مدرسان شریف

کارشناسی ارشد

ریاضیات عمومی (۱)

- ۲۰۰۰ پرسش چهار گزینه‌ای شامل ۱۳۰۰ مسئله حل شده و ۷۰۰ مسئله با پاسخ کلیدی
- ارائه مطالب به روش‌های کاملاً خلاصه ، ساده و فرمول بندی شده
- ارائه روش‌های سریع و کوتاه جهت تعیین جواب ها
- ارئه ۱۰ آزمون خود سنجی جهت آمادگی هر چه بهتر دانشجویان
- قابل استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی به عنوان کتاب مرجع دانشگاهی جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم

مؤلفین : مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

خلاصه درس ، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷-۷۵

اولین و قویترین مرکز برگزاری کلاسهای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد همراه با حضور برترین اساتید و مولفین کتب کنکور کارشناسی ارشد

برگزاری دوره های مکاتبه‌ای و آزمونهای منظم همراه با صدور کارنامه کامپیوتری وارائه پاسخنامه تشریحی (درتمام نقاط ایران).

برخی ازکتب منتشر شده :

ISBN: 9789642838363

تلفنهای روابط عمومی : ۵ - ۶۶۹۴۶۹۶۰

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

چه کسم من؟ چه کسم من؟ که بسی وسوسه‌مندم

که از این سوی کشندم، که از آن سوی کشندم

نفسی آتش‌سوزان، نفسی سیل گریزان

زچه اصلم؟ زچه فصلم؟ زچه بازار خرندم؟

نفسی رهزن و غولم، نفسی تند و ملولم

نفسی زین دو برونم، که برآن بام بلندم

(دیوان شمس)

سرشناسه : نامی، حسین.
عنوان و پدیدآور : ریاضی عمومی (۱) / مؤلفین حسین نامی/علیرضا عشقی؛
مشخصات نشر : تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری : ۴۶۰ ص.
شابک : 978 – 964 – 2838 – 36 - 3
یادداشت: فیپا
یادداشت : چاپ سوم
یادداشت : عنوان روی جلد: مدرسان شریف کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۱) ...
یادداشت : عنوان عطف: ریاضیات عمومی (۱) کارشناسی ارشد.
عنوان دیگر: مدرسان شریف: کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۱) ...
عنوان دیگر: ریاضیات عمومی (۱) کارشناسی ارشد.
موضوع : دانشگاهها و مدارس عالی - - ایران - - آزمونها.
موضوع : ریاضیات - - آزمونها و تمرینها (عالی).
موضوع : آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی - - ایران.
شناسه افزوده : عشقی، علیرضا.
شناسه افزوده : مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف.
رده بندی کنگره : ۹۲۲۲ ر ۱۸۳ ن ۲۳۵۳/ LB
رده‌بندی دیویی : ۳۷۸/۱۶۶۴
شماره کتابخانه ملی : ۴۲۵۱۲ ـ ۸۵ م

نام کتاب: ریاضی عمومی (۱)

مؤلفین: مهندس حسین نامی ـ علیرضا عشقی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

تاریخ چاپ اول : مهرماه ۱۳۸۵

تاریخ چاپ سوم : مهرماه ۱۳۸۷

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی - مینو

قیمت: ۸۹۰۰ تومان

شابک: 978 – 964 – 2838 – 36 - 3

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبر کبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو می‌باشد، لذا مؤسسه علمی ـ فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی ـ آموزشی خود اقدام به ارایه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این‌که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «ریاضی عمومی (۱)» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت موسسه مدرسان شریف

مقدمه مؤلفین

خدایـــا، مرا آن ده کـــه آن بـــه

افزایش روزافزون فارغ التحصیلان دوره‌های کارشناسی و اشتیاق آنها برای ورود به دوره‌های کارشناسی ارشد و کمبود کتب آمادگی مناسب آزمونهای کارشناسی ارشد هدف اصلی نگارش این کتاب می‌باشد .

با توجه به این که درس «ریاضی عمومی (۱)» معمولاً در سال اول تحصیلی توسط دانشجویان دوره‌های کارشناسی گذرانده می‌شود و پس از گذشت دو سال از آن مطالب فرا گرفته شده تقریباً به فراموشی سپرده شده، لذا کتاب با نگارش ساده و اجتناب از بیان مطالب غیر ضروری (اثبات فرمولها و ...) سعی بر این داشته که دانشجویان جهت موفقیت در آزمون کارشناسی ارشد در کمترین زمان بهترین نتیجه‌گیری را داشته و دیگر نیازی به مراجعه به کتب دیگر نداشته باشند، از ویژگی‌های بارز این کتاب نسبت به دیگر کتب موجود در این زمینه موارد زیر را می‌توان نام برد:

۱) مطالب به صورت خلاصه و فرمول‌بندی شده و حتی‌المقدور حل مسائل با روشهای تستی بیان گردیده است .

۲) هر فصل کتاب دارای سه بخش کلی است که بخش اول شامل خلاصه درس همراه با مثالهای حل شده می‌باشد که این مثالها عیناً سؤالات دوره‌های گذشته، سؤالات تألیفی و یا سؤالاتی است که در آزمونهای آزمایشی موسسه مدرسان شریف سؤال بوده‌اند. بخش دوم شامل صرفاً سؤالات به همراه پاسخنامه تشریحی مربوط به آزمونهای دوره‌های گذشته در رشته‌های مختلف از سال ۱۳۷۸ تا ۱۳۸۴ است. در بخش سوم هر فصل تستهای تکمیلی مربوط به آن فصل آورده شده است که بعضاً سؤالات مشکلی نسبت به سؤالات دوره‌های قبل در این تستها مشاهده می‌شود. (که به عقیده مؤلفین و دپارتمان ریاضی مؤسسه مدرسان شریف می‌تواند سؤالاتی جالب جهت طرح در آزمونهای آینده باشد.)

۳) کتاب مجموعاً شامل حدود ۱۳۰۰ تست با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و تقریباً ۷۰۰ تست با پاسخ‌های کلیدی است که جمعاً حدود ۲۰۰۰ مسئله غیر تکراری در کتاب گنجانده شده که از این حیث می‌توان کتاب را در بین کتب ریاضی دیگر که برای این منظور تهیه شده‌اند، بی‌نظیر دانست.

۴) در حل بعضی تست‌ها نوآوری‌های خاص این کتاب (روش‌های حل سریع و کوتاه) مشاهده می‌شود.

۵) کلیه سئوالات مربوط به آزمونهای دانشگاه سراسری از سال ۷۸ تا ۸۴ مربوط به اکثر رشته‌هـا و همچنـین سـئوالات منتخب دانشگاه آزاد از سال ۸۰ تا ۸۴ به صورت طبقه‌بندی شده در انتهای فصول مختلف کتب گنجانده شده است.

۶) سئوالات مربوط به قبل از سال ۷۸ در کتاب به عنوان مثالهای حل شده در هر فصل و یا تحت عنوان تست‌های تکمیلی در کتاب آورده شده است.

۷) در انتهای کتاب سئوالات آزمون سال ۱۳۸۵ و ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ دانشگاه سراسری (اسفند ۸۴ و اسفند۸۵ و اسفند ۸۶) بـه همـراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی ارائه شده است.

۸) جهت خودسنجی و آمادگی هر چه بهتر دانشجویان عزیز ۱۰ مرحله آزمون در سه سطح A (سـخت)، B (متوسـط) و C (آسـان) تنظیم شده، که با توجه به مدت زمان پیشنهادی و سطح آزمون دانشجویان عزیز می‌توانند شرایط خود را از لحـاظ مقـدار آمـادگی مورد سنجش قرار دهند.

۹) مطالب کتاب به گونه‌ای تدوین گردیده که می‌تواند به عنوان مرجع کامـل جهـت درس ریاضـی عمـومی (۱) جهـت موفقیـت در امتحانات پایان ترم دانشگاهها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه هیچ تألیفی خالی از اشکال نیست لذا از همه اساتید و دانشجویان انتظار داریم عنایت فرمایند و اشکالات این کتاب را به آدرس: فلکه دوم صادقیه روبه‌روی مسجد امام جعفر صادق(ع) – بلوار شهدا – پلاک۳۵ – آموزشـگاه مدرسـان شـریف ارسال کنند و یا با شماره تلفن ۱۳۸۴۸۶۱ – ۰۹۱۲ تماس حاصل فرمایند. در خاتمـه جـا دارد از خـانم فاطمـه هلیلـی کـه تایـپ و صفحه‌آرایی این مجموعه را به عهده داشتند، نهایت سپاسگزاری را داشته باشیم .

مهندس حسین نامی ـ علیرضا عشقی

مهرماه ۱۳۸۷

فهرست مطالب

عنوان — **صفحه**

فهرست مطالب

مدرسان شریف

فصل اول

« تابع »

تعریف ۱: رابطه $f: A \to B$ را تابع گوییم هرگاه مجموعه‌ای که متشکل از زوجهای مرتب می‌باشد، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشد، به عبارت دیگر هرگاه دو زوج مرتبی در رابطه f، مختص‌های اول یکسانی داشته باشند، در این صورت مختص‌های دوم آنها نیز باید با هم برابر باشد، به عبارت ساده‌تر به ازای دو x برابر، yهای برابر داشته باشیم .

مثال ۱: به ازای کدام مقدار m رابطه $f=\{(3,2),(1,2),(m,1),(3,m^2+m)\}$ یک تابع می‌باشد؟

۱) ۲- و ۱ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» چون زوجهای (۲ ، ۳) و (m^2+m و ۳) در ضابطه این تابع قرار دارند باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشد (به دلیل تساوی مؤلفه اول آنها) پس داریم: $m^2+m=2 \to m^2+m-2=0 \to (m-1)(m+2)=0 \to m=1 , m=-2$

اگر $m=1$ باشد آنگاه زوجهای (۱ ، ۱) و (۲ ، ۱) ایجاد می‌شود که نمی‌توانند در ضابطه یک تابع باشند، پس $m=-2$ قابل قبول است.

تذکر۱: رابطه‌هائی که در آنها y، داخل قدر مطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معمولاً تابع نیستند.

مثال ۲: کدامیک از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطه یک تابع باشد؟

۱) $|y|+(x-1)^2=1$ ۲) $\sin y = x$ ۳) $(y-1)^2+(x-1)^2=0$ ۴) $\lfloor y \rfloor = x$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به تذکر ۱ ضابطه گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ تابع نمی‌باشد اما در رابطه گزینه «۳» درست است که توان y زوج است ولی تنها زوج مرتب $A(1,1)$ متعلق به رابطه می‌باشد و ضابطه، تابع می‌باشد.

نکته۱: تشخیص تابع از روی نمودار آن : هرگاه خطی موازی محور yها رسم شود نباید منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

محاسبه f(x) :

در مسائلی که به شکل $f[g(x)]=h(x)$ می‌باشد و ضابطه $f(x)$ خواسته شده ابتدا $g(x)=t$ قرار داده و پس از به دست آوردن x برحسب t در معادله اصلی به جای تمام xها، t قرار داده و پس از ساده کردن تغییر متغیر نهایی تبدیل مجدد t به x انجام داده می‌شود.

مثال ۳: اگر $f(\frac{x-2}{x+1})=\frac{x-1}{2x}$ باشد ، $f(x)$ عبارت است از :

۱) $\frac{2x+4}{2x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{2x+4}$ ۳) $\frac{2x}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x-1}{x}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{x-2}{x+1}=t \Rightarrow xt+t=x-2 \Rightarrow x=\frac{t+2}{1-t} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{1-t}-1}{\frac{2(t+2)}{1-t}}=\frac{\frac{t+2-1+t}{1-t}}{\frac{2t+4}{1-t}}=\frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(t)=\frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(x)=\frac{2x+1}{2x+4}$$

مثال ۴: اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$، ضابطه $f(x)$ را بیابید.

پاسخ : $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

بنابراین: $f(t)=t^2-2$ و یا $f(x)=x^2-2$.

مثال ۵: اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، ضابطه $f(x)$ را بیابید.

پاسخ : $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3x+\frac{3}{x} \Rightarrow t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3t \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

بنابراین: $f(t)=t^3-3t$ و در نتیجه $f(x)=x^3-3x$.

محاسبه دامنه توابع

دامنه تابع : اگر رابطه f تابع باشد، به مختص‌های اول آن (اعضای مجموع A) دامنه f می‌گویند و آنرا معمولاً با نماد D_f نمایش می‌دهیم.
بعبارت دیگر به مجموعه xهائی که برای آنها y وجود داشته باشد، دامنه تابع گوییم.

۱ـ توابع کثیرالجمله یا خطی : دامنه اینگونه توابع اعداد حقیقی(R) است.

۲ـ توابع کسری $(y=\frac{f(x)}{g(x)})$: دامنه اینگونه توابع به شرط آنکه دامنه صورت کسر اعداد حقیقی باشد، اعداد حقیقی R به جز مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کنند، می‌باشد.
به عبارت دیگر :

$$D_y=R-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

مثال ۶: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{3x}{x^2-5x+6}$ را بدست آورید؟

پاسخ :

$$x^2-5x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases} \rightarrow D_f=R-\{2,3\}$$

تذکر ۲: به نقاطی که مخرج را صفر می‌کند ، نقاط انفصال تابع نیز گفته می‌شود.

۳ـ توابع رادیکالی : در اینگونه توابع اگر فرجه رادیکال زوج باشد ، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اگر فرجه رادیکال فرد باشد دامنه تابع ، همان دامنه عبارت زیر رادیکال خواهد بود.

مثال ۷: دامنه تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ ، کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $(2,\infty)$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \\ \frac{x}{2-x}\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x<2 \end{cases} \Rightarrow D_f=[0,2)$$

مثال ۸: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$ کدام فاصله است؟

۱) $R-(-1,1)$ ۲) $R-(0,1)$ ۳) $R-(-1,0)$ ۴) $(R-(-1,1))\cup\{0\}$

پاسخ : گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، یعنی $x^2-|x|\geq 0$، حال برای حل این نامساوی دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ x<0 \Rightarrow x^2+x\geq 0 \Rightarrow x(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1 \end{cases}$$

توجه کنید که $x=0$ نیز در دامنه قرار دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

۴ـ دامنه توابع لگاریتمی $y=\log_{k(x)}^{g(x)}$**:**

در اینگونه توابع عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می‌شود، باید بزرگتر از صفر باشد، ضمناً شرایط مبنای لگاریتم نیز باید مشخص باشد.

$$D_f=\{x\,|\,g(x)>0,\ k(x)>0,\ k(x)\neq 1\}$$

مثال ۹: حوزه تعریف تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$ کدام است؟

۱) $x\geq 4$ ۲) $x\leq 1$ و $x\geq 4$ ۳) $x\leq -1$ ۴) $1\leq x\leq 4$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول : خود لگاریتم چون زیر رادیکال می‌باشد، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. پس داریم :

$$\begin{cases} \frac{5x-x^2}{4}>0 \\ \log\frac{5x-x^2}{4}\geq 0 \end{cases} \rightarrow \log\frac{5x-x^2}{4}\geq \log 1 \Rightarrow \frac{5x-x^2}{4}\geq 1 \rightarrow x^2-5x+4\leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1\leq x\leq 4$$

تذکر ۳: توجه شود که در اکثر تستهای مربوط به تعیین دامنه توابع می‌توان از روش سریع عددگذاری در ضابطه تابع استفاده کرد.

روش دوم : اگر $x=5$ را در نظر بگیریم آنگاه : $f(5)=\sqrt{\log 0}$ می‌شود و می‌دانیم که $\log 0$ وجود ندارد و به ازای $x=-1$ نیز $f(-1)=\sqrt{\log(-1)}$ و مانند حالت قبل $\log(-1)$ نیز وجود ندارد.
توجه شود که حالت (۱) گزینه ۱ و ۲ و حالت (۲) گزینه ۳ را از مجموعه جوابها خارج می‌کند، این روش با کمی تمرین و دقت روش مناسبی در تعیین دامنه توابع می‌باشد.

مثال ۱۰: دامنه تابع با ضابطه $y=\log_x(x-2)$ کدام است؟

۱) $D_y=\{x\,|\,x\in R,\ x>2\}$ ۲) $D_y=R-\{2\}$ ۳) $D_y=R-\{-2\}$ ۴) $D_y=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

پاسخ : مشخص است که اعداد منفی جزء جواب نیستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

نامساوی‌های لگاریتمی:

نامساوی $\log_a N\geq 0$ و $\log_a N\leq 0$ را در نظر بگیرید برای بحث در مورد این نامساوی به دو حالت زیر توجه کنید.

۱) اگر $a>1$ باشد، آنگاه :

$$\begin{cases} N\geq 1 \Leftrightarrow \log_a N\geq 0 \\ 0<N\leq 1 \Leftrightarrow \log_a N\leq 0 \end{cases}$$

۲) اگر $0<a<1$ باشد، آنگاه :

$$\begin{cases} N\geq 1 \Leftrightarrow \log_a N\leq 0 \\ 0<N\leq 1 \Leftrightarrow \log_a N\geq 0 \end{cases}$$

مثال ۱۱: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$ کدام است؟

۱) $[2\sqrt{2},3\sqrt{2})$ ۲) $(-3,-2\sqrt{2}]$ ۳) $[-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$ ۴) $(-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به حالت دوم بیان شده در بالا خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 9-x^2\geq 0 \rightarrow 0<9-x^2\leq 1 \rightarrow x^2\geq 8 \rightarrow x\geq 2\sqrt{2} \text{ یا } x\leq -2\sqrt{2} \quad (1) \\ 9-x^2>0 \rightarrow x^2<9 \rightarrow -3<x<3 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(2),(1)} D_f=(-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$$

مثال ۱۲: دامنه تابع $f(x)=\log_3(\log_2(\log_3(\log_2 x))$ کدام است؟

۱) $D_f=(8,+\infty)$ ۲) $D_f=[5,+\infty)$ ۳) $D_f=(9,+\infty)$ ۴) $D_f=[9,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۱» $\log_2(\log_3(\log_2 x))>0 \Rightarrow \log_3(\log_2 x)>1 \Rightarrow \log_2 x>3 \Rightarrow x>2^3 \Rightarrow x>8 \Rightarrow D_f=(8,+\infty)$

مثال ۱۳: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1-\log_2(x-2)}$ کدام فاصله است؟

۱) $[3,4)$ ۲) $(3,4]$ ۳) $[2,4)$ ۴) $(2,4]$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ 1-\log_2(x-2)\geq 0 \Rightarrow \log_2(x-2)\leq 1 \Rightarrow x-2\leq 2 \Rightarrow x\leq 4 \end{cases}$$

نکته۲: اگر دامنه تابع $y=f(x)$، فاصله $[a,b]$ باشد برای تعیین دامنه تابع $y=f(u)$ بایدu رادر فاصله a و b در نظر گرفته و حدود تغییرات x را پیدا کنیم. (u تابعی برحسب x است).

مثال ۱۴: تابع $f(x)$ در فاصله $[0,1]$ تعریف شده است، حوزه تعریف تابع $f(3x^2)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3}$ ۲) $0\le x\le 1$ ۳) $1\le x\le 3$ ۴) $\frac{-\sqrt{3}}{3}\le x\le \frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» $0\le 3x^2\le 1\to 0\le x^2\le \frac{1}{3}\to -\frac{\sqrt{3}}{3}\le x\le \frac{\sqrt{3}}{3}$

اعمال جبری روی توابع

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\,,\,D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\,,\,D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳) $(f.g)(x)=f(x).g(x)\,,\,D_{f.g}=D_f\cap D_g$

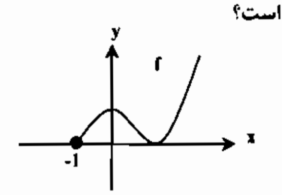
۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,,\,D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$

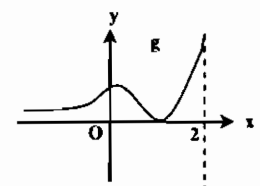
تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه علاوه بر اینکه ضابطه آنها با هم برابر است، دامنه آنها نیز با هم برابر باشند.

مثال ۱۵: توابع $f(x)=x+3$ و $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ با هم مساوی نیستند. زیرا دامنه $f(x)$ برابر R ولی دامنه $g(x)$ برابر $R-\{3\}$ می‌باشد.

مثال ۱۶: نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه $f-g$ کدام است؟





۱) $[1,+\infty)$
۲) $[2,+\infty)$
۳) $[-1,2)$
۴) $[-1,2]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نمودارها $D_f=[-1,+\infty),D_g=(-\infty,2)$ لذا داریم:

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=(-\infty,2)\cap[-1,+\infty)=[-1,2)$$

انواع تابع

۱ـ تابع چند ضابطه‌ای: گاهی مقدار یک تابع در دامنه‌اش با بیش از یک ضابطه بیان می‌شود. مثال: $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$

مثال ۱۷: تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & x\le 2\\ \frac{1}{x-2} & 2<x\le 3\\ 2x-5 & x>3\end{cases}$ مفروض است، مقدار $f(\sqrt{8})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۳) $4\sqrt{2}-5$ ۴) $3\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۱» عدد $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ می‌باشد لذا باید از ضابطه دوم تابع مقدار $f(\sqrt{8})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\sqrt{8})=\frac{1}{\sqrt{8}-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}-2}\times\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2}=\frac{2\sqrt{2}+2}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

تذکر ۴: روابط چند ضابطه‌ای در شرایطی می‌توانند تابع باشند، که اولاً تک تک ضابطه‌ها در دامنه تعریفشان تابع باشند، ثانیاً دامنه آنها نقطه مشترکی نداشته باشد و اگر دامنه ضابطه‌ها دارای ناحیه (یا نقطه) مشترک با یکدیگر بود به ازای xهای مشترک، yهای برابر حاصل شود.

برای مثال ضابطه $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1\\ x^2-1 & x\le 1\end{cases}$ تابع می‌باشد.

۲ـ تابع ثابت: تابعی است که به ازای هر x متعلق به دامنه، تنها یک y ثابت مشخص شود. $f(x)=c$

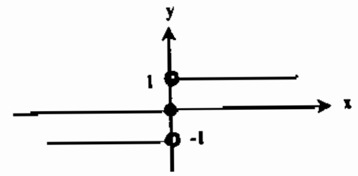
بعنوان مثالی برای تابع ثابت می‌توان تابع مقابل را بیان نمود: $f(x)=\sqrt{x-|x|}\xrightarrow{x\in D_f}f(x)=0$

۳ـ تابع همانی: تابعی است که هر عضو دامنه را به خود آن عضو از دامنه نسبت دهد $(f(x)=x)$ این تابع را با $I(x)$ نمایش می‌دهیم. نمودار تابع همانی همان نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

تذکر ۵: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر می باشد.

۴ـ تابع علامت: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



۵ـ تابع قدرمطلق: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

به عبارت دیگر اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، قدر مطلق را برمی‌داریم و اگر عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، آن عبارت را در یک علامت منفی ضرب و سپس علامت قدرمطلق را برمی‌داریم.

خواص قدرمطلق

۱) $|x|\ge 0$

۲) $|-x|=|x|$

۳) $|x|=a\xrightarrow{a>0}x=\pm a$

۴) $x^2<a^2\Rightarrow|x|\le a\xrightarrow{a>0}-a\le x\le a$

۵) $|x|\ge a\xrightarrow{a>0}x\ge a$ یا $x\le -a$

۶) $|x.y|=|x|.|y|$

۷) $\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$

۸) $|x|-|y|\le|x\pm y|\le|x|+|y|$ (نامساوی مثلثی)

۹) $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$

۱۰) $-|x|\le x\le|x|$

مثال ۱۸: عبارت صحیح کدام است؟

۱) $|x\pm y|\ge|x|+|y|$ ۲) $|x\pm y|<|x|+|y|$ ۳) $|x\pm y|=|x|+|y|$ ۴) $|x\pm y|>|x|+|y|$

پاسخ: گزینه «۲» باتوجه به خاصیت ۸ قدر مطلق

مثال ۱۹: اگر $|x|\le a$ آنگاه:

۱) $-a<x<a$ ۲) $x\le -a$ یا $x\ge a$ ۳) $-a\ge x\ge a$ ۴) $-a\le x\le a$

پاسخ: گزینه «۴» باتوجه به خاصیت ۴ قدرمطلق.

بررسی نامساوی مثلثی:

۱) اگر x و y هم‌علامت نباشند آنگاه: $|x-y|=|x|+|y|>|x|-|y|$ خواهد بود.

۲) اگر x و y هم‌علامت باشند آنگاه تساوی $|x-y|=|x|-|y|$ وقتی برقرار است که $|x|\ge|y|$ باشد و همواره تساوی $|x+y|=|x|+|y|$ برقرار خواهد بود.

۳) اگر $|x|<|y|$ آنگاه: $|x-y|>|x|-|y|$ خواهد بود.

مثال ۲۰: به ازای کدام مقدار x معادله $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$ همواره برقرار است؟

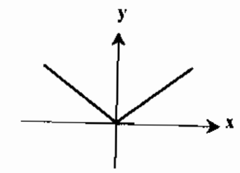
۱) $x\ge\frac{2}{3}$ ۲) $x\ge\frac{3}{2}$ ۳) $x\ge\frac{9}{4}$ ۴) $x\ge\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مطالب فوق تساوی وقتی برقرار است که x^2+4x+9 و $2x-3$ هم‌علامت باشند. از طرفی چون x^2+4x+9 همواره مثبت است لذا $2x-3\ge 0$ و یا $x\ge\frac{3}{2}$ می‌باشد.

رسم تابع قدر مطلق :

برای رسم اینگونه توابع ریشه‌های داخل قدرمطلق به ازای مقادیر مختلف (منفی یا مثبت) بدست آورده و عبارت را تعیین علامت می‌کنیم سپس برای ضابطه‌های مختلف بدست آمده در فواصل مختلف نمودار آنرا رسم می‌کنیم.

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

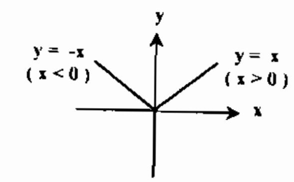


تذکر ۶ : بطور کلی برای رسم نمودار توابعی به شکل $y=|f(x)|$ نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از منحنی که زیر محور طولها واقع است را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.

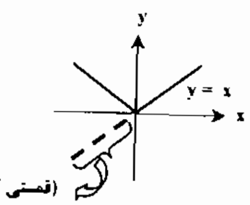
مثال ۲۱: نمودار تابع $y=|x|$ را رسم کنید.

پاسخ :

روش اول : برای $x>0$ باید نمودار $y=x$ را رسم کنیم.
برای $x<0$ باید نمودار $y=-x$ را رسم کنیم.



روش دوم : ابتدا نمودار $y=x$ را رسم کرده و آن قسمت از منحنی که زیر محور طولها واقع است را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.



(قسمتی که قرینه شده است)

مثال ۲۲: مجموعه جواب نامعادله $2x+|x-1|<8$ کدام است؟

۱) $x<3$ ۲) $3<x<7$ ۳) $x<1$ ۴) $1<x<3$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow 2x+x-1<8\to 3x<9\to x<3\to 1\leq x<3 & (1) \\ 2)\ x-1<0\Rightarrow x<1\Rightarrow 2x+1-x<8\to x<7\to x<1 & (2) \end{array}\right\}\xrightarrow{(2),(1)} x<3$$

تابع جزء صحیح (براکت)

هرعدد حقیقی را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح (n) و یک عدد حقیقی نامنفی $(0\leq p<1)$ نمایش داد، جزء صحیح x را بفرم $\lfloor x\rfloor$ نمایش می‌دهیم :
$\forall x\in R, \exists n\in z, x=n+p, 0\leq p<1$

برای مثال جزء صحیح $x=3/7$ برابر ۳ و جزء صحیح $x=-1/6$ برابر ۲- می‌باشد.

خواص تابع جزء صحیح :

۱) $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$

۲) $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x$

۳) $0\leq p=x-\lfloor x\rfloor<1$

۴) $\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor=0$

۵) $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n, (n\in z)$

۶) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases} 0, x\in z \\ -1, x\notin z \end{cases}$

۷) $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ یا $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$

۸) $[x+[x]]=2[x]$

مثال ۲۳: جواب معادله $\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor=\dfrac{\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor}{4}+\lfloor x\rfloor$ کدام است؟

۱) $1\leq x<2$ ۲) $0\leq x<1$ ۳) $2\leq x<3$ ۴) $3\leq x<4$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به خاصیت (۸) جزء صحیح داریم:

$$\frac{2\lfloor x\rfloor}{4}+\lfloor x\rfloor=2\lfloor x\rfloor\Rightarrow\frac{\lfloor x\rfloor}{2}=\lfloor x\rfloor\Rightarrow\lfloor x\rfloor=2\lfloor x\rfloor\Rightarrow\lfloor x\rfloor=0\to 0\leq x<1$$

رسم توابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$:

برای ترسم نمودار اینگونه توابع ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس خطوط $y=k$ را $(k\in z)$ رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(x)$ را قطع کند و روی آن پاره خطهای مساوی ایجاد کند. قسمتی از نمودار که بین نقطه‌های برخورد دو خط $y=k$ و $y=k+1$ با نمودار $y=f(x)$ قرار دارد بر خط $y=k$ تصویر می‌کنیم، در نهایت ذکر این نکته لازم است که به نقاط ابتدا و انتها را از لحاظ توپر و یا توخالی بودن باید توجه کرد.

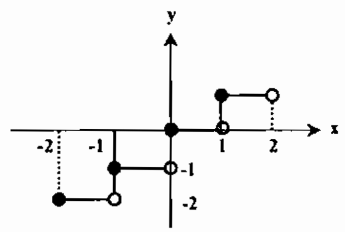
مثال ۲۴: نمودار تابع $y=\lfloor x\rfloor$ را در فاصله $-2\leq x<2$ رسم کنید.

$-2\leq x<-1\to[x]=-2\to y=-2$

$-1\leq x<0\to[x]=-1\to y=-1$

$0\leq x<1\to[x]=0\to y=0$

$1\leq x<2\to[x]=1\to y=1$



مثال ۲۵: حاصل $\left|\,\left|\lfloor 5x\rfloor\right|-\lfloor 7x\rfloor\,\right|$ به ازای $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ : گزینه «۴»

$$\left|\left\lfloor -\frac{7}{2}\right\rfloor-\left|\left\lfloor -\frac{5}{2}\right\rfloor\right|\right|=\left|\lfloor -3/5\rfloor-\left|\lfloor -2/5\rfloor\right|\right|=\left|-4-|-3|\right|=|-7|=7\Rightarrow$$

مثال ۲۶: مجموعه جوابهای معادله $\lfloor x\rfloor^2+2\lfloor x\rfloor-3=0$ کدام است؟

۱) $-3\leq x<-2$ ۲) $2\leq x<2$ ۳) هیچکدام ۴) $\begin{cases} 1\leq x<2 \\ -3\leq x<-2 \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» مجموع ضرائب صفر است، پس یک ریشه معادله (۱) و ریشه دیگر معادله برابر $\frac{c}{a}$ یعنی (۳-) است، پس داریم :

$$\begin{cases} \lfloor x\rfloor=-3\to -3\leq x<-2 \\ \lfloor x\rfloor=1\to 1\leq x<2 \end{cases}$$

توابع زوج یا فرد

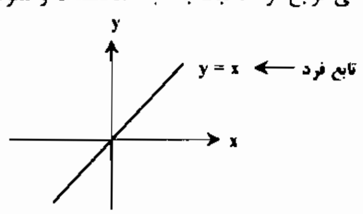
تابع با ضابطه $y=f(x)$ را در نظر بگیرید اگر به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-x\in D_f$ آنگاه :

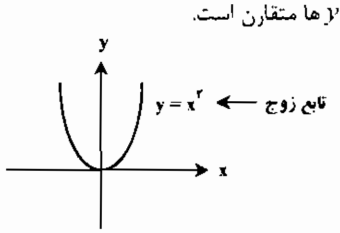
۱) تابع $f(x)$ زوج است هرگاه $f(x)=f(-x)$

۲) تابع $f(x)$ فرد است هرگاه $f(x)=-f(-x)$

تذکر ۷ : با توجه به تعریف‌های فوق، در توابع فرد $f(-x)+f(x)=0$ و در توابع زوج $f(-x)-f(x)=0$ خواهد بود.

نکته۳: منحنی توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج نسبت به محور yها متقارن است.





نکته۴: تابع با ضابطه $f(x)=c$ همواره زوج است.

نکته۵: تابع با ضابطه $f(x)=0$ تابعی هم زوج و هم فرد است.

