳»

$$1\times(x-1)-1\times(y-2)+3(z-3)=0 \Rightarrow x-y+3z=8$$

۱۵ـ گزینه «۲»

$$(A+B)'=A'+B'=A+B$$

۱۶ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $|A|=1$، بنابراین $|A^{100}|=|A|^{100}=1$ و تنها گزینه‌ای که دترمینان آن برابر ۱ می‌باشد، گزینه (۳) است.

۱۷ـ گزینه «۴»

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)-3=\lambda^2-6\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=1,5$$

۱۸ـ گزینه «۳»

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-10)+54=\lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=1,4$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس قطری موردنظر همان مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند، بنابراین:

$$D=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹ـ گزینه «۱» چون $\det A<0$، بنابراین A نمی‌تواند معین مثبت باشد.

۲۰ـ گزینه «۲»

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\dots$$

۲۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان ماتریس است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2+\lambda_2+\lambda_3=3+5+3 \\ 2\lambda_2\lambda_3=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=9 \\ \lambda_2\lambda_3=18 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2=3\ ,\ \lambda_3=6$$

۲۲ـ گزینه «۲» به ازای $x=2$، سطر اول و دوم با هم برابر می‌شوند و بنابراین دترمینان برابر صفر خواهد بود. به ازای $x=-3$ سطر اول و سوم با هم برابر می‌شوند و بنابراین دترمینان صفر خواهد بود.

۲۳ـ گزینه «۱»

$$AX=\lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow y=-x\ ,\ z=-2x$$

پس بردار ویژه $(x,-x,-2x)$ و یا $x(1,-1,-2)$ خواهد بود.

۲۴ـ گزینه «۳» چون ماتریس بالا مثلثی است پس دترمینان آن حاصل‌ضرب قطر اصلی خواهد بود، یعنی $|A|=8$. برای محاسبه درایه a_{12} در ماتریس A^{-1}، لازم است همسازه درایه a_{21} در ماتریس A را به دست آوریم.

$$a_{21}\ \text{همسازه درایه}=(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \Rightarrow A^{-1}\ \text{در}\ a_{21}\ \text{درایه}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

۲۵ـ گزینه «۳» برای به دست آوردن بردار عمود بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$، کافی است $\vec{A}\times\vec{B}$ را به دست آوریم.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-i+2j+2k \Rightarrow \vec{N}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\frac{1}{3}(-1,2,2)$$

۲۶ـ گزینه «۲»

$$B \text{ بر } A \text{ تصویر} =\frac{A.B}{|B|^2}B=\frac{-2-2+6}{4+1+4}(2i-j+2k)=\frac{4}{9}i-\frac{2}{9}j+\frac{4}{9}k$$

۲۷ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 4x+y+3z=2 \\ 2x-2y-z=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{جمع دو برابر معادله (۲) با (۳)}]{\text{جمع معادله (۱) و (۲)}} \begin{cases} 6x+4z=3 \\ 10x+5z=5 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\,,\ z=0$$

۲۸ـ گزینه «۲» دو سطر اول و دوم مستقل می‌باشند. سطر سوم برابر دو برابر سطر دوم منهای سطر اول است، و سطر چهارم برابر سه برابر سطر دوم منهای دو برابر سطر اول می‌باشد. (می‌توانیم از عملیات سطری پلکانی نیز استفاده کنیم.)

۲۹ـ گزینه «۳» از عملیات سطری پلکانی استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 6 & -7 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۰ـ گزینه «۲» سه صفحه نقطه مشترکی ندارند، هرگاه دستگاه مقابل جواب نداشته باشد و برای اینکه دستگاه جواب نداشته باشد، لازم است دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+5y+2z=7 \\ 2x+7y+az=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=5$$

۳۱ـ گزینه «۴» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردار هادی خط L و بردار نرمال صفحه می‌باشد. بنابراین:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(\frac{-5}{2},\frac{3}{2},2)=\frac{1}{2}(-5,3,4)$$

برای به دست آوردن نقطه P دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+3y-z+4=0 \\ y-2z=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow y=2z\,,\ x=2z+3 \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله اول}} 2z+3+6z-z+4=0$$

$$\Rightarrow z=-1\,,\ y=-2\,,\ x=1 \Rightarrow P(1,-2,-1)$$

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت روبرو است: $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4}$

۳۲ـ گزینه «۴»

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=a+2 \Rightarrow |A^2|=|A|^2=(a+2)^2=9 \Rightarrow a=1\ ,\ -5$$

۳۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. می‌دانیم فاصله بین دو خط متنافر که نقاط A و B روی آنها قرار دارند u_1 و u_2 بردارهای هادی آنها می‌باشند، از فرمول روبرو به دست می‌آید: $d=\frac{|AB.(u_1\times u_2)|}{|u_1\times u_2|}$

$$u_1\times u_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(3,0,-3)\quad,\quad AB=(1,1,3) \Rightarrow d=\frac{|3\times1+0\times1-3\times3|}{\sqrt{9+0+9}}=\frac{6}{\sqrt{18}}=\sqrt{2}$$

۳۴ـ گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه $tr(A)$ می‌باشد و چون $tr(A)=3$، پس تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۳۵ـ گزینه «۲» و «۳»

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}=2(\vec{i}-\vec{j})$$

بردار $2\vec{i}-2\vec{j}$ و هر مضربی از آن پاسخ مسأله می‌باشد.

۳۶ـ گزینه «۱»

۳۷ـ گزینه «۴» حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، بر دو بردار اولیه عمود است، بنابراین:

$$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-8i+10j+14k$$

۳۸ـ گزینه «۴» از $a.(b\times c)=0$ نتیجه می‌شود سه بردار هم صفحه‌اند و چون b و c طبق فرض غیرموازی‌اند پس یک صفحه از آنها عبور می‌کند و چون a در همان صفحه قرار دارد پس با صفحه حاصل از آنها موازی است.

۳۹ـ گزینه «۳» دو خط موازی نیستند زیر بردارهای هادی آنها با هم موازی نیست.

حال به بررسی متقاطع یا متنافر بودن دو خط می‌پردازیم. اگر دو خط متقاطع باشند، لازم است دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} z=1 \\ 2x+y=2 \\ x+2y=-1 \\ 3y+z=1 \xrightarrow{z=1} y=0 \Rightarrow x=1\,,\ x=-1 \end{cases}$$

چون دو مقدار مختلف برای x به دست می‌آید، پس نقطه تقاطع وجود ندارد.

۴۰ـ گزینه «۴» در ماتریسهای بالا مثلثی یا پایین مثلثی، درایه‌های قطر اصلی مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

۴۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد. بنابراین:

$$1+2+\lambda_3=-2+5-1 \Rightarrow \lambda_3=-1$$

۴۲ـ گزینه «۴»

۴۳ـ گزینه «۳» با کمی دقت به معادلات سه صفحه می‌توان متوجه شد که $x+z=2$، از جمع معادلات دو صفحهٔ اول به دست آمده است. پس این صفحه در فصل مشترک دو صفحه اول که یک خط است قرار دارد.

۴۴ـ گزینه «۲» با کمی دقت می‌توان ملاحظه کرد که ستون چهارم ماتریس مضرب ستون اول ماتریس است، پس دترمینان برابر صفر می‌شود.

۴۵ـ گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+x_2=0\end{cases}$$

از دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $x_2=-x_1$ و $x_3=-2x_1$. بنابراین $(c,-c,-2c)$ بردار ویژه مربوطه می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶ـ گزینه «۲» $\vec{A}+t\vec{B}=(1-t,2+2t,3+t)\Rightarrow(\vec{A}+t\vec{B}).\vec{C}=3-3t+2+2t=0$

که از معادله فوق $t=5$ به دست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۷ـ گزینه «۳» نقطه $(1-,0,3)$ در محل تلاقی دو صفحه قرار دارد، در بین گزینه‌های تنها گزینه‌ای که نقطه $(1,0,3)$ درآن صدق می‌کند، گزینه (۳) می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۸ـ گزینه «۱»

روش اول: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)=0\Rightarrow\lambda=1,2$

روش دوم: در ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی مقادیر ویژه همان درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس می‌باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۴» $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)-4=\lambda^2-7\lambda+6=0\Rightarrow\lambda=1,6$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «۱» $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=3$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۴» $Proj_b a=(\frac{a.b}{|b|^2})\vec{b}=(\frac{2\times1+1\times(-1)-1\times2}{2^2+1^2+(-1)^2})(2,1,-1)=(\frac{-1}{3},\frac{-1}{6},\frac{1}{6})$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۳» $P_1: x-y+2z+1=0\ ,\ P_2: x-y+2z+3=0$

$$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۲»

$$AX=\lambda X\Rightarrow\begin{bmatrix}b & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}b-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ 0\\ -\lambda\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود $\lambda=1$ و بنابراین $b=2$.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۱» ماتریس داده شده ماتریس وارون به اندازه $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^{12}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}^{12}=\begin{bmatrix}\cos3\pi & -\sin3\pi\\ \sin3\pi & \cos3\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

یادآوری: ماتریس دوران به اندازهٔ θ از فرمول $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ به دست می‌آید و داریم: $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۵ـ گزینه «۴» حاصل‌ضرب داخلی ستون دوم و ستون سوم ماتریس داده شده برابر ۲- است. پس این ماتریس متعامد نیست.

یادآوری: ماتریس A را متعامد می‌گوییم هرگاه $A^T=A^{-1}$. در ماتریس متعامد ستونها دو به دو بر هم عمودند و دارای طول واحد می‌باشند. همچنین در ماتریس متعامد $|A|=\pm1$.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۶ـ گزینه «۳» چون ماتریس A متقارن می‌باشد، لذا بردارهای ویژه بر هم عمودند.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۷ـ گزینه «۳» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط داده شده می‌باشد. بنابراین:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=(\frac{3}{2},-2,\frac{-1}{2})$$

در نتیجه معادله خط موردنظر به صورت روبرو می‌باشد: $\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{\frac{-1}{2}}\Rightarrow\frac{2x}{3}=\frac{y}{-2}=-2z$

می‌توان ملاحظه کرد نقطه (۱- و ۴- و ۳+) در معادله فوق صدق می‌کند.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸ـ گزینه «۱» نقطه $(0,1,0)$ روی خط داده شده قرار دارد، بنابراین بایستی روی صفحه موردنظر نیز باشد. تنها گزینه‌ای نقطه $(0,1,0)$ در آن صدق می‌کند، گزینه (۱) می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹ـ گزینه «۲» باید دترمینان ماتریس برابر صفر باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۰ـ هیچ‌کدام از گزینه صحیح نیست. به چند دلیل مسأله اشکال دارد. اول اینکه تعداد سطر و ستونهای ماتریس A داده نشده، ثانیاً دترمینان جمع و تفریق چند ماتریس را نمی‌توان برحسب دترمینان خود آن ماتریسها پیدا کرد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱ـ گزینه «۱» ماتریس M یک ماتریس متقارن می‌باشد، بنابراین سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۲ـ گزینه «۱» برای محاسبه دترمینان، حول ستون اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 3 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -3 & 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-2-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)-4)-3\underbrace{(3-(1-\lambda))}_{2+\lambda}=0$$

$$\Rightarrow(-2-\lambda)((1-\lambda)^2-1)=0\Rightarrow\lambda=-2\ ,\ 2\ ,\ 0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۳ـ گزینه «۴» نقطه $A(1,-1,0)$ روی خط داده شده قرار دارد و بنابراین روی صفحه موردنظر قرار دارد از طرفی نقطه $B(2,1,1)$ نیز طبق فرض روی صفحه موردنظر واقع است، بنابراین بردار $\overline{AB}=(1,2,1)$ روی صفحه قرار دارد. از طرفی بردار هادی خط داده شده یعنی $\vec{V}(2,-1,1)$ نیز در صفحه واقع است. بنابراین بردار نرمال صفحه برابر است با:

$$\vec{N}=AB\times V=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3i+j-5k$$

پس معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $3(x-2)+1\times(y-1)-5(z-1)=0\Rightarrow3x+y-5z=2$

در نقطه تقاطع با محور xها، $y=z=0$ بنابراین $x=\frac{2}{3}$.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۴ـ گزینه «۱» طبق قضیه کیلی ـ همیلتون، هر ماتریس در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند. بنابراین:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)=\lambda^2-7\lambda+10=0\Rightarrow A^2-7A+10I=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم بردار هادی خط حاصل از تقاطع دو صفحه برابر حاصل‌ضرب بردار نرمال آن دو صفحه می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x+y-z+3=0 \Rightarrow N(1,1,-1) \\ x-y-5z=0 \Rightarrow N'(1,-1,-5) \end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی خط } \vec{V}=\vec{N}\times\vec{N}'=(-6,4,-2)$$

چون بردار $(-6,4,-2)$ مضربی از بردار $(+3,-2,1)$ می‌باشد، پس دو خط موازیند.

۶۶ـ گزینه «۱» نیازی به به دست آوردن ماتریس‌های A، B نمی‌باشد. توجه کنید که $|A^{-1}|=1$, $|B^{-1}|=-1$. بنابراین $|A|=1$ و $|B|=-1$.

در نتیجه: $|-3AB|=9|A||B|=9\times1\times-1=-9$

در بین گزینه‌ها، تنها دترمینان ماتریس گزینه (۱) برابر ۹- می‌باشد.

۶۷ـ گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 1\times a\times b\times c = abc$$

۶۸ـ گزینه «۱» ماتریس تبدیل خطی داده شده به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3+\lambda=0$$

۶۹ـ گزینه «۲» برای اینکه خط موازی صفحه باشد، باید بردار هادی خط بر بردار نرمال صفحه عمود باشد.

$\vec{u}=(-2,1,2)$, $\vec{N}=(1,m,m-1)$

$\vec{u}.\vec{N}=0 \Rightarrow -2+m+2(m-1)=0 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$

۷۰ـ گزینه «۱»

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4k^2-13k+9=0 \Rightarrow k=1 \text{ , } k=\frac{9}{4}$$

۷۱ـ گزینه «۳»

تست‌های تکمیلی فصل پنجم

۱ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $[x \;\; 4 \;\; -1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}=0$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۶ ۴) ۶-

۲ـ کدامیک از روابط زیر برقرار است؟

۱) $(A'-A)'=A'-A$ ۲) $(ABA')=A'B'A$

۳) $(AB'+A'B)'=BA'+B'A$ ۴) هیچکدام

۳ـ حاصل $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+t) \\ \sin y & \cos y & \sin(y+t) \\ \sin z & \cos z & \sin(z+t) \end{vmatrix}$ **کدام است؟**

۱) $\sin(x+y+z)$ ۲) $\sin t$ ۳) $\sin x \sin y \sin z \sin t$ ۴) 0

۴ـ کدام رابطه بین a، b و c برقرار باشد، تا دستگاه زیر جواب غیر بدیهی داشته باشد؟

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ bx+cy+az=0 \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

۱) $a+b+c=0$ ۲) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

۳) $a^3+b^3+c^3=3abc$ ۴) $abc=0$

۵ـ به ازای چه مقدار m بردار $(1,0,-1)$ یک بردار ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **می‌باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

۶ـ رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 3 & 10 \\ 15 & 12 & 4 & 16 \end{bmatrix}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷ـ مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} -9 & -3 & -1 \\ 18 & 5 & 0 \\ -7 & m & 0 \end{bmatrix}$ **با هم برابرند، m چقدر است؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

۸ـ مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **کدامند؟**

۱) ۲-، ۱، ۵ ۲) ۱، ۲، ۵ ۳) ۱-، ۲، ۵ ۴) ۵-، ۲-، ۱-

۹ـ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **کدام است؟**

۱) ۳۵ ۲) ۳۵- ۳) ۳۶ ۴) ۳۶-

۱۰ـ کدام ماتریس زیر پادمتقارن است؟

۱) AA' ۲) $A'+A$ ۳) $A'-A$ ۴) هیچکدام

۱۱ـ مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) ۵، ۲، ۱ ۲) ۵، ۲، ۰ ۳) ۳، ۱، ۰ ۴) ۵، ۱، ۰

۱۲ـ اگر ۲-، ۱- و ۲ مقادیر ویژه ماتریس $A_{3\times3}$ باشد، مقادیر ویژه ماتریس A^2+A کدام است؟

۱) ۱-، ۲، ۱ ۲) ۰، ۶، ۲ ۳) ۶، ۲، ۱ ۴) قابل محاسبه نیست.

۱۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، در این صورت A^3-5A^2-3A برابر است با:

۱) $-A$ ۲) A ۳) I ۴) $-2A$

۱۴ـ فاصله نقطه $P(1,-1,2)$ از صفحه $2x-y+2z=3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۵ـ اگر $\vec a$ و $\vec b$ دو بردار باشند، آنگاه $|\vec a+\vec b|^2+|\vec a-\vec b|^2$ برابر است با:

۱) $|\vec a|^2+|\vec b|^2$ ۲) $2(|\vec a|^2+|\vec b|^2)$ ۳) $|\vec a\times\vec b|^2+|\vec a.\vec b|^2$ ۴) $(|\vec a|\times|\vec b|)^2$

۱۶ـ اگر زاویه بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$، 70° باشد، بردار $\vec V=|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b$ با دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) 20° ۲) 35° ۳) 110° ۴) 90°

۱۷ـ برای یک ماتریس متقارن حقیقی:

۱) در صورت وجود ریشه‌های تکراری، بردارهای ویژه از هم مستقل خواهند بود.
۲) مقادیر ویژه گاهی حقیقی بوده ولی بردارهای ویژه متعادلند.
۳) مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامدند.
۴) مقادیر ویژه مخالف صفرند.

۱۸ـ دو صفحه $2x+y-z=1$ و $x+2y+z=1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) با هم موازیند. ۲) بر هم عمودند.
۳) یکدیگر را در زاویه 45° قطع می‌کنند. ۴) یکدیگر را در زاویه 60° قطع می‌کنند.

۱۹ـ خط به معادله $\frac{z-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{x-1}{2}$ صفحه $x+y+z=15$ را در نقطه $P(a,b,c)$ قطع کرده است، مقدار a کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰ـ خط به معادلات $\frac{3z+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{2x-1}{3}$ نسبت به صفحه $4x+4y-21z=1$ چه وضعیتی دارد؟

۱) در صفحه ۲) عمود بر صفحه ۳) موازی صفحه ۴) زاویه آن با صفحه $\frac{\pi}{3}$

۲۱ـ سه صفحه $x+y-z-2=0$ ، $x-y+z+3=0$ و $2x+1=0$ چگونه‌اند؟

۱) دارای خطی مشترک هستند. ۲) هر سه صفحه موازیند.
۳) در یک نقطه متناوب هستند. ۴) صفحه سوم عمود بر دو صفحه دیگر است.

۲۲ـ حاصل $(\vec A+\vec B).(\vec A\times\vec B)$ برابر است با:

۱) $|\vec A|^2+|\vec B|^2$ ۲) 0 ۳) $\vec 0$ ۴) $2\vec A.\vec B$

۲۳ـ فرض کنید $(\vec A\times\vec B)\times\vec C=\vec 0$ و $\vec A.\vec B=0$ و $\vec B.\vec B=4$، در این صورت مقدار $\vec A.\vec C$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۰

۲۴ـ کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

۱) دو ماتریس متشابه‌اند اگر و فقط اگر مقادیر ویژه یکسان داشته باشند.
۲) مجموع دو بردار ویژه یک بردار ویژه است.
۳) هر ماتریس حقیقی $A_{5\times5}$ حداقل یک مقدار ویژه حقیقی دارد.
۴) هیچکدام

۲۵ـ اگر v یک فضای برداری با بعد n باشد، آنگاه:

۱) هر زیر مجموعه از v با n بردار، وابسته خطی است. ۲) هر زیر مجموعه از v با $(n+1)$ بردار، وابسته خطی است.
۳) هر زیر مجموعه از v با $(n-1)$ بردار، مستقل خطی است. ۴) هر زیر مجموعه مستقل خطی از v ، n بردار دارد.

۲۶ـ اگر $\vec A$ ، $\vec B$ ، $\vec C$ و $\vec D$ چهار بردار هم‌صفحه باشند، آنگاه:

۱) $(\vec A\times\vec B).(\vec C\times\vec D)=0$ ۲) $(\vec A\times\vec B)\times(\vec C\times\vec D)=\vec 0$ ۳) $(\vec A+\vec B)\times(\vec C\times\vec D)=\vec 0$ ۴) هیچکدام

۲۷ـ اگر $|\vec a|=2$ و $|\vec b|=3$ باشد، حاصل $|\vec a.\vec b|^2+|\vec a\times\vec b|^2$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۱۳ ۴) ۱۸

۲۸ـ صفحات $2x+y+az=0$ و $-x+by-z+1=0$ با یکدیگر موازیند. a^2+2b کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۹ـ به ازای کدام مقدار k دو صفحه $kx+3y+z=0$ و $3x+ky-k^2z=1$ بر هم عمودند؟

۱) ۳ و ۶ ۲) ۰ و ۳ ۳) ۶ و ۰ ۴) ۶ و ۶-

۳۰ـ اگر بردارهای $a=(3,2p+5,1)$ و $b=(m-1,m+p-1,m+n)$ برابر باشد. $\frac{mn}{p}$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۱ـ معادله صفحه‌ای که از خط $\frac{z-4}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{x-1}{3}$ بگذرد و موازی $\frac{z+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{x+1}{2}$ باشد کدام است؟

۱) $9x-7y+6z=98$ ۲) $6x-7y+16z=9$ ۳) $6x+7y+16z=98$ ۴) $6x+7y+6z=9$

۳۲ـ بردارهای $\vec V_1(0,0,a)$ و $\vec V2(0,1,2)$ و $\vec V_3(1,2,3)$:

۱) به ازاء $a\neq0$ مستقل خطی هستند. ۲) همواره مستقل خطی هستند.
۳) همواره وابسته خطی‌اند. ۴) به ازاء $a\neq0$ وابسته خطی هستند.

۳۳ـ اگر $\vec V_1=2i+3j+k$ و $\vec V_2=i-j+k$ حاصل $\frac{|V_1-2V_2|}{|V_1+2V_2|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۴ـ اگر $\vec a=2\vec i+3\vec j+\vec k$ و $\vec b=\vec i-\vec j+\vec k$ آنگاه کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec a-\vec b$ و $\vec b$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{\frac{3}{17}}$ ۲) $-\sqrt{\frac{5}{17}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{17}}$ ۴) $\sqrt{\frac{5}{17}}$

۳۵ـ معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1,-1,1)$ بگذرد و با صفحه $2x+3y+z=4$ موازی باشد، کدام است؟

۱) $2x+3y+z=0$ ۲) $3x+2y+z=0$ ۳) $2x+3y+z=1$ ۴) $3x+y+2z=4$

۳۶ـ اندازه حاصلضرب داخلی دو بردار با اندازه حاصلضرب خارجی این دو بردار برابر است، زاویه این دو بردار چند درجه است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۳۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{7}$

۳۸ـ معکوس کدامیک از چهار ماتریس زیر وجود ندارد؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

۳۹ـ درایه واقع در سطر سوم و ستون اول از معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&3\\2&8&6\end{bmatrix}$ کدام است ؟

۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) صفر ۴) A معکوس ندارد.