مثال ۲۷: کدام یک از توابع زیر هم فرد و هم زوج می‌باشد؟

۱) $f(x)=\sqrt{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\left\lfloor\dfrac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor$ ۴) $f(x)=\sqrt{\sin\pi\lfloor x\rfloor}$

۱) گزینه ۱ و ۳ ۲) گزینه ۱ و ۳ و ۴ ۳) گزینه ۱ و ۲ و ۳ ۴) گزینه ۱ و ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$1)\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in z \\ -1 & x \notin z \end{cases} \Rightarrow$$

چون عبارت زیر رادیکال می‌باشد، لذا ضابطه دوم نمی‌تواند برقرار باشد لذا $f(x) = 0$ و بنابراین $f(x)$ هم زوج و هم فرد است.

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع علامت $Sgn(x)$ می‌باشد و این تابع، تابعی فرد است.

$$3)\ f(x) = \left\lfloor \frac{x^2}{x^2+1} \right\rfloor \xrightarrow{x^2 < x^2+1} 0 < \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x^2}{x^2+1} \right\rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

تابعی هم زوج و هم فرد می‌باشد. $f(x)$

$$4)\ f(x) = \sqrt{\sin \pi \lfloor x \rfloor} \Rightarrow$$

دقت شود که به ازای هر مقدار x، $\lfloor x \rfloor$ عددی صحیح مانند k است و می‌دانیم $\sin k\pi$ همواره برابر صفر می‌باشد لذا $f(x) = 0$ و در نتیجه هم زوج و هم فرد است.

نکته ۶: شرط لازم برای آنکه یک تابع فرد باشد آن است که $f(0) = 0$ یا تابع در $x = 0$ تعریف نشده باشد.

نکته ۷: حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

نکته ۸: حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است.

نکته ۹: مجموع و تفاضل دو تابع فرد ، فرد است.

نکته ۱۰: در توابع به شکل $y = \log(ax + \sqrt{bx^2 + 1})$ اگر $a^2 = b$ آنگاه تابع فرد است.

نکته ۱۱: تابع علامت $\mathbf{Sgn(x)}$ تابعی فرد می‌باشد.

نکته ۱۲: اگر f و g یکی زوج و دیگری فرد باشد آنگاه fog و gof زوج می‌باشند .

مثال ۲۸: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y = x\sin x$ ۲) $y = x\cos x$ ۳) $y = x^3$ ۴) $y = \log(3x + \sqrt{9x^2 + 1})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» باتوجه به نکته ۱۲، گزینه ۴ تابعی فرد است.

$1)\ f(x) = x \to f(-x) = -x = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است

$2)\ f(x) = \cos x \to f(-x) = \cos(x) = f(x) \Rightarrow$ تابع زوج است

$3)\ f(x) = \sin x \to f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است

با توجه به نکته ۱۱ تابع $y = x\sin x$ حاصلضرب دو تابع فرد است. پس تابعی زوج است و با توجه به نکته ۱۲ تابع $y = x\cos x$ تابعی فرد است.

مثال ۲۹: اگر $f(x) = (A+2)\cos x - \sin x$ فرد و $g(x) = (A+B)x|x| + \cos x$ تابع زوج باشد مقدار $2A + B$ کدام‌است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون تابع $f(x)$ تابعی فرد است اگر ضریب $\cos x$ صفر شود، $f(x) = -\sin x$ تابعی فرد خواهد بود پس لزوماً $A + 2 = 0$ و در نتیجه $A = -2$ و به همین ترتیب چون تابع $g(x)$ زوج است پس باید $A + B = 0$ (چون $\cos x$ زوج است) لذا $B = +2$ خواهیم داشت : $2A + B = -4 + 2 = -2$

مثال ۳۰: اگر تابع با ضابطه $f(x) = ax\sin x + (b-2)x$ زوج و تابع با ضابطه $g(x) = (a+1)\cos x + bx^2$ فرد باشد آنگاه دوتائی مرتب (a , b) کدام است؟

۱) (۱ و ۲-) ۲) (۲ و ۱-) ۳) (۱- و ۲) ۴) (۲- و ۱)

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس باید تابع فرد $(b-2)x$ در ضابطه آن قرار نداشته باشد لذا $b - 2 = 0$ یا $b = 2$ می‌باشد و تابع $g(x)$ تابعی فرد است و باید در ضابطه آن تابع زوج $(a+1)\cos x$ قرار نداشته باشد لذا $a + 1 = 0$ یا $a = -1$ خواهد بود.

توابع یک به یک

تابع f را یک به یک گونیم هرگاه به ازای هر $x_1 , x_2 \in D_f$، وقتی $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه بتوانیم نتیجه بگیریم که $x_1 = x_2$.

مثال ۳۱: آیا تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ یک به یک می‌باشد؟

☑ **پاسخ :** تابع یک به یک است

$$f(x_1) = f(x_2) \to \sqrt[3]{x_1 - 2} = \sqrt[3]{x_2 - 2} \to x_1 - 2 = x_2 - 2 \to x_1 = x_2$$

نکته ۱۳: هرگاه هر خط $y = c$ موازی محور x ها نمودار تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع کند. آنگاه آن تابع یک به یک است.

مثال ۳۲: کدامیک از توابع زیر بر بازه $(0,1)$ یک به یک است؟

۱) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$ ۲) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ۳) $f(x) = \sin 4x$ ۴) $f(x) = |2x - 1|$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

چون به ازای هر $x \in (0,1)$، $f'(x) < 0$ بنابراین f اکیداً نزولی است و در نتیجه یک به یک است.

حال نشان می‌دهیم چرا سایر گزینه‌ها یک به یک نیستند.

$$f(x) = [x + \frac{1}{2}] = \begin{cases} 0 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$ f یک به یک نیست.

$$f(x) = \sin 4x \Rightarrow f(\frac{\pi}{16}) = f(\frac{3\pi}{16}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$ f یک به یک نیست.

$$f(x) = |2x - 1| \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ f یک به یک نیست.

توابع صعودی و نزولی :

تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید:

۱) تابع f را بر A صعودی گونیم هرگاه : $\forall x_1 , x_2 \in A , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

۲) تابع f را بر A اکیداً صعودی گونیم هرگاه : $\forall x_1 , x_2 \in A , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

۳) تابع f را بر A نزولی گونیم ، هرگاه : $\forall x_1 , x_2 \in A , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

۴) تابع f را بر A اکیداً نزولی گونیم هرگاه : $\forall x_1 , x_2 \in A , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

تذکر ۸: توابع نزولی و صعودی را یکنوا و توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی را اکیداً یکنوا نیز می‌گویند.

نکته ۱۴: اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد. انگاه یک به یک نیز می‌باشد ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

اگر تابعی صعودی باشد می‌توان آنرا از طرفین یک نامساوی حذف کرد یا بر طرفین یک نامساوی اعمال کرد بدون آنکه جهت نامساوی عوض شود، ولی اگر تابعی اکیداً نزولی باشد جهت نامساوی در هر دو صورت عوض می‌شود.

تذکر ۹: تعیین صعودی و نزولی بودن با استفاده از مشتق ساده‌تر انجام می‌شود که در فصل مربوطه توضیح داده خواهد شد.

توابع معکوس

تعریف ۲ : وارون یا معکوس تابع f رابطه‌ای است که از جابجا کردن مؤلفه‌های اول و دوم ، همهٔ زوجهای مرتب f بدست اید :

توضیح: شرط لازم و کافی برای انکه تابع f وارون‌پذیر باشد. اینست که f یک به یک باشد .

$$\begin{cases} f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\} \\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

نکته ۱۵: هر تابع پیوسته و اکیداً یکنوا بر $[a,b]$ وارون‌پذیر است.

نحوه بدست آوردن تابع معکوس : برای بدست اوردن ضابطه معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y بدست آورده و سپس نقش x و y را عوض می‌کنیم.

مثال ۳۳: اگر $f(x)=x\sqrt{x}+1$، ضابطه تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{(x-1)^2}\ ,\ x\ge 1$ ۲) $\sqrt[3]{(x-1)^2}\ ,\ x\in R$ ۳) $\sqrt[3]{x^2-1}\ ,\ x>1$ ۴) $\sqrt[3]{x^2-1}\ ,\ x\in R$

پاسخ : گزینه «۱» $y=x\sqrt{x}+1 \Rightarrow y-1=x\sqrt{x} \Rightarrow x^3=(y-1)^2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{(y-1)^2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$

چون دامنه f بازه $[0,+\infty)$ می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت برد f بازهٔ $[1,+\infty)$ می‌باشد. بنابراین دامنه تابع f^{-1} که همان برد f است بازه $[1,+\infty)$ می‌باشد.

نکته ۱۶: اگر نقطه $A(a,b)$ روی منحنی f باشد، نقطه $A'(b\ ,\ a)$ روی منحنی f^{-1} خواهد بود، یعنی نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگر می‌باشند.

مثال ۳۴: تابع وارون تابع با ضابطه $y=x^3-6x^2+12x$ کدام است؟

۱) $y=2+\sqrt[3]{x+8}$ ۲) $y=-2-\sqrt[3]{x+8}$ ۳) $y=2+\sqrt[3]{x-8}$ ۴) $y=-2-\sqrt[3]{x-8}$

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول :

$$y=x^3-6x^2+12x=(x-2)^3+8 \Rightarrow (x-2)^3=y-8 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-8}$$

$$\Rightarrow x=2+\sqrt[3]{y-8} \xrightarrow[\text{عوض می‌شود}]{\text{نقش x و y}} y=f^{-1}(x)=2+\sqrt[3]{x-8}$$

روش دوم : باتوجه به نکته ۲۱ داریم : $A(2,8)\in f$ پس نقطه $A'(8,2)\in f^{-1}$ خواهد بود و تنها گزینه‌ای که اگر $x=8$ قرار دهیم مقدار $y=2$ حاصل شود گزینه ۳ می‌باشد.

نکته ۱۷: در توابع هموگرافیک بفرم $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه ضابطه تابع معکوس تابع با خود آن برابرخواهد بود، یعنی $fof(x)=x$.

مثال ۳۵: تابعی که معکوس خودش است، کدام است؟

۱) $y=\text{Arcsin}\,x$ ۲) $y=\ln x$ ۳) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x}$ ۴) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

پاسخ : گزینه «۴» باتوجه به نکته ۲۲ داریم : $\begin{cases}a=-1\\d=1\end{cases}\to a+d=0$ پس ضابطه معکوس آن برابر ضابطه خود تابع است.

نکته ۱۸: معکوس تابع فرد، تابعی فرد است.

نکته ۱۹: تابع زوج معکوس‌پذیر و یک به یک نیست.

نکته ۲۰: اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. (این حکم برای اکیداً نزولی هم برقرار است.)

مثال ۳۶: اگر $f(x)=\text{Arcsin}\dfrac{1}{x+1}$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1+\sin x}{x}$ ۲) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ ۳) $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$ ۴) $\dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول : باتوجه به نکته ۲۱ فرض می‌کنیم، نقطه‌ای به طول $x=0$ روی منحنی f باشد، خواهیم داشت :

$$y=\text{Arcsin}\frac{1}{1+0}=\text{Arcsin}\,1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow A(0,\frac{\pi}{2})\in f \Rightarrow A'(\frac{\pi}{2},0)\in f^{-1}$$

تنها گزینه‌ای که اگر $x=\dfrac{\pi}{2}$ را قرار دهیم آنگاه $y=0$ خواهد شد، گزینه ۴ است.

روش دوم : $y=\text{Arcsin}\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y=\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y+x\sin y=1 \Rightarrow x=\dfrac{1-\sin y}{\sin y} \xrightarrow[\text{عوض می‌شود}]{\text{نقش x و y}} y=f^{-1}(x)=\dfrac{1-\sin x}{\sin x}$

مثال ۳۷: ضابطه معکوس تابع با ضابطه $f(x)=\text{Ln}\dfrac{x^2}{x^2+1}$ $(x>0)$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{\dfrac{e^x}{1-e^x}}$ ۲) $\sqrt{\dfrac{1-e^x}{e^x}}$ ۳) $\sqrt{\dfrac{e^x}{1+e^x}}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{1+e^x}{e^x}}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$y=\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1}=e^y \Rightarrow x^2-x^2e^y=e^y \Rightarrow x^2=\frac{e^y}{1-e^y} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{e^y}{1-e^y}} \xrightarrow{x>0} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$$

مثال ۳۸: اگر $f(x)=x^3+3x+4$ باشد، نمودار تابع f^{-1} از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) (۱ و -۱) ۲) (-۱ و ۱) ۳) (-۱ و ۰) ۴) (۰ و -۱)

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به اینکه $f(-1)=0$، نقطه $(-1,0)$ متعلق به نمودار تابع f است و لذا نقطه $(0,-1)$ متعلق به نمودار f^{-1} می‌باشد.

ترکیب دو تابع

هرگاه f و g هر یک توابع حقیقی به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g باشند ، تابع جدیدی با دامنه D_{fog} با ضابطه $fog(x)$ تعریف می‌شود، بعبارت دیگر تابع $(fog)(x)$ یعنی در تابع $f(x)$، به جای x، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال ۳۹: اگر $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ و $g(x)=\cos^2 x$، تابع $f^{-1}(g(x))$ برای $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\text{Lntg}x$ ۲) $\text{Ln}\cot gx$ ۳) $2\text{Ln}\cot gx$ ۴) $2\text{Lntg}x$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow ye^x+y=e^x \Rightarrow ye^x-e^x=-y \Rightarrow e^x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x=\text{Ln}\frac{y}{1-y}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\text{Ln}\dfrac{x}{1-x}$. حال به جای x در f^{-1}، تابع $g(x)$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\cos^2 x)=\text{Ln}\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\text{Ln}\cot g^2x=2\text{Ln}\cot gx$$

مثال ۴۰: اگر $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ و $g(x)=tgx$، ضابطه $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\cos^2 x$ ۲) $\sec^2 x$ ۳) $\sin^2 x$ ۴) $\csc^2 x$

پاسخ : گزینه «۱» $(fog)(x)=f(g(x))=f(tgx)=\dfrac{1}{1+tg^2x}=\cos^2 x$

تذکر ۱۰: دامنه تابع $(fog)x$ زیر مجموعه‌ای از دامنه تابع $g(x)$ است و به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}$$

البته می‌توان ابتدا ضابطه تابع $fog(x)$ را تشکیل داد و بدون ساده کردن آن دامنه آن را تعیین کرد.

مثال ۴۱: تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ مفروض هستند، D_{fog} کدام است؟

۱) $D_{fog}=R-\{-1,5\}$ ۲) $D_{fog}=R-\{1-,5\}$ ۳) $D_f=R-\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$ ۴) $D_{fog}=R-\left\{-1,\dfrac{-5}{4}\right\}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول :

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{x}{x+1}-5}$$

$$fog(x)=\frac{x+1}{x-5x-5}=\frac{x+1}{-4x-5}\to D_{fog}=R-\left\{-1,-\frac{5}{4}\right\}$$

توجه شود که $x\neq -1$ باید باشد تا ضابطه $fog(x)$ تعریف شود.

روش دوم :

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \middle| \; g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in (R - \{-1\}) \middle| \; \frac{x}{x+1} \neq 5 \right\}$$

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \mid x \neq -1, x \neq -\frac{5}{4} \right\} = R - \left\{ -1, -\frac{5}{4} \right\}$$

مثال ۴۲: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \le -1 \\ 3 & x > -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ -2 & x \le -1 \end{cases}$ باشد مقدار $gof(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 3

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(-1) = 2(-1) = -2 \Rightarrow gof(-1) = g[f(-1)] = g(-2) = -2$$

نکته۲۱: شرط لازم و کافی برای اینکه $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد آن است که $(fof)(x) = x$ باشد. (x متعلق به دامنه f است)

نکته۲۲: اگر f و g معکوس‌پذیر باشند، آنگاه رابطه مقابل برقرار است : $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

توابع وارون مثلثاتی

می‌دانیم توابع مثلثاتی یک به یک نیستند. بنابراین وارون‌پذیر نمی‌باشد. ولی با محدود کردن دامنه انها می‌توان انها را به توابعی یک به یک و معکوس‌پذیر تبدیل کرد

۱) برای اینکه تابع $f(x) = \sin x$ وارون‌پذیر شود دامنه آنرا به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم. در این فاصله $\sin x$ تابعی اکیداً صعودی است و تمام مقادیر بین ۱- و ۱+ را اتخاذ می‌کند. وارون انرا با نماد $\text{Arcsin}\, x$ یا $\sin^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\alpha = \text{Arcsin}\, x \Leftrightarrow \sin\alpha = x \;,\; -1 \le x \le 1 \;,\; -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

یعنی $\text{Arcsin}\, x$ برابر زاویه‌ای است که سینوس آن زاویه x باشد و ان زاویه حتماً بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قرار داشته باشد.

۲) برای وارون‌پذیری $f(x) = \cos x$ دامنه آنرا به $[0, \pi]$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با $\text{Arccos}\, x$ یا $\cos^{-1} x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\beta = \text{Arccos}\, x \Leftrightarrow \cos\beta = x \;,\; -1 \le x \le 1 \;,\; 0 \le \beta \le \pi$$

۳) برای وارون‌پذیر $f(x) = tgx$ دامنه را به $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با نماد $\text{Arctg}x$ یا $tg^{-1}x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\delta = \text{Arctg}x \Leftrightarrow tg\delta = x \;,\; x \in R \;,\; -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$$

۴) برای وارون‌پذیری $f(x) = \cot gx$، دامنه را به $(0, \pi)$ محدود می‌کنیم. وارون آنرا با نماد $\text{Arccot}\, gx$ یا $\cot g^{-1}x$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\theta = \text{Arccot}\, gx \Leftrightarrow \cot g\theta = x \qquad x \in R \;,\; 0 < \theta < \pi$$

مثال ۴۳: حاصل $A = \sin[\text{Arccos}(\frac{-1}{2}) + \text{Arcsin}(\frac{-\sqrt{3}}{2})]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Arccos}(\frac{-1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \\ \sin(\frac{-\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Arcsin}(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

روابط و خواص مهم توابع وارون مثلثاتی

۱. توابع Arcsin و Arctg توابع صعودی، و توابع Arccos و Arccotg، توابع نزولی هستند.

۲. توابع Arcsin و Arctg توابع فرد هستند، و توابع Arccos و Arccotg، نه فرد نه زوج هستند. یعنی داریم:

$$\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}\, x \qquad \text{و} \qquad \text{Arctg}(-x) = -\text{Arctg}x$$

$$\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x \qquad \text{و} \qquad \text{Arccot}\, g(-x) = \pi - \text{Arccot}\, gx$$

۳.

$$\sin(\text{Arcsin}\, x) = x \qquad , \qquad \cos(\text{Arccos}\, x) = x$$

$$tg(\text{Arctg}x) = x \qquad , \qquad \cot g(\text{Arccot}\, gx) = x$$

۴.

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{Arctg}(tgx) = x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arccos}(\cos x) = x \quad 0 \le x \le \pi \qquad \text{Arccot}\, g(\cot gx) = x \quad 0 < x < \pi$$

۵.

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} \;,\; \text{Arctg}x + \text{Arccot}\, gx = \frac{\pi}{2}$$

۶.

$$\text{Arctg}x + \text{Arctg}y = \begin{cases} \text{Arctg}\frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \text{Arctg}\frac{x+y}{1-xy} & xy > 1 \;,\; x > 0 \\ \text{Arctg}\frac{x+y}{1-xy} & xy > 1 \;,\; x < 0 \end{cases}$$

مثال ۴۴: حاصل $\text{Arctg}\frac{1}{3} + \text{Arctg}\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\text{Arctg}\frac{5}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\alpha = \text{Arctg}\frac{1}{2}$ و $\beta = \text{Arctg}\frac{1}{3}$ در این صورت

$$\begin{cases} tg\alpha = \frac{1}{2} \\ tg\beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۴۵: مقدار $2\text{Arctg}\frac{1}{2}$ برابر کدام است؟

۱) $\text{Arctg}\frac{4}{3}$ ۲) $\text{Arctg}\frac{3}{4}$ ۳) $\text{Arctg}\frac{2}{3}$ ۴) $\text{Arctg}\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\alpha = \text{Arctg}\frac{1}{2}$ در این صورت:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\alpha = \text{Arctg}\frac{4}{3}$$

مثال ۴۶: حوزه تعریف $f(x) = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 x)}$ کدام است؟

۱) $1 \le x \le 2$ ۲) $x \le 1$ ۳) $x \ge 2$ ۴) $\frac{1}{2} \le x \le 2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\text{Arcsin}(\log_2 x) \ge 0 \Rightarrow \log_2 x \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$$

از طرفی عبارت مقابل Arcsin باید بین ۱- و ۱+ باشد، بنابراین:

$$-1 \le \log_2 x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$$

از اشتراک گرفتن جوابهای به دست آمده نتیجه می‌شود گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴۷: $\text{Arccot}\, gx$ برابر است با:

۱) $\text{Arctg}\frac{1}{x}$ ۲) $\frac{\pi}{2} + \text{Arctg}\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}x$ ۴) $\frac{\pi}{2} + \text{Arctg}x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به خاصیت (۵)، گزینه ۳ صحیح است.

توجه: رابطه $\text{Arccot}\, gx = \text{Arctg}\frac{1}{x}$، تنها وقتی برقرار است که $x > 0$ باشد

مثال ۴۸: حوزه تعریف $f(x) = \operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4+2\sin x}$ کدام است؟

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$ ۳) $0<x<+\infty$ ۴) $2k\pi\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» عبارت مقابل Arccos باید بین ۱- و ۱ باشد، و چون $\dfrac{3}{4+2\sin x}$ همواره مثبت است پس کافی است:

$$\frac{3}{4+2\sin x}\le 1 \Rightarrow \sin x\ge\frac{-1}{2} \Rightarrow 2k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$$

مثال ۴۹: اگر $\pi\le x\le 2\pi$ باشد، حاصل $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ کدام است؟

۱) $\pi-x$ ۲) $\pi+x$ ۳) $2\pi-x$ ۴) $x-\pi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طبق خاصیت (۴) می‌دانیم $\cos$ و $\cos^{-1}$ وقتی با هم از بین میروند که زاویه مقابل به $\cos$ در بازهٔ $[0,\pi]$ باشد. بنابراین با توجه به فرض داده شده در مسأله سعی می‌کنیم کمان x را طوری تغییر دهیم که در فاصله $[0,\pi]$ قرار گیرد.

$$\operatorname{Arccos}(\cos x) = \operatorname{Arccos}(\cos(\pi+(x-\pi))) = \operatorname{Arccos}(-\cos(x-\pi))$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت (۲)}} \pi-\operatorname{Arccos}(\cos(x-\pi)) = \pi-(x-\pi) = 2\pi-x$$

توجه کنید که در تساوی ماقبل آخر چون $x-\pi$ زاویه‌ای بین ۰ و π می‌باشد مجاز هستیم $\cos$ و Arccos را با هم ساده کنیم

توابع هیپربولیک

توابع سینوس هیپربولیک، کسینوس هیپربولیک، تانژانت هیپربولیک، کتانژانت هیپربولیک، سکانت هیپربولیک و کسکانت هیپربولیک با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

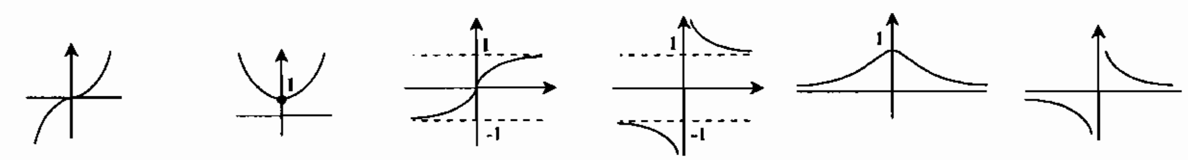
$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

دامنه و برد توابع هیپربولیک به صورت زیر است:

$y=\sinh x$	$D_f=R$	$R_f=R$
$y=\cosh x$	$D_f=R$	$R_f=[1,+\infty)$
$y=\operatorname{tgh} x$	$D_f=R$	$R_f=(-1,+1)$
$y=\coth x$	$D_f=R-\{0\}$	$R_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
$y=\operatorname{sech} x$	$D_f=R$	$R_f=(0,1]$
$y=\operatorname{csch} x$	$D_f=R-\{0\}$	$R_f=R-\{0\}$

شکل توابع هیپربولیک به صورت زیر است:



$y=\sinh x$ $y=\cosh x$ $y=\operatorname{tgh} x$ $y=\coth x$ $y=\operatorname{sech} x$ $y=\operatorname{csch} x$

نکته۲۳: توابع $\sinh x, \operatorname{tgh} x, \coth x$ و $\operatorname{csch} x$، توابع فرد و توابع $\cosh x$ و $\operatorname{sech} x$ توابع زوج می‌باشند.

نکته۲۴: توابع هیپربولیک در اعداد حقیقی متناوب نیستند ولی دارای دوره تناوب مختلط می‌باشند. دوره تناوب $\sinh x$، $\cosh x$، $\operatorname{sech} x$ و $\operatorname{csch} x$ برابر $2\pi i$ و دوره تناوب $\operatorname{tgh} x$ و $\coth x$ برابر πi می‌باشد.

اتحادهای مهم در توابع هیپربولیک

۱) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

۲) $\operatorname{tgh}^2 x+\operatorname{sech}^2 x=1$

۳) $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$

۴) $\sinh x+\cosh x=e^x$

۵) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$

۶) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$

۷) $\operatorname{tgh}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{tgh}x\pm\operatorname{tgh}y}{1\pm\operatorname{tgh}x\operatorname{tgh}y}$

۸) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x=\dfrac{2\operatorname{tgh}x}{1-\operatorname{tgh}^2 x}$

۹) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x=2\cosh^2 x-1=1+2\sinh^2 x=\dfrac{1+\operatorname{tgh}^2 x}{1-\operatorname{tgh}^2 x}$

مثال ۵۰: مقدار $\operatorname{tgh}(\operatorname{Ln}3)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\operatorname{tgh}(\operatorname{Ln}3)=\frac{e^{\operatorname{Ln}3}-e^{-\operatorname{Ln}3}}{e^{\operatorname{Ln}3}+e^{-\operatorname{Ln}3}}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

مثال ۵۱: برد تابع $y=\operatorname{tgh}\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) R ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,1)$ ۴) R^+

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه $\sqrt{x}\ge 0$ و همچنین با توجه به نمودار تابع tgh نتیجه می‌شود $R_f=[0,1)$.

مثال ۵۲: تابع $y=\coth x$ با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ۲) $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ ۳) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$y=\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

معکوس توابع هیپربولیک:

با توجه به شکل توابع هیپربولیک، توابع $\sinh$، tgh، $\coth$ و csch توابع یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشند ولی توابع $\cosh$ و sech یک به یک نیستند و بنابراین وارون‌پذیر نیز نمی‌باشند. برای پیدا کردن وارون آنها دامنه این توابع را به $x\ge 0$ محدود می‌کنیم.

مثال ۵۳: وارون تابع $y=\sinh x$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ :**

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow y=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\Rightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0\Rightarrow e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

چون $y-\sqrt{y^2+1}<0$ و $e^x>0$. پس فقط جواب $y+\sqrt{y^2+1}$ قابل قبول است، لذا:

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\operatorname{Ln}(y+\sqrt{y^2+1})\Rightarrow y=\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})=\sinh^{-1}x$$

به طور کلی وارون توابع هیپروبولیک به شرح زیر است:

۱) $\sinh^{-1}x=\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})\ :\ x\in R\ ,\ R_f=R$

۲) $\cosh^{-1}x=\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})\ :\ x\ge 1\ ,\ R_f=R$

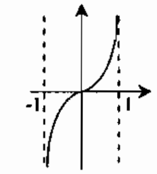
۳) $\operatorname{tgh}^{-1}x=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(\frac{1+x}{1-x})=\coth^{-1}\frac{1}{x}\ :\ |x|<1\ ,\ R_f=R$

۴) $\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=\operatorname{tgh}^{-1}\frac{1}{x}\ :\ |x|>1\ ,\ R_f=R-\{0\}$

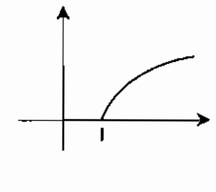
۵) $\operatorname{sech}^{-1}x=\operatorname{Ln}(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})=\cosh^{-1}\frac{1}{x}\ :\ 0<x\le 1\ ,\ R_f=R-\{0\}$

۶) $\operatorname{csch}^{-1}x=\operatorname{Ln}(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|})=\sinh^{-1}\frac{1}{x}\ :\ x\ne 0\ ,\ R_f=R-\{0\}$

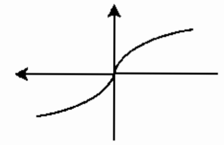
شکل توابع وارون هیپربولیک به صورت زیر است:



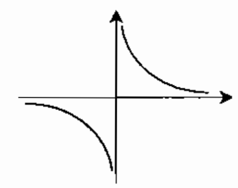
$y=\text{tgh}^{-1}x$



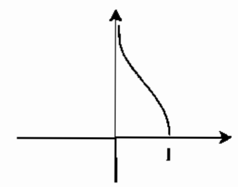
$y=\cosh^{-1}x$



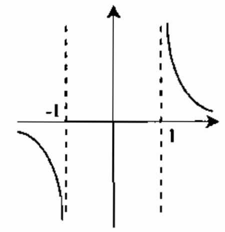
$y=\sinh^{-1}x$



$y=\text{csch}^{-1}x$



$y=\text{sech}^{-1}x$



$y=\coth^{-1}x$

مثال ۵۴: اگر $f(x)=\cosh x$، مقدار $f^{-1}(\frac{5}{4})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\ln 2$ ۴) $\frac{\ln 2}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$f^{-1}(x)=\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

بنابراین:

$f^{-1}(\frac{5}{4})=\ln(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}-1})=\ln(\frac{5}{4}+\frac{3}{4})=\ln 2$

مثال ۵۵: دامنه تابع $f(x)=\text{sech}^{-1}(\text{tg}x)$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به دامنه تابع sech^{-1} لازم است: $0<\text{tg}x\le 1 \Rightarrow 0<x\le\frac{\pi}{4} \Rightarrow k\pi<x\le k\pi+\frac{\pi}{4}$

نکته۲۵: توابع $\sinh^{-1}$، tgh^{-1}، $\coth^{-1}$ و csch^{-1} توابع فرد می‌باشند و توابع $\cosh^{-1}$ و sech^{-1} نه فرد و نه زوج هستند.

روابط بین نسبتهای مثلثاتی و توابع هیپربولیک

$\cosh x=\cos ix$ $\cosh ix=\cos x$ $\sinh x=-i\sin ix$ $\sinh ix=i\sin x$

تذکر ۱۱: کلیه اتحادهای مثلثاتی با تبدیل sin به isinh و cos به cosh، به اتحادهای مشابه برای توابع هیپربولیک (هذلولی) تبدیل می‌شوند.

$\sinh^{-1}(ix)=i\sin^{-1}x$ $\sinh^{-1}x=-i\sin^{-1}(ix)$

$\cosh^{-1}(ix)=\pm i\cos^{-1}(ix)$ $\cosh^{-1}x=\pm\cos^{-1}x$

مثال ۵۶: e^x با کدامیک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\sinh x\cosh x$ ۲) $\cosh x+\sinh x$ ۳) $\sinh^2x+\cosh^2x$ ۴) $\frac{1}{\sinh x}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\sinh x+\cosh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}=e^x$

مثال ۵۷: مقدار $\cosh(\ln 2)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow\cosh(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2}=\frac{e^{\ln 2}+e^{\ln 2^{-1}}}{2}$

اما باتوجه به خاصیت $e^{\ln a}=a$ خواهیم داشت:

$\frac{e^{\ln 2}+e^{\ln\frac{1}{2}}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}$

توابع متناوب

تابع f را با دامنه D_f در نظر بگیرید، هرگاه عددی مانند $T>0$ وجود داشته باشد به شکلی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}1)\ \forall x\in D_f,\ x\pm T\in D_f\\ 2)\ \forall x\in D_f,\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

در این صورت تابع f را متناوب گوییم و T را دوره تناوب تابع می‌نامیم، لازم به ذکر است که وقتی صحبت از دوره تناوب می‌شود، منظور کوچکترین مقدار مثبت T می‌باشد.

نکته۲۶: اگر f متناوب باشد، دامنه f محدود نیست.

دوره تناوب توابع مثلثاتی: دوره تناوب نسبتهای مثلثاتی به فرم کلی در جدول زیر مشخص شده است:

تابع مثلثاتی	دوره تناوب	تابع مثلثاتی	دوره تناوب
$y=\cos^{2k-1}ax$	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$y=\sin^{2k}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$y=\sin^{2k-1}ax$	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$y=\cos^{2k}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$y=\text{tg}^{2k-1}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$y=\text{tg}^{2k}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$y=\text{cotg}^{2k-1}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$y=\text{cotg}^{2k}ax$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$

باتوجه به جدول فوق ملاحظه می‌شود که دوره تناوب توابع cotgax و tgax با هر توانی برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد برای مثال دوره تناوب تابع $y=\text{tg}2x$ برابر $T=\frac{\pi}{2}$ و دوره تناوب تابع $y=\text{cotg}^2 7x$ برابر $T=\frac{\pi}{7}$ می‌باشد اما دوره تناوب توابع مثلثاتی cosax و sinax اگر توان زوج باشد برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد و اگر توان فرد باشد برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ خواهد بود. برای مثال دوره تناوب تابع $y=\sin^4 2x$ برابر $T=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

نکته ۲۷: توابعی که در آن کمان توابع مثلثاتی به شکل(ax+b) نباشد، متناوب نیستند. (اعداد ثابت: a ، b)

مثال ۵۸: هیچ یک از توابع زیر متناوب نیستند.

$y=\sin\frac{1}{x},\ y=\cos^5\sqrt{x}\ ,\ y=\sin|x|\ ,\ y=\cos\lfloor x\rfloor$

نکته۲۸: اگر نسبتهای مثلثاتی با کمان خود (یا توان و یا ضریبی از کمان خود) به صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم قرار گرفته باشند آن تابع متناوب نیست.

مثال ۵۹: توابع روبرو متناوب نیستند. $f(x)=x\sin x\ ,\ f(x)=x^2+\cos 2x$

مثال ۶۰: دوره تناوب تابع $f(x)=x\cos x$ کدام است؟

۱) π ۲) دوره تناوب ندارد ۳) $\frac{2\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق تابع متناوب نیست.

نکته۲۹: تابع $f(x)=a$ (تابع ثابت) متناوب است. ولی دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

نکته۳۰: برای تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی که ضابطه آنها بصورت حاصل جمع یا تفاضل چند تابع متناوب می‌باشد ، ابتدا لازم است. دوره تناوب هر یک از توابع را پیدا کنیم ، سپس دوره تناوب تابع اصلی برابر با کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) بین دوره تناوبهای هر یک از توابع خواهد بود. ضمناً برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک چند کسر باید ، ابتدا مخرج آنها را یکی کرد . سپس ک.م.م صورت آنها را محاسبه کنیم.

مثال ۶۱: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=2\cot g^2\frac{\pi}{2}x-4\sin\frac{\pi}{3}x$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} T_1=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2 \\ T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{نکته ۳۲}} T=(T_2\,,\,T_1\ \text{ک.م.م})=6$$

نکته۳۱: اگر تابع مثلثاتی به صورت حاصل ضرب چند نسبت مثلثاتی باشد، برای تعیین دوره تناوب ابتدا باید آنها را به حاصل جمع تبدیل کرد و سپس باتوجه به مطالب عنوان شده دوره تناوب تابع را تعیین کنیم.

مثال ۶۲: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=\cos 3x\sin 5x$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : ابتدا تابع را به حاصل جمع تبدیل و سپس دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 8x)\to\begin{cases}T_1=\pi\\ T_2=\frac{\pi}{4}\end{cases}\xrightarrow{\text{ک.م.م}}T=\pi$$

نکته۳۲: اگر در ضابطهٔ تابعی x دارای توان، زیر رادیکال، داخل جزء صحیح، قدر مطلق و یا در مخرج کسر باشد آن تابع متناوب نیست.

مثال ۶۳: کدام تابع متناوب است؟

۱) $\log(x+1)$ ۲) $y=\lfloor x\rfloor+1$ ۳) $y=\sin\frac{3}{x}$ ۴) $y=2\sin x\cos x$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به نکته فوق تابع $y=2\sin x\cos x=\sin 2x$ متناوب بوده و دارای دوره تناوب $T=\pi$ می‌باشد .

نکته۳۳: توابع $\sin|ax|$ و $\cot g|ax|$ و $tg|ax|$ متناوب نیستند . فقط تابع $\cos|ax|$ متناوب می‌باشد و دورهٔ تناوب آن برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

نکته۳۴ : اگر دوره تناوب تابع $y=f(x)$ برابر با T باشد، دوره تناوب تابع $y=f(ax+b)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ خواهد بود.

مثال ۶۴: فرض می‌کنیم $f(x)=\sin x$ باشد . دوره تناوب تابع $f(3x+\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» باتوجه به نکته فوق و ذکر این مطلب که دوره تناوب تابع $\sin x$ برابر 2π است، دوره تناوب تابع $f(3x+\frac{\pi}{6})$ برابر $T=\frac{2\pi}{3}$ خواهد بود.

نکته۳۵: اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد ، و دورهٔ تناوب آن T باشد ، آنگاه توابع $\sin f(x)$ و $\cos f(x)$ و $tg\ f(x)$ همگی متناوب و با همان دوره تناوب T خواهند بود.

نکته۳۶: دوره تناوب توابع $f(x)=nx-\lfloor nx\rfloor$ و $g(x)=[nx]+[-nx]$ برابر $\frac{1}{|n|}$ می‌باشد و دوره تناوب تابع $(-1)^{[nx]}(nx-[nx])$ برابر $\frac{2}{|n|}$ است.

مثال ۶۵: دوره تناوب تابع $f(x)=5x-\lfloor 6x\rfloor+\lfloor x\rfloor$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ : گزینه «۳» باید صورت مسئله را شبیه $nx-\lfloor nx\rfloor$ بسازیم :

$$f(x)=6x-x-\lfloor 6x\rfloor+\lfloor x\rfloor=\underbrace{6x-\lfloor 6x\rfloor}_{T_1=\frac{1}{6}}-(\underbrace{x-\lfloor x\rfloor}_{T_2=1})\xrightarrow{T_1,T_2\ \text{ک.م.م}}T=1$$

نکته۳۷: اگر تابع g متناوب باشد، تابع fog نیز متناوب می‌باشد و دوره تناوب آن نیز برابر با دوره تناوب g و یا کوچکتر از آن است.
برای مثال تابع $h(x)=\lfloor\cos x\rfloor$ متناوب می‌باشد زیرا می‌توان آن را به شکل $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\cos x$ تعبیر کرد که $h(x)=fog(x)=f[g(x)]=\lfloor\cos x\rfloor$ و چون تابع g متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشد دوره تناوب $h(x)$ نیز 2π می‌باشد.

نکته۳۸: توابع به شکل $f(x)=A\sin ax+B\cos bx$ تنها در صورتیکه $\frac{a}{b}$ عددی گویا باشد متناوب خواهند بود.

مثال ۶۶: کدام یک از توابع زیر متناوب <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) $f(x)=\log\sin x$ ۲) $h(x)=\sin 3x+\cos\pi x$ ۳) $h(x)=\sqrt{\sin x}$ ۴) $h(x)=\cos|4x|$

پاسخ : گزینه «۲» گزینه‌های ۱ و ۳ با توجه به نکته فوق متناوب می‌باشند زیرا برای گزینه «۱» می‌توان $h(x)=fog(x)$ را به شکل $g(x)=\sin x$ و $f(x)=\log x$ که تابع g متناوب است در نظر گرفت و برای گزینه «۳» $h(x)=fog(x)$ را به شکل $g(x)=\sin x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ که تابع g متناوب است در نظر گرفت تابع $\cos|ax|$ نیز قبلاً اشاره شد که متناوب است لذا تنها تابع گزینه «۲» متناوب نمی‌باشد. $(\frac{3}{\pi}\notin Q)$

نکته۳۹: دوره تناوب تابع $f(x)=(-1)^{\lfloor nx\rfloor}$ برابر $\frac{2}{|n|}$ می‌باشد.

نکته۴۰: دوره تناوب تابع $f(x)=tgx\ .\cot gx$ برابر $T=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

نکته۴۱: در تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی ذکر این نکته لازم است که تابع تا حد امکان ساده شود ، سپس دوره تناوب محاسبه گردد.

مثال ۶۷: دوره تناوب تابع $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» اگر قبل از ساده کردن دوره تناوب را حساب کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}T_1=\pi\\ T_2=\pi\end{array}\right\}\xrightarrow[T_2,T_1]{\text{ک.م.م}}T=\pi$$

حال ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: و سپس دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم. $f(x)=1-2\sin^2x\cos^2x\to f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ملاحظه می‌شود که $T=\frac{\pi}{2}$ دوره تناوب تابع می‌باشد.

مثال ۶۸: دوره تناوب تابع $f(x)=\cot gax-tgax$ را به دست آورید.

پاسخ : ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{\cos ax}{\sin ax}-\frac{\sin ax}{\cos ax}=\frac{\cos^2ax-\sin^2ax}{\sin ax\cos ax}=\frac{\cos 2ax}{\frac{1}{2}\sin 2ax}=2\cot g2ax$$

بنابراین دوره تناوب f برابر $T=\frac{\pi}{2a}$ خواهد بود.

برد تابع

تعریف ۳ : مفهوم برد یک تابع عبارت است از مقادیر حداکثر و حداقل تغییرات که y می‌تواند داشته باشد، برای تعیین برد توابع روش‌های مختلفی وجود دارد که به شرح زیر است :

۱ــ به دست آوردن x بر حسب y : این روش را نمی‌توان در تمام توابع به عنوان بهترین روش محسوب کرد و در بسیاری موارد نیز امکان‌پذیر نیست.

مثال ۶۹: تمام برد تابع با ضابطه $y=\frac{2}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $0\le y\le 2$ ۲) $0<y\le 2$ ۳) $0<y\le \frac{3}{2}$ ۴) $0<y\le \frac{5}{2}$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲» ابتدا با توجه به ضابطه تابع داریم :

$$\begin{cases} y>0 & (1)\\ y=\frac{2}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=2\Rightarrow x^2=\frac{2-y}{y}\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{2-y}{y}\ge 0\Rightarrow y\le 2 & (2)\end{cases}\xrightarrow{(1),(2)}0<y\le 2$$

۲ــ استفاده کردن از مربع کامل :

در این روش که معمولاً در توابع با توان زوج به کار می‌رود باتوجه به اینکه برد تابع $y=ax^2+bx+c$ اگر $a>0$ برابر $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ و اگر $a<0$ برابر $(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$ می‌باشد می‌توان تستهای به این شکل را جواب داد.

مثال ۷۰: برد تابع $g(x)=x^2+4x+5$ کدام است؟

۱) R ۲) $(0,\infty)$ ۳) $[1,\infty)$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ** : گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases}\Delta=-4\\ a=1\end{cases}$ و باتوجه به فرمول برد تابع $[-\frac{-4}{4},\infty)$ یا $[1,\infty)$ می‌باشد.

۳ــ استفاده از فرمولها و روابط موجود :

۱) $x+\frac{1}{x}\ge 2 \quad (x>0)$

۲) $x+\frac{1}{x}\le -2 \quad (x<0)$

۳) $y=|x-a|+|x-b|\Rightarrow R_f=[|b-a|,+\infty)$

۴) $y=|x-a|-|x-b|\Rightarrow R_f=[-|b-a|,|b-a|]$

۵) $\begin{cases} y=\frac{|x|}{|x|+1}\\ y=\frac{x^2}{x^2+1}\end{cases}\Rightarrow R_f=[0,1)$

۶) $y=\frac{2x}{x^2+1}\to R_f=[-1,1]$

۷) $y=a\sin x+b\cos x\to -\sqrt{a^2+b^2}\le y\le\sqrt{a^2+b^2}$

۸) $y=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\to\frac{1}{2^{n-1}}\le y\le 1$

۹) $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow R_f=R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$

مثال ۷۱: تمام برد تابع $y=|x-2|+|x-3|$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(2,3)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۱» باتوجه به فرمول ۳ داریم : $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\Rightarrow R_f=[1,+\infty)$

مثال ۷۲: برد تابع $f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,1]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[0,1)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۴» با توجه به فرمول (۵) داریم.

مثال ۷۳: برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $R-(-1,1)$ ۴) $R-[-1,1]$

☑ **پاسخ** : گزینه «۳» باتوجه به فرمول ۶ کزینه ۳ صحیح است.

مثال ۷۴: برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ کدام فاصله است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[0,2)$ ۴) $R-(0,1)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$f(x)=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}$$

از طرفی با توجه به نکته فوق $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le 1$، بنابراین $0\le f(x)\le 2$.

مثال ۷۵: حداکثر مقدار تابع $y=2\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) 3 ۴) -3

☑ **پاسخ** : گزینه «۱» باتوجه به فرمول ۷ $(a=2\,,\,b=1)$ داریم :

$$-\sqrt{5}\le y\le\sqrt{5}\Rightarrow Max(y)=\sqrt{5}$$

مثال ۷۶: برد تابع $f(x)=2x-2\lfloor x\rfloor+1$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[1,3)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $[0,3)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$0\le x-\lfloor x\rfloor<1\Rightarrow 0\le 2x-2\lfloor x\rfloor<2\Rightarrow 1\le 2x-2\lfloor x\rfloor+1<3\Rightarrow R_f=[1,3)$$

طرز تعیین بردتوابع جزء صحیح $(y=\lfloor f(x)\rfloor)$:

با توجه به اینکه حاصل جزء صحیح اعداد صحیح خواهد بود پس برای تعیین برد توابع به شکل $y=\lfloor f(x)\rfloor$ ابتدا برد تابع $f(x)$ را تعیین کرده و سپس در این بازه که برای $f(x)$ بدست امده اعداد صحیح را جدا می‌کنیم.

مثال ۷۷: برد تابع $y=\left\lfloor\sqrt{1-x^2}\right\rfloor$ کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۱»

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2\xrightarrow{x^2\ge 0}1-y^2\ge 0\Rightarrow -1\le y\le 1 & (2)\\ y\ge 0\Rightarrow \text{شرط واضح} & (1)\end{cases}\xrightarrow{2,1}\boxed{0\le y\le 1}$$

در این حالت اعداد صحیح این فاصله باید جدا شود که اعداد ۱ و ۰ هستند.

مثال ۷۸: برد تابع $y=\lfloor tgx+\cot gx\rfloor$ کدام است؟

۱) $Z-\{0\}$ ۲) $Z-\{-1,0,1\}$ ۳) $Z-\{0,1\}$ ۴) $Z-\{-1,0\}$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که

$$tgx+\cot gx=tgx+\frac{1}{tgx}$$

بنابراین با توجه به فرمول (۳)، عبارت درون جزء صحیح در تابع فوق بین ۲- و ۲ قرار ندارد، و در نتیجه برد تابع شامل اعداد صحیح ۱- و ۰ و ۱ نخواهد بود.

مثال ۷۹: برد تابع $y=Ln\sin x$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ** : چون $\sin x$ مقابل Ln قرار دارد، پس:

$$0<\sin x\le 1\Rightarrow Ln0<Ln\sin x\le Ln1\Rightarrow -\infty<y\le 0\Rightarrow R_f=(-\infty,0]$$

مثال ۸۰: برد تابع $y=e^{x-|x|}$ کدام است؟

۱) R^+ ۲) R^- ۳) $(0,1]$ ۴) $[1,+\infty)$

☑ **پاسخ** : گزینه «۳» چون تابع داده شده یک تابع نمایی است، پس برد تابع زیر مجموعه اعداد مثبت می‌باشد و از طرفی $x-|x|\le 0$ بنابراین $0<y=e^{x-|x|}\le e^0=1$.

مثال ۸۱: برد تابع $y = Arctg(x^2+6x+10)$ برابر است با:

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دانیم به طور کلی $-\frac{\pi}{2} < Arctgu < \frac{\pi}{2}$ می‌باشد، از طرفی:

$$y = Arctg((x+3)^2+1) \Rightarrow \min(y) = Arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

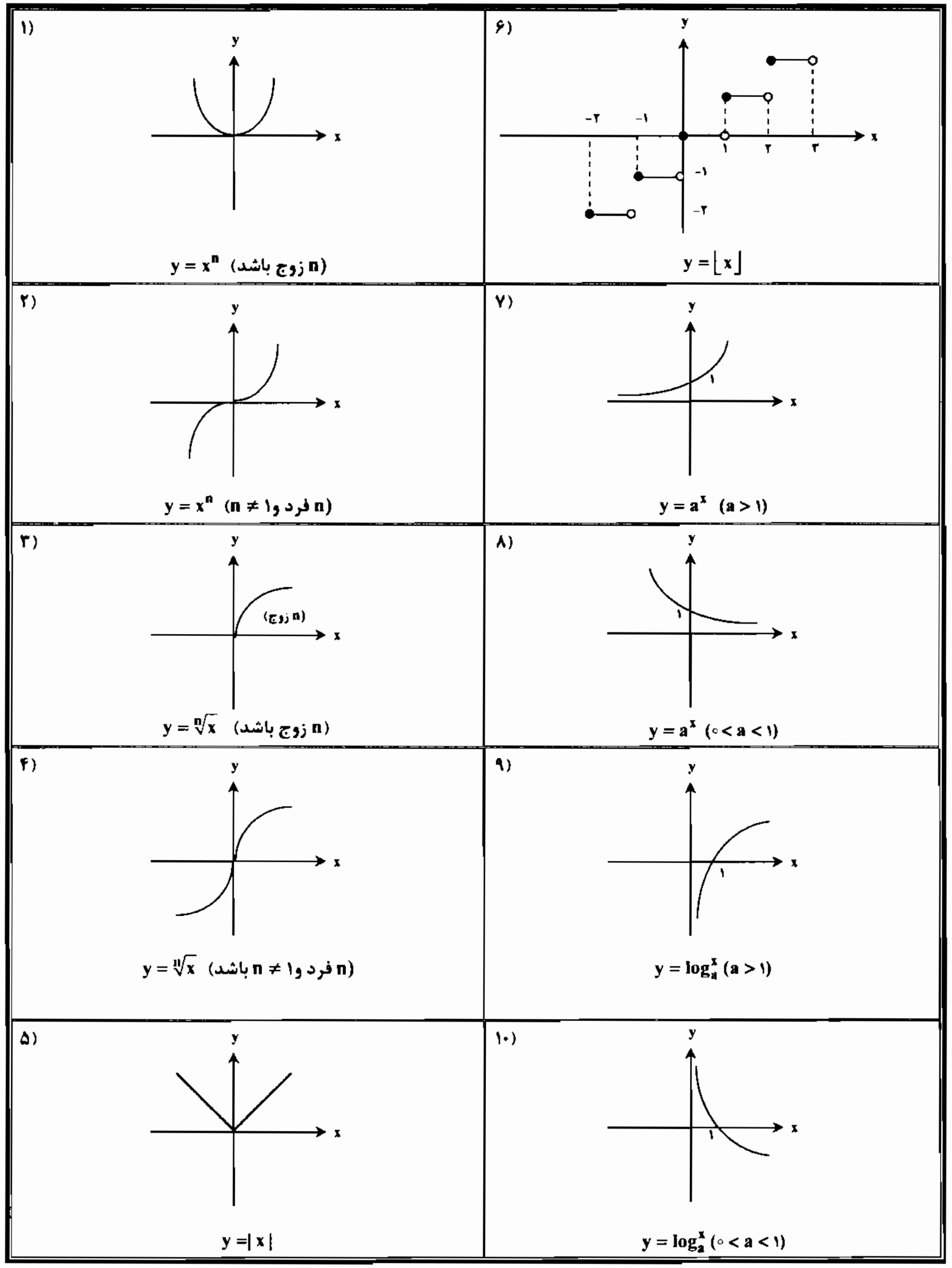
بنابراین $\frac{\pi}{4} \le y < \frac{\pi}{2}$.

مثال ۸۲: برد تابع $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ را به دست آورید.

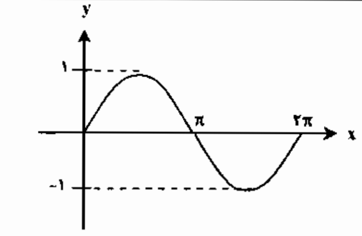
☑ **پاسخ :** با توجه به فرمول (۸) در صفحه ۲۶ داریم:

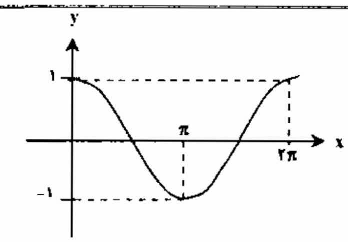
$$\frac{1}{2^{2-1}} \le y \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le y \le 1 \Rightarrow R_f = [\frac{1}{2},1]$$

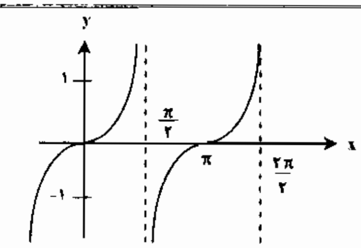
جدول نمودار توابع مهم

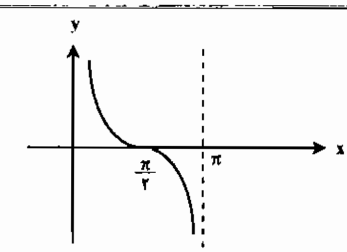


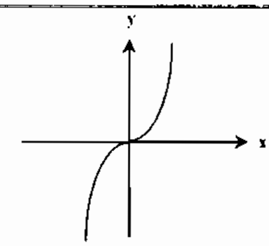
جدول نمودار توابع مهم :

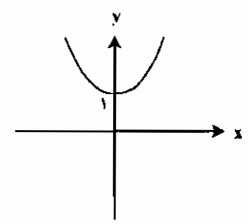
۱۱)

$y = \sin x$

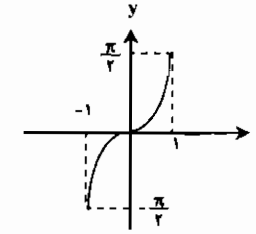
۱۲)

$y = \cos x$

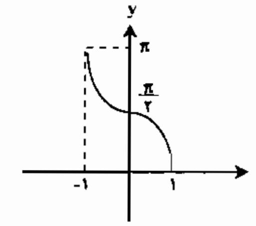
۱۳)

$y = \operatorname{tg} x$

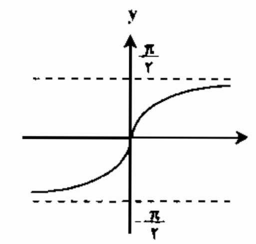
۱۴)

$y = \cot g x$

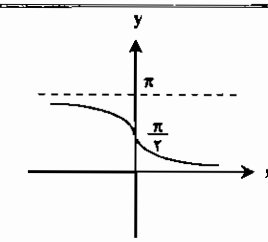
۱۵)

$y = \sinh x$

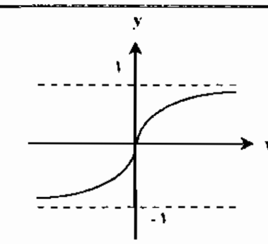
۱۶)

$y = \cosh x$

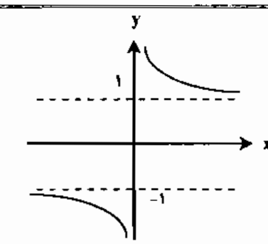
۱۷)

$y = \operatorname{Arc}\sin x$

۱۸)

$y = \operatorname{Arc}\cos x$

۱۹)

$y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$

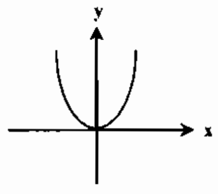
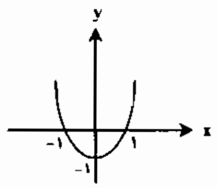
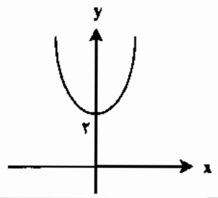
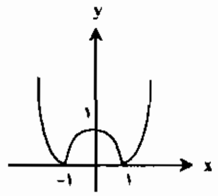
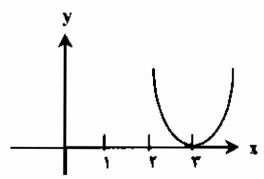
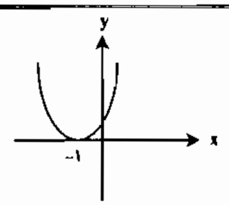
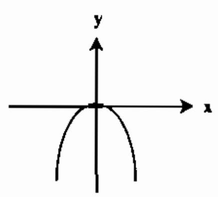
۲۰)

$y = \operatorname{Arc}\cot g x$

۲۱)

$y = \operatorname{tgh} x$

۲۲)

$y = \cot g h x$

انتقال نمودارها

برای درک بهتر مطلب این قسمت را با یک مثال شرح می‌دهیم:

مثال : با توجه به منحنی $y = x^2$ منحنی توابع $y = x^2 - 1$, $y = x^2 + 2$, $y = \|x^2 - 1\|$, $y = (x-3)^2$, $y = (x+1)^2$ و $y = -x^2$ را رسم کنید.	 $y = x^2$
۱) $y = x^2 - 1$: برای رسم نمودار این تابع کافیست منحنی تابع $y = x^2$ را در راستای محور yها به اندازه ۱ واحد به پائین منتقل کنیم.	
۲) $y = x^2 + 2$: برای رسم نمودار این تابع کافیست منحنی تابع $y = x^2$ را به اندازه ۲ واحد در راستای محور yها به بالا منتقل کنیم.	
۳) $y = \|x^2 - 1\|$: برای رسم نمودار این تابع کافیست آن قسمت از نمودار منحنی $y = x^2 - 1$ که زیر محور xها واقع است را نسبت به محور xها قرینه کنیم.	
۴) $y = (x-3)^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیست نمودار منحنی $y = x^2$ را به اندازه ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم.	
۵) $y = (x+1)^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیست نمودار تابع $y = x^2$ را به اندازه ۱ واحد به سمت چپ منتقل کنیم.	
۶) $y = -x^2$: برای رسم نمودار این تابع کافیست نمودار منحنی $y = x^2$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.	

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ اگر $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\sin hx = tg\theta$ ، $\cos hx$ برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\cos\theta$ ۲) $\csc\theta$ ۳) $\sec\theta$ ۴) $\sin\theta$

۲ـ $\cosh^{-1} x$ برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $Ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ ۲) $Ln(1 \pm \sqrt{x^2 - 1})$ ۳) $Ln(x \pm \sqrt{1 - x^2})$ ۴) $Ln(1 \pm \sqrt{1 - x^2})$

۳ـ دامنهٔ وارون تابع با ضابطهٔ $y = \operatorname{sech}x$ کدام بازه است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $(0,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,\infty)$ ۴) $(-1,1]$

۴ـ حاصل $Arcsin(1) - Arcsin(-1)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۵ـ در صورتیکه $f(x) = Lnx^9$ ، $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ و $h(x) = e^x$ باشد، ضابطه $f(g(h(x)))$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $6x$ ۲) $9x$ ۳) $10x$ ۴) e^{9x}

۶ـ اگر $3f(x+2) - f(x) = 4$ و مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ باشد، آنگاه مقدار $f(8)$ چیست؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{150}{81}$ ۲) $\frac{160}{81}$ ۳) $\frac{170}{81}$ ۴) $\frac{180}{81}$

۷ـ برد (Range) تابع $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $(-1,1)$ ۳) R^+ ۴) $(0,\frac{1}{2})$

۸ـ اگر $f(x) = Ln\frac{2x+1}{x}$ باشد $f^{-1}(Ln3)$ کدام استت؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $e^2 - 1$ ۴) $Ln\frac{3}{2}$

۹ـ چنانچه $F(x)$ یک تابع زوج و $G(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ فرد است.
۲) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ زوج است.
۳) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ فرد است.
۴) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ زوج است.

۱۰ـ توابع $f = \{(2,2), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(3,4), (5,6), (2,3)\}$ مفروضند $f+g$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\{(2,3), (4,6)\}$ ۲) $\{(2,5), (3,8)\}$ ۳) $\{(3,5), (2,4)\}$ ۴) $\{(5,6), (8,10), (6,8)\}$

۱۱ـ دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) N ۲) ϕ ۳) Z ۴) Z^-

۱۲ـ اگر $2f(2-x) + 3f(x-2) = x$ باشد $f(x)$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $f(x) = x - \frac{2}{5}$ ۲) $f(x) = 5x + 2$ ۳) $f(x) = 5x - 2$ ۴) $f(x) = x + \frac{2}{5}$

۱۳ـ دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{Lnx}{\sqrt{|x| - x}}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) ϕ ۲) R ۳) R^+ ۴) R^-

۱۴ـ اگر تابع $f(x) = a x \sin x + (b-1)x$ زوج و تابع $g(x) = (a+2)\cos x + bx$ فرد باشد زوج مرتب (a,b) کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $(2,-1)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(-1,2)$

۱۵ـ دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x - |x|}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) R^+ ۲) R^- ۳) ϕ ۴) R

۱۶ـ اگر داشته باشیم $f(Arccos(x-1)) = \frac{x-1}{x}$ مقدار $f(x)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\cos x}{1 - \cos x}$ ۲) $\frac{1 + \cos x}{\cos x}$ ۳) $\frac{1 - \cos x}{\cos x}$ ۴) $\frac{\cos x}{1 + \cos x}$

۱۷ـ توابع $f = \{(2,2), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(3,4), (5,6), (2,3)\}$ مفروضند gof کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

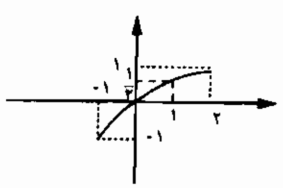
۱) $gof = \{(2,3), (4,6)\}$
۲) $gof = \{(3,5), (2,4)\}$
۳) $gof = \{(2,5), (3,8)\}$
۴) $gof = \{(5,6), (8,10), (6,8)\}$

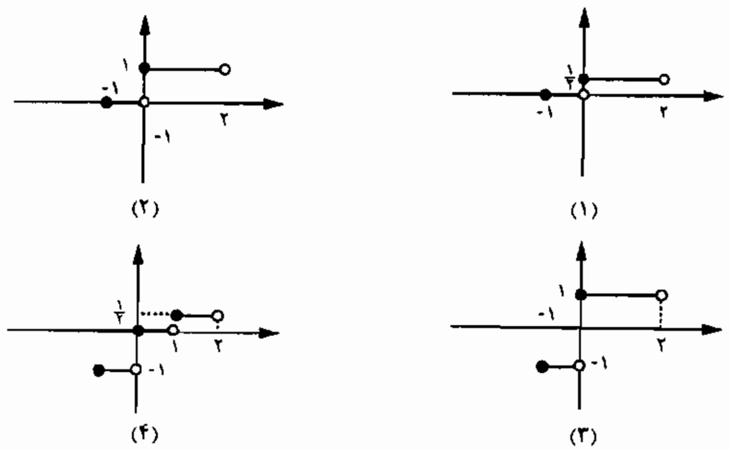
۱۸ـ اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \le -2 \\ x+1 & -2 < x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$ حاصل $fof(-1) + (f(-1))^2$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹ـ اگر نمودارتابع f بر $[-1,2)$ به صورت شکل مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطه $y = f(\lfloor x \rfloor)$ بر $[-1,2)$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)





۲۰ـ اگر $f(x) = a^{-x}$ و $g(x) = b^x$ ، $a > 1$ و $0 < b < 1$ ، آنگاه f و g چگونه‌اند؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) هر دو صعودی ۲) f صعودی و g نزولی ۳) هر دو نزولی ۴) f نزولی و g صعودی

۲۱ـ مجموعه پاسخ‌های نامعادله $|3x - 4| \le 2$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $2 \le x \le 3$ ۲) $\frac{2}{3} \le x \le 2$ ۳) $2 \le x \le 6$ ۴) $\frac{3}{4} \le x \le 2$

۲۲ـ مجموعهٔ پاسخهای نامعادله $|3x| > |3x - 6|$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $1 < x < \infty$ ۲) $-1 < x < 1$ ۳) $-1 < x < \infty$ ۴) $-\infty < x < 1$

۲۳ـ فرض کنید تعداد اعضای مجموعه‌های A و B به ترتیب ۲ و ۳ باشد تعداد توابع از B به A چند تاست؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴)

۲۴ـ نمایش هندسی معادله $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) یک نقطه ۴) دو خط راست

۲۵ـ اگر $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ \frac{x}{2} & x \notin Q \end{cases}$ را روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ در نظر بگیریم، کدام عبارت صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) f دارای مینیمم است ولی ماکسیمم ندارد.