۴۰ـ جوابهای معادله $\begin{vmatrix}x^2&x&1\\4&2&1\\9&-3&1\end{vmatrix}=0$ کدام است ؟

۱) ۲ و ۱- ۲) ۳- و ۲ ۳) ۳- و ۱ ۴) هیچکدام

۴۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\m&1\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\-6&a_{22}\end{bmatrix}$ ، m کدامست ؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۲

۴۲ـ اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1&0&a\\-1&1&0\\1&1&-a\end{vmatrix}$ برابر ۶ باشد، a کدامست ؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-1&2\\1&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}7&1\\3&2\end{bmatrix}$ حاصل $|A+B|+2|A.B|$ کدام است ؟

۱) ۱۹- ۲) ۹۱ ۳) ۷۷- ۴) ۱۰۵

۴۴ـ اگر ماتریس $\begin{bmatrix}0&m+2&2\\3m+2&m^2-1&5\\-2&-5&0\end{bmatrix}$ پاد متقارن باشد مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر است ؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴- ۴) ۵-

۴۵ـ جوابهای معادله $[x\ 1]\begin{bmatrix}-1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$ کدامند ؟

۱) ۳- و ۱- ۲) ۳- و ۱ ۳) ۳ و ۱- ۴) ۳ و ۱

۴۶ـ به ازای کدام مقادیر m دستگاه معادلات $\begin{cases}mx+y+2z=0\\x+2y+mz=0\\x-y-2z=0\end{cases}$ جواب غیرصفر دارد ؟

۱) ۴- و ۱- ۲) ۴- و ۱ ۳) ۴ و ۱- ۴) ۴ و ۱

۴۷ـ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&4\\-4&-3\end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس AA^T+A^TA کدامست ؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۶۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۶۰۰

۴۸ـ به ازای چه مقدار x حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1&x&-1&2\\1&x^2&1&-4\\2&2x&-2&4\\-1&-x&1&-2\end{vmatrix}$ صفر است ؟

۱) بی‌شمار ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۴۹ـ اگر $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&2&0\\5&0&1\end{bmatrix}$ درایه سطر اول و ستون سوم از ماتریس A^{-1} کدام است ؟

۱) ۲- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۰ـ در دترمینان $A=\begin{bmatrix}-2&3&a\\0&1&5\\1&b&-1\end{bmatrix}$ مجموع همسازهٔ درایه‌های a و b کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱- ۴) ۴-

۵۱ـ اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}x&0&0\\1&x^2&0\\0&-1&x^2\end{bmatrix}$ برابر ۶۴ باشد، مقدار x کدام است ؟

۱) ± 2 ۲) ± 4 ۳) -3 ۴) ± 8

۵۲ـ اگر $i^2=-1$ و $A=\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}$ آنگاه A^{22} کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-i&0\\0&-i\end{bmatrix}$

۵۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-3&5\\2&-3\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A(A^{-1}-I)$ کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix}4&-5\\-2&4\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}4&-5\\2&-2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2&-5\\1&-3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}2&-3\\1&-4\end{bmatrix}$

۵۴ـ نقطه $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در صفحه مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم، مختصات جدید A کدام است؟

۱) $A(2,0)$ ۲) $A(0,2)$ ۳) $A(2,2)$ ۴) $A(1,\sqrt{2})$

۵۵ـ اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1&2&4\\a&b&1\\2&5&1\end{vmatrix}$ برابر D باشد آنگاه حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1&2&4\\2&5&1\\a&b&-1\end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $-D-2$ ۲) $2-D$ ۳) $D-1$ ۴) $D+1$

آن‌قدر شکست خوردم، تا راه شکست دادن را آموختم. «ناپلئون بناپارت»

اراده بطورطبیعی و خودبه خود تکمیل می‌شود، به‌شرط آنکه تعلیم و تربیت غلط سد راه آن نگردد. «فیثاغورث»

آزمون (۱)

تعداد سئوالات : ۱۰	مدت زمان پیشنهادی : ۱۵ دقیقه	سطح آزمون : C

۱ـ در مورد نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+y^2+6x+12$ کدام عبارت صحیح است؟

۱) تابع در نقطه $(-3,0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
۲) تابع در نقطه $(-3,0)$ می‌نیممی برابر ۳ دارد.
۳) تابع در نقطه $(0,-3)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
۴) تابع در نقطه $(3,0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.

۲ـ حاصل انتگرال $\int^{1}\int^{1}\int^{x}(x-2y+z)dzdydx$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۳ـ مقدار $\int^{1}\int_{e^x}^{e}\frac{dydx}{Lny}$ برابر است با:

۱) e ۲) 1 ۳) $e-1$ ۴) $\frac{1}{e}$

۴ـ انتگرال $\int^{1}\int^{x}xy^2dydx$ با کدامیک از انتگرالهای زیر برابر می‌باشد؟

۱) $\int_0^1\int_0^y xy^2dxdy$ ۲) $\int_0^1\int_y^1 xy^2dxdy$ ۳) $\int^1\int_{1-y}^{y} xy^2dxdy$ ۴) هیچکدام

۵ـ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$، در این صورت کدام گزاره زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) f در مبدأ پیوسته است.
۲) $f_x(0,0)$ موجود می‌باشد.
۳) f در کلیه نقاط (x,y) پیوسته است.
۴) f_x در مبدأ پیوسته است.

۶ـ معادله صفحه مماس بر سطحی به معادله $4z=x^2+y^2$ در نقطه $(2,-4,5)$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $x+2y-z=-11$ ۲) $2x-2y-2z=-3$ ۳) $2x+2y-z=-9$ ۴) $x-2y-z=5$

۷ـ کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^2+4y^2-8x+16y$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -16 ۳) -24 ۴) -32

۸ـ معادله $x^2-xy-xz+yz=0$ بیانگر چه سطحی می‌باشد؟

۱) مخروط ۲) هذلولی‌گون ۳) سهمیگون ۴) دو صفحه

۹ـ رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{bmatrix}$ چقدر است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 4

۱۰ـ معادله یکی از نیمسازهای زوایای بین دو خط $x+y=5$ و $7x-y=19$ کدام است؟

۱) $3x-y=11$ ۲) $3x+y=11$ ۳) $-3x+y=11$ ۴) $-3x-y=11$

آزمون (۲)

تعداد سئوالات : ۱۰	مدت زمان پیشنهادی : ۱۵ دقیقه	سطح آزمون : C

۱ـ مقدار خمیدگی کاردیوئید $r=a(1-\cos\theta)$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2\sqrt{2ar}}$ ۲) $\frac{2}{3r\sqrt{a}}$ ۳) $\frac{3}{2r\sqrt{a}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{2ar}}$

۲ـ کوتاهترین فاصله روی منحنی $x^2y=16$ تا مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۳ـ مقدار انتگرال شارش $F=\nabla(xy^2z^3)$ روی پاره‌خط بین $(1,1,1)$ و $(2,1,-1)$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۴ـ اگر $x=e^s\cos t, y=e^s\sin t$ و $z=u(x,y)=v(s,t)$، آنگاه $\frac{\partial^2z}{\partial s^2}+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}$ برابر است با:

۱) $xy\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$ ۲) $x^2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$ ۳) $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$ ۴) $(x^2+y^2)(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2})$

۵ـ حاصل $\iiint_R(x^2+y^2)dV$ روی مکعب $0\leq x, y, z\leq 1$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۶ـ معادله صفحه گذرا از فصل مشترک صفحات $x+3y+5z=4$ و $x-y-2z+7=0$ که موازی محور yها باشد، کدام است؟

۱) $z+4x=23$ ۲) $2z-4x=15$ ۳) $z-4x=17$ ۴) $2z+x=19$

۷ـ معادله $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$ چه نوع سطحی را مشخص می‌سازد؟

۱) هذلولی‌گون ۲) سهمی‌گون هذلولوی ۳) دو صفحه ۴) هیچکدام

۸ـ بردار مماس بر منحنی محل تلاقی صفحهٔ $x+y+z=6$ و کره $x^2+y^2+z^2=14$ در نقطه $(1,2,3)$ کدام است؟

۱) $(1,-2,1)$ ۲) $(2,1,-1)$ ۳) $(2,1,1)$ ۴) $(0,-2,1)$

۹ـ مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار $a=6i+3j-2k$ و $b=3i-2j+6k$ چقدر است؟

۱) 49 ۲) 26 ۳) 98 ۴) 52

۱۰ـ ماکزیمم حجم یک مکعب مستطیل داخل بیضی‌گون به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ کدام است؟

۱) $\frac{8abc}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{4abc}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{4abc}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

آزمون (۳)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: B

۱ـ معادله $x^2+y^2+4z^2-2xy-8z+5=0$ چه نوع سطحی را مشخص می‌کند؟

۱) سهمی‌گون ۲) بیضی‌گون ۳) مخروط ۴) هیچکدام

۲ـ انتگرال $\int_0^2\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x}\phi(x,y)dydx$ با کدامیک از موارد زیر برابر است؟

۱) $\int_0^1\int_0^{2\sqrt{y}}\phi(x,y)dxdy+\int_1^3\int_{2\sqrt{y}}^{3-y}\phi(x,y)dxdy$

۲) $\int_0^1\int_0^{2\sqrt{y}}\phi(x,y)dxdy+\int_1^3\int_0^{3-y}\phi(x,y)dxdy$

۳) $\int_0^1\int_0^{2\sqrt{y}}\phi(x,y)dxdy+\int_1^3\int_1^{3-y}\phi(x,y)dxdy$

۴) هیچکدام

۳ـ مقدار $\iint_S zdS$ بر رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از $z=0$ تا $z=1$ چقدر است؟

۱) π ۲) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

۴ـ جرم ناحیه محصور مابین $y=x^2$ و $x=y^2$ در صورتیکه چگالی در نقطه (x,y) برابر $\rho=x^2+y^2$ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{19}{105}$ ۲) $\frac{17}{105}$ ۳) $\frac{29}{105}$ ۴) $\frac{23}{105}$

۵ـ حجم ناحیه محصور مابین رویه $x^2+\frac{y^2}{4}+z=1$ و صفحه $z=0$ چقدر است؟

۱) π ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۶ـ مساحت محصور مابین دو منحنی $x+y=1$ و $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۷ـ اگر مؤلفه قائم شتاب یک ذره در حال حرکت صفر باشد، کدام گزاره زیر در مورد آن صحیح است؟

۱) سرعت ذره ثابت است. ۲) مسیر حرکت ذره خط راست است.

۳) مسیر حرکت ذره روی یک دایره واقع است. ۴) سرعت ذره برابر صفر است.

۸ـ حاصل انتگرال $\int_{(0,1,1)}^{(2,2,1)}(3x^2dx+\frac{z^2}{y}dy+2zLnydz)$ چقدر است؟

۱) $4+Ln2$ ۲) $4+2Ln2$ ۳) $8+2Ln2$ ۴) $8+Ln2$

۹ـ فاصله دورترین نقطه منحنی $17x^2+12xy+8y^2=100$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۰ـ مختصات نقطه برخورد میانه‌های مثلث با رئوس $A(-2,-4)$، $B(2,8)$ و $C(-3,2)$ کدام است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $(1,-2)$ ۳) $(-1,-2)$ ۴) $(1,2)$

آزمون (۴)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: B

۱ـ معادلات $\begin{cases}x=u^2-uv\\y=3uv+2v^2\end{cases}$، (u,v) را به عنوان توابعی از (x,y) در همسایگی نقطه $(u,v,x,y)=(-1,2,1,2)$ معرفی می‌کنند.

مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ در نقطه مزبور چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۷ ۴) ۷-

۲ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta+\phi)d\theta d\phi$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳ـ مقدار $\iint_D(x+y)^2dxdy$ که در آن D ناحیه درون بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد، چقدر است؟

۱) $\pi ab(a^2+b^2)$ ۲) $\frac{\pi ab}{2}(a^2+b^2)$ ۳) $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$ ۴) $2\pi ab(a^2+b^2)$

۴ـ اگر $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر از r در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار $\nabla f(r)$ کدام است؟

۱) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r^2}$ ۲) $f(r).\frac{\vec{r}}{r}$ ۳) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r^3}$ ۴) $f'(r).\frac{\vec{r}}{r}$

۵ـ تابِ منحنی $r(t)=\sin t\cos t\vec{i}+\sin^2 t\vec{j}+\cos t\vec{k}$ در $t=\frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{2\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{6\sqrt{2}}{2}$

۶ـ مکان حرکت ذره‌ای به صورت $R(t)=(\cos t+t\sin t)\vec{i}+(\sin t-t\cos t)\vec{j}$ می‌باشد، مؤلفه عددی قائم شتاب ذره کدام است؟

۱) t ۲) t^2 ۳) $t+1$ ۴) t^2+1

۷ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=xi+yj+zk$ روی خم $R(t)=\cos ti+\sin tj+3tk$ در فاصله $0\le t\le 2\pi$ چقدر است؟

۱) $4\pi^2$ ۲) $6\pi^2$ ۳) $9\pi^2$ ۴) $18\pi^2$

۸ـ در ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A^{10} کدام است؟

۱) 2^{10} ۲) 2^{11} ۳) 2^{12} ۴) 2^9

۹ـ معادله $r^2+z^2=4r\cos\theta+6r\sin\theta+2z$، معادلهٔ .... در مختصات استوانه‌ای می‌باشد.

۱) بیضی‌گون ۲) سهمی‌گون ۳) کره ۴) هذلولی‌گون

۱۰ـ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ در صورتی که $z=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$ ۴) $\frac{y}{1+(1-xy)^2}$

آزمون (۵)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: B

۱ـ حاصل $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)dydx$ چقدر است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}-2$ ۲) $\frac{3\pi}{2}-4$ ۳) $\frac{3\pi}{8}-1$ ۴) $\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{2}$

۲ـ ماکسیمم مقدار انحنای منحنی $x=a\cos\theta$ ، $y=b\sin\theta$ چقدر است؟ $(a>b>0)$

۱) $\frac{a}{b^2}$ ۲) $\frac{2a}{b}$ ۳) $\frac{b}{a^2}$ ۴) $\frac{b}{2a}$

۳ـ مقدار $\iint_S ydS$ ، که در آن S بخشی از صفحه $z=1+y$ می‌باشد که درون مخروط $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ قرار دارد. کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) π^2

۴ـ قرینه نقطه $A(1,1,1)$ نسبت به صفحه $x+y-2z-6=0$ عبارتست از:

۱) $C(3,-3,-3)$ ۲) $C(-3,3,3)$ ۳) $C(3,3,3)$ ۴) $C(3,3,-3)$

۵ـ حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x|+|y|)}dxdy$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) واگراست.

۶ـ مقدار $\oint_C (xydx+yzdy+zxdz)$ روی مثلثی با رئوس $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۷ـ حجم محصور درون استوانه $x^2+y^2=2ax$ و رویه $z^2=2ax$ کدام است؟

۱) $\frac{32}{5}a^3$ ۲) $\frac{64}{5}a^3$ ۳) $\frac{64}{15}a^3$ ۴) $\frac{128}{15}a^3$

۸ـ طول قوس از خم به معادلات $x=\cos t, y=\mathrm{Ln}\frac{(1+\sin t)}{\cos t}-\sin t$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) $1-\mathrm{Ln}2$

۹ـ رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 22 & 5 & 15 & 23 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ـ ناحیه D محدود به منحنی بسته و هموار c است. اگر $\int_c \vec{F}.d\vec{R}=$ مساحت ناحیه D ، $\vec{F}$ کدام است؟

۱) $\vec{F}=yi+xj$ ۲) $\vec{F}=2yi+3xj$ ۳) $\vec{F}=-xj$ ۴) $\vec{F}=\frac{1}{2}yi+\frac{1}{2}xj$

آزمون (۶)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: A

۱ـ حاصل $\int_C x^2ds$ روی خط حاصل از تقاطع دو صفحه $x-y+z=0$ و $x+y+2z=0$ ، از مبدأ $(3,1,-2)$ چقدر است؟

۱) $6\sqrt{7}$ ۲) $3\sqrt{14}$ ۳) $4\sqrt{7}$ ۴) $2\sqrt{14}$

۲ـ حاصل $\iint_R xydxdy$ ، که در آن R ناحیه محصور مابین محور x ها، خط $x=2a$ و منحنی $x^2=4ay$ می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{a^4}{2}$ ۲) $\frac{a^4}{3}$ ۳) $\frac{a^4}{4}$ ۴) $\frac{3a^4}{4}$

۳ـ حجم هرم مثلث‌القاعده به رئوس $P(2,2,2)$ ، $Q(4,3,3)$ ، $R(4,5,4)$ و $S(5,5,6)$ چقدر است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{14}{9}$

۴ـ مقدار $\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta drd\theta$ برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}a^3$ ۲) $\frac{3}{4}a^3$ ۳) $\frac{2}{3}a^3$ ۴) $\frac{3}{2}a^3$

۵ـ مقدار انتگرال $\iint_D e^{-xy}dxdy$ که در آن D ناحیه $0\le x<\infty$ و $0\le y<\infty$ می‌باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) e ۴) واگراست.

۶ـ فرض کنید $\begin{cases} u=x^2+xy-y^2 \\ v=y^2+2xy \end{cases}$ ، در این صورت مقدار $(\frac{\partial x}{\partial u})_y$ در نقطه $x=2$ و $y=-1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ در چه نقطه‌ای روی خم $y=e^x$ شعاع خمیدگی کمترین مقدار ممکن را دارد؟

۱) $x=2\mathrm{Ln}2$ ۲) $x=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$ ۳) $x=\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$ ۴) $x=-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$

۸ـ اگر مقدار سرعت ذره‌ای ثابت باشد، آنگاه کدام گزاره زیر صحیح است؟

۱) شتاب برابر صفر است.
۲) بردار سرعت بر مسیر حرکت عمود است.
۳) بردار سرعت در جهت $\vec{B}$ قرار دارد.
۴) بردار شتاب در جهت $\vec{N}$ قرار دارد.

۹ـ حاصل $\int_c ydx+(3y^2-x)dy+zdz$ روی مسیر $R(t)=ti+t^2j+0k$ ، $0\le t\le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۱۰ـ مساحت بیضی که استوانهٔ $x^2+y^2=1$ از صفحه $z=2x$ جدا می کند، چقدر است؟

۱) $\pi\sqrt{5}$ ۲) $2\pi\sqrt{5}$ ۳) $2\pi|c|$ ۴) $\pi\frac{\sqrt{5}}{5}$

آزمون (۷)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: A

۱ـ فاصله نقطه $(0,0,1)$ از سهمی‌گون $z = x^2 + 2y^2$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

۲ـ مینیمم شعاع انحنای منحنی $y = e^x$ چقدر است؟

۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳ـ مقدار مساحت بخش کروی مرز ناحیه $x^2+y^2+z^2=1$، $x^2+y^2 \ge x$ و $x^2+y^2+x \ge 0$ برابر است با:

۱) 4π ۲) 8π ۳) 4 ۴) 8

۴ـ حجم محصور درون استوانه $x^2+y^2=4$، صفحه $y+z=3$ و $z=0$ چقدر است؟

۱) 12π ۲) 24π ۳) 6π ۴) 8π

۵ـ مقدار $\int^{\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}dx$ چقدر می‌باشد؟

۱) $\frac{e}{2}$ ۲) $-\frac{e}{2}$ ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$

۶ـ میانگین فاصلهٔ نقاط درون دیسک $x^2+y^2 \le a^2$، $x \ge 0$ و $y \ge 0$ از خط $x+y=0$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{2}a}{3\pi}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}a}{2\pi}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}a}{3\pi}$

۷ـ معادله $x^2 = yz$ چه نوع سطحی را مشخص می‌سازد؟

۱) استوانه ۲) سهمی‌گون ۳) هذلولی‌گون یکپارچه ۴) مخروط

۸ـ اگر α، β و γ زوایای یک مثلث باشند، آنگاه ماکسیمم عبارت $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{8}{27}$

۹ـ حاصل $\oint_C (ydx + zdy + xdz)$، که در آن C خم حاصل از تقاطع کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و صفحه $x+y+z=0$ می‌باشد، چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۲) $4\pi a^2$ ۳) $2\pi a^2$ ۴) $\sqrt{3}\pi a^2$

۱۰ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، در این صورت $A^4 - 5A^3 - A^2$ برابر است با:

۱) $-A^2$ ۲) A^2 ۳) I ۴) $-A$

آزمون (۸)

تعداد سئوالات: ۱۰	مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه	سطح آزمون: A

۱ـ فرض کنید $F(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$، در این صورت کدام گزاره زیر برقرار می‌باشد؟

۱) F_x و F_y در مبدأ موجود نیست.
۲) F در مبدأ مختصات پیوسته نمی‌باشد.
۳) $F_x(x,y) + F_y(y,x) = 0$
۴) هیچکدام

۲ـ فرض کنید از دستگاه $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^2yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$، می‌توان (u,v) را برحسب x، y و z در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$ به دست آورد. در این صورت مقدار $(\frac{\partial v}{\partial y})_{x,z}$ درنقطه مزبور چقدر است؟

۱) $\frac{-5}{4}$ ۲) $\frac{-7}{4}$ ۳) -2 ۴) $\frac{-3}{4}$

۳ـ به ازای چه مقادیر k، انتگرال $\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dA}{(x^2+y^2)^k}$ همگراست؟

۱) $k > \frac{1}{2}$ ۲) $k > 1$ ۳) $k < 1$ ۴) $k < \frac{1}{2}$

۴ـ حجم محصور درون ناحیه محصور بین سه استوانه $x^2+y^2=a^2$، $x^2+z^2=a^2$ و $y^2+z^2=a^2$ چقدر است؟

۱) $\frac{8a^3}{3}$ ۲) $16(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a^3$ ۳) $8\sqrt{2}a^3$ ۴) $8(\sqrt{2}-1)a^3$

۵ـ حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2y^2-3z^2}dxdydz$ برابر است با:

۱) $\pi\sqrt{\pi}$ ۲) $\pi\sqrt{6\pi}$ ۳) $6\pi^2$ ۴) $\pi\sqrt{\pi/6}$

۶ـ اگر $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z}) = 0$، آنگاه $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) z ۳) 1 ۴) $\frac{\partial F/\partial x + \partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$

۷ـ اگر $\vec{A}$، یک بردار یکه (واحد) باشد، آنگاه حاصل $\vec{A}\times[\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})]$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $A\times B$ ۳) $B\times A$ ۴) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{A}$

۸ـ فرض کنید سطح S (با قائم رویه خارج n)، محصور کننده ناحیه بین صفحات $z=0$، $y=0$ و $y=e$ و سهمی $z=1-x^2$ باشد، در این صورت حاصل $\iint_S F.nds$ که در آن $F = (x+\cos y, y+\sin z, z+e^x)$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) $\frac{e-1}{4}$ ۳) $4e$ ۴) $4e-1$

۹ـ به ازای چه مقدار a، بردار $(1,0,-1)$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) -2

۱۰ـ شعاع انحنای منحنی $y = \mathrm{Ln}x$ در نقطهٔ $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ چقدر است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{27}{10}$ ۴) $\frac{18}{5}$

آزمون (۹)

تعداد سئوالات : ۱۰	مدت زمان پیشنهادی : ۱۵ دقیقه	سطح آزمون : A

۱ـ اگر نیروی وارد بر ذره‌ای همواره بر بردار سرعت عمود باشد، آنگاه:

۱) شتاب ذره ثابت است.
۲) مقدار سرعت ثابت است.
۳) مسیر حرکت ذره دایره شکل خواهد بود.
۴) مقدار سرعت افزایش نمی‌یابد.

۲ـ کدامیک از فرمولهای زیر برای یک منحنی صحیح می‌باشند؟

۱) $\tau = \frac{|dN/dt|}{|V|^2}$
۲) $\tau = \frac{|V \times a|}{|V|^2}$
۳) $\tau = \frac{|dB/dt|}{|V|}$
۴) $\tau = \frac{|V \times a|}{|V|^2}$

۳ـ مقدار انتگرال تابع $f(x,y,z) = x+y+z$ بر رویهٔ مکعبی که صفحات $x=1$ ، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند برابر است با:

۱) ۸
۲) $\frac{8}{3}$
۳) ۹
۴) $\frac{16}{3}$

۴ـ مقدار انتگرال $\iint_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}dA$ برابر است با:

۱) $a\sinh 2a$
۲) $a^2\sinh a$
۳) $2a\sinh a$
۴) $2a\sinh 2a$

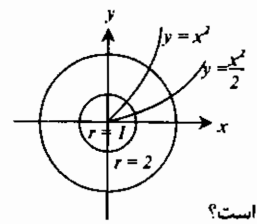
۵ـ مقدار $\int^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xdydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}-1$
۲) $1+\sqrt{2}$
۳) $2-\sqrt{2}$
۴) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶ـ مساحت مثلث به رئوس $A(-2,-4)$ ، $B(2,8)$ و $C(10,2)$ برابر است با:

۱) ۳۰
۲) ۶۰
۳) ۱۵
۴) ۱۲۰

۷ـ حاصل $\iint_D \frac{2y^2+x^2}{x^2}$ که در آن D به صورت زیر است، چقدر است؟



۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) ۱

۸ـ مقدار $I = \iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ که R ناحیه بین $x^2+y^2+z^2=9$ و $x^2+y^2+z^2=1$ است، کدام است؟

۱) $4\pi \text{Ln}3$
۲) $2\pi \text{Ln}3$
۳) $2\pi \text{Ln}6$
۴) $4\pi \text{Ln}2$

۹ـ حاصل $\iiint_D (3-xy-x-y)dv$ در صورتی که D ناحیه $z \ge 0$ و $x^2+y^2+z^2 \le 1$ باشد، کدام است؟

۱) 4π
۲) 8π
۳) 2π
۴) 32π

۱۰ـ در مورد تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود و برابر صفر هستند.
۲) $\frac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ ناپیوسته است.
۳) $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ پیوسته است.
۴) f در مبدأ ناپیوسته است.

آزمون (۱۰)

تعداد سئوالات : ۱۰	مدت زمان پیشنهادی : ۱۵ دقیقه	سطح آزمون : A

۱ـ مقدار انحنا (خمیدگی)، منحنی $r(t) = \sin t\cos t\vec{i} + \sin^2 t\vec{j} + \cos t\vec{k}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{39}}{3}$
۲) $\frac{3\sqrt{39}}{2}$
۳) $\frac{2\sqrt{39}}{9}$
۴) $\frac{3\sqrt{39}}{8}$

۳ـ مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ چقدر است؟

۱) ۶۰
۲) ۴۸
۳) ۷۰
۴) ۳۰

۳ـ حاصل $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ ، که در آن D ناحیهٔ $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le x^2$ می‌باشد چقدر است؟

۱) $3\text{Ln}2$
۲) $\text{Ln}2$
۳) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$
۴) $2\text{Ln}2$

۴ـ شار برونسوی بردار مکان $F = \frac{1}{3}xi + \frac{1}{3}yj + \frac{1}{3}zk$ گذرنده از یک رویه بسته قطعه قطعه هموار برابر است با: (V حجمی است که رویه در بر می‌گیرد.)