۲) f دارای مینیمم صفر و ماکسیمم $\frac{\pi}{4}$ است.

۳) f دارای مینیمم صفر و ماکسیمم ۱ است.

۴) f نه مینیمم دارد و نه ماکسیمم.

۲۶ـ مجموعه x هایی که در نامساوی $2 > \frac{2|x|-1}{|x|+1} > 1$ صدق می‌کند، کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x > \frac{1}{2}$ ۲) $-2 < x < 2$ ۳) $x < -\frac{1}{3}$ یا $x > \frac{1}{3}$ ۴) $x < -2$ یا $x > 2$

۲۷ـ اگر f و g توابع با ضوابط $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x^2$ باشند، معادلهٔ $(gof)(x) = (fog)(x)$ چند ریشه متمایز دارد؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۸ـ تابع $f(x) = e^x$ یک تابع: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) فرد است. ۲) نه فرد و نه زوج است. ۳) زوج است. ۴) هم فرد و هم زوج است.

۲۹ـ در صورتی که $f(x) = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor -x \rfloor$ باشد، مجموعه $fofof(x)$ چیست؟ ($\lfloor \ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{2\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{0, 4\}$ ۴) $\{0, -2\}$

۳۰ـ به ازای کدام مقادیر حقیقی x نامساوی $\frac{x}{2} \le [x]$ برقرار است؟ ($[x]$ یعنی جزء صحیح x).

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\{x : x > 1\}$ ۲) $\{x : x < 1\}$ ۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ ۴) $\{x : -2 < x < 0\}$

۳۱ـ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$ کدام بازه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $[0, 1]$ ۲) $[0, \frac{3}{2})$ ۳) $[\frac{1}{2}, 1]$ ۴) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۳۲ـ برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1}{e^x + 1}$ کدام مجموعه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\}$ ۲) $\{x : 0 \le x \le \frac{1}{2}\}$ ۳) $\{x : 0 \le x \le 1\}$ ۴) $\{x : 0 < x < 1\}$

۳۳ـ فرض کنید که $f(x) = \frac{(a^x + a^{-x})}{2}$, $a > 0$ در این صورت $f(x+y) + f(x-y)$ برحسب $f(x)$ و $f(y)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $4f(x).f(y)$ ۲) $2f(x).f(y)$ ۳) $\frac{1}{2}f(x).f(y)$ ۴) $f(x).f(y)$

۳۴ـ تابع $f(x) = 2$, $g(x) = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$, $h(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض‌اند. تابع $(f+g)oh$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $\{(0,2)\}$ ۲) $\{(1,5)\}$ ۳) $\{(0,2),(1,5)\}$ ۴) $\{(0,3),(1,4),(2,5)\}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۳»

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + tg^2\theta = \sec^2\theta \Rightarrow \cosh x = \sec\theta$$

۲ـ گزینه «۱»

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = Ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را با هم}} y = Ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

۳ـ گزینه «۱» به متن کتاب مراجعه شود.

۴ـ گزینه «۱»

$$Arc\sin 1 - Arc\sin(-1) = \frac{\pi}{2} - (\frac{-\pi}{2}) = \pi$$

۵ـ گزینه «۱»

$$g[h(x)] = \sqrt[3]{(e^x)^2} = \sqrt[3]{e^{2x}} = e^{\frac{2x}{3}} \Rightarrow f[g(h(x))] = Ln[e^{\frac{2x}{3}}]^9 = Lne^{6x} = 6x$$

۶ـ گزینه «۲» چون مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ است لذا $f(0) = 0$ خواهد بود.

$$2f(x+2) - f(x) = 4 \xrightarrow{x=0} 2f(2) - f(0) = 4 \Rightarrow f(2) = \frac{4}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow 3f(4) - f(2) = 4 \Rightarrow 3f(4) = 4 + \frac{4}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{16}{9}$$

$$x = 4 \Rightarrow 3f(6) - f(4) = 4 \Rightarrow 3f(6) = 4 + \frac{16}{9} \Rightarrow f(6) = \frac{52}{27}$$

$$x = 6 \Rightarrow 3f(8) - f(6) = 4 \Rightarrow 3f(8) = 4 + \frac{52}{27} \Rightarrow \boxed{f(8) = \frac{160}{81}}$$

۷ـ گزینه «۲» تابع f، تابع tghx می‌باشد، و برد آن بازه $(-1, 1)$ است.

۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه $f^{-1}(Ln3)$، می‌توانیم به جای $f(x)$، $Ln3$ قرار دهیم.

$$Ln3 = Ln\frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

۹ـ گزینه «۴»

$F(G(-x)) = F(-G(x)) = F(G(x)) \Rightarrow$ FOG زوج است

$G(F(-x)) = G(F(x)) \Rightarrow$ GOF زوج است

۱۰ـ گزینه «۲» x های مشترک در f و g را در نظر می‌گیریم، و y های متناظر را با هم جمع می‌کنیم:

$$f + g = \{(2,5), (3,8)\}$$

۱۱ـ گزینه «۳»

$$-\sin^2 \pi x \ge 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x \le 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0 \Rightarrow x \in z$$

۱۲ـ گزینه «۴» به جای x در رابطه داده شده عدد۲را قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود $f(0) = \frac{2}{5}$. در بین گزینه‌ها، فقط در گزینه ۴، $f(0)$ برابر $\frac{2}{5}$ می‌باشد.

۱۳ـ گزینه «۱» عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، یعنی $x > 0$. همچنین لازم است:

$$|x| - x > 0 \Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0$$

اشتراک جوابهای به دست آمده ϕ می‌باشد.

۱۴ـ گزینه «۲» برای اینکه تابع f زوج باشد، لازم است ضریب عامل فرد یعنی $b-1$ برابر صفر باشد، پس $b=1$. و برای فرد بودن تابع g لازم است ضریب عامل زوج یعنی $a+2$ برابر صفر باشد پس $a=-2$.

۱۵ـ گزینه «۳» $x-|x|>0 \Rightarrow x>|x|$

رابطه اخیر به ازای هیچ مقدار x برقرار نیست، زیرا همواره $x\le|x|$.

۱۶ـ گزینه «۴» $t=\operatorname{Arccos}(x-1) \Rightarrow \cos t=x-1 \Rightarrow x=1+\cos t$

با جایگزینی در تابع داده شده، به دست می‌آید: $f(t)=\dfrac{1+\cos t-1}{1+\cos t}=\dfrac{\cos t}{1+\cos t}$

۱۷ـ گزینه «۱» $gof=g(f(x))=\{(2,3),(4,6)\}$

۱۸ـ گزینه «۲» $f(-1)$ از ضابطه دوم تابع به دست می‌آید.

$$\begin{cases} f(-1)=-1+1=0 \\ fof(-1)=f[f(-1)]=f(0)=0+1=1 \end{cases} \Rightarrow fof(-1)+[f(-1)]^2=1+0=1$$

۱۹ـ گزینه «۴»

$$-1\le x<0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=-1 \xrightarrow{f(-1)=-1} f(\lfloor x\rfloor)=-1$$
$$0\le x<1 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=0 \xrightarrow{f(0)=0} f(\lfloor x\rfloor)=0$$
$$1\le x\le 2 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=1 \xrightarrow{f(1)=\frac{1}{2}} f(\lfloor x\rfloor)=\frac{1}{2}$$

روش دوم: ملاحظه می‌شود که $f(0)=0$ و تنها گزینه‌ای که این شرط در آن صدق می‌کند، گزینه ۴ است.

۲۰ـ گزینه «۳»

$f(x)=a^{-x} \Rightarrow f'(x)=-a^{-x}\mathrm{Ln}a<0$ f همواره نزولی است.

توجه شود چون $a>1$ لذا $\mathrm{Ln}a>0$ است.

$g(x)=b^{x} \Rightarrow g'(x)=b^{x}\mathrm{Ln}b<0$ g همواره نزولی است.

توجه شود چون $0<b<1$ لذا $\mathrm{Ln}b<0$ می‌باشد.

۲۱ـ گزینه «۲» $|3x-4|\le 2 \Rightarrow -2\le 3x-4\le 2 \Rightarrow 2\le 3x\le 6 \Rightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2$

۲۲ـ گزینه «۱» واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند.

۲۳ـ گزینه «۲» تعداد توابع از B به A برابر $n(B)^{n(A)}$ یعنی $9=3^2$ می‌باشد.

۲۴ـ گزینه «۴» $4x^2=y^2-2y+1 \Rightarrow (2x)^2=(y-1)^2 \Rightarrow y-1=\pm 2x$

۲۵ـ گزینه «۱» واضح است که هر دو ضابطه در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ مقادیر مثبت دارند و چون $f(0)=0$، پس نقطه ۰، نقطه می‌نیمم تابع f است.

دنباله $a_n\in Q$ را در نظر بگیرید به طوریکه $a_n\to\frac{\pi}{2}$، در این صورت $f(a_n)\to 1$. پس f در این بازه هر مقدار دلخواهی نزدیک به یک را اتخاذ می‌کند، ولی مقدار تابع f هرگز برابر یک نخواهد بود، پس f ماکسیمم ندارد.

۲۶ـ گزینه «۴» سمت راست نامساوی فوق همواره برقرار می‌باشد، پس کافی است:

$$\frac{2|x|-1}{|x|+1}>1 \Rightarrow 2|x|-1>|x|+1 \Rightarrow |x|>2 \Rightarrow x>2 \text{ یا } x<-2$$

۲۷ـ گزینه «۲»

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^4+2x^2$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2+2x)=(x^2+2x)^2=x^4+4x^3+4x^2 \Rightarrow x^4+4x^3+4x^2=x^4+2x^2$$
$$\Rightarrow 4x^3+2x^2=0 \Rightarrow 2x^2(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۸ـ گزینه «۲» $f(-x)=e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow$ f نه فرد و نه زوج است

۲۹ـ گزینه «۲»

$$f(x)=2\lfloor x\rfloor+2\lfloor -x\rfloor=2(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)=\begin{cases} 0 & x\in z \\ -2 & x\notin z \end{cases}$$

$$fof(x)=f[f(x)]=\begin{cases} f(0)=0 & \text{اگر } f(x)=0 \text{ باشد} \\ f(-2)=0 & \text{اگر } f(x)=-2 \text{ باشد} \end{cases} \Rightarrow fofof(x)=f[fof(x)]=f(0)=0$$

توضیح: توجه شود وقتی $f(x)=0$ و یا $f(x)=-2$ باشد آنگاه $x\in z$ می‌باشد و $f(0)=f(-2)=0$ می‌باشد.

۳۰ـ گزینه «۲» واضح است که $x=0$ در نامساوی صدق می‌کند، پس گزینه‌ها (۱) و (۴) غلط هستند، همچنین عدد ۱- در نامساوی صدق می‌کند، پس گزینه (۳) نیز غلط می‌باشد. بنابراین فقط گزینه (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۳۱ـ گزینه «۱»

۳۲ـ گزینه «۴» $ye^x+y=1 \Rightarrow ye^x=1-y \Rightarrow e^x=\dfrac{1-y}{y}>0 \Rightarrow 0<y<1$

۳۳ـ گزینه «۲»

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^{x+y}+a^{-x-y}}{2}+\frac{a^{x-y}+a^{y-x}}{2}=\frac{a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^{-y}+a^y)}{2}$$
$$=\frac{(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})}{2}=2f(x)f(y)$$

روش دوم: به ازای $x=y=0$، مقدار عبارت خواسته شده برابر ۲ می‌باشد. تنها گزینه‌ای که به ازای $x=y=0$، برابر ۲ می‌باشد، گزینه ۲ است.

۳۴ـ گزینه «۲» $h(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

بنابراین کمترین مقدار تابع h به ازای $x=1$ حاصل می‌شود که برابر ۲ خواهد بود و فقط همین مقدار در دامنه تابع $f+g$ صدق می‌کند زیرا:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{0,1,2\}$$
$$\Rightarrow (f+g)\circ h=(f+g)\circ h(1)=(f+g)(2)=f(2)+g(2)=2+3=5$$

تست‌های تکمیلی فصل اول

۱ـ هرگاه $\pi < x < 2\pi$ باشد، حاصل $\frac{2}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}\operatorname{cosec} x$ ۲) $-\sqrt{2}\operatorname{cosec} x$ ۳) $-\operatorname{cosec} x$ ۴) $\operatorname{cosec} x$

۲ـ با فرض $tgx = 3$ مقدار عددی $A = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\sin x + 4\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{13}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{3}{17}$ ۴) $\frac{7}{19}$

۳ـ اگر $\operatorname{Log} a$ و $\operatorname{Log} b$ ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{\operatorname{Log}a \times \operatorname{Log}b}{\log(ab)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{-3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۴ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $A = |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۳) 2 ۴) 3

۵ـ اگر $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ کدام است؟

۱) 16 ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) 8

۶ـ اگر $x^2 + x + 1 = 0$ باشد حاصل $A = x^{302} + \frac{1}{x^{302}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۷ـ حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2}$ وقتی $x > 0$ کدام است؟

۱) $-2x-2$ ۲) -2 ۳) $2x+2$ ۴) 2

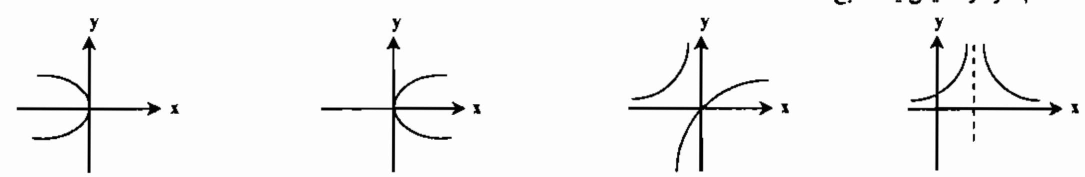
۸ـ فرض کنیم سه عدد مثبت $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند در مورد $\log a, \log b, \log c$ چه حکمی می‌توان کرد؟

۱) سه جمله متوالی تصاعد حسابی هستند.
۲) $\log a$ واسطه حسابی بین $\log b$ و $\log c$ است.
۳) سه جمله متوالی تصاعد هندسی هستند.
۴) $\log a$ واسطهٔ هندسی بین $\log b$ و $\log c$ است.

۹ـ مقدار عبارت $|A \cap (A' \cup B)| \cup |B \cap (A' \cup B')|$ برابر است با:

۱) B ۲) A ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cap B$

۱۰ـ کدام نمودار نمایش یک تابع است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

۱۱ـ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & x \le 2 \\ \frac{1}{(x-2)} & 2 < x \le 3 \\ 2x-5 & x > 3 \end{cases}$ مفروض است، مقدار $f(\sqrt{\log_2^{1024}})$ تقریباً کدام است؟

۱) $0/9$ ۲) $1/3$ ۳) 21 ۴) 64

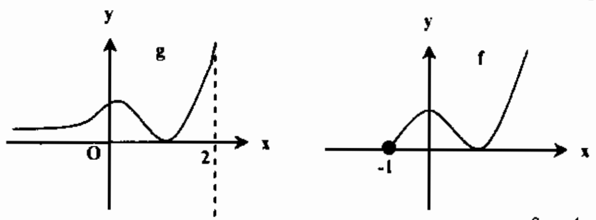
۱۲ـ دامنه تعریف $e^{\operatorname{Ln}(\sqrt{x-1})(x^2+2)}$ کدام است؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)-\{2\}$ ۴) $(1,+\infty)-\{2\}$

۱۳ـ برد تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[0,+\infty)$

۱۴ـ نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه $f-g$ کدام است؟



۱) $[1,+\infty)$
۲) $[2,+\infty)$
۳) $[-1,2)$
۴) $[-1,2]$

۱۵ـ اگر $2f(\frac{1}{x^2}) + f(x^2) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ آنگاه $fog(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۶ـ دوره تناوب تابع $y = \sin^2 ax + \sin\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) تابع دورهٔ تناوب ندارد. ۲) $\frac{\pi}{a}$ ۳) $\frac{2\pi}{a}$ ۴) $\frac{1}{2\pi}$

۱۷ـ در نامساوی $|x^2-2x| > |x^2| - |2x|$ محدوده x کدام است؟

۱) $0 < x < 2$ ۲) $x < 0, x > 2$ ۳) $x = 0, x \ge 2$ ۴) $(-\infty,0)\cup(0,2)$

۱۸ـ حاصل $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rfloor$ برابر کدام است؟ (نماد $\lfloor\ \rfloor$ به مفهوم جزء صحیح است)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

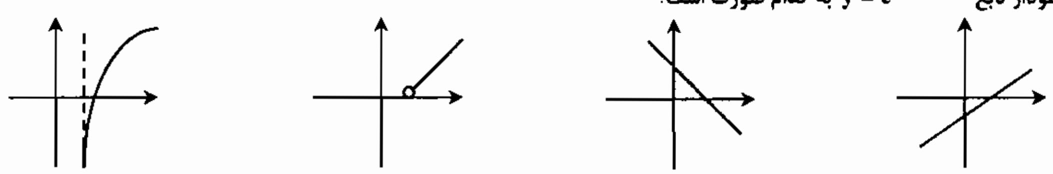
۱۹ـ توابع f و g بر R با ضابطه $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ و $g(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ از نظر زوج و فرد بودن در کدام گزینه صدق می‌کنند؟

۱) فقط g فر د است. ۲) فقط f زوج است ۳) f زوج و g فرد است. ۴) f فرد و g زوج است.

۲۰ـ معادلات $(a)|\sin x| = \sin x + 3$ و $(b)|\tan x| = \tan x + 3$ مفروض هستند. عبارات صحیح کدام است؟

۱) a ریشه ندارد و b ریشه دارد.
۲) a و b هر دو دارای ریشه هستند.
۳) a و b ریشه ندارند.
۴) a ریشه دارد و b ریشه ندارد.

۲۱ـ نمودار تابع $y = e^{\operatorname{Ln}(x-2)}$ به کدام صورت است؟


(۱) (۲) (۳) (۴)

۲۲ـ اگر $\lfloor x \rfloor = n$ و $k \in z$ طوری باشد که $k \le x$، آنگاه:

۱) $n = k$ ۲) $k \le n$ ۳) $n > k$ ۴) $k-1 \le n \le k$

۲۳ـ اگر $\phi(x) = 5x$ و $f(x) = x^2 + 6$ باشد معادله $f(x) = |\phi(x)|$ دارای چند ریشه است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 1 ۴) 2

۲۴ـ مجموعه جواب معادله $|(x^4-4)-(x^2+2)| = |x^4-4| - |x^2+2|$ کدام است؟

۱) $|x| \ge \sqrt{3}$ ۲) $|x| \le \sqrt{3}$ ۳) $|x| \ge \sqrt{2}$ ۴) $|x| \le \sqrt{2}$

۲۵ـ برد تابع $y = \frac{1}{2-\cos 3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3} \le y \le 1$ ۲) $\frac{1}{3} < y < 1$ ۳) $\frac{2}{3} < y < 1$ ۴) $\frac{2}{3} \le y \le 1$

۲۶ـ در مورد تابع $f(x)=\dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$ کدام گزاره صحیح است ؟

۱) تابعی زوج است ۲) تابعی فرد است ۳) تابعی نه فرد و نه زوج است ۴) تابعی متناوب می‌باشد .

۲۷ـ حوزه تعریف تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+\arcsin\dfrac{x^2+1}{2x}$ کدام است ؟

۱) $x\ge 1$ یا $x\le -1$ ۲) $x=\pm 1$ ۳) $x>0$ ۴) $-1\le x\le 1$

۲۸ـ مجموع ریشه‌های معادله $\operatorname{arctg}\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{\pi}{2}$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) هیچکدام

۲۹ـ معکوس تابع با ضابطه $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ کدام است ؟

۱) $x=\sinh(y\operatorname{Ln}a)$ ۲) $x=y^2\sinh(\operatorname{Ln}a)$ ۳) $x=\cosh(y\operatorname{Ln}a)$ ۴) $x=y\sinh(\operatorname{Ln}a)$

۳۰ـ معکوس تابع $y=2^{\left(\frac{x}{x-1}\right)}$ کدام است ؟

۱) $x=\dfrac{\log y}{\log\frac{y}{2}}$ ۲) $x=\dfrac{\log_2 y-1}{\log_2 y}$ ۳) $x=\dfrac{\log\frac{y}{2}}{\log y}$ ۴) $x=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 y+1}$

۳۱ـ در مورد معادلات (۱) $|x|=x-5$ و (۲) $|x|=x+5$ کدام گزاره صحیح است ؟

۱) معادله (۱) دارای یک ریشه و معادله (۲) ریشه ندارد
۲) معادله (۱) فاقد ریشه و معادله (۲) دارای یک ریشه می‌باشد
۳) هیچکدام از معادلات ریشه ندارد
۴) هر دو معادله دارای یک ریشه می‌باشند.

۳۲ـ مجموعه جواب نامعادله $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$ کدام است ؟

۱) $3\le x\le 4$ ۲) $-\dfrac{12}{7}\le x\le\dfrac{12}{7}$ ۳) $3<x<4$ ۴) $-\dfrac{12}{7}<x<\dfrac{12}{7}$

۳۳ـ کدامیک از توابع زیر زوج نیست ؟

۱) $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ ۲) $f(x)=4-2x^4+\sin^2 x$ ۳) $f(x)=x\sin^2 x-x^3$ ۴) $f(x)=x^2-|x|$

۳۴ـ کوچکترین دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=\sin 5x\sin x$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\dfrac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\dfrac{2\pi}{3}$

۳۵ـ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\operatorname{tg}x.\operatorname{cotg}x$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{2}$ ۲) π
۳) متناوب نیست. ۴) متناوب است ودوره تناوب هر مقداری می‌تواند باشد.

۳۶ـ دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{-\sin^2\pi\lfloor x\rfloor}$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) R ۲) Z ۳) ϕ ۴) N

۳۷ـ برد تابع $f(x)=2^{\lfloor |x|\rfloor}$ برابر کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) $\{1,2,4,8,\dots\}$ ۲) $\{2,4,8,\dots\}$ ۳) $\{2,4\}$ ۴) R^+

۳۸ـ دامنه تعریف تابع $f(x)=\log\lfloor x\rfloor$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) $(1,\infty)$ ۲) $(0,\infty)$ ۳) $[0,\infty)$ ۴) $[1,\infty)$

۳۹ـ اگر $f(x)=6f(x-2)+f(x-1)$، $f(1)=1$، $f(2)=2$ باشند ، آنگاه $f(4)$ کدام است؟

۱) 10 ۲) 20 ۳) 8 ۴) 16

۴۰ـ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=(-1)^{\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor}\cos x$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) π ۲) 2π ۳) $\dfrac{\pi}{2}$ ۴) $\dfrac{\pi}{4}$

۴۱ـ کدام تابع یک به یک است ؟

۱) $y=x+\lfloor x\rfloor$ ۲) $y=x-\lfloor x\rfloor$ ۳) $y=x-|x|$ ۴) $y=x+|x|$

۴۲ـ اگر $f(x)=\arctan(\tan x)$ و $g(x)=\sin 2\pi x$ آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) دوره تناوب f ، 6π و دوره تناوب تابع g ، ۱ می‌باشد.
۲) دوره تناوب تابع f ، 3π و دوره تناوب تابع g ، 2π می‌باشد.
۳) دوره تناوب تابع f ، π و دوره تناوب تابع g ، ۱ می‌باشد.
۴) دوره تناوب تابع f ، 2π و دوره تناوب تابع g ، ۱ می‌باشد.

۴۳ـ برد تابع $y=x-\sqrt{4-x^2}$ کدام فاصله است ؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $[-\sqrt{2},2]$ ۳) $[-2\sqrt{2},2]$ ۴) $[-2\sqrt{2},\sqrt{2}]$

۴۴ـ برد تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\lfloor x\rfloor}}$ کدام مجموعه است ؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۴۵ـ تابع f صعودی و از مبدأ می‌گذرد، دامنه تابع با ضابطه $g(x)=\sqrt{x f(x)}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x\in R\mid x\ge 0\}$ ۲) $\{x\in R\mid x>0\}$ ۳) R ۴) دامنه f

۴۶ـ اگر ضابطه f بفرم $f(x)=x^2-x+1$ باشد آنگاه نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد ؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(0,1)$

۴۷ـ اگر $(1+\sqrt{2})^6+(1-\sqrt{2})^6=198$، جزء صحیح $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است ؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

۴۸ـ حاصل $A=\lfloor 1\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\dots+\lfloor\sqrt{15}\rfloor$ کدام است ؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) ۳۴ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۴۹ـ اگر $f=\{(2,5),(3,4),(4,5)\}$ و $g=\{(2,3),(3,4),(5,6)\}$ باشد، fog کدام است ؟

۱) $\{(2,4),(3,5)\}$ ۲) $\{(2,3),(3,4)\}$ ۳) $\{(2,5)(3,4)\}$ ۴) $\{(4,5),(5,6)\}$

۵۰ـ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=|x+2|+a|x-2|$ زوج است ؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۵۱ـ اگر دوره تناوب $f(x)=\sin x+\cos x+1$ برابر T باشد و دوره تناوب تابع $y_1=f(x+\frac{\pi}{6})$ برابر T_1 و $y_2=|f(x)|$ برابر T_2 باشد آنگاه :

۱) $T_1=T+\dfrac{\pi}{6}$, $T_2=T$ ۲) $T_2=\dfrac{T}{2}$, $T_1=T$ ۳) $T_2=T$, $T_1=T+\dfrac{\pi}{6}$ ۴) $T_1=T_2=T$

۵۲ـ اگر $f(x+y,x-y)=2(xy+y^2)$ آنگاه $f(2,1)$ کدام است ؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

۵۳ـ کدامیک از جمله‌های زیر صحیح نیست ؟

۱) اگر تابع f نزولی اکید و تابع g بر R_f صعودی اکید باشد، gof نزولی اکید است .
۲) اگر توابع f و g یکی زوج و دیگری فرد باشد آنگاه gof, fog زوج هستند.
۳) اگر توابع f و g متناوب باشند، آنگاه $f\times g, f+g$ و fog متناوب هستند.
۴) اگر تابع f فرد باشد آنگاه f^{-1} نیز فرد خواهد بود.

۵۴ـ کوچکترین دوره تناوب تابع $f(x)=|\sin x|+|\cos x-1|$ کدام است؟

۱) π ۲) $\dfrac{\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{\pi}{4}$ ۴) 2π

۵۵ـ اگر $f: IR \to IR$ با ضابطه $f(x+y)=f(x)f(y)$ تعریف شده باشد و متحد صفر نباشد دامنه $y=\ln f(x)$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) IR^+ ۳) IR^- ۴) IR

۵۶ـ کدامیک از توابع زیر بر بازه $(0,1)$ کراندار است؟

۱) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ۲) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ۳) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ۴) هیچکدام

۵۷ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، بازه $(0,1)$ را به کدام بازه می‌نگارد؟

۱) $(0,1]$ ۲) $(0,\frac{1}{2}]$ ۳) $(0,\frac{1}{2})$ ۴) $(0,1)$

۵۸ـ وارون تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x\le 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$ برابر تابع g با کدام ضابطه است؟

۱) $g(x)=\begin{cases} x & x\le 1 \\ \sqrt{x} & x>1 \end{cases}$ ۲) $g(x)=\begin{cases} -x & x\le 1 \\ -\sqrt{x} & x>1 \end{cases}$ ۳) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ \frac{1}{x^2} & x>1 \end{cases}$ ۴) $g(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x} & x\le 1 \\ \frac{-1}{x^2} & x>1 \end{cases}$

۵۹ـ اگر $|x|\le \frac{x}{2}$ ، مجموعه جواب این نامساوی کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $(-1,1]$ ۴) $(-\infty,1)$

۶۰ـ برد تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ در کدام فاصله است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۴) $[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$

۶۱ـ ضابطه معکوس $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ کدام است؟

۱) $x^2-2x\,,\ x\ge 1$ ۲) $x^2-2x\,,\ x<1$ ۳) $x^2+2x\,,\ x\le -1$ ۴) x^2+2x

۶۲ـ حاصل $\frac{x^{\log_a^y}}{y^{\log_a^x}}$ کدام است؟

۱) $\log\frac{x}{y}$ ۲) $\log_y^x$ ۳) $\log_x^y$ ۴) 1

۶۳ـ مقدار $tgh(\ln 3)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۶۴ـ فرض کنید $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ ، کدام یک از روابط زیر برقرار است؟

۱) $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)f(x_2)$

۲) $f(x_1)+f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})$

۳) $f(x_1)+f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$

۴) $f(x_1)+f(x_2)=f(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2})$

۶۵ـ فرض کنید $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ ، کدام اتحاد زیر برقرار است؟

۱) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ۲) $f(x)+f(y)=2f(x)f(y)$

۳) $f(x+y)+f(x-y)=f(2x)$ ۴) هیچکدام

۶۶ـ معکوس تابع $y=5^{\log x}$ کدام است؟

۱) $x=y^{\log 5}$ ۲) $x=y^{\frac{1}{\log 5}}$ ۳) $x=\log y^{\frac{1}{5}}$ ۴) هیچکدام

۶۷ـ جواب نامعادله $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) ϕ

۶۸ـ دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $0\le x\le n^2\pi^2$ ۲) $(2n\pi)^2\le x\le (2n+1)^2\pi^2$ ۳) $0\le x\le (2n+1)^2\pi^2$ ۴) $x\ge 0$

۶۹ـ دوره تناوب تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ 0 & \text{گنگ } x \end{cases}$ کدام است؟

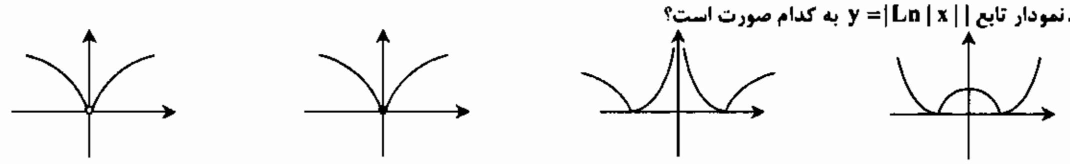
۱) ۱ ۲) متناوب نیست.

۳) متناوب است ولی دوره تناوب مشخصی ندارد. ۴) ۰

۷۰ـ تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{x}-1=x^2+2x+1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۱ـ نمودار تابع $y=|\ln|x||$ به کدام صورت است؟

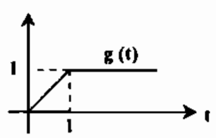


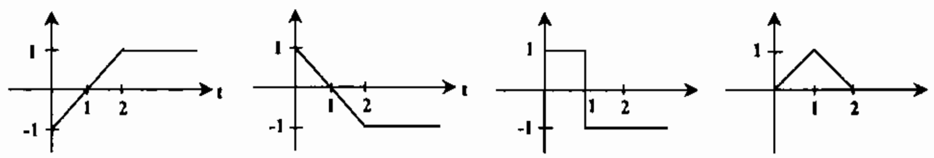
(۴) (۳) (۲) (۱)

۷۲ـ اگر $f(x)=Shx$ ، مقدار $f^{-1}(\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\ln 2$ ۳) $\ln\sqrt{2}$ ۴) $\ln\frac{1}{2}$

۷۳ـ اگر نمودار تابع $g(t)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $h(t)=g(t)-u(t-1)g(t-1)$ کدام است؟ ($u(t)$ تابع پله‌ای واحد می‌باشد.)





(۴) (۳) (۲) (۱)

۷۴ـ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\cosh x$ ، $x\in R$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۷۵ـ کدامیک از توابع زیر نزولی و یک به یک است؟

۱) $y=-x^2$ ۲) $y=-e^{\sin x}$ ۳) $y=\ln|x|$ ۴) $y=e^{-x}$

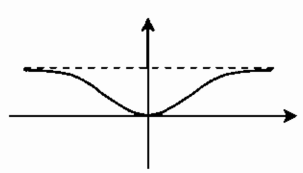
۷۶ـ اگر $f(x)=14+7x+4x^2-2x^4$ ، آنگاه $f(1+\sqrt{3})$ چقدر است؟

۱) $5+\sqrt{3}$ ۲) $16+\sqrt{3}$ ۳) $5-\sqrt{3}$ ۴) $16-\sqrt{3}$

۷۷ـ اگر $\log_3 a=2$ ، حاصل $a^{\log_3^x+1}$ کدام است؟

۱) $3x^2$ ۲) $(3x)^2$ ۳) $(x+3)^2$ ۴) $\frac{x^2}{3}$

۷۸ـ ضابطه نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=\frac{|x|}{|x|+1}$ ۲) $y=\frac{x^3}{x^3+1}$

۳) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ ۴) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$

۷۹ـ برد تابع $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-2,1)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $[-1,2]$ ۴) $[-1,2)$

۸۰ـ اگر $x^2+x+1=0$ ، حاصل x^5-x^2 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۸۱ـ نمودار کدامیک از منحنی‌های زیر می‌تواند، نمایش یک تابع باشد؟

۱) لمینسکات ۲) بیضی ۳) دایره ۴) سهمی

۸۲ـ برد تابع $y=x^{100}-100x+99$ کدام فاصله است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) R ۴) $[99,+\infty)$

۸۳ـ برد تابع $y=\cos(\log(\log x))$ ، کدام فاصله است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) R^+ ۳) $[-2,2]$ ۴) $[0,1]$

۸۴ـ برد تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x<0\\ 0 & x\geq 0\end{cases}$ کدام فاصله زیر است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,0]$

۸۵ـ توابع $f(x)=2$ ، $g(x)=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ و $h(x)=x^2-2x+2$ مفروضند. تابع $(f+g)\circ h$ کدام است؟

۱) $\{(0,2)\}$ ۲) $\{(1,5)\}$ ۳) $\{(2,3)\}$ ۴) $\{3,1\}$

۸۶ـ به ازای چه مقادیر m تابع $y=\log(3x+\sqrt{m^2x^2+1})$ فرد است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ± 3 ۴) $\pm\sqrt{3}$

۸۷ـ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & x>0\\ 1 & x\leq 0\end{cases}$ ، حاصل $f(-f(-x))$ کدام است؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^4-x^2+1 ۳) ۱ ۴) x^4+x^2+1

۸۸ـ معادله $x^5-18x+2=0$ در فاصله $[-1,1]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۹ـ کدامیک از نامساویهای زیر برقرار است؟

۱) $99^{100}<100^{99}$ ۲) $99^{99}<100!$ ۳) $202^{303}<303^{202}$ ۴) $200!<100^{200}$

۹۰ـ دوره تناوب تابع $y=\dfrac{\sin ax+\cos ax}{\sin ax-\cos ax}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{a}$ ۲) πa ۳) $\dfrac{\pi}{2a}$ ۴) $2\pi a$

هر فریب خورده را سرزنش نتوان کرد. **«حضرت علی (ع)»**

صلاح کار کجــا و من خراب کجــا **ببین تفاوت ره از کجاست تا به کجا**
چه نسبت است به رندی صلاح و تقوا را **سماع وعظ کجا نغمه ربابی کجــا**

«حافظ»

فصل دوم

« حد و پیوستگی »

تعریف حد

تابع با ضابطه $y=f(x)$ و نقطه‌ای بطول a را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $f(x)$ در همسایگی a تعریف شده باشد اگر وقتی $x\to a$ مقادیر $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L نزدیک شود، L را حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند می‌گوئیم و به شکل $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ نمایش می‌دهیم.

مسئله نزدیک شدن $f(x)$ به L را می‌توان چنین در نظر گرفت که به ازای هر $\varepsilon>0$ که اختیار کنیم داشته باشیم $|f(x)-L|<\varepsilon$ و میل کردن x به سمت a را می‌توان چنین تعبیر کرد که به ازای یک $\delta>0$ داشته باشیم $0<|x-a|<\delta$ و بطور کلی باید استلزام منطقی زیر برقرار باشد:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ ,\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

برای درک بهتر، مطلب را با یک مثال عددی شرح می دهیم :

مثال ۱: در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ می‌دانیم دامنه تعریف $R-\{1\}$ است پس تابع در ۱ تعریف نشده است ولی اگر x رفته رفته به عدد ۱ نزدیک شود (با مقادیر کمتر از ۱ ویا بیشتر از ۱) مقدار تابع مرتباً به عدد۲ نزدیک خواهد شد. در این حالت می گوییم، حد تابع f(x) وقتی x به سمت عدد ۱ میل می‌کند برابر ۲ است، نکته قابل توجه این است که حد تابع در یک نقطه ربطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد.

نکته ۱: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطهٔ فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه R اضافه کنیم . این نقاط خواص زیر را دارند :

۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند.

۲) به ازای هر $a\in R$ داریم:

$$\begin{cases}a+(+\infty)=+\infty\ ,\quad a-(+\infty)=-\infty\ ,\quad \dfrac{a}{-\infty}=0\\ a+(-\infty)=-\infty\ ,\quad a-(-\infty)=+\infty\ ,\quad \dfrac{a}{+\infty}=0\\ +\infty+\infty=+\infty\ ,\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty\ ,\ (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

۳) اگر $a>0$ باشد : $a(-\infty)=-\infty\ ,\quad a(+\infty)=+\infty$ ۴) اگر $a<0$ باشد : $a(-\infty)=+\infty\ ,\quad a(+\infty)=(-\infty)$

حد راست تابع:

فرض کنیم تابع f در بازه (a,b) تعریف شود. گوئیم f(x) در نقطه a دارای حد راست L است و به شکل $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ نمایش می‌دهیم؛ هرگاه x از سمت مقادیر بیشتر از a به a نزدیک شود، مقادیر f(x) به L نزدیک گردد .

حد چپ تابع:

فرض کنیم تابع f در بازه (a,b) تعریف شده باشد. گوئیم f(x) در نقطه b دارای حد چپ L است و به شکل $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=L$ نمایش می‌دهیم؛ هر گاه x از سمت مقادیر کمتر از b به b نزدیک شود، مقادیر f(x) به L نزدیک گردد .

نکته ۲: شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد آنست که $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (البته باید حدهای اخیر وجود داشته باشند)

مثال ۲: مقدار حد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ وقتی $x \to 2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$ تابع در نقطه $x=2$ حد ندارد.

قضایای حد

۱) اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد، حد آن منحصر به فرد است.

۲) اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند و $f(x) \le g(x)$ باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ خواهد بود.

۳) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

۵) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ، (با شرط $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$)

۶) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \ ,\ (L \ge 0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

قضایای حدود نامتناهی:

۱) اگر دو تابع f و g مفروض باشند و g در همسایگی a کراندار باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$ می‌باشد.

مثال ۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(tgx).\sin\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۱» چون $\lim\limits_{x\to 0} tgx = 0$ می‌باشدو تابع sin نیز تابعی کراندارست، درنتیجه با توجه به قضیهٔ فوق $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)\sin\frac{1}{x} = 0$.

۲) هر گاه تابع g در یک همسایگی a کراندار باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ باشد آنگاه : $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$ می‌باشد.

مثال ۴: حاصل $A = \lim\limits_{x\to\infty}(100+\frac{\sin x}{x})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» زیرا با توجه به قضیهٔ فوق و محدود بودن تابع $\sin x$ و توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ پس $A = 100 + 0 = 100$.

نکته ۳: توابع $\sin\frac{1}{x}$ و $\cos\frac{1}{x}$ وقتی $x \to 0$ حد ندارد.

نکته ۴: توابع $\operatorname{Sin}x, \operatorname{Cos}x$ وقتی $x \to \infty$ حد ندارند.

نکته ۵: $\lim\limits_{x\to 0} x^n \operatorname{Sin}\frac{1}{x} = 0$ $(n \in N)$ است.

نکته ۶: وقتی ما عدد را بر $\pm\varepsilon$ (ε عدد بسیار کوچک مثبت) تقسیم می‌کنیم، آنگاه مقدار کسر برابر $\pm\infty$ خواهد شد، ولی زمانی که در مخرج کسر به صفر مطلق می رسیم، حاصل کسر بی معنا است.

مثال ۵: حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{\lfloor x-1\rfloor} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{\lfloor x-1\rfloor} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{\lfloor \text{عددی بزرگتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر} \rfloor} = \frac{3}{0} = \text{تعریف نشده}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{\lfloor x-1\rfloor} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{\lfloor \text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر} \rfloor} = \frac{3}{-1} = -3\end{array}\right.$$ $\Rightarrow$ تابع حد ندارد

تذکر ۱: ملاحظه می‌شود که در حدودی که دارای جزء صحیح هستند ابتدا حاصل جزء صحیح را به ازای عددی که x به سمت آن میل می‌کند محاسبه و سپس حد را محاسبه می‌کنیم.

۲) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\lfloor x\rfloor^2-1}{\lfloor x\rfloor-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\lfloor x\rfloor^2-1}{\lfloor x\rfloor-1} = \frac{0-1}{0-1} = +1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\lfloor x\rfloor^2-1}{\lfloor x\rfloor-1} \Rightarrow \text{چون مخرج صفر مطلق است حاصل کسر بی معنی است}\end{array}\right.$$

۳) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{\varepsilon} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{-\varepsilon} = -\infty\end{array}\right.$$ $\Rightarrow$ حد موجود نیست

مثال ۶: حاصل $A = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴»

$$A = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\lfloor \text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر} \rfloor}{0-\varepsilon} = \frac{-1}{-\varepsilon} = +\infty$$

مثال ۷: مقدار $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\lfloor x\rfloor^2-9}{\lfloor x\rfloor-3}$ برابر است با :

۱) وجود ندارد ۲) ۰ ۳) ۶ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» چون تابع در همسایگی (3^+)، $3 \le x < 4$ نا معین است (مخرج برابر صفر مطلق است) پس حد ندارد.

مثال ۸: مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor -2x\rfloor$ برابر است با :

۱) ۰ ۲) -1 ۳) وجود ندارد ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor -2x\rfloor = \lfloor 1^+\rfloor + \lfloor -1^-\rfloor = 1-2 = -1\\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\lfloor 2x\rfloor + \lfloor -2x\rfloor = \lfloor 1^-\rfloor + \lfloor -1^+\rfloor = 0-1 = -1\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -1$$

مثال ۹: کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$ ۳) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{|x|} = 1$ ۴) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2} = 1$

پاسخ: گزینه«۲» حد چپ و راست با هم برابر نیستند.

مثال ۱۰: حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{\lfloor \sin x\rfloor}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود که (0^-) زاویه‌ای در ربع چهارم است، یعنی: $0>\sin(0^-)>-1$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\lfloor \sin x\rfloor}{x}=\frac{\lfloor \sin(0^-)\rfloor}{-\varepsilon}=\frac{-1}{-\varepsilon}=+\infty$$

مثال ۱۱: به ازاء چه مقداری از $\underline{a}$ تابع $f(x)=a\lfloor x\rfloor+\lfloor x+1\rfloor$ در نقطه $x=1$ دارای حد است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۰ ۴) $+2$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=a\lfloor 1^-\rfloor+\lfloor 1+1-\varepsilon\rfloor=1\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=a\lfloor 1^+\rfloor+\lfloor 1+1+\varepsilon\rfloor=a+2\end{cases}\Rightarrow a+2=1\Rightarrow a=-1$$

مثال ۱۲: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\lfloor\frac{1}{\sin 3x}\right\rfloor$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) -1 ۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\lfloor\frac{1}{\sin 3x}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1}{-1+\varepsilon}\right\rfloor=-2$$

مثال ۱۳: مقدار $\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\mathrm{Sgn}(x+1)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\mathrm{Sgn}(x+1)=\frac{|-1|}{-1}\times\mathrm{Sgn}(0^+)=-1\times 1=-1$$

توضیح: مقدار $\mathrm{Sgn}(x+1)$ وقتی $x\to(-1)^+$ برابر $\mathrm{Sgn}(0^+)$ می‌شود که با توجه به تعریف تابع علامت می‌دانیم کـه بـه ازای $x>0$ مقدار تابع برابر عدد ثابت ۱ می‌باشد.

قضیه فشار:

فرض کنیم سه تابع h, g, f روی یک فاصله باز (به جزء احتمالاً در نقطه a داخل فاصله) تعریف شـده ودر نامساوی $h(x)\le f(x)\le g(x)$ صدق کنند و $\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$ باشد آنگاه می‌توان نتیجه گرفت: $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

مثال ۱۴: اگر $|f(x)+7|<\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ آنگاه، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۷ ۳) ۰ ۴) -7

پاسخ: گزینه «۴»

$$|f(x)+7|<\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|\le\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}=\frac{3^0}{\infty}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|\le 0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-7}$$

صورتهای مبهم و رفع ابهام آنها

صورتهای $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $0\times\infty$ ، $\infty-\infty$ ، 1^{∞} ، 0^{0} و ∞^{0} را صورتهای مبهم می نامیم .

تذکر ۲: حالتهای 0^{∞} و ∞^{∞} و $\infty\times\infty$ مبهم نیستند : $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$ ، $+\infty^{+\infty}=+\infty$ ، $0^{+\infty}=0$ ، $0^{-\infty}=+\infty$

صورت $\frac{0}{0}$ و استفاده از قاعده هوپیتال

در حالتهای $\frac{0}{0}$ معمولاً از قاعده هوپیتال استفاده می‌شود. (البته معمولاً به غیر از توابع مثلثاتی که معمولاً از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم) بدین شـکل که اگر به حالت $\frac{0}{0}$ رسیدیم، مشـتق صورت را گرفته ومشـتق مخرج را نیز محاسبه نموده و سـپس مجدداً حد را نوشته و اگر عامل مبهم‌کننده از بین رفته بود حد را بدست می‌آوریم. در غیر اینصورت مجدداً این عمل را تکرار می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

مثال ۱۵: حد عبارت $A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{\ln(2-x)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» حالت $\frac{0}{0}$ است از روش Hopital استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\frac{1}{2-x}}=\frac{2-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2-x}}=\frac{2-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2-1}}=-\frac{5}{3}$$

مثال ۱۶: مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{27-x^3}$.

پاسخ:

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{27-x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\Rightarrow A=\lim_{x\to 3}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{-3x^2}=\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3\times 3}}}{-3\times 9}=-\frac{1}{54}$$

مثال ۱۷: مطلوبست محاسبه: $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-3x+2}$.

پاسخ:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-6x^2+6x-4}{3x^2-3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}$$

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{12x^2-12x+6}{6x}=\frac{6}{6}=1$$

در این مثال در هر دو حالت به $\frac{0}{0}$ برخورد کردیم پس دوباره از هوپیتال استفاده نمودیم .

صورت $\frac{\infty}{\infty}$

برای بررسـی این حالت ابتدا ذکر نکات زیر ضروری به نظر می‌رسد :

نکته ۷: اگر $a_0\neq 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت: $\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_n)=\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n$

به عبارت دیگر وقتی $x\to\pm\infty$ حد یک چند جمله‌ای برابر (هم ارز) با حد جمله با بزرگترین درجه است.

نکته ۸: اگر صورت و مخرج یک کسر چند جمله‌ای باشد خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}+\infty\ \text{یا}\ -\infty & \text{اگر}\ n>m\\ \frac{a}{b} & \text{اگر}\ n=m\\ 0 & \text{اگر}\ n<m\end{cases}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$1)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{3}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m-x^{m-1}-1}{2x^{m+1}+x^m+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m}{2x^{m+1}}=0$$

$$3)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^4+x-1}{-x^2-x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$$

نکته ۹ : در بعضی مواقع در حالتهای $\frac{\infty}{\infty}$ ما قادر به تشخیص اینکه درجه صورت و یا مخرج بزرگتر است نیستیم، در این حالتها نیز می‌توانیم از قانون هوپیتال استفاده کنیم .

به مثالهای زیر توجه کنید :

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0 \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

نکته ۱۰: با توجه به مثال فوق می‌توان نتیجه گرفت رشد e^x نسبت به x^n سریعتر است و بالعکس رشد $\operatorname{Ln}x$ نسبت به $\sqrt[n]{x}$ کمتر است

به نکات زیر توجه کنید:

۱) اگر $a>1$ آنگاه: $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

۲) اگر $a>1$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

۳) اگر $0<a<1$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

۴) اگر $0<a<1$ آنگاه: $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$

۵) اگر $0<a<1$ آنگاه $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a^x=+\infty$

۶) اگر $a>1$ آنگاه $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a^x=-\infty$

۷) اگر $0<a<1$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a^x=-\infty$

۸) اگر $a>1$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a^x=+\infty$

مثال ۱۸: مقدار $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{Ln}x}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 1 ۳) $-\infty$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{Ln}x}{x}=\lim_{x\to0^+}(\operatorname{Ln}x)\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{طبق خاصیت (۶)}}A=(-\infty)(+\infty)=(-\infty)$$

نکته ۱۱: در حالتهایی که $x\to0^+$ جمله با کوچکترین مرتبه حاکم است (البته زمانی که عدد ثابت در عبارت موجود نباشد)

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}}{\sqrt[4]{2x}}\simeq\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{2x}}}{\sqrt[4]{2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x}}=1 \qquad 2)\ \lim_{x\to0^+}\frac{x^4+\sqrt{x}+x^2}{x^3+2\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to0^+}x^2\cdot e^{\frac{1}{x}},\ t=\frac{1}{x},\ x\to0^+\Rightarrow t\to+\infty\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}\cdot e^t=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{2t}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{2}=+\infty$$

مثال ۱۹: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۲» همانطور که در بالا اشاره شد، در جملاتی که شامل عدد ثابت نیستند وقتی $x\to0$ جمله از مرتبه کوچکتر حاکم است

لذا داریم :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}\simeq\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x^3}}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}\simeq\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[4]{\frac{x^3}{x^3}}=1$$

نکته ۱۲: (اگر n فرد باشد قدر مطلق لازم نیست.)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}\cong\lim_{x\to\infty}\left(\left|x+\frac{b}{an}\right|\times\sqrt[n]{a}\right)$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-\left(2x+\frac{1}{4}\right)\right]=-\frac{1}{4}$$

$$2)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+4x^2-25}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+25}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|2x|}{x+\frac{1}{3}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=-2\end{cases}$$

مثال ۲۰: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|-x\right)=x+\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۱: حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}$ ، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) صفر ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5}\,|x|}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{5}x}{x+1}=-\sqrt{5}$$

نکته ۱۳: در بعضی از تستها از مجموع‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	۲) $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
۳) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$	۴) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

مثال ۲۲: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{2n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) 4 ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

صورت $0\times\infty$

برای رفع ابهام این حالت باید عامل بی‌نهایت یا صفر کننده را به مخرج آورده و سپس مسئله به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد که با روشهای گفته شده قابل حل است، بعبارت دیگر اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ بصورت مبهم $0\times\infty$ خواهد شد که برای رفع ابهام حد را بصورت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ و یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ می‌نویسیم.

مثال ۲۳: مقدار $\lim\limits_{x\to0^+}x\operatorname{Ln}x$ کدام است؟

۱) e ۲) صفر ۳) ∞ ۴) حد ندارد

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to0^+}x\operatorname{Ln}x=0\times\infty\Rightarrow A=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{HOP}}A=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

مثال ۲۴: حاصل $\lim\limits_{x\to0^-}x\lfloor x\rfloor\cot gx$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to0^-}x\lfloor x\rfloor\cot gx=\lim_{x\to0^-}x\lfloor 0^-\rfloor\cot gx=\lim_{x\to0^-}(-x)\cot gx=0\times-\infty$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{tgx}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}A=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

مثال ۲۵: مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\cosh\frac{a}{x}-1]$ کدام است ؟

۱) $\frac{a}{2}$ ۲) $\frac{a^2}{2}$ ۳) 0 ۴) 1

پاسخ : گزینه «۲» حالت $\infty \times 0$ می‌باشد لذا داریم :

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[\cosh\frac{a}{x}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh\frac{a}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{a}{x^2}\right)\sinh\frac{a}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{a}{x^2}\right)\left(\frac{a}{x}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\frac{a^2}{2}$$

مثال ۲۶: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\mathrm{Ln}(x+a)-\mathrm{Ln}x]$ کدام است ؟

۱) a ۲) -1 ۳) $-a$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=\lim_{x\to+\infty} x[\mathrm{Ln}(x+a)-\mathrm{Ln}x]=\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{Ln}\left(\frac{x+a}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{Ln}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x$$

$$=\mathrm{Ln}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x}_{L}\Rightarrow L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)x}=e^a\Rightarrow A=\mathrm{Ln}e^a=a$$

صورت $\infty-\infty$

اگر $x\to a$ چنانچه دو عبارت به صورت کسر باشند، مخرج مشترک گرفته و حاصل را ساده کرده و معمولاً عبارت ساده شده بـه ازای $x=a$ بـه شکل $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد و اگر دو عبارت یا یکی از آنها اصم باشد، از روش هم ارزی که گفته شد استفاده خواهیم کرد و یا با ضرب عبارت در مزدوج خودش عامل مبهم کننده حذف می‌شود.

مثال ۲۷: اگر $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$ باشد آنگاه $3a+2b$ برابر است با :

۱) -1 ۲) -2 ۳) 4 ۴) -5

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|-ax-b\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-x-ax-b\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-b\right)-(a+1)x\right]=0\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=-1\end{cases}\Rightarrow 3a+2b=3(-1)+2\left(\frac{1}{2}\right)=-2$$

مثال ۲۸: حاصل $A=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 4 ۴) -5

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2x+4)-12}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{0}{0}\Rightarrow A=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۹: حاصل $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) 1

پاسخ : گزینه «۲» $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1-x)}{x(e^x-1)}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\overset{HOP}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{e^0}{2e^0+0}=\frac{1}{2}$

مثال ۳۰: حاصل حد تابع $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ وقتی که $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

صورتهای مبهم $0^0, \infty^0$

برای حل مسائلی به شکل $C=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ وقتی به حالتهای $(\infty)^0$ یا 0^0 رسیدیم باید آنرا بصورت $C=e^{\lim\limits_{x\to0} g(x)\mathrm{Ln}f(x)}$ بنویسیم و با محاسبه $L=\lim\limits_{x\to0} g(x)\mathrm{Ln}f(x)$ مقدار حد را به دست آوریم:

مثال ۳۱: مقدار $C=\lim\limits_{x\to0} x^x$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) 1 ۴) حد موجود نیست.

پاسخ : گزینه «۳» $C=e^{\lim\limits_{x\to0} x\mathrm{Ln}x}\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to0^+} x\mathrm{Ln}x=0\Rightarrow C=e^0=1$

توضیح: حل این حد، مقدار L بعنوان مثال در قسمت رفع ابهام $0\times\infty$ آورده شده است .

مثال ۳۲: مقدار $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{Ln}x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۳»

$$C=\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{Ln}x}}=0^0\Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\mathrm{Ln}x}(\mathrm{Ln}\sin x)}, L=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{Ln}\sin x}{\mathrm{Ln}x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1\Rightarrow C=e^1=e$$

مثال ۳۳: مقدار $C=\lim\limits_{x\to0^+}(\cot gx)^{\sin x}$ کدام است ؟

۱) ∞ ۲) 1 ۳) 0 ۴) e^{-1}

پاسخ : گزینه «۲» $C=\lim\limits_{x\to0}(\cot gx)^{\sin x}=(\infty)^0\Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\,\mathrm{Ln}\cot gx}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{Ln}\cot gx}{\frac{1}{\sin x}}}$

برای محاسبه حد اخیر از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-(1+\cot g^2x)}{\cot gx}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin^2x)\left(\frac{1}{\sin^2x}\right)}{\cos x\cot gx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0\Rightarrow C=e^0=1$$

محاسبه حدهایی بصورت $\lim\limits_{x\to a} U^V=C$ (U و V توابعی بر حسب x هستند)

توجه شود که حالتهای زیر هیچکدام از صورتهای ابهام 0^0 و ∞^0 نمی‌باشد .

۱) اگر $\lim\limits_{x\to a}U=A$; $\lim\limits_{x\to a}V=B$ باشد آنگاه : $C=A^B$

۲) اگر $\lim\limits_{x\to a}U=A\neq1$; $\lim\limits_{x\to a}V=\pm\infty$ در این صورت مسئله مستقیم حل می‌شود

۳) اگر $\lim\limits_{x\to a}U=A=1$; $\lim\limits_{x\to a}V=\infty$ آنگاه $\Leftarrow$ $C=e^{\lim\limits_{x\to a}(U-1)V}$

مثال ۱: $C=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{x}\right)^{1+x}\Rightarrow\begin{cases}A=\lim\limits_{x\to0}U=2\\ B=\lim\limits_{x\to0}V=1\end{cases}\Rightarrow C=A^B=2^1=2$

مثال ۲: $C=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} \Rightarrow \begin{cases} A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2} \\ B=\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty \end{cases} \Rightarrow C=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$

مثال ۳: $C=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} \Rightarrow \begin{cases} A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1 \\ B=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty \end{cases} \Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$

مثال ۴: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty \end{cases} \Rightarrow c=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x})}=e^{+\infty}=+\infty$

مثال ۵: $C=\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor 1+x\rfloor^{\frac{1}{x}}=\lfloor 1^+\rfloor^{+\infty}=1^{+\infty}=1$

مثال ۶: $C=\lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor 1+x\rfloor^{-\frac{2}{x}}=\lfloor 1^-\rfloor^{+\infty}=0^{+\infty}=0$

تذکر ۳: در دو مثال اخیر چون ۱ و صفر مطلق است پس حاصل همان اعداد ۱ و ۰ خواهد شد.

مثال ۳۴: مقدار $C=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ کدام است؟

۱) e^{-30} ۲) 0 ۳) 1 ۴) $e^{-\frac{1}{30}}$

پاسخ : گزینه «۴» حالت $(1^+)^{\infty}$ می‌باشد، داریم :

$$C=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}-1\right)\times\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{3-\sqrt{9+x}}{2+\sqrt{9+x}}\right)\times\frac{1}{\sin x}}\ ,\ L=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3-\sqrt{9+x}}{\sin x(2+\sqrt{9+x})}$$

$$\xrightarrow{HOP} L=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{9+x}}}{\cos x(2+\sqrt{9+x})}=\frac{-\frac{1}{2\times 3}}{1\times 5}=-\frac{1}{30}\Rightarrow \boxed{C=e^{-\frac{1}{30}}}$$

مثال ۳۵: مقدار $C=\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}}$ کدام است؟

۱) e^{mn} ۲) e^{n} ۳) $e^{-m^2\cdot\frac{n}{2}}$ ۴) $e^{m^2\frac{n}{n}}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$C=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx-1)\frac{n}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-m^2x^2}{2}\right)\left(\frac{n}{x^2}\right)}=e^{-\frac{m^2n}{2}}$$

نکته ۱۴: دو حد زیر در تستها زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad (a>0)}\quad ,\quad \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1}$$

مثال ۳۶: حاصل $C=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{6n+3}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) 0 ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5}\Rightarrow A=1 \\ B=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+3}\simeq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\times 1=1 \end{cases}\Rightarrow C=\frac{A}{B}=\frac{1}{1}$$

دو تابع هم ارز

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نقطه $x=a$ هم ارز گوییم اگر رابطه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ برقرار باشد.

مثال ۳۷: n و a را طوری پیدا کنید تا دو تابع ax^n و $\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ زمانی که $x\to+\infty$ هم ارز هم باشند.

پاسخ :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{ax^n}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^n(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n)(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=1$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}ax^n[\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)]=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}2ax^{n+\frac{1}{2}}=1\Rightarrow \begin{cases} 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2}=0\Rightarrow n=-\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow \sqrt{1+x}-\sqrt{x}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

حد توابع مثلثاتی و استفاده از هم‌ارزی در محاسبه حدود

در توابع مثلثاتی عموماً وقتی $x\to 0$ از هم ارزی استفاده می‌کنیم. برای این منظور با بسطهای مکلورن توابع معروف آشنا می‌شویم:

۱) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\ (x\in R)$

۲) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\ (-\infty<x<\infty)$

۳) $tgx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots\ (|x|<\frac{\pi}{2})$

۴) $Arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\ (-1\le x\le 1)$

۵) $ArcSinx=x+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{3x^5}{2\times 4\times 5}+\frac{1\times 3\times 5x^7}{2\times 4\times 6\times 7}+\cdots(-1\le x\le 1)$

۶) $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1<x\le 1)$

۷) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\ (x\in R)$

۸) $(1+x)^n=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots(-1<x<1)$

۹) $\sin hx=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\ (x\in R)$

۱۰) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\ (x\in R)$

۱۱) $\sinh^{-1}x=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5}-\cdots\ (|x|<1)$

۱۲) $tgh^{-1}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\ (|x|<1)$

نکته ۱۵: در استفاده از هم‌ارزیهای فوق با توجه به نیاز مسئله می‌توان جمله اول یا دو جمله اول یا سه جمله اول را به عنوان هم‌ارز تابع اصلی در نظر گرفت نیاز مسئله با تذکر زیر توضیح داده می‌شود :

تذکر ۴: هر گاه بلافاصله بعد از استفاده از هم‌ارزی جمع جبری برابر صفر شود و یا وقتی به جای عبارتی هم‌ارز آن را قرار دادیم و کل جملات که به جای عبارت هم‌ارز قرار داده‌ایم حذف شد، آنگاه استفاده از آن هم‌ارزی صحیح نمی‌باشد و باید از جمله‌های دیگر بسط استفاده کنیم.

مثال ۳۸: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{120}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) حد موجود نیست .

پاسخ : گزینه «۲» توجه شود که اگر در این مثال به جای sinx جمله اول بسط x را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{1}{6x^2}=\infty$$

با توجه به اینکه عبارت x که به جای sinx قرار داده‌ایم حذف می‌شود، لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. اگر از جمله‌های اول و دوم استفاده کنیم، داریم :

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{0}{0}$$

مانند حالت قبل چون هر دو جمله بسط حذف می‌شود لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. با قرار دادن جمله‌های اول تا سوم بسط داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!}}{x^5}=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$$

توجه شود که در این حالت جمله $\frac{x^5}{5!}$ حذف نشد. لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح می‌باشد.

نکته ۱۶: وقتی از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم باید هم‌ارز تمام جملات را قرار دهیم، مثلاً اگر در مسأله‌ی عبارتهای cos و sin داریم وقتی به جای sin هم‌ارز آن را قرار می‌دهیم، باید به جای cos نیز هم‌ارز آن را قرار دهیم و همچنین ذکر این نکته لازم است که تمام جملات باید تا صفرهای **هم‌مرتبه** نوشته شوند.

مثال ۳۹: مقدار $A=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot gx)$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» روش اول (غیرصحیح)

$$A=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\overset{(1)}{\sim}\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$$

توجه شود که در قسمت (۱) استفاده از هم‌ارزی $\sin x\sim x$ صحیح نیست زیرا وقتی از هم ارزی استفاده می‌کنیم باید هم‌ارز تمام جمله‌ها را قرار دهیم یعنی در این مثال به جای cosx جمله اول بسط یعنی ۱ را قرار دهیم که با این وضعیت به حالت $\lim_{x\to 0}\frac{x-x\times 1}{x^2}$ خواهیم رسید که جمع جبری (در صورت کسر) صفر است، نکته جالب این که ممکن است در بعضی موارد مانند همین تست با استفاده از هم‌ارزی (غلط) نیز جواب صحیح بدست می‌آید !

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\xrightarrow{\text{از جمله‌های اول و دوم استفاده می‌کنیم}}A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}-x(1-\frac{x^2}{2})}{x(x-\frac{x^3}{6})}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}}{x^2-\frac{x^4}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2(1-\frac{x^2}{6})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x^2}{6}}=0$$

اما مثال زیر می‌تواند نتایج جبران‌ناپذیر دقت نکردن به نکته فوق را روشن سازد !

مثال ۴۰: مقدار $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot g^2x)$ کدام است ؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

روش غیر صحیح :

$$A=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\overset{(1)}{\sim}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos^2 x)}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=1$$

توجه شود که در قسمت (۱) وقتی به جای $x,\sin x$ را قرار می‌دهیم باید به جای cosx (هم‌مرتبه جمله اول) یعنی عدد ۱ را قرار دهیم که جمع جبری صفر می‌شود .

روش صحیح:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^2\sin^2 x}$$

$$\overset{(2)}{\sim}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(x+x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\frac{x^3}{6}-x(1-\frac{x^2}{2})](2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6})(2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{3}x^3)(2x)}{x^4}=\frac{2}{3}$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot g^2x)=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{tg^2x})=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x-x^2}{x^2tg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(tgx-x)(tgx+x)}{x^2tg^2x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x^3/3)\times 2x}{x^2\times x^2}=\frac{2}{3}$$

توضیح: توجه شود که در قسمت (۲) ما در پرانتز دوم صورت و همچنین در مخرج از جمله‌های اول استفاده کردیم اما در مورد پرانتز اول صورت چون به محض استفاده از جمله‌های اول به مشکل (جمع جبری برابر صفر) برخورد می‌کنیم جمله‌های دوم بسط را وارد کردیم. توجه شود در عبارات کسری باید در صورت به اندازه درجه مخرج جملات را وارد کنیم، چون مخرج کسر فوق x^4 است لذا در صورت کسر با ضرب x های پرانتزهای اول و دوم ملاحظه می‌گردد که جمله x^4 نیز در صورت کسر پدید می‌آید.