۱) V
۲) $\frac{V}{3}$
۳) ۰
۴) هیچکدام

۵ـ مقدار انتگرال $\iiint \frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ برابر است با:

۱) π
۲) 2π
۳) π^2
۴) $4\pi^2$

۶ـ معادلات $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ ، متغیرهای x و y را برحسب متغیر z بیان می‌کنند، در این صورت $\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$ برابر است با:

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۰
۴) هیچکدام

۷ـ حاصل $I = \int^{\infty} \frac{\text{arctg}x}{x(1+x^2)}dx$ کدام است؟

۱) $2\pi \text{Ln}2$
۲) $\pi \text{Ln}2$
۳) $\text{Ln}2$
۴) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}2$

۸ـ کدام یک از روابط زیر برقرار نمی‌باشد؟ (F_1 و F_2 میدان برداری و g_1 و g_2 توابع اسکالر می‌باشند.)

۱) $\nabla(g_1g_2) = g_2\nabla g_1 + g_1\nabla g_2$
۲) $\text{curl}(g_1F_1) = (\nabla g_1)\times F_1 + g_1(\nabla \times F_1)$
۳) $\text{div}(g_1F_1) = \nabla g_1.F_1 + g_1\text{div}F_1$
۴) $\text{div}(F_1 \times F_2) = (\text{curl}F_1).F_2 + (\text{curl}F_2).F_1$

۹ـ مساحت رویه‌ای که صفحه $z=0$ از سهمیوار $x^2+y^2+z=1$ جدا می‌کند، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$
۲) $\frac{\pi}{2}(5\sqrt{5}-1)$
۳) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$
۴) $\frac{\pi}{4}(5\sqrt{5}-1)$

۱۰ـ فرض کنید P صفحه $x+y+z=1$ ، باشد، در این صورت مقدار $\iint_P \frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ چقدر است؟

۱) $\pi\sqrt{3}$
۲) $2\pi\sqrt{3}$
۳) $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴) 2π

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (۱)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۲)				
۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»

آزمون (۳)				
۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»

آزمون (۴)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۵)				
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۶)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»

آزمون (۷)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۸)				
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»

آزمون (۹)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»

آزمون (۱۰)				
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»

تست‌های سراسری ۱۳۸۵

عمران

۱ـ اگر a و b اعداد ثابت مثبت باشند، ماکزیمم تابع $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ با شرط(قید) $x^2+y^2=1$ برابر با چیست؟

۱) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ۲) $\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ ۳) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ ۴) $\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$

۲ـ اگر $F(x,y,z)=x\vec{i}-2y\vec{j}+4z\vec{k}=(x,-2y,4z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $a>0$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ که در آن $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی S است، برابر با چیست؟

۱) $\frac{4}{3}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $3\pi a^3$ ۴) $4\pi a^3$

۳ـ مقدار انتگرال $I=\int_C (x\sin(y^2)-y^2)dx+(x^2y\cos(y^2)+3x)dy$ که در آن C مرز ذوزنقه به رئوس $(2,0)$، $(1,-1)$، $(1,1)$ و $(0,2)$ می‌باشد و در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) پیموده شده است. برابر با چیست؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۴ـ طول قوس منحنی زنجیری به معادله $a>0$ و $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ از نقطه $(0,a)$ تا نقطه (x_1,y_1)، $x_1>0$، برابر است با:

۱) $\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۲) $a\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۳) $\frac{1}{a}\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۴) $a^2\sinh(\frac{x_1}{a})$

۵ـ حجم محدود به کره $x^2+y^2+z^2=5$ از بالا و سهمی‌گون $x^2+y^2=4z$ از پائین برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}\pi$ ۲) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$ ۳) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{5}$ ۴) $2\pi(\sqrt{5}-4)$

۶ـ λ باید کدامیک از مقادیر زیر باشد تا انتگرال $\int_A^B (z^2dx+2ydy+\lambda xzdz)$ از مسیر انتگرال‌گیری مستقل باشد؟

۱) $\lambda=0$ ۲) $\lambda=-1$ ۳) $\lambda=1$ ۴) $\lambda=2$

۷ـ مقدار انتگرال روبرو برابر با چیست؟ $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy\right]dx$

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $2\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2\sqrt{2}-2$

عمران - نقشه‌برداری

۸ـ انتگرال منحنی‌الخط $I=\int_C yx^2dx+(x+y)dy$ که در آن C عبارت است از محور yها از مبدأ تا (۱- و ۰) و سپس خط $y=-1$ از (۱- و ۰) تا (۱- و ۱) برابر با چیست؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۹ـ دو معادله $\begin{cases}2x=v^2-u^2\\ y=uv\end{cases}$، u و v را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کنند. $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر با چیست؟

۱) $\frac{u}{u^2+v^2}$ ۲) $\frac{v}{u^2+v^2}$ ۳) $-\frac{u}{u^2+v^2}$ ۴) $-\frac{v}{u^2+v^2}$

۱۰ـ کدامیک از معادلات زیر معادله دایره بوسان منحنی $y=e^x$ در نقطه (۱ و ۰) است؟

۱) $(x+2)^2+(y-3)^2=8$ ۲) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ ۳) $(x-2)^2+(y+3)^2=8$ ۴) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

۱۱ـ اگر $F(x,y,z)=(x^2+y^2,y^2-z^2,z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $a>0$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ که در آن $\vec{n}$ بردار قائم خارجی S است، برابر با چیست؟

۱) πa^3 ۲) $\frac{2}{3}\pi a^3$ ۳) $\frac{4}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۱۲ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2}dy$ برابر با چیست؟

۱) $e-1$ ۲) $\frac{e-1}{3}$ ۳) $\frac{e-1}{2}$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

۱۳ـ مقدار انتگرال $I=\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ که در آن S جسم محصور بین نیمه بالائی مخروط $z^2=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ است برابر با چیست؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{2\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

۱۴ـ معادله صفحه مماس بر سطح (رویه): $4x^2+y^2-16z=0$ در نقطه $(2,4,2)$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $x-2y+z=2$ ۲) $x+2y-z=2$ ۳) $2x-y+2z=4$ ۴) $2x+y-2z=4$

۱۵ـ مقدار انتگرال $\oint_C (2xydx-x^2ydy)$ که در آن C مثلثی است به رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر با چیست؟

۱) -1 ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $-\frac{11}{12}$ ۴) -4

مکانیک

۱۶ـ تابع f با ضابطه $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2-1$ در نقطه (۱ و ۱-) در امتداد کدام بردار نزولی است؟

۱) $-\vec{i}+\vec{j}$ ۲) $\vec{i}-\vec{j}$ ۳) $-2\vec{i}+\vec{j}$ ۴) $4\vec{i}-\vec{j}$

۱۷ـ حجم محصور بالای صفحه xy و بین سهموی $z=x^2+y^2$ و استوانه‌ای به معادله $x^2+y^2=a^2$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}a^2$ ۲) $\frac{\pi}{2}a^4$ ۳) $\frac{\pi}{3}a^2$ ۴) $\frac{3\pi}{2}a^3$

۱۸ـ نزدیک کدام نقاط (r,s) (با چه شرطی) تبدیل $\begin{cases}x=r^2+2s\\ y=s^2-2r\end{cases}$ را می‌توان برای r و s به عنوان توابعی از x و y حل نمود؟

۱) $rs=-1$ ۲) $rs\neq -1$ ۳) $s+r\neq 0$ ۴) $s^2+r^2\neq 0$

۱۹ـ انحنای منحنی $\begin{cases}x=\cos u\\ y=\sin u\\ z=u\end{cases}$ در نقطهٔ کلی $P(u)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۲۰ـ مساحت ناحیه محدود به خم‌های $xy=a$، $xy=b$ و $y^2=\alpha x$ و $y^2=\beta x$ با شروط $0<a<b$ و $0<\alpha<\beta$ که در ربع اول مختصات قرار دارند عبارت است از:

۱) $\frac{1}{3}(b-a)\log(\frac{\beta}{\alpha})$ ۲) $\frac{1}{6}(a-b)\log(\frac{\alpha}{\beta})$ ۳) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\log(\frac{a}{b})$ ۴) $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\log(\frac{b}{a})$

۲۱ـ اگر C قسمتی از سهمی $y=x^2$ از مبدأ تا $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل A به مبدأ باشد، حاصل $\oint_C 2ydx+4xdy$ برابر است با:

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۲۲ـ رابطه میان ثابت‌های حقیقی a و b و c چگونه باشد تا میدان برداری $F(x,y,z)=(ay^2+2czx)i+y(bx+cz)j+(ay^2+cx^2)k$ پایستار باشد؟

۱) $a=b=c$ ۲) $a=b=-c$ ۳) $2a=b=c$ ۴) $2a=b=-c$

آمار

۲۳ـ برد تابع $f:R^3\to R$ با ضابطه $f(x,y,z)=\frac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟

۱) $R^3-\{(0,0,0)\}$ ۲) $\{(x,y,z):y\neq z\}$ ۳) $\{(x,y,z):x=y=z\}$ ۴) R

۲۴ـ معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases}y=x^2\\ z^2=16-y\end{cases}$ در نقطه $(4,16,0)$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}4x=y\\ z=0\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}y-x=12\\ z=0\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y+x=20\\ z=0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=4\\ y=16\end{cases}$

۲۵ـ در نقطهٔ $(e,1)$ در چه سویی تابع $f(x,y)=x^y$ بیشترین افزایش را دارد؟

۱) $(-e,1)$ ۲) $(1,e)$ ۳) $(e,-1)$ ۴) $(e,1)$

۲۶ـ نزدیکترین نقطهٔ منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^2+1}$ از نقطه $B(1,0)$ کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,\sqrt{2})$ ۳) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$

۲۷ـ اگر A ناحیه درون دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=x$ باشد، مقدار $\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ کدام است؟

۱) $\pi-1$ ۲) $\pi-2$ ۳) $2\pi-1$ ۴) $2\pi-2$

۲۸ـ اگر S ناحیهٔ بستهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ به معادلهٔ $x+y+z=1$ باشد مقدار $\iiint_S z^2dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{60}$ ۴) $\frac{1}{20}$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۲۹ـ انحنای مسیر $r(t)=3\cos ti+3\sin tj+4tk$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{25}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) 5

۳۰ـ معادلهٔ صفحه عمود بر منحنی $z=\cos 2t$، $y=\sin t$ و $x=\sin t$ در نقطه $P=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$ ۲) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$ ۳) $-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$ ۴) $-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$

۳۱ـ معادلات خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x^2+y^2-8z=0\end{cases}$ در نقطهٔ $(2,2,1)$ کدامند؟

۱) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ ۲) $x+y=4\ ,\ z=1$

۳) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ ۴) $x=2t+2$ و $y=2t+2$ و $z=2$، t پارامتر

۳۲ـ به ازای چه مقادیری از a دستگاه $\begin{cases}x-y+az=0\\ 3x-y+2z=0\\ 6x-4y+5z=0\end{cases}$ بی‌نهایت جواب دارد؟

۱) $a=-1$ ۲) $a=0$ ۳) $a=1$ ۴) $a=2$

۳۳ـ فرض کنید دستگاه $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ و $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 قابل حل باشد و $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$ مقدار $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۳۴ـ فرض کنید در یک همسایگی از نقطهٔ $(x,y)=(1,1)$ توابع $z=z(x,y)$ و $w=w(x,y)$ در معادله‌های $2x^2+y^2+z^2-zw=0$ و $x^2+y^2+2z^2+zw-8=0$ صدق کنند. مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ در نقطه مذکور کدام‌اند؟

۱) ± 1 و ± 2 ۲) -1 و ± 2 ۳) ± 1 و -2 ۴) ۱ و ± 2

۳۵ـ ماکسیمم تابع $w=xyz$ نسبت به قید $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

۳۶ـ در نقطه $p(1,2,3)$ بزرگترین و کوچکترین مقدار مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ کدامند؟

۱) $\pm\sqrt{14}$ ۲) $\pm 2\sqrt{14}$ ۳) $\pm 3\sqrt{14}$ ۴) ± 2

۳۷ـ نزدیکترین نقطه منحنی $x^2+y^2=1$ ، $x^2-xy+y^2-z^2=1$ به مبدأ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۲) $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۳) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۴) $(0,\pm 1,0)\,,\,(\pm 1,0,0)$

۳۸ـ حجم ناحیهٔ محدود به کرهٔ $\rho=a$ و مخروط‌های $\varphi=\frac{\pi}{3}$ و $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

۱) πa^3 ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{2\pi a^3}{3}$ ۴) $\frac{3\pi a^3}{4}$

۳۹ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int^1 dy\int_y^1 \sin \pi x^2 dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) ۱ ۴) 2π

۴۰ـ انتگرال خط $\int_C (x^2+y^2)dx+(x+2y)^2dy$ روی مثلث C با راس‌های $(0,0)$، $(1,1)$ و $(0,2)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{8}{3}$

ریاضی

۴۱ـ اگر S پوسته جسم توپر W در فضای سه بعدی و n بردار نرمال یکه خارجی بر S و V نیز حجم W باشد آنگاه:

۱) $V=\frac{1}{3}\iint_S(x+y+z)dS$ ۲) $V=\frac{2}{3}\iint_S(x,y,z).dS$ ۳) $V=\frac{1}{3}\iint_S(x,y,z).ndS$ ۴) $V=\frac{2}{3}\iint_S(x,y,z).ndS$

۴۲ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{x-y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ در کدام جهت موجود است؟

۱) در جهت بردار $\vec{i}-\vec{j}$ ۲) در جهت بردار $\vec{i}+\vec{j}$ ۲) در جهت بردار $\vec{i}$ ۴) در جهت بردار $\vec{j}$

۴۳ـ مشتق سوئی تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(x,y)$ در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف نقطه $(2,2)$ برابر ۲ و در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف $(1,1)$ برابر ۲- است. مشتق سوئی f در نقطه $(1,2)$ و در جهتی به طرف $(4,6)$ برابر است با:

۱) $-\frac{14}{5}$ ۲) $-\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{12}{5}$ ۴) $\frac{14}{5}$

۴۴ـ اگر S قسمتی از مخروط $X^2=Y^2+Z^2$ باشد که بین صفحات $X=0$ و $X=1$ واقع است آنگاه $\iint_S X^2ds$ برابر است با:

۱) $\pi\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۴۵ـ تابع مقابل مفروض است: $f(X,Y)=\begin{cases}\frac{X^2Y}{X^4+Y^2} & (X,Y)\neq(0,0)\\ 0 & (X,Y)=(0,0)\end{cases}$ کدامیک از موارد زیر درست است؟

۱) f در مبدأ پیوسته است.
۲) f در مبدأ دیفرانسیل‌پذیر است.
۳) مشتق سوئی f در مبدأ در هر جهت وجود دارد.
۴) مشتق سوئی f در مبدأ فقط در جهت محور Xها وجود دارد.

۴۶ـ حاصل $\int(x^2y\cos x+2xy\sin x)dx+x^2\sin x dy$ در امتداد منحنی به معادله $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۷ـ خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه‌های $z=4x^2+4y^2$ و $z=4-4x^2$ در نقطه $(0,1,4)$ موازی کدام بردار است؟

۱) $\vec{i}+\vec{j}$ ۲) $\vec{i}-\vec{j}$ ۳) $\vec{i}$ ۴) $\vec{j}$

۴۸ـ برای تابع f روی $[a,b]$ کدامیک از موارد زیر درست است؟

۱) $\frac{1}{2}\int_a^b(\int_a^b f(x)f(y)dy)dx=\int_a^b f^2(x)dx$
۲) $\frac{1}{2}\int_a^b(\int_a^x f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f^2(x)dx)^2$
۳) $2\int_a^b(\int_a^b f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f(x)dx)^2$
۴) $2\int_a^b(\int_x^b f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f(x)dx)^2$

۴۹ـ اگر D ناحیهٔ محصور بین منحنی‌هائی $y=x^2$ ، $y=8x^2$ ، $xy=1$ و $xy=2$ باشد آنگاه مساحت ناحیه D برابر کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}\text{Ln}2$ ۴) $\text{Ln}2$

MBA

۵۰ـ بیشترین فاصله نقاط منحنی به معادله $5x^2+5y^2-6xy=4$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

۵۱ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-xy}{x+y} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(0,0)$، کدام است؟

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۵۲ـ اگر $u=tg^{-1}(\frac{y^2}{x})$ باشد، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ در نقطه $(3,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{8}{15}$ ۳) $\frac{16}{25}$ ۴) $\frac{12}{25}$

۵۳ـ اگر $v=2xy$ ، $u=x^2-y^2$ ، $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ باشد، حاصل $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$ کدام است؟

۱) $2r^2$ ۲) $4r^2$ ۳) $2r^3$ ۴) $4r^3$

۵۴ـ اگر $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ باشد، انتگرال $\int^1 f(x)dx$ کدام است؟

۱) $1+e$ ۲) $1-e$ ۳) $\frac{1}{2}(1-e)$ ۴) $\frac{1}{2}(1+e)$

۵۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -6 & -4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & -6 & -3\end{bmatrix}$ باشد، بردار ویژه آن کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

۵۶ـ حاصل i^i، کدام است؟ $(i=\sqrt{-1})$

۱) $e^{-\pi}$ ۲) $e^{\frac{-\pi}{2}}$ ۳) $ie^{\frac{\pi}{2}}$ ۴) $\text{Ln}(i)$

۵۷ـ حجم ناحیه مشترک بین دو استوانه $x^2+y^2=9$ و $x^2+z^2=9$ ، کدام است؟

۱) 72π ۲) 36π ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۲

۵۸ـ حاصل $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ داخل مثلثی به معادلات اضلاع $x+y=1$ ، $x=0$ و $y=0$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$ ۲) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$ ۳) $\frac{1}{4}(e+\frac{1}{e})$ ۴) $\frac{1}{4}(e-\frac{1}{e})$

۵۹ـ اگر $F=(x+y)i+(y+z)j+(z+x)k$ و Σ سطحی باشد که ناحیه D با مشخصات $9\le x^2+y^2\le$ و $0\le z\le 5$ را محصور کرده است، حاصل $\iint_\Sigma F.d\delta$ کدام است؟

۱) 45π ۲) 75π ۳) 90π ۴) 135π

۶۰ـ بردار $\vec r=xi+yj+zk$ و $|\vec r|=r$ ، $curl|\vec r|$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{r}\vec r$ ۳) $n\vec r$ ۴) $\frac{n}{r}\vec r$

۶۱ـ انتگرال منحنی‌الخط $\oint(x+2xy)dx+(x^2-y)dy$ بر روی منحنی $2x^2+3y^2=6$ ، کدام است؟

۱) 0 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 6

مهندسی هسته‌ای

۶۲ـ اگر یک متحرک بر روی مسیری با خمیدگی $K(t)\neq 0$ در فضا با سرعت $V(t)$ و شتاب $a(t)$ حرکت کند، آنگاه $V\times a=\alpha B$ ، که در آن B قائم دوم بر خم است. در این صورت ثابت α برابر است با:

۱) $K(t)\|V(t)\|$ ۲) $K(t)\|V(t)\|^2$ ۳) $K(t)\|V(t)\|^3$ ۴) $K(t)$

۶۳ـ در کدام نقاط (u,v) نمی‌توان دستگاه معادلات $x=u^2+v^2$ و $y=uv-v^2$ را برحسب x و y (به عنوان توابعی از u و v) حل نمود؟

۱) $u=2v$ ۲) $uv=v^2$ ۳) $u^2-uv-v^2=0$ ۴) $u^2-2uv-v^2=0$

۶۴ـ معادله بردار عمود واحد بر سطح $x^2y+2xz=4$ در نقطه $(2,-2,3)$ چیست؟

۱) $\hat i-4\hat j+\hat k$ ۲) $-\frac{1}{2}\hat i+1\hat j+1\hat k$ ۳) $\hat i-\frac{1}{6}\hat j+\frac{1}{9}\hat k$ ۴) $-\frac{1}{3}\hat i+\frac{2}{3}\hat j+\frac{2}{3}\hat k$

۶۵ـ اگر $f(x,y,z)=\frac{m}{r^3}(xi+yi+zk)$ ، که در آن $m>0$ ثابت و $r^2=x^2+y^2+z^2$ ، آنگاه $divF=\nabla.F$ در نقاط $r\neq 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{6}{r^2}$ ۳) $-\frac{1}{r^3}$ ۴) $\frac{-4}{r^2}$

۶۶ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ کدامیک از توابع زیر است؟

۱) $z=f(\frac{x}{y})$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۲) $z=f(x^2-y^2)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۳) $z=f(xy)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۴) $z=f(x-y)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)

۶۷ـ اگر C خم ساده بسته بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در جهت مثلثاتی باشد آنگاه انتگرال روی خم $\oint_C(3x^2-y)dx+(4y^2-x)dy$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $-ab$ ۳) $7ab$ ۴) (a^2+b^4)

معماری کشتی

۶۸ـ اگر $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ در این صورت کدام صحیح است؟

۱) $v_x.x_v+v_y.y_v=1, u_x.x_u+u_y.y_u=1$
۲) $u_x.x_v+u_y.y_v=0, u_x.x_u+u_y.y_u=x_y$
۳) $v_x.x_u+v_y.y_u=0, u_xx_u-v_xx_v=0$
۴) $v_x.x_v+v_y.y_v=0, u_x.x_u+v_y.y_v=x_y$

۶۹ـ اگر $R(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$ بردار موضع متحرک غیرثابت C و S پارامتر طول باشد آنگاه از معادله $|\frac{dR}{dS}\times\frac{d^2R}{dS^2}|=0$ نتیجه می‌شود که:

۱) شکل منحنی همواره یک دایره نیست.
۲) منحنی C همواره در یک صفحه قرار دارد.
۳) همواره انحنا C برابر با صفر است.
۴) شکل منحنی C همواره به صورت یک فنر است.

۷۰ـ کدامیک از توابع زیر در نقطه $(0,0)$ دارای حد می‌باشند؟

الف) $\frac{x-y}{x+y}$ ب) $\frac{xy}{|xy|}$ ج) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ د) $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

۱) فقط د ۲) ج و د ۳) فقط ب ۴) د و الف

۷۱ـ اگر $\begin{cases}x=2u-v+w\\ y=u+v-w\\ z=2u+3v+w\end{cases}$ آنگاه $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ برابر است با:

۱) 8 ۲) 12 ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۷۲ـ حاصل $I=\int_0^1\int_x^{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1-y^4}dydx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}$

معدن

۷۳ـ مقدار انحناء در هر نقطه مارپیچ $\vec r(t)=(a\cos\omega t)\hat i+(a\sin\omega t)\hat j+(b\omega t)\hat k$ ، که در آن a و ω اعدادی ثابت و مثبت هستند، برابر است با:

۱) $k=\frac{a^2+b^2}{b}$ ۲) $k=\frac{a^2+b^2}{a}$ ۳) $k=\frac{a}{a^2+b^2}$ ۴) $k=\frac{b}{a^2+b^2}$

۷۴ـ اگر $u=xy$ و $v=x(1-y)$ باشد حاصل $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (دترمینان ژاکوبی) کدامیک از عبارات داده شده است؟

۱) $-\frac{1}{u+v}$ ۲) $\frac{1}{u+v}$ ۳) $\frac{u}{u+v}$ ۴) $-\frac{u}{u+v}$

۷۵ـ اگر مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x^2-2yz$ در $p(1,1,1)$ در جهت یک بردار u صفر باشد، آنگاه این بردار u کدام است؟

۱) $\hat i-\hat k$ ۲) $\hat i+\hat j$ ۳) $\hat i+\hat j+\hat k$ ۴) $\hat i-\hat j-\hat k$

۷۶ـ زاویه بین استوانه $x^2+y^2=1$ و کره $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۷ـ حاصل $\int^{\pi^2}\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{x}{y}dydx$ کدامیک از عبارات داده شده است؟

۱) 2 ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $2+\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\pi^3-\sqrt{\pi}$

۷۸ـ اگر $\vec F(x,y)=(x^2-xy)\hat i+(y^2-xy)\hat j$ و از $(-1,1)$ تا $(1,1)$ روی خم سهمی C به معادله‌ی $y=x^2$ اثر کند، آنگاه حاصل انتگرال خطی $\int_C(F.T)ds=\int_C Mdx+Ndy$ روی این خم C کدام است؟

۱) $-\frac{1}{15}$ ۲) $-\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۷۹ـ جرم پوسته کروی $1<\rho<2$ که چگالی جرمی نقاط مختلف آن از رابطه $\delta(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ محاسبه می‌شود کدام است؟

۱) 4π ۲) 6π ۳) 8π ۴) 12π

۸۰ـ اگر $F(x,y,z)=(\frac{x^3}{3},\frac{2y^3}{3},\frac{z^3}{3})$ و S رویه بیضی‌وار $x^2+2y^2+z^2=1$ باشد مقدار انتگرال سطح (رویه‌ای) $\oiint_S \bar{F}.\bar{n}d\sigma$ برابر است با (n قائم یکه برونسور بر رویه S و $d\sigma$ جزء مساحت رویه است.)

۱) $\frac{4\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$

۸۱ـ وارون (معکوس) ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{4}{45} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{45} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{45} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{45} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \frac{4}{45} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{45} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \frac{1}{45} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{45} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

مهندسی نفت

۸۲ـ اگر S یک چهار ضلعی با رئوس $(0,\pi)$، $(\pi,0)$، $(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ باشد، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_S (x-y)\sin(x+y)dxdy$ برابر است با:

۱) $-\pi$ ۲) 0 ۳) π ۴) 2π

۸۳ـ اگر $\phi(t)$ تابعی صعودی و در هر نقطه دامنه تعریفش $\phi'(t)\neq 0$ موجود باشد، آنگاه بیشترین مقدار افزایش تابع $f(x,y,z)=\phi(ax+by+cz)$ در نقطه (x,y,z) در کدام جهت است؟ (b، a و c ثابت حقیقی)

۱) $ai+bj+ck$ ۲) $xi+yj+zk$

۳) $(ai+bj+ck)\times(xi+yj+zk)$ ۴) چون تابع ϕ کلی است. لذا جواب به ϕ بستگی دارد.

۸۴ـ فرض کنیم $f=Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. مطلوب است $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma$ که در آن n بردار واحد قائم بر رویه S می‌باشد، و $d\sigma$ جزء سطح است و S قسمت واقع شده از کره $\rho^2=a^2$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا است.

۱) $\frac{\pi a}{4}$ ۲) $\frac{\pi a^2}{6}$ ۳) $\frac{\pi^2 a}{36}$ ۴) $\frac{\pi^2 a^2}{36}$

۸۵ـ فرض کنیم $I=\oint \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ مقدار I روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $a>0$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) -2π ۲) 2π ۳) صفر ۴) $2\pi a$ یعنی محیط دایره

۸۶ـ مطلوب است مساحت قسمتی از کره $\rho^2=4a^2$ که به وسیله استوانه $r^2=2ar\sin\theta$ بریده می‌شود (قسمت بالای صفحه xoy) $a\neq 1$.

۱) 4π ۲) $a^2\pi$ ۳) $4a^2$ ۴) $4a^2(\pi-2)$

مهندسی کشاورزی

۸۷ـ از رابطه $z^2-xz+xy^2=6$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,2,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۸۸ـ اندازه مشتق سویی $f(x,y,z)=x^2-yz+xz^2$ در نقطه $(-1,0,1)$ در امتداد $i+2j-k$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۲) $\frac{-2\sqrt{6}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۸۹ـ کمترین مقدار تابع $z=x^2+y^2+xy$ با شرط $x+2y=6$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۰ـ اگر $z=x^2+Arctg\frac{y}{x}$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $r=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵

۱ـ گزینه «۳» با توجه به شرایط داده شده در مسأله می‌توان $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ فرض کرد. در این صورت:

$$f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{\cos\theta}{a}+\frac{\sin\theta}{b}=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{ab}$$

با توجه به اینکه $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$، پس ماکسیمم f برابر $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ می‌باشد.

۲ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$F=x\vec{i}-2y\vec{j}+4z\vec{k}\Rightarrow divF=1-2+4=3$$

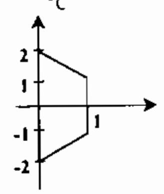
$$\iint_S F.ndS=\iiint_V divFdV=\iiint_V 3dV=3\times(\text{حجم کره})=4\pi a^3$$

۳ـ گزینه «۴» چون مرز C، یک مسیر بسته قطعه قطعه هموار می‌باشد، بنابراین از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=(2xy\cos(y^2)+3)-(2xy\cos(y^2)-2y)=3+2y$$

$$\Rightarrow I=\int_C (x\sin(y^2)-y^2)dx+(x^2y\cos(y^2)+3x)dy=\iint(3+2y)dA$$

چون $2y$ تابع فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به y متقارن است (با توجه به شکل مقابل)، پس انتگرال $2y$ برابر صفر است.



$$\Rightarrow I=\iint 3dA=3\times(\text{مساحت ذوزنقه})=3\times\frac{(4+2)\times 1}{2}=9$$

۴ـ گزینه «۲»

$$ds=\sqrt{1+y'}dx=\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}=\sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}dx=\cosh\frac{x}{a}dx\Rightarrow S=\int_0^{x_1}\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{x}{a}\Big|_0^{x_1}=a\sinh\frac{x_1}{a}$$

۵ـ گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن تصویر ناحیه بر صفحه xy، کره را با سهمی‌گون تلاقی می‌دهیم. در این صورت:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\4z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow z^2+4z=5\Rightarrow z=1\Rightarrow x^2+y^2=4$$

پس ناحیه تصویر در مختصات استوانه‌ای $r=2$ می‌باشد.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} rdzdrd\pi=\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^2(r\sqrt{5-r^2}-\frac{r^3}{4})dr=\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$$

۶ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم $\vec{F}=(z^2,2y,\lambda xz)$. برای مستقل بودن انتگرال داده شده از مسیر، لازم است $curl\vec{F}=0$. بنابراین:

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & 2y & \lambda xz\end{vmatrix}=(0,2z-\lambda z,0)\xrightarrow{curl\vec{F}=0}\lambda z=2z\Rightarrow\lambda=2$$

۷ـ گزینه «۳»

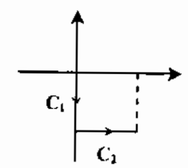
روش اول: $\int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{dydx}{\sqrt{y^2+x^2}} = \int_0^1 \ln(y+\sqrt{y^2+x^2})\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\ln(x+\sqrt{x^2+x^2}) - \ln(x^2+\sqrt{x^4+x^2}))dx$

$= \int_0^1 (\ln(1+\sqrt{2})) - \ln(x+\sqrt{x^2+1}))dx = \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx \ \underline{\text{جزء به جزء}}$

$= \ln(1+\sqrt{2}) - x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$

روش دوم: می‌توان از تغییر مختصات قطبی نیز استفاده کرد.

◆ ◆ ◆ ◆



۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال منحنی‌الخط روی مسیر C، انتگرال را روی مسیرهای C_1 و C_2 به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

مسیر C_1، خط $x=0$، $-1\le y\le 0$ است. در این صورت $dx=0$ و بنابراین:

(منفی پشت انتگرال به خاطر جهت مسیر C_1 می‌باشد.)

$\int_{C_1} yx^2dx+(x+y)dy = -\int_{-1}^{0} ydy = \frac{1}{2}$

مسیر C_2 خط $y=-1$، $0\le x\le 1$ است. در این صورت $dy=0$ و بنابراین:

$\int_{C_2} yx^2dx+(x+y)dy = \int_0^1 -x^2dx = \frac{-1}{3}$

در نتیجه: $\int_C = \int_{C_1}+\int_{C_2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۳» روابط داده شده را به صورت $F_1 = v^2-u^2-2x=0$ و $F_2 = uv-y=0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}-2u & 2v\\ v & u\end{vmatrix} = -2(u^2+v^2)$

$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix}-2 & 2v\\ 0 & u\end{vmatrix} = -2u$

بنابراین: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} = -\frac{-2u}{-2(u^2+v^2)} = -\frac{u}{u^2+v^2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۱» به طور کلی مختصات مرکز دایره بوسان تابع $y=f(x)$ در نقطه $P(x,y)$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$x_c = x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\ ,\ y_c = y+\frac{1+y'^2}{y''}$

بنابراین برای تابع $y=e^x$ در نقطه $P(0,1)$ داریم: $x_c = x-\frac{e^x(1+e^{2x})}{e^x}\Big|_{P(0,1)} = -2\ ,\ y_c = y+\frac{1+e^{2x}}{e^x}\Big|_{P(0,1)} = 3$

پس معادله دایره به صورت $(x+2)^2+(y-3)^2=R^2$ در می‌آید و با توجه به اینکه دایره از نقطه $P(0,1)$ عبور می‌کند، مقدار $R=\sqrt{8}$ به دست می‌آید. بنابراین معادله دایره بوسان $(x+2)^2+(y-3)^2=8$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

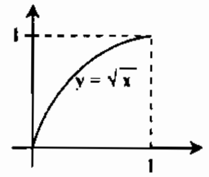
۱۱ـ گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. $\iint_S \vec{F}.nds = \iiint_V divFdV = \iiint_V (2x+2y+1)dV$

چون توابع $2x$ و $2y$ فرد هستند و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و y متقارن است، لذا $\iiint_V 2xdV=0$ و $\iiint_V 2ydV=0$. بنابراین:

$\iint_S \vec{F}.nds = \iiint_V dV = \text{حجم کره به شعاع a} = \frac{4}{3}\pi a^3$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۲»



با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$I = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dydx = \int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}dxdy = \int_0^1 y^2e^{y^3}dy = \frac{1}{3}e^{y^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال داده شده از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $z=r$ در می‌آید. تغییرات z از $z=r$ تا $z=1$ می‌باشد و برای محاسبه ناحیه تصویر در صفحه xy کافی است بین دو معادله $z=r$ و $z=1$، متغیر z از حذف کنیم که از آن به دست می‌آید $r=1$. بنابراین:

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r\times rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r\times rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 (r^2-r^3)dr = \frac{\pi}{6}$

◆ ◆ ◆ ◆

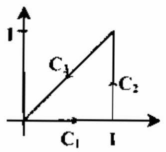
۱۴ـ گزینه «۴» بردار نرمال صفحه موردنظر، بردار گرادیان رویه $F=4x^2+y^2-16z=0$ می‌باشد. بنابراین:

$\vec{N} = \nabla F = (8x,2y,-16)\Big|_{(2,4,2)} = (16,8,-16)$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $16(x-2)+8(y-4)-16(z-2)=0 \Rightarrow 2x+y-2z=4$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۳»



انتگرال داده شده را روی مسیرهای C_1، C_2 و C_3 به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

$C_1: y=0\ ,\ dy=0\ ,\ 0\le x\le 1 \Rightarrow \int_{C_1} 2xydx-x^2ydy = 0$

$C_2: x=1\ ,\ dx=0\ ,\ 0\le y\le 1 \Rightarrow \int_{C_2} 2xydx-x^2ydy = \int_0^1 -ydy = \frac{-1}{2}$

$C_3: y=x\ ,\ dy=dx\ ,\ 0\le x\le 1 \Rightarrow \int_{C_3} 2xydx-x^2ydy = -\int_0^1 (2x^2-x^3)dx = \frac{-5}{12}$

$\Rightarrow \int_C 2xydx-x^2ydy = 0-\frac{1}{2}-\frac{5}{12} = \frac{-11}{12}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ـ گزینه «۲» $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2-1 \Rightarrow \nabla f = (3x^2+2xy\ ,\ x^2+2y)\Big|_{(-1,1)} = (1,3)$

مشتق سوئی تابع f در جهت بردار موردنظر باید منفی باشد، و با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) این خاصیت را دارد.

$D_uf = (1,3).\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. تصویر ناحیه موردنظر بر صفحه xy، درون دایره $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد. معادله سهموی به صورت $z=r^2$ در می‌آید. بنابراین:

$V = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^a r^3dr = \frac{\pi a^4}{2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸ـ گزینه «۲» $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix}2r & 2\\ -2 & 2s\end{vmatrix} = 4rs+4$

شرط موردنظر $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}\neq 0$ می‌باشد، که از آن نتیجه می‌شود $rs\neq -1$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹ـ گزینه «۲»

$V(u)=(-\sin u,\ \cos u,\ 1),\ a(u)=(-\cos u,-\sin u,0)$

$$V\times a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\sin u & \cos u & 1\\ -\cos u & -\sin u & 0\end{vmatrix}=(\sin u,-\cos u,1)\Rightarrow |V\times a|=\sqrt{2},\ |V|=\sqrt{2}$$

بنابراین:

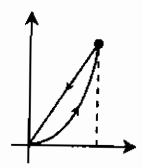
$$k=\frac{|V\times a|}{|V|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $u=xy$ و $v=\frac{y^2}{x}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $u=a$، $u=b$ و $v=\alpha$ ، $v=\beta$ در می‌آیند.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x\\ \frac{-y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}=\frac{3y^2}{x}\Rightarrow J=\frac{x}{3y^2}=\frac{1}{3v}$$

$$S=\int_a^b\int_\alpha^\beta \frac{1}{3v}dvdu=\frac{1}{3}\int_a^b du\times\int_\alpha^\beta\frac{dv}{v}=\frac{1}{3}(b-a)\mathrm{Ln}\frac{\beta}{\alpha}$$

۲۱ـ گزینه «۴» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C 2ydx+4xdy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(4x)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)\right)dydx=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}2dydx=2\int_0^2(2x-x^2)dx=\frac{8}{3}$$

۲۲ـ گزینه «۳» برای پایستار بودن میدان F ، لازم است $\mathrm{curl}F=0$. بنابراین:

$$\mathrm{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ay^2+2czx & bxy+cyz & ay^2+cx^2\end{vmatrix}=(2ay-cy,\ 2cx-2cx,\ by-2ay)$$

از نتیجه $\mathrm{curl}F=0$ نتیجه می‌شود $2a=b=c$.

۲۳ـ گزینه «۴»

روش اول: قرار می‌دهیم $y=1$ ، $z=0$. در این صورت تابع f به صورت $f(x,y,z)=x$ در می‌آید. که به ازای x های مختلف تمام مقادیر ممکن را اتخاذ خواهد کرد. بنابراین برد f مجموعه R می‌باشد.

روش دوم: گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ هرگز نمی‌توانند، برد یک تابع $f:R^3\to R$ باشند.

۲۴ـ گزینه «۴» منحنی موردنظر تلاقی دو رویه $F_1(x,y,z)=y-x^2=0$ و $F_2(x,y,z)=z^2+y-16$ می‌باشد. بردارهای خط موردنظر $\nabla F_1\times\nabla F_2$ می‌باشد.

$$\begin{cases}\nabla F_1=(-2x,1,0)\Big|_{(4,16,0)}=(-8,1,0)\\ \nabla F_2=(0,1,2z)\Big|_{(4,16,0)}=(0,1,0)\end{cases}\Rightarrow \nabla F_1\times\nabla F_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -8 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0,0,-8)$$

با توجه به اینکه مؤلفه‌های اول و دوم بردار هادی خط برابر صفرند، معادله خط به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases}x-4=0\\ y-16=0\end{cases}$$

۲۵ـ گزینه «۲» جهت بیشترین افزایش، جهت بردار گرادیان می‌باشد.

$$f(x,y)=x^y\Rightarrow\nabla f=(yx^{y-1},x^y\mathrm{Ln}x)\Big|_{(e,1)}=(1,e)$$

۲۶ـ گزینه «۳» نقطه $P(x,\sqrt{x^2+1})$ یک نقطه دلخواه روی منحنی می‌باشد. و فاصله P از نقطه B برابر $d=\sqrt{(x-1)^2+x^2+1}$ می‌باشد.

می‌خواهیم $f(x)=d^2=2x^2-2x+2$ را مینیمم کنیم.

$$f'(x)=4x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

۲۷ـ گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. معادله دایره داده شده به صورت $r^2=r\cos\theta$ و یا $r=\cos\theta$ در می‌آید $(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$. بنابراین:

$$\iint_A\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=2(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

۲۸ـ گزینه «۳»

$$\iiint_S z^2dxdydz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}z^2dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^3}{3}dydx$$

$$=\int_0^1-\frac{(1-x-y)^4}{12}\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{(1-x)^4}{12}dx=\frac{-(1-x)^5}{60}\Big|_0^1=\frac{1}{60}$$

۲۹ـ گزینه «۲»

$$r(t)=(3\cos t,3\sin t,4t)\Rightarrow v(t)=(-3\sin t,3\cos t,4)\Rightarrow a(t)=(-3\cos t,-3\sin t,0)$$

$$v\times a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3\sin t & 3\cos t & 4\\ -3\cos t & -3\sin t & 0\end{vmatrix}=(12\sin t,-12\cos t,9)\Rightarrow|v\times a|=15,\ |v|=5$$

$$k=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{15}{5^3}=\frac{3}{25}$$

۳۰ـ گزینه «۱»

روش اول: معادله منحنی داده شده را به صورت $r(t)=(\sin t,\sin t,\cos 2t)$ در نظر می‌گیریم، در این صورت بردار نرمال صفحه موردنظر $r'(t)$ خواهد بود. $\vec{N}=r'(t)=(\cos t,\cos t,-2\sin 2t)$

نقطه P داده شده متناظر $t=\frac{\pi}{4}$ روی منحنی می‌باشد، بنابراین بردار نرمال به صورت $\vec{N}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$ خواهد بود. و در نتیجه معادله صفحه موردنظر عبارتست از:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-2(z-0)=0\Rightarrow\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$$

روش دوم: تنها گزینه‌ای که مختصات نقطه P در آن صدق می‌کند گزینه (۱) می‌باشد.

۳۱ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$ و $G(x,y,z)=x^2+y^2-8z=0$ در این صورت بردارهای خط موردنظر برابر $\nabla F\times\nabla G$ خواهد بود.

$$\nabla F=(2x,2y,2z)\Big|_{(2,2,1)}=(4,4,2),\ \nabla G=(2x,2y,-8)\Big|_{(2,2,1)}=(4,4,-8)\Rightarrow\nabla F\times\nabla G=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4 & 4 & 2\\ 4 & 4 & -8\end{vmatrix}=(-40,40,0)$$

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت روبرو خواهد بود:

$$\frac{x-2}{-40}=\frac{y-2}{40}=\frac{z-1}{0}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4\\ z=1\end{cases}$$

۳۲ـ گزینه «۳» شرط داشتن بینهایت جواب برای یک دستگاه همگن آن است که دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۳ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_3,x_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \;,\; \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_3,x_2)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. معادلات داده شده را به ترتیب F_1 و F_2 فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,\omega)} = \begin{vmatrix} 2z-\omega & -z \\ 4z+\omega & z \end{vmatrix} = 6z^2$$

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,\omega)} = \begin{vmatrix} 4x & -z \\ 2x & z \end{vmatrix} = 6xz \;,\; \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 2z-\omega & 4x \\ 4z+\omega & 2x \end{vmatrix} = -12xz - 6\omega x$$

در همسایگی نقطه $(1,1)$. مقادیر $z=1, \omega=4$ و $z=-1, \omega=-4$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,\omega)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,\omega)}} = -\frac{6xz}{6z^2} = -\frac{x}{z} = \pm 1$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,\omega)}} = -\frac{-12xz-6\omega x}{6z^2} = \frac{x(2z+\omega)}{z^2} = \pm 6$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۵ـ گزینه «۴» می‌خواهیم عبارت $\omega = xyz$ یا به طور معادل $\omega^2 = x^2y^2z^2$ را تحت قید $x^2+y^2+z^2=1$ ماکسیمم کنیم. چون مجموع متغیرها ثابت است، حاصل‌ضرب وقتی ماکسیمم است که متغیرها با هم برابر باشند، در نتیجه $3x^2 = 1$ و از آنجا $x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ و بنابراین:

$$\mathrm{Max}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶ـ گزینه «۲»

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z)\Big|_{(1,2,3)} = (2,4,-6) \Rightarrow |\nabla f| = 2\sqrt{14}$$

بزرگترین و کوچکترین مقدار مشتق جهتی همواره به ترتیب برابر $|\nabla f|$ و $-|\nabla f|$ می‌باشند.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷ـ گزینه «۴» هیچکدام از گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) روی منحنی داده شده قرار ندارند. پس فقط گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸ـ گزینه «۳»

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}}\int_0^a \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} \sin\phi \, d\phi \int_0^a \rho^2 d\rho = 2\pi \times 1 \times \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3}$$

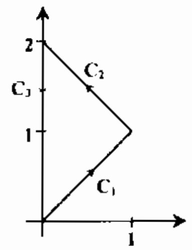
◆ ◆ ◆ ◆

۳۹ـ گزینه «۱» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$\int_0^1\int_y^1 \sin \pi x^2 \, dx dy = \int_0^1\int_0^x \sin \pi x^2 \, dy dx = \int_0^1 x \sin \pi x^2 dx = \frac{-1}{2\pi}\cos \pi x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰ـ گزینه «۴»



روش اول: انتگرال داده شده را به ترتیب روی C_1، C_2 و C_3 به دست آورده و حاصل را با هم جمع می‌کنیم.

مسیر C_1، پاره خط $y = x$ ، $0 \le x \le 1$ می‌باشد، در این صورت $dy = dx$. بنابراین:

$$\int_{C_1}(x^2+y^2)dx + (x+2y)^2 dy = \int_0^1 11x^2 dx = \frac{11}{3}$$

مسیر C_2، پاره‌خط $x = 2 - y$ ، $1 \le y \le 2$ می‌باشد و در این صورت $dx = -dy$. بنابراین:

$$\int_{C_2}(x^2+y^2)dx + (x+2y)^2 dy = \int_0^1 (8y - y^2)dy = \frac{29}{3}$$

و بالاخره مسیر C_3، $x = 0$ ، $0 \le y \le 2$ می‌باشد، در این صورت $dx = 0$ و بنابراین:

$$\int_{C_3}(x^2+y^2)dx + (x^2+2y)^2 dy = -\int_0^2 4y^2 dy = \frac{-32}{3}$$

(علامت پشت انتگرال به خاطر جهت مسیر C_3 می‌باشد.)

در نتیجه مقدار انتگرال خط موردنظر برابر $\frac{8}{3} = \frac{11}{3} + \frac{29}{3} - \frac{32}{3}$ است.

روش دوم: قرار می‌دهیم $F_1 = x^2 + y^2$ و $F_2 = (x+2y)^2$، در این صورت طبق قضیه گرین داریم:

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (2x+2y)dxdy = \int_0^1\int_x^{2-x}(2x+2y)dydx = \frac{8}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۱ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس

◆ ◆ ◆ ◆

۴۲ـ گزینه «۴» به طور کلی مشتق سوئی تابع f در نقطه دلخواه $P(x_0, y_0)$ در راستای بردار دلخواه یکه $v = (v_1, v_2)$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$D_u f = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{tv_1}{t_{v_1 - tv_2}}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1}{(v_1 - v_2)t}$$

برای اینکه حد فوق موجود باشد، لازم است $v_1 = 0$، بنابراین بردار یکه v به صورت $v = (0,1)$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۳ـ گزینه «۴» اگر نقاط $(1,2)$، $(2,2)$ و $(1,1)$ را به ترتیب P، Q و R بنامیم، جهتی که P را به Q وصل می‌کند بردار i و جهتی که P را به R وصل می‌کند بردار $-j$ خواهد بود. بنابراین با توجه به مفروضات گفته شده در مسأله داریم:

$$D_{\vec{i}}(P) = 2 \;,\; D_{-\vec{j}}(P) = -2 \Rightarrow D_{\vec{j}}(P) = 2$$

بردار یکه‌ای که نقطه $P(1,2)$ را به $S(4,6)$ وصل می‌کند به صورت روبرو است:

$$\overrightarrow{PS} = (3,4) \Rightarrow \vec{u} = \frac{PS}{|PS|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

بنابراین:

$$D_{\vec{u}}(P) = \frac{3}{5}D_{\vec{i}}(P) + \frac{4}{5}D_{\vec{j}}(P) = \frac{3}{5}\times 2 + \frac{4}{5}\times 2 = \frac{14}{5}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۴ـ گزینه «۲» می‌خواهیم انتگرال تابع $f(x,y,z) = x^2$ را روی سطح S به دست آوریم. صفحه تصویر را صفحه yz در نظر می‌گیریم در این صورت با فرض $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 = 0$، داریم:

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g . i|}dA = \frac{\sqrt{4x^4 + 4y^2 + 4z^2}}{2x}dA = \sqrt{2}dA$$

ناحیه انتگرال‌گیری درون دایره $y^2 + z^2 = 1$ قرار دارد، بنابراین:

$$\iint_S x^2 dS = \iint_D (y^2+z^2)\times\sqrt{2}dA \xlongequal{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\, r^2 . r dr d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵ـ گزینه «۳» مشتق سوئی f در نقطه $P(0,0)$ در جهت بردار دلخواه $v=(v_1,v_2)$ برابر است با:

$$D_v f(P)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv_1,0+tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3v_1^2v_2}{t^4v_1^4+t^2v_2^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1^2v_2}{t^2v_1^4+v_2^2}$$

اگر $v_2=0$، آنگاه $D_v f(P)=0$ و اگر $v_2\neq 0$، آنگاه $D_u f(P)=\frac{v_1^2}{v_2}$. یعنی در هر حال حد فوق وجود دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$P(x,y)=x^2y\cos x+2xy\sin x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=x^2\cos x+2x\sin x$$

$$Q(x,y)=x^2\sin x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin x+x^2\cos x$$

بنابراین میدان داده شده پایستار (ابقایی) می‌باشد و مسیر موردنظر نیز بسته است، پس مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۷ـ گزینه «۳» رویه‌های داده شده را به صورت $g_1(x,y,z)=4x^2+4y^2-z=0$ و $g_2(x,y,z)=4-4x^2-z=0$ می‌نویسیم. در این صورت بردار موردنظر موازی $\nabla g_1\times\nabla g_2$ خواهد بود.

$$\nabla g_1=(8x,8y,-1)\Big|_{(0,1,4)}=(0,8,-1),\nabla g_2=(-8x,0,-1)\Big|_{(0,1,4)}=(0,0,-1)$$

$$\nabla g_1\times\nabla g_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 8 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-8i=-8(1,0,0)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۸ـ گزینه «۴» به کمک تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۴» با توجه به منحنی‌های داده شده و ناحیه انتگرال‌گیری از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x^2}$ و $v=xy$ استفاده می‌کنیم با این تغییر متغیر ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $1\le u\le 8$, $1\le v\le 2$ در می‌آید.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ y & x\end{vmatrix}=\frac{-3y}{x^2}=-3u \Rightarrow |J|=\frac{1}{3u}$$

$$S=\int_1^2\int_1^8\frac{1}{3u}dudv=\frac{1}{3}\int_1^2 dv\int_1^8\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}8=\mathrm{Ln}2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «۱»

روش اول: می‌خواهیم عبارت $d=\sqrt{x^2+y^2}$ یا به طور معادل تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را تحت قید $g(x,y)=5x^2+5y^2-6xy=4$ ماکسیمم کنیم.