مثال ۴۱: مقدار $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot gx}{x})$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot gx}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xtgx})=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2tgx}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}A=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}-x}{x^2(x+\frac{x^3}{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^3(1+\frac{x^2}{3})}=\frac{1}{3}$$

مثال ۴۲: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x\sin x}$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x\sin x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x+\frac{x^3}{6}}{x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\frac{1}{2}+\frac{x}{6})}{x^2}=\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{6}}{1})=\frac{1}{2}$$

تمرین : مثال فوق را با استفاده از قاعده هوپیتال حل کرده و جوابها را مقایسه کنید.

توضیح: توجه شود که در بعضی تستها استفاده از قاعده هوپیتال راحتر از حل به روش هم‌ارزی می‌باشد و در بعضی از تستها مانند مثال زیر استفاده از قاعده هوپیتال خیلی جالب نیست!

مثال ۴۳: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{tgx^2-Ln(1+x^2)-\frac{x^4}{2}}{x^6}$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» مخرج کسر x^6 است لذا در صورت کسر باید $Ln(1+x^2)$ و tgx^2 را تا جمله‌های شامل x^6 بسط دهیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx^2-Ln(1+x^2)-\frac{x^4}{2}}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^6}{3}-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^4}{2}}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^6}=0$$

توضیح: در توابعی به صورت فوق چون مقدار بسط را تا جمله‌ای با درجه مخرج بسط داده‌ایم، لذا حتی با وجود اینکه بعد از استفاده از هم‌ارزی جمع جبری صفر شد، لذا حاصل حد همان صفر در نظر گرفته می‌شود. ملاحظه می‌گردد که محاسبه حد فوق حتی با استفاده از هوپیتال کار سختی است (باور نمی‌کنید، امتحان کنید!) به هر حال نصیحت برادرانه این که در استفاده از بسطها اگر شک دارید چند تا جمله اضافه‌تر هم وارد کرده بعد محاسبه کنید، تا خیالتان راحت باشد!

معمولاً در استفاده از هم‌ارزیها از جمله اول و یا دو جمله اول بسطهای فوق استفاده می‌شود در این قسمت با توجه به درنظر گرفتن جمله اول یا دو جمله اول هم‌ارزیهایی آورده می‌شود که به خاطر سپردن آنها در حل تستها کمک زیادی می‌کند :

$\sin x\sim tgx\sim Arctgx\sim Arc\sin x\sim x$		
$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$	$tgx\sim x+\frac{x^3}{3}$	$\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}$
$\sqrt[n]{1+u}-1=\frac{u}{n}$ $(u\to 0)$	$e^x-1\sim x$	$Ln(1+x)\sim x$

تذکر ۵: در بسطهای مکلورن توابع فوق توجه داریم که کمان توابع مثلثاتی به سمت صفر میل می‌کند، برای مثال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin(x-\frac{\pi}{4}) \sim \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (x-\frac{\pi}{4})$$

مثال ۴۴: حاصل $\lim_{x\to(-2)} \frac{\sin(x^2+x-2)}{\tan(x^2+5x+6)}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{\sin(x^2+x-2)}{tg(x^2+5x+6)} = \frac{\sin(0)}{tg(0)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{استفاده از هم‌ارزی}}$$

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \xrightarrow{Hop} A = \lim_{x\to -2} \frac{2x+1}{2x+5} = \frac{2\times -2+1}{2\times -2+5} = \frac{-3}{1} = -3$$

توضیح: در مورد هم‌ارزیهای استفاده شده:

$$\begin{cases} u = x^2+x-2 \xrightarrow{x\to -2} u\to 0 \Rightarrow \lim_{u\to 0} \sin u \sim u & \text{(در مورد صورت کسر)} \\ u = x^2+5x+6 \xrightarrow{x\to -2} u\to 0 \Rightarrow \lim_{u\to 0} tg u \sim u & \text{(در مورد مخرج کسر)} \end{cases}$$

تذکر ۶: اگر x به mx تبدیل شود، در تساویهای فوق به جای x در طرفین mx را قرار می‌دهیم، برای مثال برای cosx داریم:

$$Cosx \sim 1-\frac{x^2}{2} \to \boxed{Cosmx \sim 1-\frac{m^2x^2}{2}}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x} = \frac{Ln1}{1-\cos(0)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-Cos(x-\frac{\pi}{4})}{tg^2(x-\frac{\pi}{4})} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{2}$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{Sin(1-Cosx)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{Sin\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{Cosx-Cos3x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-1+\frac{9x^2}{2}}{x^2} = 4$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cotgx}{cotg3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+cotg^2x)}{-3(1+cotg^2 3x)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$ (استفاده از قاعده هوپیتال)

$$6)\ \lim_{x\to 1} (tg\frac{\pi}{2}x)(1-x) = \infty\times 0 = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{cotg\frac{\pi}{2}x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi}$$ (استفاده از قاعده هوپیتال)

$$7)\ \lim_{x\to 0} \frac{Cosmx-1+\frac{m^2x^2}{2}}{\frac{x^4}{4!}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^4x^4}{4!}-1+\frac{m^2x^2}{2}}{\frac{x^4}{4!}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^4}{x^4} = m^4$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$8)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x.tg(\frac{\pi}{4}-x) = 0\times\infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg(\frac{\pi}{4}-x)}{cotg2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg(\frac{\pi}{4}-x)}{tg(\frac{\pi}{2}-2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-x}{\frac{\pi}{2}-2x} = \frac{1}{2}$$ (استفاده از هم‌ارزی)

$$9)\ \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(ArcCosx)^2} = \frac{0}{0},\ ArcCosx = \alpha \Rightarrow \begin{cases} Cos\alpha = x \\ x\to 1 \Rightarrow \alpha\to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0} \frac{1-Cos^2\alpha}{\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0} (\frac{Sin\alpha}{\alpha})^2 = 1$$

$$10)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(cotgx)}{cotgx} \sim \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cotgx}{cotgx} = 1$$ (استفاده از هم‌ارزی)

مثال ۴۵: حاصل $A = \lim_{x\to 0} \frac{tg3x-tg2x-tgx}{Sin^3 x}$ برابر است با:

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۳» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم لذا داریم:

روش اول (هم ارزی):

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{3x+9x^3-2x-\frac{8}{3}x^3-x-\frac{1}{3}x^3}{x^3} \Rightarrow A = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{18}{3}x^3}{x^3} = +6$$

روش دوم: اگر $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow tg\alpha+tg\beta+tg\gamma = tg\alpha tg\beta tg\gamma$

$$3x-2x-x = 0 \Rightarrow tg3x+tg(-2x)+tg(-x) = tg3x\cdot tg(-2x)\cdot tg(-x) \Rightarrow A = \lim_{x\to 0} \frac{(3x)(-2x)(-x)}{x^3} = +6$$

مثال ۴۶: حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^6 x}{\sin^5 x \times \sec x}\left[\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{tg^6 x}{\sin^5 x\times Secx}\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}}{\sin^5 x\times\frac{1}{\cos x}}\times\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\left[\frac{1}{x}\right]$$

می‌دانیم وقتی داخل جزء صحیح به سمت بی‌نهایت میل کند می‌توانیم علامت جزء صحیح را برداریم (هم‌ارز داخل جزء صحیح قرار دهیم).

در این تست وقتی $x\to 0$ آنگاه $\frac{1}{x}\to\infty$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\right] \sim \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\times\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[(\frac{\sin x}{x})\times(\frac{1}{\cos x})^5\right] = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^5 x} = 1\times 1 = 1$$

مثال ۴۷: حاصل $A = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(Arc\sin x)}{\sin^2 x}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = \frac{1-\cos(Arc\sin(0))}{\sin^2(0)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{x\to 0} \begin{cases} Arc\sin x \sim x \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۴۸: حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1}}{\sin\pi x}$ برابر است با:

۱) وجود ندارد ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{\pi}$ ۴) ∞

☑ پاسخ : گزینه «۲» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} x-1=t \\ x\to 1, t\to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t}}{\sin(\pi+\pi t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin\pi t}t\sin\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\pi t}t\sin\frac{1}{t}=-\frac{1}{\pi}\times 0\times(\text{عددی بین ۱ و ۱-})=0$$

توجه :

هم ارزیهای زیر وقتی $u\to 0$ بر قرار است :

$$\boxed{1-\cos^m u\sim\frac{mu^2}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\frac{u}{n}}$$

مثال ۴۹: اگر $a(x)$ بی‌نهایت کوچک باشد، هم‌ارز عبارت $[1+a(x)]^n-1$ کدام است؟

۱) $a(x)$ ۲) $\frac{a(x)}{n}$ ۳) $na(x)-1$ ۴) $n\,a(x)$

☑ پاسخ : گزینه «۴» با توجه به نکته فوق وقتی $u\to 0$ آنگاه : $(1+U)^{\frac{1}{n}}\sim 1+\frac{1}{n}\times U$ می‌توان چنین نوشت : $(1+U)^n\sim 1+n\times U$ در این تست گفته شده که $a(x)$ بی‌نهایت کوچک می‌باشد $(a(x)\to 0)$ لذا داریم: $[1+a(x)]^n\sim 1+na(x)\to[1+a(x)]^n-1\sim na(x)$

نکته ۱۷: (رشد توابع) وقتی $x\to+\infty$ توابع به ترتیب زیر رشد می‌کنند.

(در رابطه روبرو $a>1$، $\alpha>0$ و $b>1$ می‌باشد.) $\log_b x<x^{\alpha}<a^x<x!$

مثال ۵۰: مقدار حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟

۱) e ۲) 0 ۳) -1 ۴) 1

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\xlongequal{\text{رشد}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x}{x}=\frac{x}{x}=1$$

مثال ۵۱: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) 1 ۴) حد وجود ندارد.

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}}\xlongequal{\text{رشد}}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{\sin 2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\sin 2x}}=\frac{1}{e^{\sin\infty}}=\text{حد وجود ندارد}$$

توضیح: (توجه کنید که $\sin 2x$ تابعی کراندار است و بنابراین رشد کمتری نسبت به $2x$ دارد.)

مثال ۵۲: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^{2x}+3^{2x}+4^{x+1}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

☑ پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^{2x}+3^{2x}+4^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{4^x+9^x+4^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{9^x}=9$$

تذکر ۷: در مقایسه عبارات نمایی باید اختلاف توانها عددی ثابت باشد، تا بتوان عبارت بزرگتر را مشخص نمود.

مثال ۵۳: حاصل $\lim\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ وقتی $n\to\infty$ برابر است با :

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۳

☑ پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته ۱۷ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}=3$$

مثال ۵۴: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) 0 ۴) $+\infty$

☑ پاسخ : گزینه «۴» طبق نکته ۱۷ (رشد توابع)

مثال ۵۵: اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) $\log 3$ ۳) $-\sin 1$ ۴) $-\infty$

☑ پاسخ : گزینه «۳» ابتدا $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x & x>1\\ \frac{\log 3-\sin 1}{2} & x=1\\ \log(2+x) & x<1\end{cases}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-\sin x)=-\sin 1$.

مثال ۵۶: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{(1-\tan x)x}$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) 0 ۳) ± 2 ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ پاسخ : گزینه «۲» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{(1-\tan x)x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\times x^2}{2}}{(1-x)x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\times\frac{x}{1-x}\right)=0$$

مثال ۵۷: حد تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin\frac{x}{6}}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) $+1$ ۴) هیچکدام

☑ پاسخ : گزینه «۲» با توجه به رابطه $\sqrt[n]{1+u}\underset{u\to 0}{\approx}1+\frac{u}{n}$ داریم :

$$\lim_{x\to 0}=\frac{(1+\frac{x}{3})-(1+\frac{x}{2})}{\frac{x}{6}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=-1$$

پیوستگی تابع

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم اگر وفقط اگر شرطهای زیر برقرار باشد :

۱ـ $f(x)$ در نقطه a تعریف شده باشد یعنی $f(a)$ موجود و عدد حقیقی باشد.

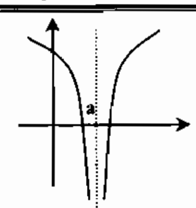
۲ـ تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد و متناهی باشد. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$

۳ـ حد تابع با مقدار تابع در نقطه a برابر باشد.

⇐ نتیجه : سه شرط فوق را می‌توان بصورت : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ بیان نمود .

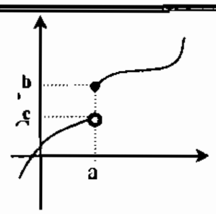
اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته نباشد f در آن نقطه منفصل یا ناپیوسته است.

نکته ۱۸: از لحاظ نمودار تابع باید هیچگونه پرش، سوراخ و بریدگی نداشته باشد.



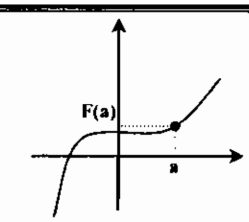
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

مقدار $f(0)$ حقیقی نمی‌باشد تابع پیوسته نیست .



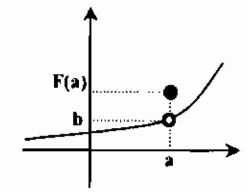
$b=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\neq c=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند تابع حد ندارد و در نتیجه پیوستگی ندارد.



$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(تابع پیوسته است)



$\lim_{x\to a} f(x)=b$

$b\neq f(a)$

حد چپ و راست با هم برابرند و تابع حد دارد، ولی پیوسته نیست

مثال ۵۸: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\neq f(0)=0 \Rightarrow$ تابع دارای انفصال است.

مثال ۵۹: a را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\operatorname{tg}x & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg}x=0\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\operatorname{tg}x)=0\Rightarrow f(0)=a\Rightarrow a=0$

مثال ۶۰: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(x+2)\lfloor -x\rfloor, & x<2\\ x+k, & x\geq 2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته باشد آنگاه مقدار k کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰- ۳) ۶ ۴) ۸-

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+2)\lfloor -x\rfloor=4\times\lfloor -2^-\rfloor=4\times -2=-8\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+k)=2+k\end{cases}\Rightarrow 2+k=-8\Rightarrow k=-10$$

مثال ۶۱: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\frac{x}{ax^2+3x+1}$ همواره پیوسته باشد؟

پاسخ: برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، لازم است مخرج کسر همواره مخالف صفر باشد یعنی مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی:

$\Delta<0\Rightarrow\Delta=9-4a<0\Rightarrow a>\frac{9}{4}$

مثال ۶۲: مقدار $f(0)$ را طوری تعریف کنید که تابع $f(x)=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}$ همواره پیوسته باشد.

پاسخ: برای پیوستگی تابع f در $x=0$ لازم است.

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}\ \underline{\text{هم‌ارزی}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$$

مثال ۶۳: اگر g یک تابع پیوسته بر $[-1,1]$ باشد، در مورد $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) موجود نیست. ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)}{\sin x}\ \underline{\text{هم‌ارزی}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x g(x)=0\times\text{کراندار}=0$$

تذکر ۸: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه کراندار است.

جهش انفصال تابع

فرض کنید حدود راست و چپ تابع $f(x)$ در نقطه a موجود و نابرابر باشند در این صورت مقدار عددی $J=\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)$ را جهش انفصال تابع $f(x)$ در نقطه a می‌نامند.

مثال ۶۴: مقدار جهش تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) تابع جهش ندارد ۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x}=\frac{0}{+\varepsilon}=0 & (\text{حد راست})\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2 & (\text{حد چپ})\end{cases}$$

نکته ۱۹: توابع رادیکالی، معکوس‌های مثلثاتی، تابع Lnx در کلیه نقاط دامنه خود پیوسته هستند. (به جزء احتمالاً در نقاط مرزی دامنه تابع)

مثال ۶۵: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leq 2\\ \frac{1}{2}x-1, & |x|>2\end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق تابع در دامنه خود $[-2,2]$ پیوسته می‌باشد اما در نقاط مرزی باید پیوستگی بررسی شود:

$$\begin{cases}\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(\frac{x}{2}-1)=-2\\ \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\sqrt{4-x^2}=0\end{cases}\ ,\ \begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(\frac{1}{2}x-1)=0\end{cases}$$

در نقطه $x=-2$ حدود چپ و راست با هم برابر نیستند بنابراین تابع در این نقطه پیوسته نیست.

نکته ۲۰: هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشند، آنگاه توابع:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}\ ,\ \sqrt[2n+1]{g(x)}\ ,|f(x)|,|g(x)|\ \text{و}\ f(x)\pm g(x), f(x).g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

نیز در نقطه x_0 پیوسته هستند.

نکته ۲۱: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای ناپیوسته باشند آنگاه توابع $f.g, \frac{f}{g}\ (g\neq 0)$ $f+g, f-g$ ممکن است در آن نقطه پیوسته باشند.

نکته ۲۲: اگر تابع f در x_0 پیوسته و تابع g در x_0 ناپیوسته باشد آنگاه توابع $(f\pm g)$ در x_0 قطعاً ناپیوسته هستند اما تابع $f\times g$ ممکن است در x_0 پیوسته باشد.

نکته ۲۳: اگر f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشند آنگاه gof در a پیوسته است.

نکته ۲۴: اگر تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد آنگاه برد f برابر $[f(a),f(b)]$ خواهد بود و f^{-1} در بازه $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

نکته ۲۵: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه برد f برابر $[f(b),f(a)]$ خواهد بود و f^{-1} بر بازه $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

نکته ۲۶: توابع $\sin ax, \cos ax, \sinh ax, \cosh ax$ و e^{ax} در کلیه نقاط پیوسته هستند.

پیوستگی تابع در یک فاصله

۱) تابع f را بر روی فاصله باز (a,b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه از این بازه تابع پیوسته باشد.
۲) اگر تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، علاوه بر پیوستگی در فاصله (a,b) باید در نقطه a پیوستگی از راست و در نقطه b پیوستگی از چپ داشته باشد.

نکته ۲۷: توابع کسری به ازای ریشه‌های مخرج و توابع رادیکالی با فرجه زوج به ازای ریشه‌هائی که زیر رادیکال منفی می‌شود (اگر جزء بازه باشد) دارای انفصال هستند.

مثال ۶۶: نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-8}}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ چه نقاطی هستند؟

پاسخ: نقاط پیوستگی تابع، نقاط متعلق به مجموعه $\{x\in R \mid x\ge 8, x\neq 0\}$ می‌باشد.

تعریف ناپیوستگی رفع شدنی و رفع نشدنی

هر گاه حد چپ و راست تابع در نقطه‌ای متناهی و با هم برابر باشند اما با مقدار تابع در آن نقطه برابر نباشند آنگاه می‌گوئیم تابع دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی می باشد، اگر تابع در نقطه‌ای حد نداشته باشد، آنگاه تابع ناپیوستگی رفع نشدنی دارد.

مثال ۶۷: کدامیک از توابع زیر در نقطه $x_0=0$ دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی می‌باشد؟

۱) $f(y)=\dfrac{|x|}{x}$ ۲) $f(y)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ ۴) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$$ رفع نشدنی

$$2)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$$ رفع شدنی

$$3)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow$$ رفع نشدنی

$$4)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \Rightarrow$$ رفع نشدنی

پیوستگی تابع $\lfloor x\rfloor$:

تابع $\lfloor x\rfloor$ در فاصله بین (a,b) به شرط $b-a<1$ پیوسته خواهد بود و در فاصله $[a,b]$ پیوسته نخواهد بود. (a و b اعدادی صحیح هستند)

مثال ۶۸: تابع $f(x)=\lfloor mx\rfloor$ در بازه (a,b) پیوسته می‌باشد. حد اکثر مقدار $b-a$ را بدست آورید. $(m>0)$

پاسخ:

$$\begin{cases} mb-ma<1 \\ \Rightarrow m(b-a)<1 \Rightarrow b-a<\dfrac{1}{m}\end{cases}$$

مثال ۶۹: تابع $y=\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}$ در نقطه ای به طول $x=2$:

۱) پیوستگی راست دارد. ۲) پیوستگی چپ دارد. ۳) پیوسته است. ۴) ناپیوسته است.

پاسخ: گزینه «۱» مقدار تابع با حد راست تابع برابر است. لذا تابع پیوستگی راست دارد.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{\lfloor x\rfloor}=\frac{2}{2}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{\lfloor x\rfloor}=\frac{2}{1}=2 \quad \text{و} \quad f(2)=1$$

بدست آوردن نقاط انفصال توابعی به فرم $y=\lfloor f(x)\rfloor$:

در اینگونه توابع باید طول نقاطی را که به ازای آنها عبارت داخل براکت (همان $f(x)$) عدد صحیح می‌شود را بدست آورد که معمولاً تابع در این نقاط ناپیوسته است.

مثال ۷۰: تابع f با ضابطه $f(x)=(x-1)\lfloor x\rfloor$ بربازه $[0,2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) هیچ

پاسخ: گزینه «۳»

$$1)\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=0 \qquad 2)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0 \qquad 3)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=1\ ,\ f(2)=2$$

ملاحظه می‌شود که تابع در $x=2$ ناپیوستگی دارد.

مثال ۷۱: تابع $y=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{x}{4}\right\rfloor$ در نقاطی به طولهای $x=2k+1$ که در آن $k\in N$ چه وضعی دارد؟

۱) پیوسته است ۲) معین و ناپیوسته است ۳) فقط پیوستگی چپ دارد ۴) فقط پیوستگی راست دارد

پاسخ: گزینه «۱» در نقاطی به طول $x=2k+1$ داخل براکتها عددی غیرصحیح می‌شود لذا تابع در این نقاط پیوسته است.

نکته ۲۸: در توابعی به فرم $y=\lfloor ax+b\rfloor$ اگر $a>0$ آنگاه تابع در نقاطی که عبارت داخل براکت عدد صحیح گردد فقط پیوستگی راست دارد و اگر $a<0$ آنگاه تابع در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح گردد فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال ۷۲: تابع $f(x)=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor$ بر بازه $[2,10]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» چون $\frac{1}{2}>0$ لذا تابع در نقاط ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ که به ازای آنها $\frac{x}{2}$ عددی صحیح می‌شود فقط پیوستگی راست دارد (تابع ناپیوسته می‌باشد) اما چون در نقطه $x=2$ که نقطهٔ ابتدائی بازه می باشد، تابع پیوستگی راست دارد. طبق مطالب گفته شده فوق، این نقطه جزء نقاط پیوستگی محسوب می‌شود.

تذکر ۹: در توابعی که بصورت مجموع یا تفاضل یا حاصلضرب باشند باید پس از بدست آوردن نقاط انفصال هر کدام از توابع، مجموع نقاط انفصال دو تابع به عنوان نقاط انفصال کل تابع در نظر بگیریم اما در بعضی موارد (که معمولاً بصورت تفاضل و یا حاصلضرب دو تابع ناپیوسته می‌باشند) باید احتیاط کنیم چون ممکن است نقاطی در این حالت جزء نقاط پیوستگی محسوب گردند.

مثال ۷۳: تابع $f(x)=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{x}{3}\right\rfloor$ در بازه $(-4,4)$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» تابع $y_1=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor$ در نقاط $-2,0,2$ ناپیوسته و تابع $y_2=\left\lfloor\dfrac{x}{3}\right\rfloor$ در نقاط $-3,0,3$ ناپیوسته است، اما در نقطه $x=2$ تابع $f(x)=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor.\left\lfloor\dfrac{x}{3}\right\rfloor$ پیوسته می‌باشد لذا مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $\{-3,-2,0,3\}$ می‌باشد.

مثال ۷۴: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{گنگ } x \\ 2x & \text{گویا } x\end{cases}$ در کدام نقطه پیوسته است؟

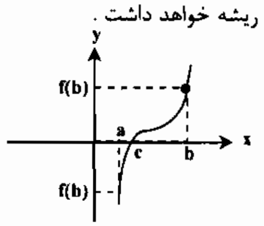
۱) ۰ و ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» توابعی به صورت $f(x)=\begin{cases} h(x) & \text{گنگ } x \\ g(x) & \text{گویا } x\end{cases}$ به ازای ریشه‌های معادله $h(x)=g(x)$ پیوسته می‌باشند:

$$x^2=2x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=2$$

قضیه بولتزانو (مقدار میانی)

هر گاه تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a).f(b)<0$ باشد، آنگاه تابع f در این فاصله حد اقل یک ریشه خواهد داشت.



قضیه بولتزانو را می‌توان اینطور تعبیر کرد که وقتی یکی از مقادیر $f(a)$ یا $f(b)$ منفی و دیگری مثبت باشد، آنگاه نمودار f حداقل یکبار محور xها را قطع خواهد کرد، یعنی یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد بطوریکه $f(c)=0$ می‌باشد.

مثال ۷۵: معادله $x.2^x = 1$ در بازه $|1,\frac{1}{4}|$ چند ریشه دارد ؟

۱) ریشه ندارد ۲) حداقل یک ریشه دارد ۳) حداقل دو ریشه دارد ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار میانی داریم :

$$f(x) = x.2^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{4}) \simeq -2/81 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(\frac{1}{4})f(1) < 0$$

مثال ۷۶: تابع $y = x - \text{Cos}x$ در کدام بازه ریشه دارد؟

۱) $[0,\frac{\pi}{6}]$ ۲) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ ۳) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ ۴) $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(0) = -1 \ , \ f(\frac{\pi}{6}) \approx -0.3 < 0 \ , \ f(\frac{\pi}{4}) \approx 0.08 > 0 \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}] \Rightarrow f(x) = 0$$

مثال ۷۷: به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه‌های معادله $f(x) = x^2 - (m+1)x + (2m-3) = 0$ بین دو عدد ۱ و ۱- قرار دارد؟

پاسخ :

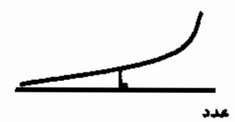
$$\begin{cases} f(1) = m - 3 \\ f(-1) = 3m - 1 \end{cases} \Rightarrow (m-3)(3m-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < m < 3$$

مجانب توابع و انواع آن

تعریف شاخه بی نهایت منحنی :

گوئیم، منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت است. هرگاه نقطه یا نقاطی روی منحنی باشد که حد اقل یکی از مختص‌های آن طول یا عرض یا هردو قسمت به سمت بی نهایت میل کند.

تعریف خط مجانب :



هرگاه منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت باشد، خط D را مجانب آن شاخه گوئیم. در صورتی که وقتی نقطه متغیر M روی آن شاخه بی نهایت دور شود فاصله آن از خط D به سمت صفر میل کند. $(MH \to 0)$

انواع مجانب : یک تابع می تواند دارای سه مجانب قائم، افقی و مایل باشد :

مجانب قائم:

هرگاه وقتی $x \to a$ آنگاه $\text{Lim}\, f(x) \to \infty$ شود آنگاه گوئیم خط $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع f(x) است.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ **x = a**، مجانب قائم تابع است

مجانب افقی : هرگاه مقدار $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ برابر عددی مانند b شود آنگاه گونیم مجانب افقی تابع f(x) خط y=b می‌باشد.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ **y = b**، مجانب قائم تابع است

نکته ۲۹: تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (تابع هموگرافیک) دارای مجانب قائم و افقی است. (با شرط $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$)

مجانب قائم است $\lim\limits_{y\to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \to y = \frac{a}{c}$

مثال ۷۸: مقادیر a , b , c در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+6}$، کدام است؟ خطوط x = ۲ و y = ۳ مجانب‌های آن بوده و از نقطه (۳ و ۱) P می‌گذرند.

۱) $a = -9 , b = 18 , c = -3$ ۲) $a = -3 , b = 9 , c = -6$ ۳) $a = 18 , b = -9 , c = 3$ ۴) $a = 9 , b = -18 , c = 6$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} cx + 6 = 0 \xrightarrow{x=2} 2c + 6 = 0 \to \boxed{c = -3} \\ y = 3 \xrightarrow{\text{مجانب افقی}} y = \frac{a}{c} \Rightarrow 3 = \frac{a}{c} \Rightarrow a = 3 \times -3 = -9 \\ P(1,3) \in f \Rightarrow 3 = \frac{-9(1) + b}{-3(1) + 6} \Rightarrow \boxed{b = 18} \end{cases}$$

مثال ۷۹: معادله مجانب تابع $f(x) = tgx$ را بدست آورید؟

پاسخ :

$$y = f(x) = \frac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x} \Rightarrow \text{Cos}x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$ (معادله مجانب قائم)

مثال ۸۰: خط $x = 1$ مجانب قائم نمودار $y = \frac{(m+1)x - 2}{x + m - 3}$ بوده، معادله مجانب افقی آن به چه صورت است؟

۱) $y = 3$ ۲) $y = 4$ ۳) $y = 2$ ۴) $y = 1$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} x + m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - m \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 - m = 1 \Rightarrow \boxed{m = 2} \\ \lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(m+1)x - 2}{x + m - 3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x - 2}{x - 1} = 3 \end{cases}$$

تذکر ۱۰: برای بدست آوردن مجانب قائم در توابع کسری کافیست طول نقاطی را که مخرج به ازای آنها صفر می‌شود را بدست آوریم، البته در مواردی که ریشهٔ مشترک بین صورت و مخرج وجود داشته باشد باید حد تابع محاسبه گردد و اگر حد پس از رفع ابهام برابر ∞ شد، آنگاه مقدار به دست آمده مجانب قائم تابع می‌باشد و اگر برابر ∞ نشد، تابع به ازای آن مقدار مجانب قائم ندارد.

مثال ۸۱: مجانبهای قائم و افقی توابع زیر را بدست آورید .

۱) $y = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \Rightarrow \text{Lim}\frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{افقی} \\ e^x = 0 \Rightarrow x \to -\infty & \text{مجانب قائم وجود ندارد} \end{cases}$

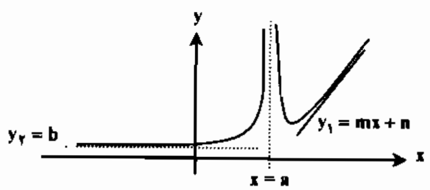
۲) $y = \frac{\text{Sin}x}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty & \text{تابع مجانب قائم ندارد} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \frac{(\text{عدد})}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

اما $y = 0$ بعنوان مجانب افقی قابل قبول نیست زیرا نقاط زیادی (مانند $x = k\pi$) وجود دارند که $y = \frac{\text{Sin}x}{x} = 0$ خواهد شد و منحنی بر مجانب منطبق خواهد شد. در صورتیکه تابع f نباید بی‌شمار دفعه مجانب خود را قطع کند. توجه شود که در بعضی از کتابهای مرجع $y = 0$ بعنوان مجانب افقی در نظر گرفته می‌شود به هر حال بحث برروی این تابع زیاد است !

۳) $y = \frac{\text{Sin}x}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مانند حالت قبل مجانب افقی نداریم .} \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Sin}x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0 & \text{: مجانب قائم} \end{cases}$

توضیح: توجه شود چون $x = 0$ ریشه صورت کسر هم می‌باشد، لذا حد تابع را محاسبه کردیم.

مجانب مایل:



هرگاه حد تابع با ضابطه $y = f(x)$ وقتی x به سمت $+\infty$ و یا $-\infty$ میل کند برابر ∞ باشد، امکان آنکه مجانب مایل داشته باشد وجود دارد. در شکل خط $y_2 = b$ مجانب افقی خط $x = a$ مجانب قائم و خط $y_1 = mx + n$ مجانب مایل نمودار تابع می‌باشد.