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow \begin{cases}2x=\lambda(10x-6y) \Rightarrow 2x^2=\lambda(10x^2-6xy)\\ 2y=\lambda(10y-6x) \Rightarrow 2y^2=\lambda(10y^2-6xy)\end{cases}$$

از کم کردن روابط اخیر از یکدیگر به رابطه $x^2-y^2=5\lambda(x^2-y^2)$ می‌رسیم. برای برقراری تساوی اخیر دو حالت وجود دارد:

الف) $5\lambda=1$ و از آنجا $\lambda=\frac{1}{5}$ که با جایگذاری در دستگاه فوق $x=y=0$ به دست می‌آید که در قید مسأله صدق نمی‌کند.

ب) $x^2-y^2=0$ که از آن نتیجه می‌شود $y=\pm x$،

$$y=x \Rightarrow g(x,y)=5x^2+5x^2-6x^2=4 \Rightarrow x=\pm 1\ ,\ f(x,y)=2$$

$$y=-x \Rightarrow g(x,y)=5x^2+5x^2+6x^2=4 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\ ,\ y=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}$$

بنابراین بیشترین فاصله $d=\sqrt{2}$ و کمترین فاصله $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: رابطه داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(x^2+y^2-2xy)+2(x^2+y^2)=4 \Rightarrow 3(x-y)^2+2(x^2+y^2)=4 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}(4-3(x-y))$$

می‌خواهیم عبارت x^2+y^2 بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. لذا عبارت سمت راست باید بیشترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. بدین منظور باید $x-y=0$ باشد که از آن نتیجه می‌شود $x^2+y^2=2 \Rightarrow d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۴»

$$u=tg^{-1}(\frac{y^2}{x}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{-y^2}{x^2}}{1+(\frac{y^2}{x})^2}=\frac{-y^2}{x^2+y^4}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{2y}{x}}{1+(\frac{y^2}{x})^2}=\frac{2xy}{x^2+y^4}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{12}{25}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۳» ابتدا u و v را برحسب r و θ به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} v=2xy=2r^2\sin\theta\cos\theta=r^2\sin 2\theta\\ u=x^2-y^2=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=r^2\cos 2\theta\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta\\ 2r\sin 2\theta & 2r^2\cos 2\theta\end{vmatrix}=2r^3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۳» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\int_1^x e^{t^2}dtdx=-\int_0^1\int_x^1 e^{t^2}dtdx=-\int_0^1\int_0^1 e^{t^2}dxdt=-\int_0^1 te^{t^2}dt=\frac{-1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}(1-e)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۵ـ گزینه «۲»

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -6 & -4\\ 0 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((4-\lambda)(-3-\lambda)+12)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=0,1$$

بنابراین $\lambda=0$ کوچکترین مقدار ویژه می‌باشد. برای به دست آوردن بردار ویژه بایستی دستگاه $AX=\lambda X$ را حل کنیم.

$$AX=0 \Rightarrow \begin{cases}x-6y-4z=0\\ 4y+2z=0\\ -6y-3z=0\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم $z=-2y$ به دست می‌آید، که با جایگزینی در معادله اول $x=-2y$ به دست می‌آید، بنابراین $(-2y,y,-2y)$ و یا $(2,-1,2)$ بردار ویژه موردنظر می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۶ـ گزینه «۲»

$$i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۷ـ گزینه «۳»

$$V=8\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}dzdydx=8\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{9-x^2}\,dydx=8\int_0^3(9-x^2)dx=8(9x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=144$$

۵۸ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $u=x+y$، $v=x-y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $0\le u\le 1$ و $-u\le v\le u$ در می‌آید.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=2\Rightarrow |J|=\frac{1}{2}$$

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u}e^{\frac{v}{u}}dvdu=\frac{1}{2}\int_0^1 ue^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}du=\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})\int_0^1 udu=\frac{1}{4}(e-\frac{1}{e})$$

۵۹ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده کنید.

۶۰ـ گزینه «۱»

۶۱ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$P(x,y)=x+2xy\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=2x$$

$$Q(x,y)=x^2-y\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

بنابراین میدان پایستار است و چون مسیر داده شده بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

۶۲ـ گزینه «۳» می‌دانیم:

$$B=\frac{V\times a}{\|V\times a\|}\Rightarrow V\times a=B\|V\times a\|$$

بنابراین $\|V\times a\|=\alpha$. از طرفی:

$$k(t)=\frac{\|V\times a\|}{\|V\|^3}\Rightarrow\|V\times a\|=k(t)\|V\|^3$$

۶۳ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم $x=f(u,v)=uv-v^2$ و $y=g(u,v)=u^2+v^2$. در این صورت در نقاطی که $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=0$ باشد، نمی‌توان u و v را به عنوان تابعی از x و y در نظر گرفت.

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}v&u-2v\\2u&2v\end{vmatrix}=2v^2-2u^2+4uv=0\Rightarrow u^2-2uv-v^2=0$$

۶۴ـ گزینه «۴» ابتدا قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=x^2y+2xz-4=0$، در این صورت بردار واحد عمود بر سطح برابر $u=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ خواهد بود.

$$\nabla F=(2xy+2z\,,\,x^2,2x)\Big|_{(2,-2,3)}=(-2,4,4)\Rightarrow u=(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$

۶۵ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=m(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})$$

$$\operatorname{div}f=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$=\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}=0$$

۶۶ـ گزینه «۲» $z=f(x^2-y^2)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$

۶۷ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $F_1=3x^2-y$ و $F_2=4y^3-x$. چون $\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=-1$، پس میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر C بسته است، پس حاصل انتگرال برابر صفر است.

۶۸ـ گزینه «۱» به منظور سهولت در بررسی گزینه‌ها می‌توانیم فرض کنیم $u=x$ و $v=y$. در این صورت فقط گزینه (۱) برقرار خواهد بود.

۶۹ـ گزینه «۳» از معادله داده شده نتیجه می‌شود انحناء منحنی برابر صفر است.

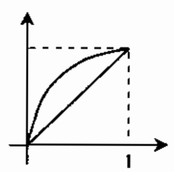
۷۰ـ گزینه «۱» موارد (الف)، (ب) و (ج)، روی خط $y=mx$، دارای حد وابسته به m خواهند بود، بنابراین حد ندارند. حال نشان می‌دهیم مورد (د)، در $(0,0)$ دارای حد است.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x^2}{x^2+y^2})y^2\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}y^2=0$$

۷۱ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&-1\\3&3&1\end{vmatrix}=12\Rightarrow\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{12}$$

۷۲ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



$$I=\int_0^1\int_x^{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1-y^4}\,dydx=\int_0^1\int_{y^3}^{y}\sqrt{1-y^4}\,dxdy=\int_0^1(y\sqrt{1-y^4}-y^3\sqrt{1-y^4})dy$$

$$=\int_0^1 y\sqrt{1-(y^2)^2}dy-\int_0^1 y^3\sqrt{1-y^4}dy$$

برای محاسبه انتگرال اول از تغییر متغیر $u=y^2$، $du=2ydy$ و برای محاسبه انتگرال دوم از تغییر متغیر $u=1-y^4$، $du=-4y^3dy$ استفاده می‌کنیم.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-u^2}du+\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{u}du=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{6}$$

۷۳ـ گزینه «۳»

روش اول:

$$V(t)=(-a\omega\sin\omega t\,,\,a\omega\cos\omega t\,,\,b\omega)\,,\,a(t)=(-a\omega^2\cos\omega t,a\omega^2\sin\omega t,0)$$

$$V(t)\times a(t)=\begin{vmatrix}i&j&k\\-a\omega\sin\omega t&a\omega\cos\omega t&b\omega\\-a\omega^2\cos\omega t&-a\omega^2\sin\omega t&0\end{vmatrix}=(ab\omega^3\sin\omega t\,,-ab\omega^3\cos\omega t\,,a^2\omega^3)$$

$$\Rightarrow|V\times a|=a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}\quad,\quad|V|=\omega\sqrt{a^2+b^2}$$

$$k=\frac{|V\times a|}{|V|^3}=\frac{a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}}{(\omega\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

روش دوم: با فرض $b=0$، خم به صورت روبرو در می‌آید: $\vec{r}(t)=(a\cos\omega t\,,\,a\sin\omega t\,,0)$

یعنی در این حالت خم یک دایره به شعاع a می‌باشد که انحناء آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود و در بین گزینه‌ها، تنها گزینه (۳) به ازای $b=0$ برابر $\frac{1}{a}$ می‌باشد. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۷۴ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases}u=xy\\ v=x-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=u+v\\ y=\dfrac{u}{u+v}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \dfrac{v}{(u+v)^2} & \dfrac{-u}{(u+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{u+v}$$

۷۵ـ گزینه «۲»

$$\nabla f=(2x,-2z,-2y)\Big|_{(1,1,1)}=(2,-2,-2)$$

بردار u را باید طوری انتخاب کنیم که $\nabla f.u=0$ باشد، که با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) صحیح است.

۷۶ـ گزینه «۳» زاویه بین دو رویه،برابر زاویه بین بردارهای گرادیان آنها می‌باشد.

$$\nabla f_1=(2x,2y,0)\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)}=(1,\sqrt{3},0)\ ,\ \nabla f_2=(2(x-1),2y,2z)\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)}=(-1,\sqrt{3},0)$$

$$\cos\theta=\frac{\nabla f_1.\nabla f_2}{|\nabla f_1||\nabla f_2|}=\frac{-1+3+0}{2\times 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

۷۷ـ گزینه «۳» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi^2}\int_{\sqrt{x}}^{\pi}\sin\frac{x}{y}dydx=\int_0^{\pi}\int_0^{y^2}\sin\frac{x}{y}dxdy=\int_0^{\pi}-y\cos\frac{x}{y}\Big|_0^{y^2}dy$$

$$=\int_0^{\pi}(-y\cos y+y)dy=(-y\sin y-\cos y+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{\pi}=2+\frac{\pi^2}{2}$$

۷۸ـ گزینه «۲» در روی خم $y=x^2$، انتگرال، منحنی الخط داده شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_C Mdx+Ndy=\int_{-1}^{1}((x^2-x^2)dx+(x^4-x^2)2xdx)=\int_{-1}^{1}(2x^5-2x^4-x^2+x^2)dx=\frac{-2}{15}$$

۷۹ـ گزینه «۲»

$$M=\int\delta dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\frac{1}{\rho}.\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^{\pi}\sin\phi.\int_1^{2}\rho d\rho=6\pi$$

۸۰ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F.nd\sigma=\iiint_V divFdV=\iiint_V(x^2+2y^2+z^2)dV$$

چون ناحیه انتگرال‌گیری، بیضی‌گون $x^2+\dfrac{y}{(1/\sqrt{2})^2}+z^2=1$ می‌باشد، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta\ ,\ y=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\phi\sin\theta\ ,\ z=\rho\cos\phi\ \Rightarrow J=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi$$

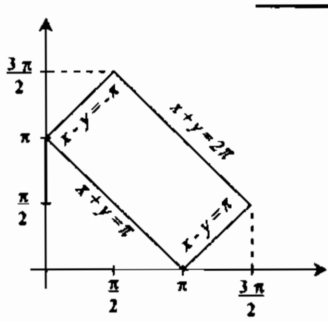
در این صورت:

$$\iint_S F.nd\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^{\pi}\sin\phi.\int_0^{1}\rho^4d\rho=\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$$

۸۱ـ گزینه «۱» به طور کلی وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از فرمول روبرو به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

۸۲ـ گزینه «۲» با توجه به تابع مقابل انتگرال از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\Rightarrow J=\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه معادلات مرزهای ناحیه S به صورت $x+y=\pi$، $x+y=2\pi$ و $x-y=\pm\pi$ هستند، بنابراین مرزهای S در دستگاه جدید به صورت $\pi\le v\le 2\pi$ و $-\pi\le u\le\pi$ در می‌آیند.

$$\iint_S(x-y)\sin(x+y)dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}u\sin vdvdu=\int_{-\pi}^{\pi}udu\times\int_{\pi}^{2\pi}\sin vdv=0$$

۸۳ـ گزینه «۱» به طور کلی راستای بیشترین افزایش، راستای بردار گرادیان می‌باشد.

$$\nabla f=a\phi'(ax+by+cz)\vec{i}+b\phi'(ax+by+cz)j+c\phi'(ax+by+cz)\vec{k}=(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\phi'(ax+by+cz)$$

۸۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. منظور از $\dfrac{\partial f}{\partial n}$، مشتق سوئی f در جهت بردار واحد $\vec{n}$ می‌باشد. بنابراین: $\iint_S\dfrac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\iint_S\nabla f.nd\sigma$

صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. در این صورت تصویر کره داده شده در صفحه xy داخل دایره $x^2+y^2=a^2$ در ربع اول خواهد بود. از طرفی:

$$f=Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow\nabla f=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

اگر معادله کره داده شده را به صورت $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$nd\sigma=\frac{\nabla g}{|\nabla g.k|}dxdy=\frac{(2x,2y,2z)}{2z}dxdy=\frac{(x,y,z)}{z}dxdy\Rightarrow\nabla f.nd\sigma=\frac{1}{z}dxdy=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

در نتیجه:

$$\iint_S\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\iint_S\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta.\int_0^{a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\frac{\pi}{2}a$$

۸۵ـ گزینه «۱»

روش اول: طبق نکات گفته شده در درس $\int\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ روی هر مسیر بسته شامل مبدأ برابر 2π است، بنابراین مقدار انتگرال خواسته شده در مسأله -2π خواهد بود.

روش دوم: دایره به شعاع a را به صورت پارامتری $x=a\cos t$، $y=a\sin t$ می‌نویسیم که $t\in[0,2\pi]$. در این صورت:

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{a\sin t\times(-a\sin tdt)-a\cos t\times(a\cos tdt)}{a^2\cos^2t+a^2\sin^2t}=-dt$$

بنابراین:

$$\int_C\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}-dt=-2\pi$$

۸۶ـ گزینه «۴» معادله کره داده شده در مختصات دکارتی $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4a^2=0$ و معادله استوانه $x^2+(y-a)^2=a^2$ می‌باشد. صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. واضح است که تصویر سطح کره بر صفحه xy درون دایرهٔ $x^2+(y-a)^2=a^2$ قرار دارد. از طرفی:

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g.k|}dA=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA=\frac{2a}{z}dA=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dA$$

بنابراین:

$$\text{مساحت}=\iint\frac{|\nabla g|}{|\nabla g.k|}dA\ \xlongequal{\text{مختصات قطبی}}\ \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\times rdrd\theta=2a\int_0^{\pi}-\sqrt{4a^2-r^2}\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}(2a-2a|\cos\theta|)d\theta=4a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\theta)d\theta)=4a^2(\pi-2)$$

۸۷ـ گزینه «۱»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-z+y^2}{2z-x}\bigg|_{(1,2,-1)}=-\frac{1+4}{-2-1}=\frac{5}{3}$$

۸۸ـ گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=x^3-yz+xz^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(3x^2+z^2,-z,-y+2xz)=(4,-1,-2)$$

$$\vec{u}=\frac{i+2j-k}{\sqrt{1+4+1}}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}})$$

$$D_u f=\vec{\nabla} f.\vec{u}=(4,-1,-2)(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}})=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

۸۹ـ گزینه «۴» مسأله را می‌توان به روش ضرایب لاگرانژ حل نمود، ولی جایگذاری مستقیم در این مورد ساده‌تر می‌باشد.

$$x=6-2y \Rightarrow z=(6-2y)^2+y^2+(6-2y)y=3y^2-18y+36$$

$$z'_y=6y-18=0 \Rightarrow y=3, x=0 \Rightarrow z=9$$

۹۰ـ گزینه «۳» مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ را می‌توان به روش مشتق‌گیری زنجیری محاسبه کرد، ولی جایگزینی و سپس مشتق‌گیری ساده‌تر می‌باشد.

$$z=r^2\cos^2\theta+\mathrm{Arctg}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=r^2\cos^2\theta+\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=2r\cos^2\theta+0=2r\cos^2\theta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r}\bigg|_{(1,\frac{\pi}{4})}=2\times1\times\cos^2\frac{\pi}{4}=1$$

عشق تنها مرضی است که بیمار از آن لذت می‌برد. **«افلاطون»**

تجربه بهترین درس است هر چند که حق‌التدریس آن گران باشد. **«کارلایل»**

تست‌های سراسری ۱۳۸۶

MBA

۱ـ فاصله مرکز ثقل جسم همگن محدود به رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=4$ از صفحه xoy چقدر است؟

۱) $\frac{11}{4}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۲ـ متحرکی در صفحه چنان حرکت می‌کند که در لحظه $r=4$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$ مقادیر $\frac{dr}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{d\theta}{dt}=\frac{-1}{2}$ است. اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی در این لحظه چقدر است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 1

۳ـ در تابع $z=\frac{\log x-\log y}{x^2+y^2}$ اگر $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+az=0$ باشد، a کدام است؟

۱) $\log e$ ۲) $\mathrm{Ln}10$ ۳) -2 ۴) 2

۴ـ اگر $u=\frac{1}{2}x-3y$ و $u.v=2y$ باشد، حاصل $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$، کدام است؟

۱) u ۲) v ۳) $u+v$ ۴) $u-v$

۵ـ حاصل $\int_0^1\int_x^{2-x}\frac{x}{y}dydx$ برابر LnA است، A کدام است؟

۱) $\frac{4}{e}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e}{4}$

۶ـ حاصل $\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z)dxdz+(xy+y^2z)dxdy$ که در آن S سطح نیم‌کره به معادله $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ می‌باشد، چند برابر a^5 است؟

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷ـ بردار ویژه نظیر بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix}-1&6&4\\0&4&2\\0&-6&-3\end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0\\-a\\2a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}0\\-2a\\3a\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1\\-2a\\3a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-1\\2a\\3a\end{bmatrix}$

۸ـ حاصل $\oint_C 2xyz^3dx+x^2z^3dy+3x^2yz^2dz$ که در آن منحنی C فصل مشترک استوانه $y^2+x^2=4$ با صفحه به معادله $x+2z=0$ باشد، برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 4 ۴) 8

۹ـ اگر $f(x,y,z)=\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\vec{n}$ بردار قائم بر نیم‌کره $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ باشد، مشتق سویی تابع f در امتداد بردار n چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 2 ۴) 4

۱۰ـ صفحه قائم بر منحنی (C) فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=5$ و رویه $z=xy$ در نقطه $(2,-1,-2)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) 5 ۲) 3 ۳) -4 ۴) -6

۱۱ـ معادله دیفرانسیل $x^2y'''+3xy''+y'=x^2$ با تعویض متغیر مناسب به کدام صورت بیان می‌شود؟

۱) $y'''+y'=(\mathrm{Ln}t)^2$ ۲) $y'''+y'=\mathrm{Ln}t$ ۳) $y'''=2e^{2t}$ ۴) $y'''=e^{2t}$

ریاضی

۱۲ـ کدام حکم در مورد نقاط $M_1(0,-4,0)$ و $M_2(-1,-2,-4)$ متعلق به سطح $z = 4xy^2 + xy^3 + x^2y^2$ درست است؟

۱) M_2 نقطهٔ مینیمم است و M_1 نه ماکزیمم است و نه مینیمم.
۲) M_1 و M_2 نقطه‌های مینیمم هستند.
۳) M_1 و M_2 نقطه‌های ماکزیمم هستند.
۴) هیچ‌کدام از نقاط M_1 و M_2 اکسترمم نیست.

۱۳ـ می‌خواهیم جعبه مکعب مستطیل شکل دربازی با حجم ثابت ۱۶ بسازیم. ابعاد جعبه را طوری تعیین می‌کنیم تا مساحت کل حداقل شود. مساحت جعبه کدام است؟

۱) $8\sqrt[3]{2}$ ۲) $16\sqrt[3]{2}$ ۳) $24\sqrt[3]{2}$ ۴) $64\sqrt[3]{2}$

۱۴ـ نقاط $A(2,1,-1)$ و $B(1,1,1)$، $C(2,-1,1)$ مفروض‌اند، برداری هم‌راستا با نیمساز زاویه $\hat{ABC}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}<2,1,-1>$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}<2,-1,2>$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}<2,-2,-2>$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}<2,2,-2>$

۱۵ـ صفحه‌ای از نقطه $A(2,3,4)$ گذشته و حجم محصور بین آن و صفحات مختصات می‌نیمم شده است، این حجم کدام است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۱۲

۱۶ـ انتگرال دوگانه زیر پس از تعویض ترتیب با کدام انتگرال مکرر برابر است؟

$$I = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{y=0}^{y=x} f(x,y)dy\right)dx + \int_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$$

۱) $I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=2y}^{\sqrt{1-2y^2}} f(x,y)dx\right)dy$

۲) $I = \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x=y}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx\right)dy$

۳) $I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$

۴) $I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$

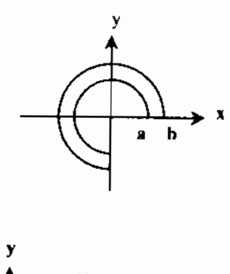
۱۷ـ اگر $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y) \neq 0 \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$، $f_x(0,0)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) $\frac{y|y|}{(|x|+|y|)^2}$

۱۸ـ اگر $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مشتق سویی f در مبدأ در کدام جهت موجود است؟

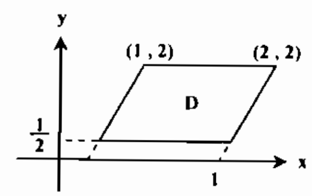
۱) $\vec{i}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

۱۹ـ ناحیهٔ D در شکل مقابل بخشی از صفحهٔ xoy و محدود به دو دایره به شعاع‌های a و b است. اگر $\delta(x,y) = |x| + |y|$ چگالی (جرم مخصوص) هر نقطه از ناحیهٔ جرم‌دار باشد جرم کل ناحیه کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}(b^3 - a^3)$ ۲) $2(b^3 - a^3)$ ۳) $\frac{3}{4}(a^3 - b^3)$ ۴) $\frac{1}{6}(a^3 - a^2 - b^3 + b^2)$

۲۰ـ مقدار انتگرال $I = \iint_D \frac{(y-2x)^6}{y^4}dA$ که در آن D ناحیهٔ شکل مقابل است، کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{21}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۲۱ـ مساحت قسمتی از رویه $z = x^2 - y^2$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار داردکدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}(\sqrt{17}-1)$ ۲) $\frac{7\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ ۳) $\frac{17\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ ۴) $\frac{37}{6\pi}(17\sqrt{17}-1)$

۲۲ـ اگر Σ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $F(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$، مقدار $A = \iint_\Sigma F.nds$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}\pi$ ۲) $8\sqrt{2}\pi$ ۳) $16\sqrt{2}\pi$ ۴) $32\sqrt{2}\pi$

۲۳ـ حاصل $\int_C (x+y+z)ds$ که در آن C محل برخورد صفحه $y = x$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در یک هشتم اول با جهت از نقطه $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ به $(0,0,2)$ می‌باشد کدام است؟

۱) $4 + 4\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $4 + 2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2} + 2$

۲۴ـ مساحت قسمتی از رویه به معادله $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ وقتی که تصویر این قسمت از رویه بر صفحه xy ناحیه محدود به دایرهٔ $4x^2 + 4y^2 = 1$ باشد کدام است؟

۱) $(\sqrt{3}-1)\pi$ ۲) $(2-\sqrt{3})\pi$ ۳) $(\sqrt{3}+1)\pi$ ۴) $(2+\sqrt{3})\pi$

۲۵ـ منحنی به معادله $y = x^2 + 3$ مفروض است متحرکی از نقطهٔ $(0,3)$ روی منحنی با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه حرکت می‌کند. شتاب متحرک روی منحنی در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{17\sqrt{17}}$ ۲) $\frac{4}{17\sqrt{17}}$ ۳) $\frac{1}{17\sqrt{17}}$ ۴) $\frac{9}{17\sqrt{17}}$

۲۶ـ صفحه P به معادله $3x + y + z = 1$ و نقاط $A(1,0,2)$ و $B(2,2,4)$ مفروض‌اند. به ازای کدام نقطهٔ M روی صفحه P مقدار $|MA - MB|$ ماکسیمم است؟

۱) $M(-5,6,10)$ ۲) $M(-5,8,8)$ ۳) $M(5,-6,-8)$ ۴) $M(5,-8,-6)$

عمران

۲۷ـ تابع $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ وقتی که $(x,y) \to (0,0)$ دارای حدی:

۱) برابر ۱- است. ۲) برابر ۱ است. ۳) برابر ∞ است. ۴) نیست.