قضیه : شرط لازم و کافی برای اینکه خط $y_1 = mx + n$ یک مجانب مایل منحنی تابع $y = f(x)$ باشد این است که :

$$\lim\limits_{x\to\pm\infty} |y - y_1| = 0$$

روش تعیین مجانب مایل :

در تابعهای کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، اولاً اگر درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد خط $y_1 = 0$ مجانب **افقی** تابع است، و اگر درجه صورت و مخرج مساوی باشد خط $y_2 = b$ مجانب افقی تابع است. اگر درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج باشد منحنی دارای خط مجانب مایل است. که از تقسیم صورت بر مخرج بدست می‌آید (خارج قسمت این تقسیم مجانب مایل است) و اگر درجه صورت از درجه مخرج بیش از یک واحد باشد تابع دارای **منحنی مجانب** است و برای تعیین آن صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال ۸۲: معادله مجانبهای منحنی $y=\dfrac{x^۳}{x^۲+x-۲}$ **را پیدا کنید.**

پاسخ :

مجانب قائم : $x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۲$

مجانب مایل : $y=x-۱+\dfrac{۳x-۲}{x^۲+x-۲} \Rightarrow y=x-۱$

مثال ۸۳: معادله مجانبهای منحنی $y=\dfrac{۲x^۴+x^۳+۱}{x^۳}$ **کدام است ؟**

۱) $y=۲x+۳\ ,\ x=۰$ ۲) $y=۲x+۱\ ,\ x=۰$

۳) $y=۲\ ,\ y=۲x\ ,\ x=۰$ ۴) $y=۲\ ,\ y=۲x+۳\ ,\ x=۰$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مجانب مایل تابع را با تقسیم کردن صورت بر مخرج بدست می‌آوریم :

$$\begin{array}{c|c} ۲x^۴+x^۳+۱ & x^۳ \\ \cline{2-2} -۲x^۴ & ۲x+۱ \\ \hline x^۳+۱ & \\ -x^۳ & \\ \hline R=۱ & \end{array}$$

مجانب مایل : $\Rightarrow y=۲x+۱+\dfrac{۱}{x^۳} \to y=۲x+۱$

مجانب قائم : $x^۳=۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} y=\infty \to x=۰$

تذکر ۱۱: در توابع کسری در صورت وجود مجانب مایل آنگاه مجانب افقی نخواهیم داشت و بالعکس اما در توابع رادیکالی احتمالی وجود هر دو مجانب وجود دارد .

روش دیگر : برای تعیین جایگزین مجانب مایل : اگر خط $y_۱=mx+n$ مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ فرض شود، در این صورت برای تعیین ضرائب m و n روابط زیر را داریم :

$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mx) \end{cases}$$

تذکر ۱۲: اگر $m=۰$ و n عددی حقیقی باشد، مجانب، افقی است. اگر n و m بی نهایت شود تابع مجانب مایل ندارد.

مثال ۸۴: خط مجانب تابع $y=۲x\sqrt{\dfrac{x-۱}{۹x-۱}}$ **با خط** $y=(m+۱)x+h$ **موازی است . مقدار** m **کدام است؟**

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱» اگر معادله خط مجانب را به فرم $y=ax+b$ در نظر بگیریم، ضریب زاویه خط از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x\sqrt{\frac{x-۱}{۹x-۱}}}{x}=\lim_{x\to\infty}۲\sqrt{\frac{x-۱}{۹x-۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

چون دو خط موازیند لذا $m+۱=a$ و یا $m+۱=\dfrac{۲}{۳}$ که $m=-\dfrac{۱}{۳}$ را نتیجه می‌دهد.

نکته ۳۰ : در توابعی به صورت کلی $y=\dfrac{a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۰}{b_{n-۱}x^{n-۱}+b_{n-۲}x^{n-۲}+\ldots+b_۰}$ معادله مجانب مایل به صورت زیر است:

$$y=\frac{a_n}{b_{n-۱}}x-\frac{۱}{b_{n-۱}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-۱} \\ b_{n-۱} & b_{n-۲}\end{vmatrix}$$

مثلاً در **مثال** (۸۲) معادله مجانب مایل برابر است با:

$$y=\frac{۲}{۱}(x)-\frac{۱}{۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰\end{vmatrix}=۲x-۱(۰\times۲-۱\times۱)=۲x+۱$$

مثال ۸۵: مجانبهای نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x^۳+۳x^۲}+\sqrt{x^۲+۲x}$ **را بدست آورید .**

پاسخ :

$$x\to\infty \Rightarrow \lim y=x+۱+|x+۱| \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty\ ,\ y=x+۱+x+۱ \Rightarrow y=۲x+۲ & \text{مجانب مایل} \\ x\to-\infty\ ,\ y=-(x+۱)+(x+۱) \Rightarrow y=۰ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

مثال ۸۶: مجانبهای نمودار تابع $y=\dfrac{۲+|x|}{۴+۲x}$ **را بدست آورید .**

پاسخ :

اگر $x>۰ \Rightarrow y=\dfrac{x+۲}{۲x+۴}=\dfrac{۱}{۲}$ (مجانب ندارد) توجه شود که در این حالت $y=\dfrac{۱}{۲}$ تابع ثابت داریم

اگر $x<۰ \Rightarrow y=\dfrac{-x+۲}{۲x+۴} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+۲}{۲x+۴}=-\dfrac{۱}{۲}$ مجانب افقی:

$۴+۲x=۰ \Rightarrow x=-۲$ مجانب قائم منحنی:

مثال ۸۷: مجانب افقی تابع $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+۲}}-\sqrt{x}$ **کدام است؟**

پاسخ :

$$A=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+۲}}-\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{عبارت را در مزدوج خود}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x+۲})-x}{\sqrt{(x+\sqrt{x+۲})}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

لذا $y=\dfrac{۱}{۲}$ مجانب افقی تابع می‌باشد:

مثال ۸۸: اگر معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $y=ax+۱-\sqrt{(x+b)^۲+۱}$ **وقتی** $x\to-\infty$ **برابر** $y=۲x+۳$ **باشد،** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(ax+۱-|x+b|)=\lim_{x\to-\infty}(ax+۱+x+b)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[(a+۱)x+b+۱]\xrightarrow[\text{مجانب مایل منحنی است}]{y=۲x+۳}\begin{cases} a+۱=۲ \\ b+۱=۳\end{cases} \Rightarrow a=۱,b=۲ \Rightarrow a+b=۳$$

مثال ۸۹: اگر معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y=\sqrt{x^۲-x+۱}-ax-b$ **وقتی** $x\to-\infty$ **برابر** $y=۰$ **باشد،** $a+b$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲-x+۱}-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}(|x-\frac{۱}{۲}|-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{۱}{۲}-x-ax-b)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[(-۱-a)x+\frac{۱}{۲}-b]\xrightarrow{y=۰\ \text{مجانب افقی است}}\begin{cases} -a-۱=۰ \\ \frac{۱}{۲}-b=۰\end{cases} \Rightarrow a=-۱\ ,\ b=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۲}$$

مثال ۹۰: معادله مجانبهای $y=x+۲\text{Arctg}x$ **عبارتند از:**

۱) $y=\pi$ راست و $y=-\pi$ چپ   ۲) $y=x$ راست و $y=x$ چپ

۳) $y=x+\pi$ راست و $y=x-\pi$ چپ   ۴) ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» واضح است که منحنی مجانب قائم و افقی ندارد. فرض می‌کنیم خط $y=mx+n$ مجانب مایل منحنی باشد، در این صورت:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+۲\text{Arctg}x}{x}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=۱$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x+۲\text{Arctg}x-x)=\lim_{x\to\pm\infty}۲\text{Arctg}x=\begin{cases} \pi & x\to+\infty \\ -\pi & x\to-\infty\end{cases}$$

مثال ۹۱: اگر معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y=\dfrac{x^۲+۱}{x+۱}-ax-b$ **وقتی** $x\to\infty$ **برابر** $y=۰$ **باشد آنگاه** $a+b$ **کدام است ؟**

۱) ۱   ۲) -۱ ۳) ۲   ۴) ۰

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(-b-a)x+1-b}{x+1}$$

چون تابع دارای مجانب افقی $y=0$ می باشد لذا باید ضرایب x^2 و x در صورت کسر فوق برابر صفر گردد تا درجه صورت از مخرج کمتر باشد و حاصل حد فوق برابر صفر گردد:

$$\begin{cases}1-a=0\\-b-a=0\end{cases}\Rightarrow a=1\ ,\ b=-1\Rightarrow a+b=0$$

تذکر ۱۳: در بدست آوردن مجانبهای یک تابع لازم است به دامنه تابع توجه شود.

مثال ۹۲: منحنی به معادله $y=\frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x^2-1}$ چند خط مجانب دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۰

☑ پاسخ : گزینه «۱» مجانبهای قائم منحنی : $x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\rightarrow x=1\ ,\ x=-1$

$x=-1$ مقدار زیر رادیکال صورت را منفی می‌کند لذا $x=-1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد از طرفی x نمی‌تواند به سمت بی نهایت میل کند لذا تابع مجانب مایل و افقی ندارد.

مجانب توابع پارامتری :

اگر معادلات منحنی به صورت $x=f(t)$ و $y=g(t)$ بیان شده باشد، آنگاه برای به دست آوردن مجانب تابع باید به ازای $x\rightarrow\infty$ مقادیر t را به دست آورده و در معادله $y=g(t)$ قرار دهیم، مقادیر به دست آمده برای y مجانب‌های افقی تابع را به ما معرفی می‌کند و وقتی $y\rightarrow\infty$ مقادیر t را به دست آورده و در معادله $x=f(t)$ قرار می‌دهیم، مقادیر به دست آمده برای x مجانبهای قائم تابع را به ما معرفی می‌کند.

مثال ۹۳: مجانبهای تابع پارامتری $x=\frac{t^2+1}{t-2}$ و $y=\frac{t}{t+1}$ را به دست آورید.

☑ پاسخ :

$$x\rightarrow\infty\Rightarrow\begin{cases}t\rightarrow\infty\\t=2\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}\\ \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{t+1}=1\end{cases}\quad ,\quad y\rightarrow\infty\Rightarrow t=-1\Rightarrow x=\frac{(-1)^2+1}{-1-2}=0$$

لذا تابع دارای دو مجانب افقی $y_1=\frac{2}{3}$ و $y_2=1$ و یک مجانب قائم $x=0$ است.

نکته ۳۱ : توابع متناوب فاقد مجانب مایل و افقی هستند و مجانب قائم یا ندارند و یا بی‌شمار مجانب قائم دارند.

مثال ۹۴ : مجانبهای تابع $y=\frac{|\frac{x}{2}|}{x^2-x}$ را به دست آورید.

☑ پاسخ :

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[\frac{x}{2}]}{x^2-x}=0\Rightarrow y=0$$ مجانب افقی

$$x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

تنها $x=0$ مجانب قائم تابع می‌باشد، زیرا در همسایگی $x=1$ صورت کسر برابر صفر است و در نتیجه $x=1$ مجانب قائم نخواهد بود.

مثال ۹۵ : تابع پارامتری $\begin{cases}x=t^3\\y=\frac{1}{1-t^3}\end{cases}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

☑ پاسخ : گزینه «۲» تابع پارامتری داده شده، در واقع تابع $y=\frac{1}{1-x}$ می‌باشد که یک تابع هموگرافیک است که یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

مثال ۹۶ : وارون تابع $y=\frac{1}{x^3-x}$ چند مجانب قائم و چند مجانب افقی دارد؟

۱) ۳ قائم، ۱ افقی ۲) ۱ قائم، ۳ افقی ۳) ۱ افق، ۱ قائم ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

☑ پاسخ : گزینه «۲» چون خود تابع f ، ۳ مجانب قائم و ۱ مجانب افقی دارد، پس وارون آن ۳ مجانب افقی و یک قائم دارد.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) e

۳ـ حد عبارت $\frac{\cos x^2-1}{x^4}$ وقتی x به سمت صفر میل کند برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۴ـ حد تابع $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$ چه مقدار است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲/۹۹- ۲) ۳- ۳) ۲/۹۹+ ۴) $+\infty$

۵ـ مطلوبست تعیین حد تابع داده شده: $y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

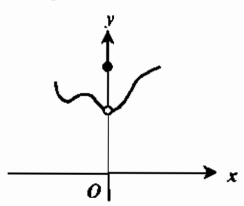
۱) $y=\frac{\pi}{2}$ ۲) $y=\infty$ ۳) $y=1$ ۴) $y=0$

۶ـ در مورد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) حد موجود و برابر صفر است. ۲) حد موجود و برابر یک است. ۳) حد موجود و برابر $\frac{1}{2}$ است. ۴) حد موجود نیست.

۷ـ نمودار تابع f در نزدیکی صفر به صورت شکل مقابل است. کدام گزینه در مورد حد این تابع در صفر صحیح است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)



۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ موجود نیستند.

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq f(0)$

۳) حد تابع در صفر موجود نیست.

۴) حد تابع در صفر موجود است.

۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}e$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $e^{-\frac{1}{2}}$ ۴) $-\frac{1}{2}e$

۹ـ کدام گزینه در مورد $\lim\limits_{x\to 0}x|\frac{1}{x}|$ صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) وجود ندارد ۲) حد برابر صفر است ۳) حد برابر یک است ۴) ∞

۱۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۱ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x & x\in Q\\ x-2 & x\notin Q\end{cases}$ مفروض است. این تابع در .... است. (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲- پیوسته ۲) ۲ پیوسته ۳) $-\frac{1}{2}$ پیوسته ۴) همه نقاط ناپیوسته

۱۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{4}{e}$ ۴) $+\infty$

۱۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۱۵ـ به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۶ـ کدام گزینه در مورد $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{\pi}{n})$ صحیح است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) حد موجود و برابر یک است. ۲) حد موجود و برابر صفر است. ۳) حد موجود و برابر ۱- است. ۴) حد موجود نیست.

۱۷ـ مقدار حد $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) e ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۱

۱۸ـ حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) فاقد حد

۱۹ـ در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n=\begin{cases}e^{-n} & \text{زوج } n\\ \frac{\sin n}{n} & \text{فرد } n\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

۲۰ـ اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$، $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) ∞ ۲) $\log 3$ ۳) $-\sin 1$ ۴) $-\infty$

۲۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^2}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ∞ ۴) موجود نیست.

۲۲ـ اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $f(x)-x=0$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد. ۲) $f(x)-x=0$ ریشه‌ای در $[a,b]$ ندارد.
۳) $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد. ۴) $f(x)=0$ ریشه‌ای در $[a,b]$ ندارد.

۲۳ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{e}{2}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $-\frac{1}{e}$ ۴) $e^{-\frac{1}{2}}$

۲۴ـ حد زیر را به دست آورید: $\lim\limits_{x\to 0}(x+1-tgx)^{3/(2x^2)}$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $e^{-1/4}$ ۲) $e^{3/2}$ ۳) $e^{2/3}$ ۴) $e^{1/2}$

۲۵ـ مقدار حد را به دست آورید: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+\cos x)^{1/Ln(1+x^2)}$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) e ۴) $-\infty$

۲۶ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}xLnx$ برابر است با .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) ۱- ۴) $-\infty$

۲۷ـ a چقدر باشد تا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x+3^{x+1}}{2^{2x-1}+3^{x+2}}$ عددی غیر صفر باشد؟ (MBA ـ سراسری ۸۰)

۱) $a>4$ ۲) $a=3$ ۳) $a=4$ ۴) $3<a<4$

۲۸ـ اگر $\lim\limits_{x\to-3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۵- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) $-\frac{3}{5}$

۲۹ـ تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]-x^2+2x$ درفاصله $[0,5]$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۱

۳۰ـ اگر $a_n=Arc\cot\frac{1}{n}$، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۳۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\sqrt{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۳۲ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}5x & \text{گویا } x\\ x^2-6 & \text{گنگ } x\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) تعداد نامتناهی

۳۳ـ اگر تابع f در معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند آنگاه تابع f : (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) زوج است. ۲) فرد است. ۳) نه فرد و نه زوج است. ۴) متناوب است.

۳۴ـ اگر $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۳۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۳۶ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$ باشد آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۷ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\cos x & x\neq 0\\ \alpha & x=0\end{cases}$ مفروض است، کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) به ازای هر مقدار α، f در صفر ناپیوسته است.
۲) به ازای $\alpha=0$، f بر R پیوسته است.
۳) به ازای $\alpha=1$، f بر R پیوسته است.
۴) به ازای $\alpha=-1$، f بر R پیوسته است.

۳۸ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

۳۹ـ حد دنبالهٔ $\{(3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ وقتی $n\to\infty$، برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{5}{x}}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) e^{-10} ۲) e^{10} ۳) e^{-5} ۴) e^{5}

۴۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) حد وجود ندارد ۴) ۲

۴۲ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1\\ 2x-2 & x>1\end{cases}$ از نظر پیوستگی کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) در هر نقطه به جز در $x=1$ پیوسته است.
۲) پیوسته است.
۳) در هر نقطه به جر در $x=0$ پیوسته است.
۴) در هر نقطه به جز $x=0$ و $x=1$ پیوسته است.

۴۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۴۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Arcsin}\,3x}{xe^{2x}-x^2}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۵ـ حد عبارت $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot gx\right)$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱-

۴۶ـ به ازاء کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+a & x\le 0\\ x\cos x & x>0\end{cases}$ در R پیوسته می‌باشد. (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) هیچ مقدار

۴۷ـ تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x)=[3x]+x^2-1$ در فاصله [۱ و ۱-] چقدر است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۸ـ با فرض $f(x)=[1-x^2]$ که در آن $[x]$ جزء صحیح x است $\lim\limits_{x\to 1^-}(fof)(x)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) e^{-6} ۲) e^{-3} ۳) e^{6} ۴) e

۵۰ـ مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $R-\{0\}$ ۲) $R-\{1\}$ ۳) $R-\{-1\}$ ۴) $R-\{-1,1\}$

۵۱ـ تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]-x^2+2x$ درفاصله $[0,5]$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۱

۵۲ـ حد روبرو را به دست آورید: $\lim\limits_{x\to 0}\tan 2x\csc 4x$ (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۳ـ به ازای هر عدد حقیقی و ثابت a حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) e^{a} ۴) e^{2a}

۵۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) حد وجود ندارد.

۵۵ـ حد دنباله $a_n=\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) ∞

۵۶ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) e^{2} ۲) $e^{\frac{3}{2}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) e^{3}

۵۷ـ حد چپ تابع $f(x)=\begin{cases}\lfloor x\rfloor+|x| & x<-1\\ \lfloor x\rfloor-|x| & x\ge -1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱

۵۸ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{Arcsec}\,x)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ∞

۶۰ـ اگر f تابعی بر R با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 5x & \text{گویا } x \\ x^2+6 & \text{گنگ } x \end{cases}$ باشد، این تابع از نظر پیوستگی در نقاط $x=1$ ، $x=2$ چگونه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) در هر دو نقطه پیوسته است. ۲) در هردو نقطه ناپیوسته است.
۳) در $x=1$ پیوسته و در $x=2$ ناپیوسته است. ۴) در $x=1$ ناپیوسته و در $x=2$ پیوسته است.

۶۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $e^{\frac{-1}{2}}$ ۲) e^{-1} ۳) $e^{\frac{1}{2}}$ ۴) e

۶۲ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}} & x\neq 1 \\ A & x=1 \end{cases}$ مفروض است. A چه مقداری باشد تا تابع f پیوسته گردد؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) e

۶۳ـ اگر $f(x)=\dfrac{(\sin x)^5 \operatorname{Ln} x}{(1+x^5)x^2}$ و $x>0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) حد وجود ندارد.

۶۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $+\infty$

۶۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x-1+\operatorname{Ln} x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

۶۶ـ تابع f با ضابطه $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{nx+1}$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\dfrac{1}{n}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{n}$ ۴) 1

۶۷ـ در تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x<4 \\ 5x+k & x\geq 4 \end{cases}$ چنانچه حد $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه مقدار k برابر است با:

(مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) -6 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 5

۶۸ـ حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{Ln} x}{\sqrt{x}}$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) $\dfrac{1}{2}$

۶۹ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{e}$ ۳) 1 ۴) e

۷۰ـ اگر f و g توابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشند، با کدام شرط زیر نمودار f و g الزاماً یکدیگر را در نقطه‌ای بین a و b قطع می‌کنند؟

(۸۲ ـ MBA)

۱) $f(a)<g(a)\ ,\ f(b)>g(b)$ ۲) $f(a)>g(a)\ ,\ f(b)>g(b)$
۳) $f(a)<g(b)\ ,\ f(b)<g(a)$ ۴) $f(a)=g(a)\ ,\ f(b)<g(a)$

۷۱ـ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x-1+\operatorname{Ln} x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

۷۲ـ $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\operatorname{Ln}\cosh x)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\cosh 1$ ۲) $\operatorname{Ln} 2$ ۳) e ۴) $-\infty$

۷۳ـ $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $2e$ ۴) e^2

۷۴ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{Ln} x}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) $\dfrac{4}{3}$

۷۵ـ اگر $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ عبارت $\underbrace{fof\ldots\ldots f(x)}_{\text{تکرار } 100f \text{ بار}}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) x ۲) $\dfrac{1}{x}$ ۳) $\dfrac{1-x}{1+x}$ ۴) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{100}$

۷۶ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 e^{-0/1x}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $\dfrac{5!}{(0/1)^5}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۷۷ـ توابع $f(x)=\dfrac{1}{\lfloor |x|+1\rfloor |x|}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) مجموعه مقادیر g شامل دامنه g است. ۲) دامنه‌های f و g برابرند.
۳) دامنه f زیر مجموعه مقادیر g است. ۴) مجموعه مقادیر f شامل دامنه f است.

۷۸ـ اگر $f(x)=\dfrac{1+10^{\frac{-1}{x}}}{2-10^{\frac{-1}{x}}}$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ چه مقدار خواهد شد؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\dfrac{1}{2}$

۷۹ـ فرض کنید $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x)=x^2-5$ باشند، ناحیه‌ای که $f(g(x))$ در آن پیوسته باشد، کدام عبارت است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ ۲) $(-\infty,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$
۳) $(-\infty,-1)\cup(-1,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$ ۴) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

۸۰ـ تابع $f(x)=x(-1)^{[\frac{1}{x}]}$ برای $x\neq 0$ و $f(0)=0$ روی R تعریف شده است. کدام گزاره درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) f در صفر فقط پیوسته راست دارد. ۲) f در صفر فقط پیوسته چپ است.
۳) f در صفر پیوسته است. ۴) f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

۸۱ـ کدام تابع در $x=0$ پیوسته است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{\sin x}{x}$ ۲) $\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

۸۲ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۸۳ـ فرض کنید $x_1=1$ و $a_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ برای $n\geq 2$ کدام گزاره درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ ۲) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ ۳) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e$

۸۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) e ۴) $1+e$

۸۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $+\infty$ ۲) 1 ۳) e^{-2} ۴) e^{-4}

۸۶ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-}([x]+[x^2]+\dots+[x^{100}])$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) -50 ۲) صفر ۳) 50 ۴) 100

۸۷ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{e}+\sqrt[3]{e^2}+\dots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$ عبارتست از: (e عدنپر است.) (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

۸۸ـ به ازای چه مقدار a تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x|[x]+a & x<-2\\ |x|+[x] & x\geq -2\end{cases}$ در $x=-2$ پیوسته است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 6

۸۹ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) ∞

۹۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Arctg}\,x$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ∞

۹۱ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{|3x-5|}$ در فاصلهٔ $1\leq x\leq 0$ چند ناپیوستگی دارد؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 3 ۳) هیچ ۴) بی‌نهایت

۹۲ـ حد عبارت $\frac{x-1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ وقتی $x\to 1$، برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) 2

۹۳ـ مقدارحد، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) e ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{-e}{2}$

۹۴ـ c را به قسمی بیابید که $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=9$ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $c=\mathrm{Ln}\,3$ ۲) $c=\mathrm{Ln}\,4$ ۳) $c=\mathrm{Ln}\,9$ ۴) $c=3$

۹۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۹۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۹۷ـ تابع F با ضابطهٔ $F(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x<1\\ \frac{2}{3} & 1\leq x\leq 2\\ 1 & x>2\end{cases}$ مفروض است. $\lim\limits_{n\to\infty}|F(1-\frac{1}{n})-F(2+\frac{1}{n})|$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) 0

۹۸ـ اگر $f(x)=\begin{cases}1+\frac{\sin x}{x} & x<0\\ -1+\frac{\tan x}{x} & x>0\end{cases}$ و $f(0)=a$ به ازای کدام مقدار a تابع f در $x=0$ پیوسته است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) 1 ۲) -1 ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۹۹ـ به ازای کدام مقدار C تابع $f(x)=\begin{cases}\tan x-\sec x & x=\frac{\pi}{2}\\ C & x\neq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ پیوسته است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) هر چه باشد C

۱۰۰ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد، دایره‌ای محاط شده است. مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری را داخل دایره محاط کرده و مجدداً دایره دیگری را در داخل مثلث حاصل محاط می‌کنیم و این عمل را تا بی نهایت بار ادامه می‌دهیم. حدّ مجموع مساحت این دایره‌ها کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) 2π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{9\pi}{4}$ ۴) $\frac{16\pi}{9}$

۱۰۱ـ حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1-\sin x)+\sin x}{1-\cos x}$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

۱۰۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}\,\mathrm{Ln}\,n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+\infty$

۱۰۳ـ تابع $f:R\to R$ و با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{گویا } x\\ -2x+3 & \text{گنگ } x\end{cases}$ در کدام نقاط پیوسته است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x=1\,,\,x=0$ ۲) $x=-3\,,\,x=0$ ۳) در اعداد گویا ۴) $x=-3\,,\,x=1$

۱۰۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $e^{\frac{1}{3}}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) e^{3} ۴) e^{2}

۱۰۶ـ اگر $g(x)=\frac{1}{1-\cos x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{g(x)}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) 1 ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{e}$

۱۰۷ـ حد عبارت $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) e^{-2} ۲) 0 ۳) e^{-1} ۴) e

۱۰۸ـ مقدار حد زیر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$$

۱) 1 ۲) $8e$ ۳) e^{3} ۴) ∞

۱۰۹ـ اگر $t.x^4=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\frac{1}{2}x^2)^t$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sqrt[4]{e}$ ۲) $\sqrt[6]{e}$ ۳) $\sqrt[12]{e}$ ۴) $\sqrt[24]{e}$

۱۱۰ـ دامنه تابع $f(x)=th^{-1}(tg\pi x)$ به صورت اجتماع کدام بازه‌ها است؟ $(K\in Z)$ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $(K+\frac{1}{4}, K+\frac{3}{4})$ ۲) $(K-\frac{1}{4}, K+\frac{1}{4})$ ۳) $[(K+\frac{1}{4}, K+\frac{3}{4}]$ ۴) $[K-\frac{1}{4}, K+\frac{1}{4}]$

۱۱۱ـ اگر $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$ $(x\neq 1)$ تابع f را در $x=1$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(1)=-1$ ۲) $f(1)=0$ ۳) $f(1)=1$ ۴) $f(1)=e$

۱۱۲ـ اگر $|x|<1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{m}{n}x^n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) 1 ۳) x ۴) ∞

۱۱۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $e^{\frac{1}{2}}$ ۲) $e^{\frac{2}{3}}$ ۳) e^{2} ۴) ∞

۱۱۴ـ حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{|x-[x]|}{x}$ در نقطهٔ صفر کدامند؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ و ۰ ۲) ۱- و ۰ ۳) $-\infty$ و ۱ ۴) $+\infty$ و ۱

۱۱۵ـ فرض کنیم $f:[a,b]\to R$ تابعی یک به یک باشد. پس برای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$ داریم $f(x)\neq f(y)$ و لذا $f(x)<f(y)$ یا $f(x)>f(y)$ از این استدلال می‌توان نتیجه‌ای گرفت؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) اگر فرض پیوستگی f هم اضافه شود آنگاه f یکنواست.
۲) f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.
۳) f قطعه به قطعه اکیداً یکنواست.
۴) اصولاً این استدلال هیچ نتیجه‌ای در مورد یکنوا بودن f نمی‌دهد.

۱۱۶ـ اگر A عدد ثابتی باشد، $\lim\limits_{t\to 1^+}(1-(t-1)A)^{\frac{2}{(t^2-1)}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) e^{2A} ۲) e^{-2A} ۳) e^{A} ۴) e^{-A}

۱۱۷ـ اگر $f(x)=(\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}$ $(x\neq -2)$، تابع f را در $x=2$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) e^{2} ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e^{-1}

۱۱۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) 2 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۱۱۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^4-1)}{x^2-1}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) ∞

۱۲۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-x}-4x}{x-\sin x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۱۲۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $e^{\frac{1}{3}}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) $e^{\frac{2}{3}}$ ۴) $e^{\frac{3}{2}}$

۱۲۲ـ حاصل $\lim\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ ۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ۳) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$ ۴) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

۱۲۳ـ حد تابع $f(x)=\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۱۲۴ـ مقدار c را چنان تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$ بشود.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) 4 ۲) 2 ۳) $Ln4$ ۴) $Ln2$

۱۲۵ـ معادلات مجانبهای منحنی $y=x+x^2/\sqrt{x^2-1}$ کدام‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $y=2, x=\pm 1$ ۲) $y=2x, y=0, x=\pm 1$ ۳) $y=2x, y=1, x=1$ ۴) $y=x, y=1, x=\pm 1$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}\times 2x}{x^2\times x^2}=\frac{1}{3}$$

۲ـ گزینه «۴» از هم‌ارزی $\cosh x\sim\frac{e^x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{\frac{1}{2^x}}=\frac{e}{1}=e$$

۳ـ گزینه «۱» می‌دانیم وقتی $x\to 0$ آنگاه $\cos x-1\sim\frac{-x^2}{2}$ لذا داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}}{x^4}=-\frac{1}{2}$$

۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)-(1-x)}{(1-x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)[-(1+x)-1]}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}[-(1+x)-1]=-3$$

۵ـ گزینه «۴»

$$y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot gx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{tgx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{xtgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x(x+\frac{x^3}{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3(1+\frac{x^2}{3})}=0$$

۶ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$$

۷ـ گزینه «۴»

۸ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=1^\infty=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\times\frac{-(\sqrt{x})^2}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

۹ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}x\times\frac{1}{x}=1$$

توجه: هرگاه $u\to\infty$ داریم: $[u]\sim u$.

۱۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln}\cos 2x}{\operatorname{Ln}\cos 3x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-2tg2x}{-3tg3x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{-9x}=\frac{4}{9}$$

۱۱ـ گزینه «۱» تابع f در نقاطی که $2x=x-2$ باشد، پیوسته است یعنی $x=-2$.

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\sqrt[n]{2n+1}\times\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\frac{n}{e})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(\frac{2n}{e})^2}{\frac{n}{e}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{4n}{e}=\frac{4}{e}$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1}\left|x+\frac{4}{2\times 1}\right|-x\right)=2$$

۱۴ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت وقتی $x\to 0^+$ ، آنگاه $t\to+\infty$ بنابراین:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\overset{Hop}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

۱۵ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}2x\operatorname{Cos}\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0\ \text{و}\ f(0)=a$$

برای پیوستگی f در 0 لازم است $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$ ، بنابراین $a=0$.

۱۶ـ گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}=\operatorname{Cos}0=1$$

۱۷ـ گزینه «۴»

روش اول:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}(1+e^x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$$

روش دوم: وقتی $x\to+\infty$ ، $1+e^x\sim e^x$ بنابراین $\operatorname{Ln}(1+e^x)\sim\operatorname{Ln}e^x\sim x$. پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}(1+c^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{-\infty}}{3+3^{-\infty}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}\times\operatorname{Ln}2\times 2^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}\times\operatorname{Ln}3\times 3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{Ln}2}{\operatorname{Ln}3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع فاقد حد است.

۱۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left|\begin{array}{l}e^{-n}=0\\ \frac{\sin n}{n}=0\end{array}\right.$$

۲۰ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که اگر $x>1$، آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(2+x)}{1+x^{2n}}-\frac{x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(2+x)}{x^{2n}}-\frac{x^{2n}\sin x}{x^{2n}}\right)=0-\sin x$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-\sin x)=-\sin 1$$

۲۱ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

۲۲ـ گزینه «۱» طبق فرض داریم:

$$f(a)\in[a,b]\Rightarrow a\le f(a)\le b\Rightarrow f(a)-a\ge 0$$

$$f(b)\in[a,b]\Rightarrow a\le f(b)\le b\Rightarrow f(b)-b\le 0$$

حال تابع $g(x)=f(x)-x$ را در نظر بگیرید، چون $g(a)g(b)\le 0$، بنابراین طبق قضیه مقدارمیانی تابع g حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

۲۳ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\mathrm{Ln}(1+x)}-e}{x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2})}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}}-e}{x}=\overset{\text{HOP}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}}{1}=-\frac{e}{2}$$

۲۴ـ گزینه «؟»

$$\lim_{x\to 0}(1+x-\operatorname{tg}x)^{\frac{3}{2x^3}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^3}{3})^{\frac{3}{2x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{2x^3}(1-\frac{x^3}{3}-1)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

۲۵ـ گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to 0^+}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{Ln}(1+x^2)}}=1^\infty=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\mathrm{Ln}(1+x^2)}\times(\sin x+\cos x-1)}$$

می‌دانیم وقتی $x\to 0$، $\sin x\sim x$, $\cos x-1\sim\frac{-x^2}{2}$ و $\mathrm{Ln}(1+x^2)\sim x^2$ بنابراین:

$$A=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1-\frac{x}{2}}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$$

۲۶ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0^+}x\mathrm{Ln}x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ln}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=0$$

۲۷ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+3^{x+1}}{2^{2x-1}+3^{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+3^{x+1}}{2^{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+3^{x+1}}{4^x\times\frac{1}{2}}$$

اگر $a<4$ حد برابر صفر است، اگر $a>4$ حد برابر ∞ و اگر $a=4$ حد برابر ۲ می‌شود.