۲۸ـ مقدار انتگرال $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} (2 + x + \sin z)dxdydz$ برابر با چیست؟

۱) πa^3 ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{4}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۲۹ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ برابر با چیست؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۳۰ـ کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y,z) = (x,y,z)$ روی مارپیچ $\vec{R}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ برابر چیست؟

۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۲) $2\pi - 1$ ۳) $\pi - \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

۳۱ـ مقدار انتگرال $I = \iint_S \overline{CurlF}.\vec{n}dS$ که در آن S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که در بالای صفحه xy قرار دارد و i بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x,y,z) = (y^2\cos xz, x^3e^{yz}, e^{-xyz})$ برابر چیست؟

۱) ۰ ۲) 2π ۳) 6π ۴) 12π

۳۲ـ مقدار انتگرال روی سطح $\iint_S (x^2+y^2)dS$ که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد. برابر با چیست؟ (راهنمایی: از قضیه دیورژانس استفاده کنید.)

۱) $\frac{8}{3}\pi a^4$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^4$ ۳) $\frac{8}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{4}{3}\pi a^3$

۳۳ـ مقدار انتگرال $I = \oint_C y^2dx + xdy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، برابر با چیست؟

۱) 4π ۲) 3π ۳) 2π ۴) π

مکانیک

۳۴ـ بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\overline{R(t)} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ کدام است؟

۱) $(-\cos t)i + (\sin t)j$ ۲) $(-\cos t)i + (-\sin t)j$ ۳) $(\cos t)i + (-\sin t)j$ ۴) $(\cos t)i + (\sin t)j$

۳۵ـ فرض کنید $\iiint dxdydz = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dzdydx$. حدود انتگرال سمت راست کدام است؟

۱) $\int_0^2 \int_0^{1-z} \int_0^2 dxdydz$ ۲) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dxdydz$ ۳) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dxdydz$ ۴) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dxdydz$

۳۶ـ فرض کنید $\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$ و S رویه بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$، و $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر بیضی‌گون S و رو به خارج باشد.
مقدار انتگرال رویه‌ای زیر کدام است؟

$$\iint_S (\vec{F}.\vec{n})d\sigma \ , \ (a > 0, b > 0, c > 0)$$

۱) $\pi a^2b^2c^2$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^2b^2c^2$ ۳) $\pi abc(a+b+c)$ ۴) $\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$

۳۷ـ بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه زیر در نقطه $(-3,2,5)$ کدام است؟

$$z = x^2 - y^2 , xyz + 30 = 0$$

۱) $9i - 46j + 130k$ ۲) $9i + 46j + 130k$ ۳) $9i - 46j - 130k$ ۴) $9i + 46j - 130k$

۳۸ـ اگر دو بردار $A \in R^3$ و $B \in R^3$ غیر صفر بوده و در یک راستا نباشند و دو ستون ماتریس $M = [A \ \ B]$ از این دو بردار تشکیل شده باشد، آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد X^tM^tMX، $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in R^2$، صحیح است؟

۱) عبارت مذکور مثبت است به ازای هر $X \neq 0$
۲) به ازای بردارهای $X \neq 0$ هر علامتی را می‌تواند داشته باشد.
۳) عبارت مذکور صفر هم می‌تواند باشد به ازای برخی $X \neq 0$
۴) عبارت مذکور منفی هم می‌تواند باشد به ازای برخی $X \neq 0$

۳۹ـ مقدار انتگرال $\oint_C ydx + 3xdy$ روی خم بیضی $C: x^2 + 4y^2 = 1$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

۴۰ـ تابع $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد این تابع درست است؟

۱) $(0,0)$ و $(3,3)$ هر دو نقطه زینی تابع f هستند.
۲) $(0,0)$ نقطه زینی و $(3,3)$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است.
۳) $(0,0)$ نقطه مینیمم نسبی و $(3,3)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.
۴) $(0,0)$ نقطه زینی و $(3,3)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

معدن

۴۱ـ شکل منحنی به معادله $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$ کدامیک از منحنی‌های داده شده است؟

۱) هذلولی است. ۲) بیضی است. ۳) سهمی است. ۴) دو خط مستقیم است.

۴۲ـ اگر $f(x,y,z) = xyz + e^{xz}$، آنگاه حاصل divgradf برابر است با:

۱) $(x^2 + y^2)e^{xy}$ ۲) $(z^2 + y^2)e^{zy}$ ۳) $(x+z)e^{xz}$ ۴) $(x^2 + z^2)e^{xz}$

۴۳ـ می‌دانیم تابع برداری X به صورت $\vec{X} = (2x^3 - 2xz^2, 3x^2y + y^3 - yz^2, 4zx^2 + 2zy^2)$ تعریف شده. CurlX مساوی کدامیک از عبارات داده شده است.

۱) $6zy\vec{i} - 12xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$ ۲) $6zy\vec{i} + 12xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$ ۳) $6zy\vec{i} + 12xz\vec{j} - 6xy\vec{k}$ ۴) $6zy\vec{i} - 12xz\vec{j} - 6xy\vec{k}$

۴۴ـ تابع پتانسیل تابع برداری $\vec{F} = (yze^{xyz} - 4x)\vec{i} + (xze^{xyz} + z)\vec{j} + (xye^{xyz} + y)\vec{k}$ برابر است با:

۱) $\phi = e^{xyz} - 2x^2 + zy + c$
۲) $\phi = e^{xyz} - 2x^2 - zy + c$
۳) $\phi = e^{xyz} + 2x^2 + zy + c$
۴) $\phi = zy - e^{xyz} - 2x^2 + c$

۴۵ـ اگر $C: x^2 + y^2 = r^2$ در جهت مثبت، آنگاه حاصل $\oint_C \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) π ۳) 2π ۴) $2\pi r$

۴۶ـ حجم مشترک بین دو استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را حساب کنید.

۱) $3a^3$ ۲) $16a^3$ ۳) $\frac{16}{3}a^3$ ۴) $\frac{3}{16}a^3$

۴۷ـ فرض کنید $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^{12} + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$، در این صورت کدام گزاره درست است؟

۱) f در $(0,0)$ پیوسته است.
۲) f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.
۳) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ وجود ندارند.
۴) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ وجود دارند ولی f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴۸ـ شار میدان $\vec{F} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j}$ در امتداد بیضی $y = 4\sin t$ و $x = \cos t$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ و رو به خارج را پیدا نمائید.

۱) -3π ۲) -4π ۳) 2π ۴) -2π

۴۹ـ مشتق $f(x,y,z) = x^2 - xy^2 - z$ در نقطه $P_0(1,1,0)$ و در جهت بردار $\vec{a} = 2i - 3j + 6k$ را بیابید.

۱) 4 ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

آمار

۵۰ـ زاویه بین دو صفحه $2x + y - 7z + 11 = 0$ و $5x - 2y + 5z - 12 = 0$ کدام است؟

۱) ۳۰ درجه ۲) ۷۵ درجه ۳) ۹۰ درجه ۴) ۱۲۰ درجه

۵۱ـ جرمی با چگالی $p(x,y) = 1 + 3x + y$ در ناحیهٔ مثلثی شکل به رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,2)$ توزیع شده است. اندازهٔ جرم کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) 2 ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) 5

۵۲ـ مقدار $\iint_A e^{-2x-2y}dxdy$ که در آن $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) 1 ۳) 6 ۴) ∞

۵۳ـ مقدار انتگرال خط $\int_C x^4dx + xydy$ که در آن C مثلثی به رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$ است و در جهت عکس عقربه‌های ساعت طی می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۵۴ـ حجم محصور بین صفحه xoy و سهمیگون $z = 1 - x^2 - y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 1

۵۵ـ مقدار انتگرال تابع $f(x,y) = xy$ در ناحیه $0 < x < y < 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۵۶ـ انتگرال سه‌گانه $I=\iiint_V (x+y+z)^2 dV$ که در آن V ناحیهٔ محدود به صفحه $x+y+z=1$ و صفحات مختصات است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۵۷ـ معادلهٔ صفحه مماس بر سهمیگون $z=2x^2+y^2$ در نقطه‌ای به طول ۱ و عرض ۲ کدام است؟

۱) $4x-2y-z=-3$ ۲) $4x+2y-z=-3$ ۳) $4x-2y-z=3$ ۴) $4x+2y-z=3$

۵۸ـ اگر $z=e^x\sin y$ ، $x=st^2$ و $y=s^2t$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $t=0$ و $s=1$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۵۹ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ در نقطه $(1,2)$ و در جهت $u=(\frac{\sqrt3}{2},\frac12)$ کدام است؟

۱) $-\frac12(13+3\sqrt3)$ ۲) $\frac12(13-3\sqrt3)$ ۳) $\frac12(3\sqrt3-13)$ ۴) $\frac12(13+3\sqrt3)$

۶۰ـ نقطه $(-2,3)$ و مقدار ۱۳- برای تابع $f(x,y)=x^2+4x+y^2-6y$ چه نوع نقطه و مقداری هستند؟

۱) نقطه ماکسیمم و مقدار ماکسیمم نسبی
۲) نقطه می‌نیمم نسبی و مقدار می‌نیمم نسبی
۳) نقطه زینی و مقدار معمولی
۴) نقطه غیر بحرانی و مقدار معمولی

مکاترونیک

۶۱ـ فرض کنید C مسیری مثلثی به رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(0,1)$ است که در جهت مثلثاتی طی می‌شود. $\int_C x^2dx+xydy$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac12$ ۳) $\frac13$ ۴) $\frac16$

۶۲ـ مشتق سویی تابع $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ در نقطه $(1,0)$ و در سویی که زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$ معین می‌کند کدام است؟

۱) $\frac32$ ۲) $\frac32\sqrt3$ ۳) $\frac32(\sqrt3-1)$ ۴) $\frac32(\sqrt3+1)$

۶۳ـ معادلات خط قائم بر رویهٔ $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ در نقطهٔ $(-2,1,-3)$ کدامند؟

۱) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ ۲) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-\frac23}$ ۳) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{3z-9}{2}$ ۴) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{3}$

۶۴ـ مؤلفه‌های مماسی و قائم متحرکی با مختصات $x(t)=2t^2$ و $y(t)=t^3$ ، $t\ge 0$ در لحظهٔ $t=1$ کدامند؟

۱) $a_T=10, a_N=\frac35$ ۲) $a_T=\frac{17}{25}, a_N=\frac25$ ۳) $a_T=\frac{14}{5}, a_N=\frac75$ ۴) $a_T=\frac{34}{5}, a_N=\frac{12}{5}$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۶۵ـ انحنای منحنی $y=\frac16x^3$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac58$ ۲) ۸ ۳) $\frac{8}{5\sqrt5}$ ۴) $\frac{5\sqrt5}{8}$

۶۶ـ $\int_0^1\int_x^1 \frac{\sin y}{y}dydx$ کدام است؟

۱) $1-\cos1$ ۲) $1+\sin1$ ۳) $\cos1$ ۴) ۲

۶۷ـ مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R(3y^2-x)dA$ که در آن $R=[0,2]\times[1,2]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۱۲

۶۸ـ مرکز جرم سیمی با چگالی $\delta=2(1-y)$ و به شکل نیم دایره که در نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ به محور xها بسته شده است و در نیم‌صفحه بالایی قرار دارد، کدام است؟

۱) $(0,\frac12)$ ۲) $(0,\frac{4+\pi}{2(\pi-2)})$ ۳) $(0,\frac{4-\pi}{2(\pi-2)})$ ۴) $(0,\frac{4-\pi}{2(\pi-2)})$

۶۹ـ کدام میدان پایستار است؟

۱) $F(x,y)=yi-xj$ ۲) $F(x,y)=2xyi+xy^2j$
۳) $F(x,y)=(3+2xy)i+(x^2-3y^2)j$ ۴) $F(x,y)=(x^2+y^2)i+(x^2+y^2)j$

۷۰ـ مساحت محدود به خم $r(t)=t^2i+(\frac{t^3}{3}-t)j$ ، $-\sqrt3\le t\le\sqrt3$ کدام است؟

۱) $\frac15$ ۲) $\frac{\sqrt3}{5}$ ۳) $3\sqrt3$ ۴) $\frac{3\sqrt3}{5}$

۷۱ـ مقدار $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi a}{2}$ ۲) $\frac{\pi a^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۴) $\frac{\pi a^4}{8}$

۷۲ـ ماکسیمم خمیدگی تابع $y=e^x$ کدام است و به ازای چه مقداری از x به دست می‌آید؟

۱) $x=0, 2\sqrt2$ ۲) $x=1,e$ ۳) $x=0,\frac{1}{2\sqrt2}$ ۴) $x=1,\frac{e}{1+e}$

۷۳ـ معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=2$ معرف کدام رویه است؟

۱) کره ۲) بیضی‌گون ۳) هذلولی گون یک پارچه ۴) هذلولی گون دو پارچه

۷۴ـ ماکسیمم و می‌نیمم تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ نسبت به قید $x^2+y^2=1$ کدام‌اند؟

۱) $-1,0$ ۲) $-1,1$ ۳) $0,1$ ۴) $-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}$

۷۵ـ مشتق سویی تابع $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ در نقطه $(1,2)$ و در سوی $u=(\frac{\sqrt3}{2},\frac12)$ کدام است؟

۱) $-\frac12(13+3\sqrt3)$ ۲) $\frac12(13-3\sqrt3)$ ۳) $\frac12(13+3\sqrt3)$ ۴) $\frac12(13\sqrt3-3)$

۷۶ـ اگر $z=e^x\sin y$ ، $x=st^2$ و $y=s^2t$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $s=0$ و $t=1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

۷۷ـ معادلهٔ صفحه مماس بر سهمی‌گون $z=2x^2+y^2$ در نقطه $(1,1,3)$ کدام است؟

۱) $4x-2y-z+3=0$ ۲) $4x-2y+z+3=0$ ۳) $4x+2y-z-3=0$ ۴) $4x-2y-z+2=0$

۷۸ـ کدام تابع در نقطه $(0,0)$ می‌تواند با تعریف مجدد (در صورت لزوم) به تابع پیوسته‌ای در آن نقطه تبدیل شود؟

۱) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ ۲) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ ۳) $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ۴) $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

۷۹ـ مساحت بخشی از رویهٔ $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=2$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{13}$ ۲) $\frac{13\pi}{3}$ ۳) $\frac{13}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{13}$

۸۰ـ شار برونسوی میدان $F(x,y)=(x-y)i+xj$ گذرنده از دایرهٔ C به معادلات پارامتری $0\le t\le 2\pi$ و $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) ۰ ۲) π ۳) 2π ۴) ۲

۸۱ـ گردش تابع برداری $F(x,y)=(x-y)i+xj$ روی دایره واحد کدام است؟

۱) $\frac12$ ۲) π ۳) 2π ۴) ۱

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶

۱ـ گزینه «۲»

$$M_{xy}=\iiint zdV \xrightarrow{\text{مختصات استوانه‌ای}} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 zrdzdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(16-r^4)drd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(16r-r^5)dr=\frac{64\pi}{3}$$

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4r-r^3)drd\theta=8\pi$$

بنابراین فاصله مرکز ثقل از مبدأ $\bar{z}=\dfrac{\frac{64\pi}{3}}{8\pi}=\dfrac{8}{3}$ است.

۲ـ گزینه «۳»

$$V=\frac{dr}{dt}\vec{r}+r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta}=\frac{dr}{dt}(\cos\theta,\sin\theta)+r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta,\cos\theta)=(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,,\,\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta)$$

$\Rightarrow$ اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی $=\dfrac{dr}{dt}\cos\theta-r\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}-4(\dfrac{-1}{2})\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$z=\frac{\log x-\log y}{x^2+y^2}=\frac{\log\frac{x}{y}}{x^2+y^2}$$

بنابراین z یک تابع همگن از درجه ۲- می‌باشد، و در نتیجه طبق قضیه اویلر:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+2z=0$$

۴ـ گزینه «۱» از روابط داده شده نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}uv \\ x=2u+3uv \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 2+3v & 3u \\ \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \end{vmatrix}=u+\frac{3}{2}uv-\frac{3}{2}uv=u$$

۵ـ گزینه «۱» مشابه بسیاری از تست‌های فصل ۳ کتاب می‌باشد.

$$\int_0^1\int_x^{2-x}\frac{x}{y}dydx=\int_0^1(xLny\Big|_x^{2-x})dx=\int_0^1(xLn(2-x)-xLnx)dx=Ln\frac{4}{e}$$

۶ـ گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}=(xz^2,x^2y-z,xy+y^2z) \Rightarrow div\vec{F}=z^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \text{شار}=\int_V(x^2+y^2+z^2)dV \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\rho^2\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^a\rho^4d\rho=\frac{2\pi}{5}a^5$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -6 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1-\lambda)((4-\lambda)(-3-\lambda)+12)=0 \Rightarrow \lambda=-1,0,1$$

پس $\lambda=1$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس می‌باشد.

$$AX=\lambda X \Rightarrow \begin{cases} -x+6y+4z=x \\ 4y+2z=y \\ -6y-3z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y-2z=0 \\ 3y+2z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow (0,-2a,3a)$$

۸ـ گزینه «۱» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=(2xyz^3,x^2z^3,3x^2yz^2) \Rightarrow curl\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix}=(0,0,0) \Rightarrow \int_C F.dr=\iint_A curlF.ndS=0$$

۹ـ گزینه «۲»

$$z=\sqrt{16-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=16=f'(x,y,z)$$

$$\vec{n}=\frac{\nabla f'}{|\nabla f'|}=\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=(\frac{x}{4},\frac{y}{4},\frac{z}{4})$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \nabla f=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

$$\Rightarrow \text{مشتق سوئی}=\nabla f.\vec{n}=\frac{x^2}{4(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^2}{4(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^2}{4(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{4}$$

۱۰ـ گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-5=0 \Rightarrow \nabla f=(2x,2y,0)$$

$$g(x,y,z)=xy-z=0 \Rightarrow \nabla g=(y,x,-1)$$

بردار نرمال صفحه موردنظر $\vec{N}=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ y & x & -1 \end{vmatrix}=(-2y,+2x,2x^2-2y^2)=(2,4,6)$

$$\Rightarrow 2(x-2)+4(y+1)+6(z+2)=0 \Rightarrow x+2y+3z+6=0$$

برای به دست آوردن نقطه تلاقی صفحه با محور x ها قرار می‌دهیم $y=z=0$، در این صورت: $x+6=0 \Rightarrow \boxed{x=-6}$

۱۱ـ گزینه «۴» با ضرب طرفین معادله در x، معادله به صورت $x^3y'''+3x^2y''+xy'=x^3$ در می‌آید که یک معادلهٔ اویلر می‌باشد. می‌دانیم برای حل معادله اویلر از تغییر متغیر $x=e^t$ استفاده می‌شود که در این صورت معادله به شکل مقابل در می‌آید: $y'''=e^{3t}$

۱۲ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x=4y^2+y^3+2xy^2 \\ f_y=8xy+3xy^2+2x^2y \end{cases}$$

در هر دو نقطه M_1 و M_2، مقادیر f_x و f_y برابر صفرند. پس این نقاط، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2y^2\times(8x+6xy+2x^2)-(8y+3y^2+4xy)^2$$

در نقطه M_1، مقدار $\Delta<0$ است. پس M_1 نقطه زینی است. در نقطه M_2، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ پس M_2 نقطه می‌نیمم است.

۱۳ـ گزینه «۳» طول، عرض و ارتفاع مستطیل را x، y و z فرض می‌کنیم. در این صورت حجم مکعب مستطیل $f(x,y,z)=xyz=16$ و مساحت جانبی مکعب مستطیل در باز $g(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ است. $xyz=16 \Rightarrow x^2y^2z^2=2^8 \Rightarrow xy(2xz)(2yz)=2^{10}$
می‌دانیم اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مقداری ثابت باشد، حاصل جمع آنها وقتی می‌نیمم است که متغیرها با هم برابر باشند، یعنی:

$$xy=2xz=2yz \Rightarrow y=2z\,,\,x=2z\,,\,x=y$$

از روابط فوق و $xyz=16$ نتیجه می‌شود:

$$4z^3=16 \Rightarrow z=\sqrt[3]{4}\,,\,y=2\sqrt[3]{4}\,,\,x=2\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \text{جانبی }S=xy+2xz+2yz=4\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{16}=24\sqrt[3]{2}$$

۱۴ـ گزینه «۳»

$$\overline{BA}=(+1,0,-2)\ ,\ BC=(1,-2,0)$$

بردار $\overline{BD}$ و هر مضربی از آن نیمساز است $\Rightarrow$ $(2,-2,-2)=\overline{BD}=\overline{BA}+\overline{BC}$: نیمساز زاویه $\hat{ABC}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۲»

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ـ گزینه «۴»

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۳»

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-1}{h}=\infty$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸ـ گزینه «۱»

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹ـ گزینه «۲» با توجه به تقارن شکل در نواحی اول، دوم و سوم و یکنواختی چگالی در این نواحی کافی است جرم در ناحیه اول محاسبه و در ۳ ضرب شود.

$$M=3\iint\delta dA \xlongequal{\text{قطبی}} 3\int_a^b\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta+r\sin\theta)rdrd\theta=3\int_a^b r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$$

$$=r^3\Big|_a^b(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2(b^3-a^3)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰ـ گزینه «۳»

◆ ◆ ◆ ◆

۲۱ـ گزینه «۳»

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲ـ گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$A=\iint_\Sigma F.nds=\iiint divFdV=\iiint(2+2+2)dV=6\times(\text{حجم کره }\Sigma)=6\times\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۳ـ گزینه «۱» خم C را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$x=\sqrt{2}\cos t\ ,\ y=\sqrt{2}\cos t\ ,\ z=2\sin t \qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

$$dt=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2+(-\sqrt{2}\sin t)^2+(2\cos t)^2}=2$$

$$\Rightarrow\int_c(x+y+z)ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(2\sqrt{2}\cos t+2\sin t)dt=(4\sqrt{2}\sin t-4\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}+4$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۴ـ گزینه «۲»

◆ ◆ ◆ ◆

۲۵ـ گزینه «۱»

$$y=x^2+3\Rightarrow\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

$$v=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+4x^2(\frac{dx}{dt})^2}=2\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}})=\frac{d}{dx}(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}})\frac{dx}{dt}=\frac{-8x}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}}\times\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{4}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}}\times\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{8}{(1+4x^2)^2}$$

در نقطه $x=2$، مقادیر $\frac{d^2x}{dt^2}$ و $\frac{d^2y}{dt^2}$ به ترتیب $\frac{-32}{17^2}$ و $\frac{8}{17^2}$ می‌باشند. بنابراین:

$$|a|=\sqrt{(\frac{32}{17^2})^2+(\frac{8}{17^2})^2}=\frac{8}{17\sqrt{17}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۶ـ گزینه «۴»

◆ ◆ ◆ ◆

۲۷ـ گزینه «۴» حد تابع داده شده را روی مسیر $y=mx$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

با توجه به اینکه حاصل حد به مقدار m بستگی دارد، پس تابع در $(0,0)$ دارای حد نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۸ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه دامنه انتگرالگیری نسبت به محور xها و zها متقارن است و توابع x و $\sin z$ فرد می‌باشند پس انتگرال آنها برابر صفر است.

$$\iiint(2+x+\sin z)dxdydz=2\times\text{حجم کره به شعاع }a=2\times\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{8}{3}\pi a^3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۹ـ گزینه «۳» می‌توان انتگرال را به طور مستقیم محاسبه کرد ولی شاید استفاده از مختصات قطبی بهتر باشد.

$$\int_0^1\int_{x^2}^x\frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$F(\alpha(t))=(\cos t,\sin t,t)$$

$$\alpha(t)=(\cos t,\sin t,t)\Rightarrow\alpha'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$$

$$F(\alpha(t)).\alpha'(t)=-\sin t\cos t+\sin t\cos t+t=t$$

$$\Rightarrow \text{کار}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(\alpha(t)).\alpha'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۱ـ گزینه «۴» محاسبه انتگرال بر روی سطح S ساده نیست. لذا سطح دیگری که هم مرز با آن باشد را انتخاب می‌کنیم. این سطح جدید همان تلاقی کره با صفحه xy می‌باشد.

$$z=0\Rightarrow x^2+y^2+4=8\Rightarrow x^2+y^2=4\ :\ S'\ \text{سطح}$$

$$\text{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2\cos xz & x^3e^{yz} & e^{-xyz}\end{vmatrix}\Rightarrow \text{curl}F.\vec{k}=3x^2e^{yz}-2y\cos xz$$

با توجه به اینکه در روی سطح S'، $z=0$ است، لذا $\text{curl}F.\vec{k}=3x^2-2y$. در نتیجه:

$$I=\iint_{S'}(3x^2-2y)dS'$$

با توجه به اینکه سطح S' متقارن است لذا $\int_{S'}-2yds'=0$ و چون سطح S' روی صفحه xy قرار دارد پس $dS=dA$.

$$\text{مختصات قطبی}\quad I=\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cos^2\theta.rdrd\theta=\int_0^2 3r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=12\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲ـ گزینه «۱» با توجه به راهنمایی گفته شده در مسأله از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. بردار قائم بر کره داده شده $\vec{n}=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$ است
حال تابع $\vec{F}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل $\vec{F}.\vec{n}$ برابر x^2+y^2 شود بدین منظور $\vec{F}$ را برابر $\vec{F}(x,y,z)=(ax,ay,0)$ در نظر می‌گیریم.
در اینصورت طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_S (x^2+y^2)dS=\int \vec{F}.\vec{n}\,dS \xlongequal{\text{قضیه دیورژانس}} \iiint \operatorname{div}\vec{F}dV=\iiint(a+a)dV=2a\times a \text{ حجم کره به شعاع } =\frac{8\pi}{3}a^4$$

۳۳ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=(y^2,x)\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=1-2y=1$$

$$\Rightarrow I=\iint_D(1-2y)dA=2 \text{ مساحت دایره به شعاع } =\pi\times 2^2=4\pi$$

۳۴ـ گزینه «۲»

$$R(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$$

$$V(t)=(-\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow \vec{T}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{N}=\frac{dT/dt}{|dT/dt|}=\frac{(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t,\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t,0)}{\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t}}=(-\cos t,-\sin t,0)$$

۳۵ـ گزینه «۳» توجه کنید که کران انتگرال مربوط به متغیر x مستقل از y و z می‌باشد، پس کافی است کران انتگرال دوگانه مربوط به y و z عوض شود.

۳۶ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=a+b+c$$

$$\Rightarrow \iint_S (F.n)d\sigma=\iiint \operatorname{div}F dv=(a+b+c)\times \text{ حجم بیضی‌گون } =\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$$

۳۷ـ گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=xyz+30=0\Rightarrow \nabla f=(yz,xz,xy)=(10,-15,-6)$$

$$g(x,y,z)=x^2-y^2-z=0\Rightarrow \nabla g=(2x,-2y,-1)=(-6,-4,-1)$$

$$N=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 10 & -15 & -6\\ -6 & -4 & -1\end{vmatrix}=-9i+46j-130k$$

۳۸ـ گزینه «۱»

۳۹ـ گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\int_C ydx+2xdy=\iint(\frac{\partial(2x)}{\partial x}-\frac{\partial(y)}{\partial y})dA=\iint 2dA=2\times \text{ مساحت بیضی } =\pi$$

۴۰ـ گزینه «۲»

$$f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$$

$$\begin{cases} f_x=3x^2-9y=0\\ f_y=3y^2-9x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2=3y\\ y^2=3x\end{cases}\Rightarrow$$

نقاط $(0,0)$ و $(3,3)$ نقاط بحرانی f می‌باشند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6x\times 6x-(-9)^2=36x^2-81$$

در نقطه $(0,0)$ مقدار $\Delta<0$ است پس $(0,0)$ نقطه زینی و در نقطه $(3,3)$، $f_{xx}>0$ و $\Delta>0$ است پس نقطه بحرانی نقطه می‌نیمم است.

۴۱ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$، پس منحنی داده شده سهمی است.

۴۲ـ گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=xyz+e^{xz}\Rightarrow \operatorname{grad}f=(yz+ze^{xz},xz,xy+xe^{xz})$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=z^2e^{xz}+x^2e^{xz}=(x^2+z^2)e^{xz}$$

۴۳ـ گزینه «۱»

$$\operatorname{curl}\vec{X}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x^2-2xz^2 & 2x^2y+y^2-yz^2 & 4zx^2+2zy^2\end{vmatrix}=(6yz,-12xz,6xy)$$

۴۴ـ گزینه «۱»

۴۵ـ گزینه «۳» منحنی C را می‌توان به صورت پارامتری $\alpha(t)=(r\cos t,r\sin t)$، در نظر گرفت. در این صورت:

$$\alpha'(t)=(-r\sin t,r\cos t)\Rightarrow F(\alpha(t))=(\frac{-r\sin t}{r^2},\frac{r\cos t}{r^2})\Rightarrow F(\alpha(t)).\alpha'(t)=1$$

$$\Rightarrow \int_C\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

۴۶ـ گزینه «۳» با توجه به تقارن ناحیه نسبت به z,y,x، کافی است حجم قسمتی را که در $\frac{1}{8}$ اول واقع است به دست آورده و جواب را در ۸ ضرب کنیم.

$$\Rightarrow V=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dzdydx=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16a^3}{3}$$

توضیح: این تست تا کنون حداقل ۷ بار در کنکورهای سالهای گذشته تکرار شده است.

۴۷ـ گزینه «۴» به سادگی می‌توان نشان داد f در $(0,0)$ پیوسته نیست. کافی است دو مسیر $x=0$ و $y=x^3$ را در نظر بگیرید و بنابراین f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴۸ـ گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=(2x,-3y)\Rightarrow\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}=2-3=-1$$

$$\int_C F.nds=\iint_D -1dA=-(\text{مساحت بیضی})=-\pi\times1\times4=-4\pi$$

۴۹ـ گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=x^3-xy^2-z\Rightarrow\nabla f=(3x^2-y^2,-2xy,-1)\Big|_{(1,1,0)}=(2,-2,-1)$$

$$\vec{a}=2i-3j+6k\Rightarrow\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{2}{7},\frac{-3}{7},\frac{6}{7})$$

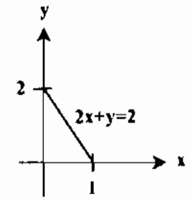
$$D_{\vec{a}}f=(2,-2,-1).(\frac{2}{7},\frac{-3}{7},\frac{6}{7})=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

۵۰ـ گزینه «۴» زاویه بین دو صفحه، برابر زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه است.

$$N_1=(2,1,-7)\quad,\quad N_2=(5,-2,5)$$

$$\cos\theta=\frac{N_1.N_2}{|N_1||N_2|}=\frac{2\times5+1\times(-2)+(-7\times5)}{\sqrt{4+1+49}\sqrt{25+4+25}}=\frac{-27}{54}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$$

۵۱ـ گزینه «۳»



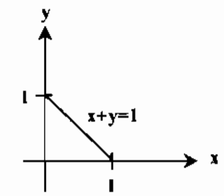
$$m=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+2x+y)dydx=\int_0^1(y+2xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{2-2x}dx$$

$$=\int_0^1(2-2x+6x-6x^2+2+2x^2-4x)dx=\int_0^1(-4x^2+4)dx=(\frac{-4}{3}x^3+4x)\Big|_0^1=\frac{8}{3}$$

۵۲ـ گزینه «۱»

$$\iint_A e^{-2x-3y}dA=\int_0^\infty e^{-2x}dx\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\times\frac{-1}{3}e^{-3y}\Big|_0^\infty=\frac{1}{6}$$

۵۳ـ گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C x^4dx+xydy=\iint_D(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x^4)}{\partial y})dA$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}ydydx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}dx=\frac{-(1-x)^3}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

۵۴ـ گزینه «۳»

$$V=\iint_D(1-x^2-y^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r-r^3)dr=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

۵۵ـ گزینه «۱»

$$I=\int_0^1\int_x^1 xydydx=\int_0^1(x.\frac{y^2}{2}\Big|_x^1)dx=\int_0^1(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2})dx=\frac{1}{8}$$

۵۶ـ گزینه «۴»

$$\iiint_V(x+y+z)^2dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x+y+z)^2dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(x+y)^3)dydx$$

$$=\int_0^1(\frac{y}{3}-\frac{1}{12}(x+y)^4)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1(\frac{1-x}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}x^4)dx=\int_0^1(\frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}x^4)dx=\frac{1}{10}$$

۵۷ـ گزینه «؟» به ازای $x=1$ و $y=2$ مقدار $z=4$ به دست می‌آید.

$$2x^2+y^2-z=0\Rightarrow\nabla f=(4x,2y,-1)=(4,4,-1)\Rightarrow 4(x-1)+4(y-2)-1(z-4)=0\Rightarrow 4x+4y-z=8$$

۵۸ـ گزینه «۳» به ازای $t=0$ و $s=1$ مقادیر $x=0$ و $y=0$ به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=e^x\sin y\times 2st+e^x\cos y\times s^2=1$$

۵۹ـ گزینه «۲»

$$f(x,y)=x^3-2xy+4y^2\Rightarrow\nabla f=(3x^2-2y,-2x+8y)$$

$$\nabla f\Big|_{(1,2)}=(-2,12)\Rightarrow D_uf=\overline{\nabla f}.\vec{u}=(-2,12).(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(12-2\sqrt{3})$$

۶۰ـ گزینه «۲»

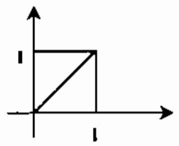
$$f(x,y)=x^2+4x+y^2-6y$$

$\begin{cases}f_x=2x+4=0\Rightarrow x=-2\\ f_y=2y-6=0\Rightarrow y=3\end{cases}\Rightarrow P(-2,3)$ نقطه بحرانی

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\times2-0^2=4$$

چون $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$، پس نقطه بحرانی، نقطه مینیمم می‌باشد.

۶۱ـ گزینه «۳» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C x^2dx+xydy=\iint_D(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2)}{\partial y})dA=\int_0^1\int_0^y ydxdy=\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}$$

۶۲ـ گزینه «۳»

$$\vec{u}=(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

$$\nabla f=(3x^2-2y,-2x+8y)\xrightarrow{x=1,y=0}\nabla f=(3,-2)$$

$$D_uf=\overline{\nabla f}.\vec{u}=(3,-3).(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$$

۶۳ـ گزینه «۲» مشابه مثال ۹۱ صفحه ۳۱ می‌باشد.

$\nabla f=(\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{3})\xrightarrow{x=-2,y=1,z=-3}\nabla f=(-1,2,-2)\Rightarrow$ معادله خط قائم : $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$

۶۴ـ گزینه «۴»

$$R(t)=(2t^2,t^3)$$

$$V(t)=(4t,3t^2)\ ,\ a(t)=(4,6t)\Rightarrow|a|=\sqrt{16+36t^2}\ \underline{\underline{t=1}}\ \sqrt{52}$$

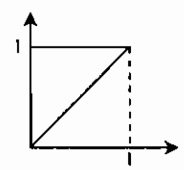
$$|V|=\sqrt{16t^2+9t^4}\Rightarrow a_T=\frac{d}{dt}|V|=\frac{32t+36t^3}{2\sqrt{16t^2+9t^4}}\ \underline{\underline{t=1}}\ \frac{68}{10}=\frac{34}{5}$$

$$a_N=\sqrt{|a|^2-a_T^2}=\sqrt{52-\frac{1056}{25}}=\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{12}{5}$$

۶۵ـ گزینه «۳» انحنای منحنی $y=f(x)$ از فرمول زیر به دست می‌آید: $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$y=\frac{1}{6}x^3\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y''=x\Rightarrow k=\frac{|x|}{(1+\frac{1}{4}x^4)^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{(\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}}}=\frac{8}{5\sqrt{5}}$$

۶۶ـ گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:



$$\Rightarrow\int_0^1\int_x^1\frac{\sin y}{y}dydx=\int_0^1\int_0^y\frac{\sin y}{y}dxdy$$

$$=\int_0^1(x\frac{\sin y}{y})\Big|_0^y dy=\int_0^1\sin ydy=-\cos y\Big|_0^1=1-\cos1$$

۶۷ـ گزینه «۴»

$$\int_0^2\int_1^2(3y^2-x)dydx=\int_0^2(y^3-xy)\Big|_0^2dx=\int_0^2(8-2x)dx=(8x-x^2)\Big|_0^2=12$$

۶۸ـ گزینه «۳»

۶۹ـ گزینه «۳»

$$P(x,y)=3+2xy\ ,\ Q(x,y)=x^2-3y^2\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=2x\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

۷۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases} \qquad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$$

$$S = 2\int |y|\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} (t - \frac{t^3}{3}) 2t dt = 4\int_0^{\sqrt{3}} (t^2 - \frac{t^4}{3}) dt = 4[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{15}]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4[\frac{(t^2)t}{3} - \frac{(t^4)t}{15}]_0^{\sqrt{3}} = 4[\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{15}] = 4[\frac{15\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{15}] = \frac{24\sqrt{3}}{15} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

۷۱ـ گزینه «۴» از تبدیل مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این صورت انتگرال موردنظر به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho.\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\, d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \times 1 \times \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{8}$$

۷۲ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. خمیدگی $y = f(x)$ از فرمول $k = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$k = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow k' = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - 3e^{2x}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^3} = 0 \Rightarrow 2e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \text{Ln}\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\text{Ln}\frac{1}{2}$$

۷۳ـ گزینه «۱» معادله داده شده را به شکل مقابل در می‌آوریم: $\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 = 2$

حال با تغییر مختصات $u = x - y$، $v = y - z$ و $w = z - x$ معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 = 2 \Rightarrow \text{معادلهٔ کره}$$

۷۴ـ گزینه «۲» واضح است که ماکسیمم به ازای $x = 1$ و $y = 0$ به دست می‌آید و مقدار آن $f(1,0) = 1$ است و همچنین می‌نیمم به ازای $x = 0$ و $y = 1$ حاصل می‌شود و مقدار می‌نیمم برابر $f(0,1) = -1$ است.

۷۵ـ گزینه «۲»

$$\nabla f = (2x^2 - 3y, -3x + 8y)\Big|_{(1,2)} = (-3, 13)$$

$$\Rightarrow D_u f = \overline{\nabla f}.\ddot{u} = (-3, 13).(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(13 - 3\sqrt{3})$$

۷۶ـ گزینه «۳» به ازای $s = 0$ و $t = 1$، مقدار $x = 0$ و $y = 0$ به دست می‌آید. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = e^x \sin y.2st + e^x \cos y.s^2$

با توجه به مقادیر متغیرها مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ برابر ۰ به دست می‌آید.

۷۷ـ گزینه «۳» معادله سهمی‌گون را به صورت $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$ می‌نویسیم، در این صورت داریم:

$$\nabla f = (4x, 2y, -1)\Big|_{(1,1,3)} = (4, 2, -1)$$

$$\Rightarrow 4(x-1) + 2(y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow 4x + 2y - z - 3 = 0$$

۷۸ـ گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هیچکدام در (۰,۰) حد ندارد بنابراین پیوسته نمی‌باشند ولی تابع $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ در نقطه (۰,۰) دارای حد یک است و بنابراین می‌توان آنرا به تابعی پیوسته تبدیل کرد.

۷۹ـ گزینه «۲» اگر سطح S را به صورت $z = h(x,y)$ باشد، آنگاه: $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2}$

و مساحت رویه برابر $\int dS$ است. بنابراین: $dS = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)} \xrightarrow{\text{قطبی}} dS = \sqrt{1 + 4r^2}$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \theta\Big|_0^{2\pi} \times \frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(\frac{27}{12} - \frac{1}{12}) = \frac{13\pi}{3}$$

۸۰ـ گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$F(x,y) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \text{div}\vec{F} = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \int_C F.nds = \iint_D \text{div}F dA = \iint_D dA = (\text{مساحت دایره}) = \pi \times 1^2 = \pi$$

۸۱ـ گزینه «۳»

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{L} = \iint_s (\nabla \times \vec{F}).ds$$

$$\oint P dx + Q dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$$

$$\oint_C (x-y)dx + xdy = \iint (1-(-1)dxdy = 2\iint dxdy = 2s = 2\pi$$

نایاب‌ترین چیزها صمیمیت و یگانگی است. **(ناپلئون بناپارت)**

تأخیر، بهتر از هرگز است. **(ضرب‌المثل انگلیسی)**

تست‌های سراسری ۱۳۸۷

MBA

۱ـ اگر S مساحت متوازی‌الاضلاعی باشد که بر روی دو بردار $v_1(a_1,b_1)$ و $v_2(a_2,b_2)$ ساخته می‌شود، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot |v_1 \quad v_2|$ کدام است؟

۱) S ۲) S^2 ۳) $\sqrt{S}$ ۴) $2S$

۲ـ نقطه متحرک در هر زمان t مسیر حرکت به معادله $x = e^t \cos t$ و $y = e^t \sin t$ را مشخص می‌کند. زاویه بین بردار شعاع حامل و بردار شتاب کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) متغیر است.

۳ـ معادله صفحه قائم بر منحنی C فصل مشترک دو رویه $z = x^2 + y^2$ و $x^2 z - y^2 = 1$ در نقطه $(1,-2,5)$ کدام است؟

۱) $4z - y = 22$ ۲) $2x + y + 4z = 20$ ۳) $4x - y + 2z = 16$ ۴) $3x + y = 5$

۴ـ اگر $u = \text{Arctg}\frac{x^2 - xy}{x+y}$ باشد، حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}\sin 2u$ ۲) $\frac{1}{2}\sin 2u$ ۳) $\frac{1}{2}\cos u$ ۴) $\frac{1}{2}\text{tg}2u$

۵ـ حجم واقع بین رویه $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$ و صفحه $z = 10$، کدام است؟

۱) 200π ۲) 400π ۳) 500π ۴) 1000π

۶ـ اگر $\vec{u} \neq \vec{v}$ و $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $\vec{w}$ عمود بر $\vec{u} - \vec{v}$
۲) $\vec{w}$ موازی $\vec{u} - \vec{v}$
۳) $\vec{v}$ و $\vec{u}$ و $\vec{w}$ موازی یک صفحه
۴) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

۷ـ اگر $u = x + y + z$ و $uv = y + z$ و $uvw = z$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$، کدام است؟

۱) $\frac{u}{v}$ ۲) $2uv$ ۳) uv^2 ۴) $u^2 v$

۸ـ حوضی به شکل مکعب مستطیل با حجم ۲۵۶ واحد مکعب مورد نیاز است. ارتفاع حوض چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق‌بندی آن می‌نیمم شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۹ـ رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ـ طول نقطه ماکسیمم تابع $z = x^3 + y^3 - 63(x+y) + 12xy$، کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۷

۱۱ـ اگر $\vec{r} = xi + yj + zk$ باشد آنگاه $\text{div}(\frac{\vec{r}}{r})$، کدام است؟

۱) $\frac{-1}{r^2}$ ۲) $\frac{-2}{r^2}$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{r}$

۱۲ـ مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ که داخل استوانه با معادله $x^2 + y^2 = 3y$ قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) $9(\pi - 1)$ ۲) $9(\pi - 2)$ ۳) $12(\pi - 1)$ ۴) $18(\pi - 2)$

۱۳ـ اگر R ناحیه محدود به بیضی $x = \cos t$ ، $y = 3\sin t$ و dA عنصر مساحت باشد، حاصل $\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$ ، کدام است؟

۱) $\frac{15\pi}{2}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 5π

۱۴ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x+2)i + (x-z)j + (y-z)k$ بر مسیری از نقطه $A(2,0,0)$ به $B(0,3,0)$، سپس به نقطه $C(0,0,6)$ و در ادامه به A با استفاده از قضیه استوکس، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۳۱

۱۵ـ جرم هر نقطه در داخل نیمکره به شعاع a برابر $(a - \rho)$ است که در آن ρ فاصله آن نقطه تا مرکز کره است. وزن این نیمکره چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{6}a^3$ ۲) $\frac{\pi}{12}a^3$ ۳) $\frac{\pi}{6}a^4$ ۴) $\frac{\pi}{12}a^4$

ریاضی

۱۶ـ حجم جسم محدود به رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ در $\mathbb{R}^3$ و $z = 0$ عبارت است از:

۱) $\frac{27\pi}{2}$ ۲) 18π ۳) $\frac{81\pi}{2}$ ۴) 81π

۱۷ـ برای تابع برداری با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ مقدار $\frac{(F' \times F'').F'''}{|F' \times F''|^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) ۱

۱۸ـ با تغییر دستگاه از دکارتی به قطبی اگر $z = x^2 - y^2$، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟

۱) $-2r^2 \sin\theta$ ۲) $-2r\sin\theta$ ۳) $r\sin 2\theta$ ۴) $2r\cos 2\theta$

۱۹ـ اگر بدانیم که مقدار انتگرال $\int_c (x + 2y + az)dx + (bx - 3y - z)dy + (4x + cy + 2z)dz$ مستقل از مسیر است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰ـ به ازای کدام مقدار m، میدان برداری $F(x,y,z) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + mxy\vec{j} - 3z^2\vec{k}$ یک میدان پایستار است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱ـ اگر $\vec{T}$ برداریکه مماس بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ باشد، $\oint_c \vec{T}.\vec{dR}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) 0 ۳) π ۴) 2π

۲۲ـ مختصات نزدیک‌ترین نقاط روی هذلولی $y^2 - x^2 = 4$ از نقطه $(2,0)$ عبارتند از:

۱) $(0,\pm 1)$ ۲) $(\pm 2, 0)$ ۳) $(1,\pm\sqrt{5})$ ۴) $(1,\pm\sqrt{8})$

۲۳ـ معادله صفحه مماس بر رویه $z = e^{3+2x+y^2}$ در نقطه $(-6,3,1)$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) $2x + 6y - z = -5$ ۲) $2x + 6y - z = 5$ ۳) $x + y - z = -2$ ۴) $x + y - z = -4$

۲۴ـ مقدار انتگرال $\iint_R (x^2 y^2 + xy^2)\,dxdy$ که در آن R مستطیل $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ می‌باشد کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵ـ با فرض $F(x,y) = \int^{xy} \sin\sqrt{t}\,dt$ ، $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۶ـ اندازه انحناء مارپیچ $x = t, y = \frac{1}{2}t^2$ و $z = \frac{1}{3}t^3$ در نقطه $A(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۷ـ کدام گزینه معادله صفحه گذرا بر نقطه $A(4,0,-2)$ و عمود بر دو صفحه $x-y+z=0$ و $2x+y-4z=5$ است؟

۱) $x+2y+z=2$ ۲) $2x-y-z=1$ ۳) $x-2y+z=2$ ۴) $2x-y-z=2$

۲۸ـ حاصل $\int_{1}^{9}\int_{\sqrt{y}}^{3}\frac{e^{x^2}-2x}{x+1}dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(e^2+\frac{1}{e})$ ۲) $\frac{1}{2}(e^2-\frac{1}{e})$ ۳) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e^2})$ ۴) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e^2})$

مکانیک

۲۹ـ معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه زیر در نقطه (۱,۱,۱) کدام است؟

$$xyz=1\ ,\ x^2+2y^2+3z^2=6$$

۱) $\begin{cases}y=z\\2y+x=3\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=z\\y+2x=3\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=z\\2y+x=3\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}y=z\\y+2x=3\end{cases}$

۳۰ـ حجم محصور به دو رویه زیر کدام است؟

$$z=x^2+y^2\ ,\ 2z=x^2+y^2+1$$

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{2\pi}{7}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۱ـ فرض کنیدS رویه بسته متشکل از کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول فضا و صفحات مختصات باشد. اگر $\vec{n}$ برداریکه قائم برویه رو به خارج و $\vec{F}=x^2i-2xyj+3zk$ باشد، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

۱) 2π ۲) 6π ۳) 4π ۴) 8π

۳۲ـ فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\cos y+ayz)\vec{i}+(axz+be^x\sin y)\vec{j}+(cxy+az)\vec{k}$. بازاء چه مقادیری از b,a و c مقدار انتگرال زیر مستقل از مسیر است؟ $\int\vec{F}.\overrightarrow{dR}$

۱) $a=b=c=-1$ ۲) $a=b=c=1$ ۳) $a=b=-1,c=1$ ۴) $a=c=-1,b=1$

۳۳ـ مشتق جهتی (سوئی) تابعf در نقطه (۱، ۰ و۱)، در جهت بردار $U=2i+j-2k$ کدام است؟

$$f(x,y,z)=x\tan^{-1}\frac{y}{z}$$

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

معدن

۳۴ـ تابع $f(x,y)=\frac{x^2+y^2-x^2y^2}{x^2+y^2}$ ، $(x,y)\neq(0,0)$ ، در $(0,0)$ چگونه تعریف شود تا در صفحه پیوسته باشد؟

۱) $f(0,0)=1$ ۲) $f(0,0)=0$

۳) $f(0,0)=-1$ ۴) $f(0,0)$ به منظور فوق قابل تعریف نیست.

۳۵ـ مقدار می‌نیمم مطلق تابع زیر چند است؟ $z=x^2-2xy+2y^2-2x+2y+1$

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 0

۳۶ـ مقدار انتگرال زیر گدام است؟

$$\int^{2}\int^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx$$

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) 1

۳۷ـ اگرC دایره $(x-2)+(y-3)^2=4$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_C(6y+x^2)dx+(y^2+2x)dy$$

۱) -16π ۲) -48 ۳) 16π ۴) 48

۳۸ـ انحناء (یا خمیدگی) خم $r(t)=(t+\cos t)i+(t-\cos t)j+\sqrt{2}\sin tk$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

آمار

۳۹ـ اگر طول بردار $\vec{v}$ یک باشد، بردار $\vec{v}\times[\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{u})]$ کدام است؟

۱) $-\vec{v}\times\vec{u}$ ۲) $(\vec{v}.\vec{u})\vec{v}$ ۳) $(\vec{v}.\vec{u})\vec{u}$ ۴) $(\vec{v}.\vec{u})(\vec{v}\times\vec{u})$

۴۰ـ ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y)=4x^2+2xy-3y^2$ بر روی مربع $0\le x\le 1$ ، $0\le y\le 1$ به ترتیب کدامند؟

۱) $0,0$ ۲) $0,4$ ۳) $-3,\frac{13}{3}$ ۴) $-3,3$

۴۱ـ برای تابع $f(x,y,z)=e^{xyz}+Ln(1+x^2+y^2+z^2)$ امتداد حداکثر افزایش در نقطه‌ی (۱,۱,۰) کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

۴۲ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin(\pi y^2)dydx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴۳ـ مقدار $\int^{\infty}\int^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۴۴ـ حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و به رویه‌های $x^2+y^2=4$ و $z^2=x^2+y^2$ محدود است، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۴۵ـ شار برونسوی میدان برداری $\vec{F}=z\vec{i}+2y\vec{j}+x\vec{k}$ از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۴۶ـ ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ در ناحیه $x^2+y^2\le 4$ کدام است؟

۱) ۰ و -4 ۲) ۲ و -2 ۳) ۴ و ۰ ۴) ۴ و -4

۴۷ـ کدام معادله معرف یک رویه دوار است؟

۱) $z=2y^4+y$ ۲) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

۳) $z^2+x^2-2y^2=y$ ۴) $z=2(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}$

۴۸ـ تاب خم $x=10t^2$ و $y=1-3t^2$ و $z=4t^2-4$ در لحظه $t=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۹ـ مقدار انتگرال خط $\int_{\gamma} 3ydx + xdy$ که در آن γ مسیر نیمدایره‌ای $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ ، $0 \le t \le \pi$ است، کدام است؟

۱) 0 ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۰ـ $\iint_D \frac{x^2}{y^4} dA$ که در آن D ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy = 2$ ، $xy = 4$ و سهمیهای $x = y^2$ و $y^2 = 3x$ است، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ۴) $\frac{1}{30}$

۵۱ـ کدام قضیه رابط انتگرال رویه و انتگرال خط است؟

۱) قضیه گرین ۲) قضیه استوکس ۳) قضیه دیورژانس ۴) قضیه مقدار میانگین

۵۲ـ کدام میدان یک میدان گرادیان است؟

۱) $F(x,y) = (xy, y)$
۲) $F(x,y) = (4x + y, x + 2y)$
۳) $F(x,y) = (xy, 2x - y)$
۴) $F(x,y) = (xy + 2, 2x + y)$

معماری کشتی

۵۳ـ نقاط C, B, A و D در یک صفحه واقعند اگر:

۱) $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 0$ ۲) $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 0$ ۳) $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) = 0$ ۴) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 0$

۵۴ـ حجم بین استوانه $z = 4 - x^2$ و صفحات $x = 0$ و $y = 0$ و $y = 6$ و $z = 0$ برابر است با:

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

۵۵ـ عبارت $\frac{d}{du}\{A.(B \times C)\}$ برابر است با:

۱) $\frac{dA}{du}.(B \times C)$
۲) $A.\{\frac{dB}{du} \times C + B \times \frac{dC}{du}\}$
۳) $A.\frac{d}{du}(B \times C)$
۴) $\frac{dA}{du}.(B \times C) + A.(\frac{dB}{du} \times C) + A.(B \times \frac{dC}{du})$

۵۶ـ سطح محصور به منحنی $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ برابر است با:

۱) a^2 ۲) πa^2 ۳) $2a^2$ ۴) $\frac{\pi}{2} a^2$

۵۷ـ وضعیت خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ با صفحه $x - 2y + z = 6$ چگونه است؟

۱) بر هم عمودند. ۲) موازی همند
۳) با زاویه 30° همدیگر را قطع می‌کنند. ۴) با زاویه 45° همدیگر را قطع می‌کنند.

۵۸ـ رویه $\rho = a\cos\varphi$:

۱) یک دلنمای دوار است. ۲) یک بیضیگون است. ۳) یک سهمیگون است. ۴) یک کره است.

مهندسی نفت

۵۹ـ به ازای چه مقداری از k دستگاه زیر جواب غیربدیهی (غیر صفر) دارد.

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ (k-1)x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

۱) -1 و $\frac{4}{9}$ ۲) 1 و $\frac{9}{4}$ ۳) 1 و $\frac{4}{9}$ ۴) 1 و $-\frac{9}{4}$

۶۰ـ اگر $u = x + y$ و $v = x - y$ باشد، مقدار $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶۱ـ مقدار می‌نیمم تابع $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - y - xy$ برابر است با:

۱) ۷- ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۲-

مهندسی کشاورزی

۶۲ـ مسیر متحرکی در مختصات قطبی به صورت $r = \frac{2}{\sin\theta + \cos\theta}$ است. این مسیر امتدادهای $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ را در A و B قطع می‌کنـد اگـر نقطه O نمایش $r = 0$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۶۳ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و I ماتریس واحد باشد، ماتریس $5A - A^2$ کدام است؟

۱) $I - A$ ۲) $I + A$ ۳) $9I$ ۴) $10I$

۶۴ـ اگر $w = r^2 \cos 2\theta$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ آن‌گاه $\frac{\partial w}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $-2y$ ۲) $-\frac{2}{y}$ ۳) $\frac{2}{y}$ ۴) $2y$

۶۵ـ حجم بریده شده از کره $\rho = a$ توسط مخروط‌دار دوار $\varphi = \frac{\pi}{3}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۲) $\frac{\pi a^3}{2}$ ۳) $\frac{\pi a^3}{3}$ ۴) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

۶۶ـ فاصله مرکز ثقل نیم‌کره همگن به شعاع ۴ واحد از صفحه قاعده این نیمکره چقدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷

۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر حاصلضرب دترمینان آنها می‌باشد.

۲ـ گزینه «۲»

۳ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ و $G(x,y,z)=x^2z-y^2-1=0$، در این صورت:

$$\nabla F\times\nabla G=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -4 & -1\\ 15 & 4 & 1\end{vmatrix}=(0,17,68)$$ بردار مماس بر منحنی C

$\Rightarrow$ معادله صفحه قائم: $17(y+2)+68(z-5)=0\Rightarrow 4z-y=22$

۴ـ گزینه «۲» به طور کلی اگر $F(u)=f(x,y)$ و f تابعی همگن از درجه n باشد، آنگاه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\frac{F(u)}{F'(u)}$$

۵ـ گزینه «۴»

$$V=\int_D\int\left(10-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right)dx\,dy\ \overset{\text{تغییر مختصات بیضوی}}{=\!=\!=}\ \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}}(10-r^2)\times 20\,r\,dr\,d\theta$$

$$=20\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}(10r-r^3)dr=20\times 2\pi\times 25=1000\pi$$

۶ـ گزینه «۱»

$\vec\omega\times\vec u=\vec\omega\times\vec v\Rightarrow\vec\omega\times(\vec u-\vec v)=0\Rightarrow u-v$ موازی $\vec\omega$

۷ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases}z=uv\omega\\ y=uv-uv\omega\\ x=u-uv\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}=\begin{vmatrix}1-v & -u & 0\\ v-v\omega & u-u\omega & -uv\\ v\omega & u\omega & uv\end{vmatrix}=u^2v$$

۸ـ گزینه «۲» اگر طول، عرض و ارتفاع حوض را به ترتیب x، y و z انتخاب کنیم. در این صورت می‌خواهیم عبارت $F=xy+2xz+2yz$ را تحت قید $xyz=256$ می‌نیمم کنیم، که در این صورت با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ $x=8$ و $y=8$ و $z=4$ بدست می‌آید.

۹ـ گزینه «۳» به سادگی مشاهده می‌شود که تنها ۲ ستون اول ماتریس مستقل هستند، و ستون‌های بعدی هر کدام جمع دو ستون قبل می‌باشند.

۱۰ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases}Z_x=3x^2+12y-63=0\\ Z_y=3y^2+12x-63=0\end{cases}\Rightarrow x=y=-7$$

۱۱ـ گزینه «۴»

$$\frac{\vec r}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec j+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec k\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\vec r}{r}\right)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

۱۲ـ گزینه «۴»

۱۳ـ گزینه «۱»

$$\int_R\int(x^2+y^2)dA\ \overset{\text{تغییر مختصات بیضوی}}{=\!=\!=}\ \int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta)\times 3r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+8\sin^2\theta)d\theta\int_0^1 3r^3dr=10\pi\times\frac{3}{4}=\frac{15\pi}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۴»

$$\int_c F.dr=\iint \operatorname{curl}F.n\,dS=21$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$\text{جرم}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a(a-\rho)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=(2\pi)(1)\left(a\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{\pi a^4}{6}$$

۱۶ـ گزینه «۳» حجم مورد نظر را در مختصات استوانه‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3(9r-r^3)dr=\theta\Big|_0^{2\pi}\times\left(\frac{9}{2}r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3=\frac{81\pi}{2}$$

۱۷ـ گزینه «۲» مقدار مورد نظر همان تاب منحنی F می‌باشد.

$$F'(t)=(-\sin,\cos t,1),\ F''(t)=(-\cos t,-\sin t,0),\ F'''(t)=(\sin t,-\cos t,0)\Rightarrow\frac{(F'\times F'').F'''}{|F'\times F''|^2}=\frac{1}{2}$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$Z=x^2-y^2=r^2\cos 2\theta\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial r}=2r\cos 2\theta$$

۱۹ـ گزینه «۳»

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z\end{vmatrix}=0\Rightarrow c+1=0,\ a-4=0,\ b-2=0\Rightarrow a+b+c=5$$

۲۰ـ گزینه «۴» لازم است $\operatorname{curl}F=0$ باشد که در آن $m=2$ به دست می‌آید.

۲۱ـ گزینه «۳» انتگرال مورد نظر برای محیط خم مورد نظر می‌باشد، بنابراین کافی است محیط دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ را محاسبه کنیم، محیط برابر π به دست می‌آید.

۲۲ـ گزینه «۳»

$$d=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2x^2-4x+8}\Rightarrow d'=\frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+8}}=0\Rightarrow x=1,\ y=\pm\sqrt{5}$$

۲۳ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=e^{2+2x+y^2}$ در این صورت:

$$\nabla F\Rightarrow(2e^{2+2x+y^2},2ye^{2+2x+y^2},-1)\Big|_{(-6,3,1)}=(2,6,-1)\Rightarrow$$

معادله صفحه مورد نظر: $2(x+6)+6(y-3)+(-1)(z-1)=0\Rightarrow 2x+6y-z=5$

۲۴ـ گزینه «۱» چون تابع مقابل انتگرال نسبت به متغیر x فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به محور y ها متقارن است پس انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

۲۵ـ گزینه «۳»

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\sin\sqrt{xy}\xrightarrow{x=y=\frac{\pi}{2}}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\pi}{2}$$

۲۶ـ گزینه «۲»

۲۷ــ گزینه «۱»

۲۸ــ گزینه «۲» کافی است ترتیب انتگرال‌گیری عوض شود.

۲۹ــ گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f_1(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6=0$ و $f_1(x,y,z)=xyz-1=0$ در این صورت:

$$\nabla f_1=(2x,4y,6z)\Rightarrow \nabla f_1=(1,1,1)=(2,4,6)$$

$$\nabla f_2=(yx,xz,xy)\Rightarrow \nabla f_2=(1,1,1)=(1,1,1)$$

$$\nabla f_1\times\nabla f_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2i+4j-2k\Rightarrow \text{معادله خط موردنظر}\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-2}\Rightarrow\begin{cases} z=x\\ 2x+y=3\end{cases}$$

۳۰ــ گزینه «۴»

$$x^2+y^2=\frac{x^2+y^2+1}{2}\Rightarrow x^2+y^2=1$$

برای محاسبه حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\frac{r^2+1}{2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r-r^3}{2}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^1=2\pi\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

۳۱ــ گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S=\iiint \operatorname{div}F\,dV=\iiint 3\,dV=3\times2\ \text{حجم کره به شعاع}=-3\times\frac{4}{3}\pi\times2^3=32\pi$$

با توجه به اینکه انتگرال مورد نظر فقط در یک هشتم اول فضا موردنظر است پس جواب انتگرال موردنظر $\frac{1}{8}$ مقدار بدست آمده یعنی 4π است.

۳۲ــ گزینه «۱» برای اینکه انتگرال موردنظر مستقل از مسیر باشد، لازم است $\operatorname{curl}\vec F=0$ باشد.

$$\operatorname{curl}\vec F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^x\cos y+ayz & axz+be^x\sin y & cxy+az\end{vmatrix}=(cx-ax)\vec i+(ay-cy)\vec j+(b+1)e^x\sin y\vec k$$

بنابراین لازم است $a=c$ و $b=-1$ باشد. که تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۳۳ــ گزینه «۴» نیازی به محاسبه $\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial x}$ نیست، زیرا درنقطه داده شده مقادیر آنها برابر صفر است و در محاسبه مقدار مشتق سوئی تاثیری ندارند.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\times\frac{\frac{1}{z}}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}=1$$

$$\vec U=2\vec i+\vec j-2\vec k\Rightarrow \text{یکه شده}\ \vec u=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)\Rightarrow D_{\vec u}f=\overline{\nabla f}.\vec u=\frac{1}{3}$$

۳۴ــ گزینه «۱»

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)=1-0=1$$

۳۵ــ گزینه «۴»

$$\begin{cases} Z_x=2x-2y-2=0\\ Z_y=-2x+4y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-y=1\\ 2y-x=-1\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=0$$

به ازای $x=1$ و $y=0$ مقدار $z=0$ بدست می‌آید.

۳۶ــ گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال موردنظر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}\times r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin2\theta\,d\theta\int_0^2 r^2dr=\frac{-1}{4}\cos2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

۳۷ــ گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\int_C(6y+x^2)dx+(y^2+2x)dy=\iint(2-6)dxdy=-4\times(\text{مساحت دایره به شعاع }2)=-16\pi$$

۳۸ــ گزینه «۳»

$$v(t)=(1-\sin t)i+(1+\sin t)j+\sqrt2\cos t k$$

$$a(t)=-\cos t\,i+\cos t\,j-\sqrt2\sin t k$$

$$v\times a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1-\sin t & 1+\sin t & \sqrt2\cos t\\ -\cos t & \cos t & -\sqrt2\sin t\end{vmatrix}=(-\sqrt2\sin t-\sqrt2)\vec i+(-\sqrt2+\sqrt2\sin t)\vec j+2\cos t\vec k$$

$$|v\times a|=\sqrt{2(\sin t+1)^2+2(\sin t-1)^2+4\cos^2t}=\sqrt8$$

$$|v|=\sqrt{(1-\sin t)^2+(1+\sin t)^2+2\cos^2t}=2\Rightarrow k=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{\sqrt8}{2^3}=\frac{1}{2\sqrt2}$$

۳۹ــ گزینه «۱» از رابطه $A\times(B\times C)=(A.C)B-(A.B)C$ استفاده می‌کنیم.

$$\vec v\times[\vec v\times(\vec v\times\vec u)]=\vec v\times[(\vec v.\vec u)\vec v-(\vec v.\vec v)u]=\underbrace{\vec v\times(\vec v.\vec u)\vec v}_{\text{صفر}}-\vec v\times\vec u=-\vec v\times\vec u$$

۴۰ــ گزینه «۴»

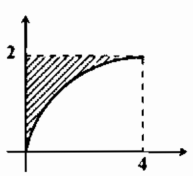
$$\begin{cases} f_x=8x+2y=0\\ f_y=2x-6y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

نقاط مرزی مربع نقاط $A(0,0),B(1,0),C(0,1)$ و $D(1,1)$ می‌باشد که با جایگزینی این نقاط در f مقدار ماکزیمم برابر ۳ و مقدار می‌نیمم برابر ۳- حاصل می‌شود.

۴۱ــ گزینه «۴»

$$\nabla f=\left(yze^{xyz}+\frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2},\ xze^{xyz}+\frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2},\ xye^{xyz}+\frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}\right)\Rightarrow\nabla f\big|_{(1,1,0)}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

۴۲ــ گزینه «۱»



$$\int_0^4\int_{\sqrt x}^2\sin(\pi y^3)dydx=\int_0^2\int_0^{y^2}\sin(\pi y^3)dxdy=\int_0^2 y^2\sin(\pi y^3)dy=\frac{-1}{3\pi}\cos(\pi y^3)\Big|_0^2=0$$

۴۳ـ گزینه «۲»

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{\frac{-1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{\frac{-1}{2}r^2}\times rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty} re^{\frac{-r^2}{2}}dr=\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times(-e^{\frac{-r^2}{2}})\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

۴۴ـ گزینه «۴» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\int_0^{r} rdzdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} r^2drd\theta=\frac{4\pi}{3}$$

۴۵ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{شار}=\iint F.ndS=\iiint divFdV=\iiint 3dV=3\times(\text{حجم کره به شعاع ۱})=4\pi$$

۴۶ـ گزینه «۴» واضح است که ماکسیمم مطلق تابع به ازای $x=2$ و $y=0$ و می‌نیمم مطلق تابع به ازای $x=0$ و $y=2$ حاصل می‌شود.

۴۷ـ گزینه «۴»

۴۸ـ گزینه «۱»

$$V=(20t,-9t^2,12t^2)\Rightarrow V(1)=(20,-9,12)$$

$$a=(20,-18t,24t)\Rightarrow a(1)=(20,-18,24)\ ,\ \ a'=(0,-18,24)$$

۴۹ـ گزینه «۳»

$$\int 3ydx+xdy=\int_0^{\pi}(-3\sin^2t+eos^2t)dt=\int_0^{\pi}(-3\times\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1+\cos 2t}{2})dt=-\pi$$

۵۰ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر $u=xy$ و $v=\frac{y^2}{x}$ و $J=\frac{x}{3y^2}$ نتیجه می‌شود:

$$\text{انتگرال}=\int_1^{2}\int_2^{4}\frac{1}{3v^2}dudv=\frac{8}{27}$$

۵۱ـ گزینه «۲»

۵۲ـ گزینه «۲»

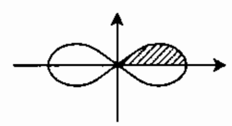
۵۳ـ گزینه «۳»

۵۴ـ گزینه «۳»

$$V=\int_0^{6}\int_0^{2}\int_0^{4-x^2}dzdxdy=\int_0^{6}dy\int_0^{2}(4-x^2)dx=y\Big|_0^{6}\times(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{2}=32$$

۵۵ـ گزینه «۴»

۵۶ـ گزینه «۳»



معادله داده شده لمینسکات می‌باشد.

با توجه به تقارن نمودار کافی است مساحت هاشور خورده را محاسبه کنیم و حاصل را در ۴ ضرب کنیم.

$$S=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\theta d\theta=2a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2$$

۵۷ـ گزینه «۲» بردار هادی خط داده شده $\vec{V}(2,3,4)$ و بردار نرمال صفحه $\vec{N}(1,-2,1)$ می‌باشد و با توجه به اینکه $\vec{N}.\vec{V}=0$ است پس بردار V عمود بر نرمال صفحه است پس با خود صفحه موازی است.

۵۸ـ گزینه «۴»

$$\rho=a\cos\phi\Rightarrow\rho^2=a\rho\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2+z^2=az\Rightarrow x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$$

۵۹ـ گزینه «۲» دستگاه وقتی جواب غیر صفر دارد که دترمینان ضرایب صفر شود.

$$\begin{vmatrix}2 & k & 1\\ k-1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2(-4-2)-k((4k-4)-8)+(k-1+4)=0\Rightarrow -4k^2+13k-9=0\Rightarrow 1,\frac{9}{4}$$

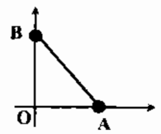
۶۰ـ گزینه «۴»

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\Rightarrow\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{-1}{2}$$

۶۱ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y-4=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=3\ ,\ \ y=2\Rightarrow f(3,2)=-7$$

۶۲ـ گزینه «۲» به ازای $\theta=0$، مقدار $r=2$ و به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ مقدار $r=2$ حاصل می‌شود.



$$S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{2}=2$$

۶۳ـ گزینه «۴»

$$5A-A^2=5\times\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=10I$$

۶۴ـ گزینه «۱»

$$w=r^2\cos 2\theta=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=x^2-y^2\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}=-2y$$

۶۵ـ گزینه «۳»

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^{a}\rho^2d\rho=2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{a^3}{3}=\frac{\pi a^3}{3}$$

۶۶ـ گزینه «۲»

تدبیر قبل از کار، تو را از پشیمانی ایمن می‌کند. **(حضرت علی (ع))**

بد نگوئیم به مهتاب اگر تب داریم. **(سهراب سپهری)**

پاسخنامه تست‌های تکمیلی

فصل اول : توابع چند متغیره

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۴»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۴»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۴»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۴»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۲»
۴۱ـ گزینه «۳»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۲»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۴»	۴۸ـ گزینه «۴»	۴۹ـ گزینه «۴»	۵۰ـ گزینه «۳»

فصل دوم : رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۲»

فصل سوم : انتگرال توابع چند متغیره

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۳»	۳۲ـ گزینه «۲»	۳۳ـ گزینه «۳»	۳۴ـ گزینه «۳»	۳۵ـ گزینه «۲»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۲»	۳۸ـ گزینه «۱»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۲»
۴۱ـ گزینه «۴»	۴۲ـ گزینه «۱»	۴۳ـ گزینه «۴»	۴۴ـ گزینه «۴»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۴»	۵۰ـ گزینه «۱»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۱»	۵۴ـ گزینه «۴»	۵۵ـ گزینه «۴»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۴»	۵۸ـ گزینه «۱»	۵۹ـ گزینه «۴»	۶۰ـ گزینه «۱»
۶۱ـ گزینه «۲»	۶۲ـ گزینه «۱»	۶۳ـ گزینه «۳»	۶۴ـ گزینه «۴»	۶۵ـ گزینه «۱»
۶۶ـ گزینه «۳»	۶۷ـ گزینه «۴»	۶۸ـ گزینه «۳»	۶۹ـ گزینه «۴»	۷۰ـ گزینه «۳»

فصل چهارم : میدانهای برداری و انتگرال‌گیری روی مسیرها و سطوح

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۴»	۳۲ـ گزینه «۲»	۳۳ـ گزینه «۴»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۱»	۳۹ـ گزینه «۲»	۴۰ـ گزینه «۲»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۴»	۴۴ـ گزینه «۱»	۴۵ـ گزینه «۲»
۴۶ـ گزینه «۲»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۱»	۵۰ـ گزینه «۲»
۵۱ـ گزینه «۱»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۴»

فصل پنجم : بردار

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۲»	۲۹ـ گزینه «۳»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۳»	۳۲ـ گزینه «۱»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۴»	۳۸ـ گزینه «۴»	۳۹ـ گزینه «۴»	۴۰ـ گزینه «۲»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۲»	۴۳ـ گزینه «۱»	۴۴ـ گزینه «۳»	۴۵ـ گزینه «۳»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۲»
۵۱ـ گزینه «۱»	۵۲ـ گزینه «۴»	۵۳ـ گزینه «۱»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۱»

منابع و مآخذ :

1) LEITHOLD, Louis, «The calculus with Analytic Geometry».

2) SILVERMAN, RICHARD, A: «Modern calculus and Analytic Geometry» Macmillan Company.

3) ENGINEERING MATHEMATICS c. s. sharma / i. j. s. sarna (c. b. s)

4) General Mathematics Volume two by J.A.Maron

5) Elliott Mendelson. Schaum's 3000 Solved Problems in calculus, 1986 McGraw – Hill

۶) تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی از ب ـ ب ـ دمیدوویچ، ترجمهٔ پرویز شهریاری

۷) حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ـ جرج توماس ـ راس فینـی، ترجمـه مرکـز نـشر دانشگاهی، تهران .

۸) مجموعه فرمولهای ریاضی از موری . ر . اشپیگل، انتشارات استاد مشهد ۱۳۷۳.

۹) مجموعه آزمونهای مؤسسه مدرسان شریف.