۲۸ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to-3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}\times\frac{1+\sqrt{5x+16}}{1+\sqrt{5x+16}}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{1-(5x+16)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{-5(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{a(1+\sqrt{1})}{-5}\Rightarrow-\frac{2}{5}a=2\Rightarrow a=-5$$

۲۹ـ گزینه «۴» تابع f، فقط در $x=3$ ناپیوسته است و در نقاط مرزی نیز پیوسته است.

۳۰ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Arc\,cotg}\frac{1}{n}=\operatorname{Arc\,cotg}0=\frac{\pi}{2}$$

۳۱ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}=1^\infty=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{2x}(-x)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

۳۲ـ گزینه «۳»

$$x^2-6=5x\Rightarrow x^2-5x-6=0\Rightarrow x=-1,6$$

۳۳ـ گزینه «۲» ابتدا به جای y , x مقدار ۰ قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$$

حال در رابطه داده شده به جای y ، $-x$ قرار می‌دهیم، در نتیجه:

$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(x)+f(-x)=0\Rightarrow$ تابع f فرد است

۳۴ـ گزینه «۲» واضح است که تمام جملات مجموع مابین $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ قرار دارند، بنابراین:

$$n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

حال توجه کنید که $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$ ، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

۳۵ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\mathrm{Ln}x+1)}{1}=1$$

۳۶ـ گزینه «۴»

$$L=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}$$

به جای $\sin 3x$ بسط مکلورن آن را قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\frac{(3x)^5}{5!}-\dots)+ax+bx^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+3)x+(b-\frac{9}{2})x^3+\frac{(3x)^5}{5!}+\dots}{x^3}$$

برای اینکه حاصل حد فوق برابر صفر شود، لازم است $a+3=0$ و $b-\frac{9}{2}=0$. بنابراین $a=-3$ و $b=\frac{9}{2}$ و در نتیجه $a+b=\frac{3}{2}$.

۳۷ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\cos x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}\cos x=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\cos x=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}\cos x=-1$$

چون حد چپ و راست f در صفر با هم برابر نیستند، پس f نمی‌تواند در صفر پیوسته باشد.

۳۸ـ گزینه «۳» وقتی $n\to\infty$، $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$ بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{n}{e}}=e$$

۳۹ـ گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}\sim\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3$$

۴۰ـ گزینه «۱» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{5}{x}(-2x)} = e^{-10}$$

۴۱ـ گزینه «۳» وقتی $x \to \pi^-$، $2x \to 2\pi^-$ و بنابراین $\sin 2x \to 0^-$ و در نتیجه عبارت مقابل Ln منفی می‌شود. پس حد وجود ندارد.

۴۲ـ گزینه «۲»

$$f(0)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \Rightarrow \text{f در ۰ پیوسته است}$$

$$f(1)=0\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \Rightarrow \text{f در ۱ پیوسته است}$$

۴۳ـ گزینه «۲»

$$\operatorname{Limit}_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x} \xrightarrow{\text{طبق قانون رشد}} \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

توجه: وقتی $x \to +\infty$، رشد تابع نمایی e^x از x بیشتر است.

۴۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{xe^{2x}-x^2} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x(e^{2x}-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{e^{2x}-x} = 3$$

۴۵ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x^2 \operatorname{tg}x} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$$

۴۶ـ گزینه «۴» می‌دانیم تابع $[x]$ در تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است. پس تابع f به ازای تمام مقادیر a ناپیوسته است.

۴۷ـ گزینه «۱» تابع داده شده در نقاط $1\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{-1}{3}\ ,\ \frac{-2}{3}$ ناپیوسته می‌باشد.

۴۸ـ گزینه «۳» ابتدا $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [1-x^2] = [1-1^-] = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^-} f(f(x)) = f(0) = 1$$

۴۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1} = 1^\infty = \lim_{x\to\infty} e^{(3x+1)\left(\frac{2x-1}{2x+1}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{(3x+1)\times\frac{-2}{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x-2}{2x+1}} = e^{-3}$$

۵۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1\ ,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون حد چپ و راست در $x=0$ با هم برابر نیست، پس تابع f در $x=0$ پیوسته نیست.

۵۱ـ گزینه «۴» تابع f، فقط در $x=3$ ناپیوسته است و در نقاط مرزی نیز پیوسته است.

۵۲ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}2x \csc 4x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

۵۳ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

۵۴ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} \overset{\text{کراندار × صفر}}{=\!=\!=} 0$$

۵۵ـ گزینه «۲» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد، بنابراین:

$$a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\left(-\frac{1}{2n^2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

۵۶ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{3x+1}{3x-1}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

۵۷ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} (\lfloor x\rfloor + |x|) = \lfloor -1-\varepsilon \rfloor + |-1| = -2+1 = -1$$

۵۸ـ گزینه «۲» با ضرب مزدوج پرانتز اول داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \times \sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

۵۹ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arcsec} x = \operatorname{Arcsec}(\infty)$$

اندازه زاویه‌ای که sec آن ∞ است، جواب است. می‌دانیم $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و با قرار دادن $x = \frac{\pi}{2}$ ملاحظه می‌گردد که $\sec x = \infty$ می‌شود.

۶۰ـ گزینه «۴» توابعی به صورت $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{x گویا} \\ g(x) & \text{x گنگ} \end{cases}$ فقط به ازای مقادیری که از معادله $h(x) = g(x)$ به دست می‌آیند پیوسته هستند:

$$x^2+6 = 5x \Rightarrow x^2-5x+6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x=3\ ,\ x=2$$

پس تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته و در نقطه $x=2$ پیوسته است.

۶۱ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

۶۲ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}(x-1)} = e$$

برای پیوستگی f در ۱ لازم است $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$، بنابراین $A = e$.

۶۳ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^5 \operatorname{Ln}x}{(1+x^5)x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5 \operatorname{Ln}x}{(1+x^5)x^3} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{Ln}x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{HOP}}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0$$

۶۴ـ گزینه «۲» وقتی $x\to 0$، $\sin x\sim x$ بنابراین:

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$$

۶۵ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x-1+\ln x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

۶۶ـ گزینه «۲»

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1}=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq0\end{cases}\Rightarrow$$ f در $x=0$ ناپیوسته

۶۷ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to4^-}f(x)=3\times4+2=14\\ \lim_{x\to4^+}f(x)=5\times4+k=20+k\end{array}\right\}\Rightarrow20+k=14\Rightarrow k=-6$$

۶۸ـ گزینه «۱» نکته (۱۷) در متن درس (قانون رشد توابع)

۶۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{1}{e}$$

۷۰ـ گزینه «۱» تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را در نظر بگیرید، طبق شرایط گزینه (۱)، $h(a)<0, h(b)>0$، پس طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد به طوریکه $h(c)=0$ یعنی $f(c)=g(c)$.

۷۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x-1+\ln x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

۷۲ـ گزینه «۲» وقتی $x\to\infty$، $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sim\frac{e^x}{2}$ بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln\cosh x)=\lim_{x\to\infty}(x-\ln\frac{e^x}{2})=\lim_{x\to\infty}(x-x+\ln2)=\ln2$$

۷۳ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\cos\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\cdot\frac{-(1/x)^2}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

۷۴ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{3\sqrt{x}}{2}}=\frac{1+0}{+\infty}=0$$

۷۵ـ گزینه «۱»

توجه: در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ آنگاه: $f^{2n}(x)=x\ ,\ f^{2n+1}(x)=f(x)$

چون تابع داده شده در شرط اخیر صدق می‌کند پس $f^{100}(x)=x$.

۷۶ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}x^5e^{-0/1x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^{0/1x}}=0$$

رشد e^x بیشتر از x^n است.

۷۷ـ گزینه «۲» واضح است که $|x|\neq0$ یعنی $x\neq0$. از طرفی برای اینکه $[1+|x|]\,|x|\neq0$ باید عبارت $1+|x|$ مقادیری بین صفر تا یک را اختیار نکند و چون عبارت $1+|x|$ همواره بزرگتر از یک می‌باشد، پس $D_f=R-\{0\}$، واضح است که $D_g=R-\{0\}$ پس $D_f=D_g$.

۷۸ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1+10^{-\frac{1}{x}}}{2-10^{-\frac{1}{x}}}\overset{\text{رشد}}{=\!=}\lim_{x\to0^-}\frac{10^{-\frac{1}{x}}}{-10^{-\frac{1}{x}}}=-1$$

۷۹ـ گزینه «۴»

$$f(g(x))=f(x^2-5)=\frac{1}{x^2-5+1}=\frac{1}{x^2-4}$$

۸۰ـ گزینه «۳» $\lim_{x\to0}f(x)=0\times$ کراندار $=0$

۸۱ـ گزینه «۳» $f(0)=0\ ,\ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=$ صفر × کراندار $=0$

۸۲ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{2}-x$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$$

۸۳ـ گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^n}{n!})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^n}{(\frac{n}{e})^n})^{\frac{1}{n}}=e$$

۸۴ـ گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=1^\infty=\lim_{n\to\infty}e^{n.(1+\frac{1}{n^2}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1$$

۸۵ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}=1^\infty=\lim_{x\to0}e^{\frac{2}{x}(1-2x-1)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{2}{x}(-2x)}=e^{-4}$$

۸۶ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to0^-}[x^{2k-1}]=[0^-]=-1\ ,\ \lim_{x\to0^-}[x^{2k}]=[0^+]=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to0^-}([x]+[x^2]+...+[x^{100}])=-1+0-1+...-1+0=-50$$

۸۷ـ گزینه «۳» قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt[n]{e^{n-1}}$، در این صورت:

$$S_n=\frac{1+\sqrt{e}+\sqrt[3]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}=\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$$

پس حد فوق همان میانگین حسابی a_nها می‌باشد و چون $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{n-1}}=e$.

۸۸ـ گزینه «۴»

$$\left.\begin{aligned}f(-2^-)&=|-2|[-2^-]+a=a-6\\ f(-2^+)&=|-2|+[-2^+]=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow a-6=0\Rightarrow a=6$$

۸۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})=\lim_{x\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})\times\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$$

۹۰ـ گزینه «۳» $\lim_{x\to\infty} \text{Arctg}\,x=\text{Arctg}\,\infty=\frac{\pi}{2}$

۹۱ـ گزینه «۲» تابع f در نقاط ۱ , $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ ناپیوسته می‌باشد.

۹۲ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\frac{1}{1+2^{x-1}}}=\frac{0^+}{\frac{1}{1+2^{0^+}}}=0\ ,\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{\frac{1}{1+2^{x-1}}}=\frac{0^-}{\frac{1}{1+2^{0^-}}}=0$$

۹۳ـ گزینه «۴» به حل تست ۲۳ رجوع کنید.

۹۴ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=1^\infty=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{x+c}{x-c}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{2c}{x-c})}=e^{2c}$$

بنابراین:

$$e^{2c}=9\Rightarrow 2c=\text{Ln}9\Rightarrow c=\frac{1}{2}\text{Ln}9\Rightarrow c=\text{Ln}3$$

۹۵ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=1^\infty=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}\ \underset{}{\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}}\ \lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}(\frac{-x}{2})}=e^{\frac{-1}{2}}$$

۹۶ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}=1^\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{tg^2x(\sin x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\sin x-1}{\cot g^2x}}\ \overset{HOP}{=\!=}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos x}{-2\cot gx(1+\cot g^2x)}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\sin x}{-2(1+\cot g^2x)}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

۹۷ـ گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\left(F(1-\frac{1}{n})-F(2+\frac{1}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}-1}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2n}-1\right)=-1$$

۹۸ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases}\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2\\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-1+\frac{tgx}{x}\right)=0\end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد که حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد و بنابراین پیوسته نیز نمی‌باشد.

۹۹ـ گزینه «۱»

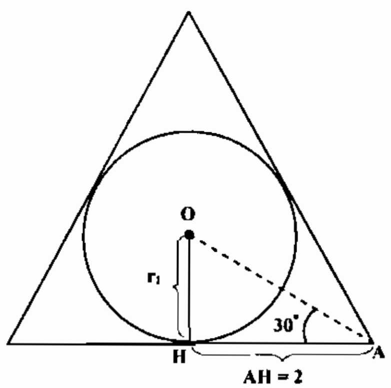
$$tgx-\sec x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

تابع فوق در بازه $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ در تمام نقاط بجز $x\neq\frac{\pi}{2}$ پیوسته است و لذا برای اینکه در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید حد چپ و راست تابع در این نقطه با مقدار تابع برابر باشد:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sin x-1}{\cos x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\sin x-1}{\cos x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$$

پس اگر $c=0$ باشد آنگاه حد چپ و راست با مقدار تابع برابر خواهند بود.



۱۰۰ـ گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل $OH=2tg30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. طول ضلع مثلث دومی که درون دایره محاط می‌کنیم نصف مثلث اول می‌باشد و به همین ترتیب. بنابراین شعاع دایره‌ها نیز در هر مرحله نصف مرحله قبل خواهد بود، پس مساحت هر دایره در هر مرحله $\frac{1}{4}$ مرحله قبل می‌شود، در نتیجه سری هندسی داریم که قدر نسبت آن برابر $\frac{1}{4}$ و جمله اول آن $S_1=\pi(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4\pi}{3}$ است. بنابراین مجموع سری برابر است با:

$$S=\frac{S_1}{1-q}=\frac{\frac{4\pi}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16\pi}{9}$$

۱۰۱ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{Ln}(1-\sin x)+\sin x}{1-\cos x}\ \overset{HOP}{=\!=}\ \lim_{x\to0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{1-\sin x}=-1$$

۱۰۲ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}\text{Ln}n=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{Ln}n}{2^n}=0$$ (رشد صورت کمتر از مخرج می‌باشد)

۱۰۳ـ گزینه «۴» برای پیوستگی چنین توابعی لازم است دو ضابطه با هم برابر باشند: $x^2=-2x+3\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1\ ,\ -3$

۱۰۴ـ گزینه «۴» از هم ارزی $tgu-u\sim\frac{u^3}{3}$ استفاده می‌کنیم $(u\to0)$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{tgx-x}{x^2tgx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2.x}=\frac{1}{3}$$

۱۰۵ـ گزینه «۱» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot(\frac{tgx}{x}-1)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{tgx-x}{x^3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

۱۰۶ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to0}(e^x-x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}(e^x-x)^{\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{2(e^x-x-1)}{x^2}}\ \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\ \lim_{x\to0}e^{\frac{2(1+x+\frac{x^2}{2}-x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{x^2}{x^2}}=e$$

۱۰۷ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{x-1}{x+1}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2x}{x-1}}=e^{-2}$$

۱۰۸ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}(e^{2x}+x-1)}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}e^{\frac{2e^{2x}+1}{1}}=e^{3}$$

۱۰۹ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\frac{1}{2}x^{2})^{t}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{1}{2}x^{2})^{\frac{1}{x^{4}}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^{4}}{24})^{\frac{1}{x^{4}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^{4}}\cdot\frac{x^{4}}{24}}=e^{\frac{1}{24}}=\sqrt[24]{e}$$

۱۱۰ـ گزینه «۲» عبارت مقابل th^{-1} بایستی بین ۱- و ۱ باشد. بنابراین:

$$-1<tg\pi x<1\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{4}<\pi x<k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow k-\frac{1}{4}<x<k+\frac{1}{4}$$

۱۱۱ـ گزینه «۴»

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}(x-1)}=e$$

۱۱۲ـ گزینه «۱» به ازای $n>m$، همواره $\binom{m}{n}=0$. بنابراین حد خواسته شده برابر صفر است.

۱۱۳ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{3x+1}{3x-1}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{3x-1}}=e^{\frac{2}{3}}$$

۱۱۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|x-[x]|}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|x-[0^{+}]|}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|x-[x]|}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|x-[0^{-}]|}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|x+1|}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{0^{-}}=-\infty$$

۱۱۵ـ گزینه «۱»

۱۱۶ـ گزینه «۴»

$$\lim_{t\to 1^{+}}(1-(t-1)A)^{\frac{2}{t^{2}-1}}=1^{\infty}=\lim_{t\to 1^{+}}e^{\frac{2}{t^{2}-1}\times(-(t-1)A)}=\lim_{t\to 1^{+}}e^{\frac{-2A}{t+1}}=e^{-A}$$

۱۱۷ـ گزینه «۳»

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{1}{x-2}(\frac{x}{2}-1)}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{1}{x-2}(\frac{x-2}{2})}=\sqrt{e}$$

۱۱۸ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^{2}+3}-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+3}}}=2$$

۱۱۹ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^{4}-1)}{x^{2}-1}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 1}\frac{x^{4}-1}{x^{2}-1}=\lim_{x\to 1}(x^{2}+1)=2$$

۱۲۰ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}-2e^{-x}-4x}{x-\sin x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}+2e^{-x}-4}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}-2e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}+2e^{-x}}{\cos x}=4$$

۱۲۱ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{2x}\cdot 3x}=e^{\frac{3}{2}}$$

۱۲۲ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^{20}(3x)^{30}}{(2x)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x)^{30}}{(2x)^{30}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

۱۲۳ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+\frac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+1-\frac{1}{x}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^{2}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}}=\frac{1}{2}$$

۱۲۴ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{x+c}{x-c}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$$

بنابراین $e^{2c}=4$ و یا $2c=Ln4$ بنابراین $c=Ln2$.

۱۲۵ـ گزینه «۲»

$x^{2}-1=0\Rightarrow x=\pm 1$ مجانبهای قائم

وقتی $x\to\pm\infty$، $\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}\sim\frac{x^{2}}{|x|}=\pm x$، بنابراین $y=x+x=2x$ و $y=x-x=0$ نیز مجانبهای تابع می‌باشند.

تست‌های تکمیلی فصل دوم

۱ـ حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{2}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) $\frac{x^2}{2}$

۲ـ در کدامیک از فاصله‌های زیر تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\mathrm{Ln}(x-1)$ پیوسته است؟

۱) $(-2,2]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(1,2]$ ۴) $[1,2]$

۳ـ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{Ln}x}{1-x^2} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ پیوسته است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3}\right)^{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) 0

۵ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{n}\cos n^2-\frac{3n}{6n+1}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) ∞

۷ـ حد عبارت $\lim\limits_{x\to 0}x^n\mathrm{Ln}x$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) 1 ۳) -1 ۴) 0

۸ـ هم‌ارز عبارت $\sqrt[3]{1+x}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{3}x$ ۲) $1-\frac{1}{2}x$ ۳) $1+\frac{1}{3}x$ ۴) $1+\frac{1}{2}x$

۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۱۰ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{k\sin ax}=\frac{1}{4}$ آنگاه مقدار ak کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 2 ۴) 1

۱۱ـ مقدار $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{x^2-4}{x+2}\mathrm{sgn}(x+2)$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۱۲ـ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}$ برابر است با :

۱) صفر ۳) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+\infty$

۱۳ـ به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\frac{1}{ax^2+3x+1}$ روی R پیوسته است؟

۱) $a<\frac{9}{4}$ ۲) $a\leq\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}<a$ ۴) $\frac{9}{4}\leq a$

۱۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot gx}{x}\right)$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۵ـ حاصل $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x+4}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{2x}}$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\sqrt{2}$

۱۶ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{6n+3}+\sqrt[n]{n^8}\right)$ کدام است؟

۱) 6 ۲) 2 ۳) ∞ ۴) 3

۱۷ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\infty$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۸ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

۱۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{3^x-1}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}3$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{\mathrm{Ln}3}$ ۴) ∞

۲۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(a+x)-\mathrm{Ln}a}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $-a$ ۳) 0 ۴) 1

۲۱ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}$ کدام است؟

۱) e^2 ۲) 0 ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۲۲ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$ کدام است؟

۱) -24 ۲) 24 ۳) 0 ۴) 1

۲۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 2 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۴ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin 4x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) 0

۲۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(2-\cos 2x)}{\mathrm{Ln}^2(\sin 3x+1)}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 0 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۲۶ـ نقاط انفصال تابع با ضابطه $f(x)=\arccos\frac{1}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ۲) $x\neq 2n\pi$ ۳) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ۴) $x=2n\pi$

۲۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\operatorname{Ln}x}-\frac{1}{x-1}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) -1

۲۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}(\operatorname{Ln}\cot gx)^{tgx}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۲۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) Lna ۲) 0 ۳) $-\infty$ ۴) e^{-a}

۳۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $-\frac{1}{24}$

۳۱ـ مجانب مایل تابع $f(x)=2x-\arccos\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) $y=2x+\frac{\pi}{2}$ ۲) $y=x+\frac{\pi}{2}$ ۳) $y=2x-\frac{\pi}{2}$ ۴) $y=x-\frac{\pi}{2}$

۳۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to3}\left[\log_a\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right]$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 6 ۳) $\log_a^6$ ۴) $\log_a^3$

۳۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) ∞ ۴) 0

۳۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)}$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۴) 0

۳۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ کدام است ؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) ∞ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ کدام است؟

۱) $e^{\cot ga}$ ۲) 1 ۳) e^a ۴) 0

۳۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$ زکدام است ؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -1 ۴) حد ندارد .

۳۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{1}{2}}$ ۲) 1 ۳) $e^{-\frac{1}{2}}$ ۴) e

۳۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{tg2x}$ کدام است؟

۱) e ۲) 1 ۳) e^{-1} ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

۴۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x}\operatorname{Ln}(1+a\sin x)$ کدام است؟

۱) a ۲) 1 ۳) 0 ۴) ∞

۴۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\operatorname{Ln}(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{3}$

۴۲ـ منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ دارای ... است.

۱) دو مجانب افقی ۲) دو مجانب افقی و یک قائم

۳) دو مجانب افقی و یک مایل ۴) یک مجانب مایل و یک مجانب قائم

۴۳ـ حد چپ تابع $f(x)=\frac{(3-\lfloor x\rfloor)\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه‌ی $x=3$ ، کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) $-\infty$

۴۴ـ در مورد تابع $f(x)=3+\frac{1}{1+7^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}}$ وقتی $x\to3$ کدام گزاره صحیح است؟

۱) حد چپ تابع برابر ۴ می‌باشد. ۲) حد راست تابع برابر ۳ می‌باشد.

۳) تابع دارای حد چپ و راست مساوی می‌باشد. ۴) تابع پیوسته نیست.

۴۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x^2}{\operatorname{Ln}\cos(2x^2-x)}$ کدام است ؟

۱) 6 ۲) 0 ۳) -6 ۴) 1

۴۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\left[\operatorname{Ln}(1+\sin^2x)\cot g(\operatorname{Ln}^2(1+x))\right]$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۴۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(tg\,x)^{\cot g\,x}$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۴۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) حد وجود ندارد. ۴) 1

۴۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\operatorname{Ln}(e^x-1)}}$ کدام است ؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۵۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$ کدام است؟

۱) $\ln a-1$ ۲) $\ln a+1$ ۳) a ۴) $a+1$

۵۱ـ مجانبهای مایل تابع $y=\sqrt{1+x^2}+2x$ کدام است؟

۱) $y=x, y=3x$ ۲) فقط $y=3x$ ۳) فقط $y=x$ ۴) $y=3x, y=-x$

۵۲ـ مجانب مایل تابع $y=\dfrac{3x}{2}\ln(e-\dfrac{1}{3x})$ کدام است؟

۱) $y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{2e}$ ۲) $y=\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2e}$ ۳) $y=\dfrac{3x}{2}$ ۴) $y=3x-e$

۵۳ـ مجانب های مایل تابع $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$ کدام است؟

۱) فقط $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ ۲) فقط $y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$ ۳) هردوگزینه ۱ و ۲ ۴) مجانب مایل ندارد

۵۴ـ درمورد تابع $y=\ln(4-x^2)$ کدام گزاره صحیح است؟

۱) تابع مجانب ندارد ۲) تابع دارای دومجانب است ۳) تابع دارای سه مجانب است ۴) تابع دارای یک مجانب است

۵۵ـ مجانب مایل تابع $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$ کدام است؟

۱) $y=-x$ ۲) $y=-x+1$ ۳) $y=x$ ۴) $y=x+1$

۵۶ـ حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\dfrac{\pi}{2}$ ۴) حد وجود ندارد.

۵۷ـ معادله $x2^x-1=0$ در فاصله $[0,1]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیشمار ۴) ۰

۵۸ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\,\mathrm{Arctg}\,x^2-\pi}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) 0 ۴) ∞

۵۹ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cot\ln^2(1+x)]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ∞ ۴) ۲

۶۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $\dfrac{1}{2}$

۶۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) $\dfrac{1}{3}$

۶۲ـ تابع $y=xe^{\frac{1}{x}}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۳ـ تابع $y=\sqrt{x^2+1}\ \sin\dfrac{1}{x}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۴ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to 10^-}\dfrac{[x^2]-x^2}{[x]-x}$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۶۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cosh x^2+\sinh x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

۱) e ۲) e^2 ۳) $2e$ ۴) $\dfrac{e}{2}$

۶۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) e ۴) حد وجود ندارد.

۶۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{-x}{\sin x}]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) حد وجود ندارد.

۶۸ـ با فرض $x>1$، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x}{x+1}$ ۲) $\dfrac{x}{x-1}$ ۳) $\dfrac{x(x+1)}{2}$ ۴) $\dfrac{x(x-1)}{2}$

۶۹ـ اگر x عددی گنگ باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\{\lim\limits_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m\}$ ؟

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) حد وجود ندارد.

۷۰ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{m-n}{mn}$ ۲) $\dfrac{mn}{m-n}$ ۳) $\dfrac{m-n}{2}$ ۴) $\dfrac{n-m}{2}$

۷۱ـ اگر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته و یک به یک و $f(0)<f(1)$، آنگاه به ازای $0<x<1$:

۱) $f(x)>f(1)$ ۲) $f(x)<f(1)$ ۳) $f(x)<f(0)$ ۴) $f(x)>f(0)$

۷۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x+\frac{1}{2}]}{x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) موجود نیست. ۴) ۲

۷۳ـ اگر $f(x)=\ln x$، حاصل $\lim\limits_{m\to 0}[\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{f(2+m+n)-f(2+m)-f(2+n)+f(2)}{mn}]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) $\dfrac{-1}{2}$ ۳) $\dfrac{-1}{4}$ ۴) ۱

۷۴ـ تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin Q\\ \dfrac{1}{m+n} & x=\dfrac{m}{n}\end{cases}$ در $(0,1)$ مفروض است، این تابع در کجا پیوسته است؟

۱) تنها در اعداد اصم ۲) تنها در اعداد گویا ۳) تنها در صفر ۴) ϕ

۷۵ـ اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $f(x)-x=0$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.
۲) $f(x)-x=0$ حداکثر یک ریشه در $[a,b]$ دارد.
۳) $f(x)-x=0$ در $[a,b]$ ریشه ندارد.
۴) $f(x)-x=0$ بیشمار ریشه در $[a,b]$ دارد.

۷۶ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1+x)}{x}$ برابر است با:

۱) $\log_5 e$ ۲) $\log_e^5$ ۳) ۱ ۴) ۰

۷۷ـ حد $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) حد وجود ندارد.

۷۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\cot g^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e^2}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) e

۷۹ـ اگر تابع f زوج و g فرد، تابع $(f(x))^{g(x)}$ در $x=0$ پیوسته باشد. آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^{g(x)}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) e

۸۰ـ حد عبارت $(e^x - x)^{\frac{1}{x^2}}$ وقتی $x \to 0$ برابر کدام است؟

۱) e^2 ۲) 2 ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸۱ـ تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x) = \frac{x}{1-e^{tgx}}$ و $f(0) = -1$ در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۲ـ اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، کدامیک از روابط زیر وجود لااقل یک ریشه را برای f تضمین می‌کند؟

۱) $f(a), f(b) < 0$ ۲) $f(a) > 0, f(b) < 0$ ۳) $f(a), f(b) > 0$ ۴) هیچکدام

۸۳ـ اگر $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ و $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ ، نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند مجانب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۸۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}$:

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۸۵ـ قسمت اصلی بی‌نهایت کوچک $y = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}$ وقتی $x \to 0$ برابر است با:

۱) $\frac{-x^2}{3}$ ۲) $\frac{x^2}{3}$ ۳) $\frac{-x^2}{2}$ ۴) $\frac{x^2}{2}$

۸۶ـ تابع $f(x) = (x-1)|x|$ در فاصله $[0, 2]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

۸۸ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} tg^n (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})$ کدام است؟

۱) 1 ۲) e ۳) 0 ۴) ∞

۸۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) e ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e^2

۹۰ـ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $y = |\sin^2 x|$ در فاصله (۲ و ۲-) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محبت نردبان رفعت است. «حضرت علی (ع)»

محبت را فراموش نکنید و آن را ناچیز مشمارید. «افلاطون»

مدرسان شریف

فصل سوم

« مشتق و کاربرد مشتق »

تعریف مشتق در یک نقطه

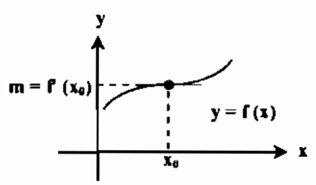
فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ روی فاصله (b و a) معین و در نقطه $x_0 \in (a,b)$ پیوسته باشد، تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد، این حد را که با $f'(x_0)$ نمایش می دهیم، مشتق تابع f(x) در نقطه x_0 است .

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad (1)$$

عبارت بالا را بصورت زیر نیز نشان می‌دهند :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad (2)$$

تعبیر هندسی مشتق :



اگر $M(x_0, f(x_0))$ یک نقطه روی منحنی $y = f(x)$ باشد ، در این صورت $m = f'(x_0)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه x_0 میباشد ومعادله خط مماس بصورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ است .

تذکر ۱: در محاسبه بعضی حدود می‌توان با استفاده از تعریف مشتق حد را محاسبه کرد و معمولاً در اینگونه مسائل و یا در مواقعی که محاسبه مشتق از روی فرمولها ممکن نباشد از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم .

مثال ۱: مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{6})}{x}$ برابر است با :

۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به تعریف مشتق حد فوق، مشتق تابع $f(x) = \cos(x+\frac{\pi}{6})$ در نقطه $x_0 = 0$ می‌باشد لذا داریم :

$$f(x) = \cos(x+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow f'(0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۲ : مقدار $A = \lim\limits_{h\to 0} \frac{Arctg(x+h) - Arctgx}{h}$ برابر است با :

۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به تعریف مشتق حد فوق، مشتق تابع $f(x) = Arctgx$ در نقطه $x_0 = x$ می‌باشد. لذا داریم :

$$A = f'(x) = (Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

مثال ۳: اگر $f(x)=x\,tgx$ باشد مقدار حد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $1-\dfrac{\pi}{4}$ ۳) $1+\dfrac{\pi}{4}$ ۴) $1+\dfrac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» عبارت حد فوق در واقع تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=\dfrac{\pi}{4}$ است :

$$f(x)=x\,tgx \Rightarrow f'(x)=tgx+(1+tg^2x)x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=tg\frac{\pi}{4}+(1+tg^2\frac{\pi}{4})\frac{\pi}{4}=1+\frac{\pi}{2}$$

تذکر ۲: اگر $b\in R$ و a باشند و تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{b}=(a-b)f'(x_0)}$$

تذکر ۳: وجود حد فوق، مشتق‌پذیری f را در x_0 نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۴: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، آنگاه مقدار $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) 2

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این تست $a=3$ و $b=-1$ می‌باشد:

$$a-b=3-(-1)=4 \Rightarrow A=4f'(2)\ ,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow A=4\times f'(2)=4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

توضیح: البته با استفاده از قاعده هوپیتال نیز حدود فوق قابل محاسبه هستند.

مشتق چپ و راست

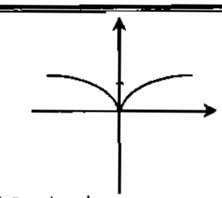
الف) تابع f در $x=x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد : $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب) تابع f در $x=x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد : $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ بوده و این دو مشتق با هم مساوی باشند، گوئیم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است (عکس قضیه فوق نیز صادق است .) $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$

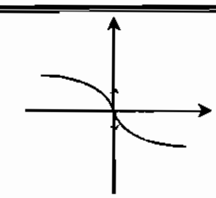
نقطه بازگشت : هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته و مشتقات چپ و راست در x_0 نامتناهی ($-\infty$ یا $+\infty$) و با علامت مخالف باشند، نقطه‌ای بطول x_0 را یک نقطه بازگشت تابع می‌گوئیم، در این نقطه دو نیم مماس چپ و راست برهم منطبق و موازی محور yها می‌باشند.

$y=\sqrt{|x|}$



$x=0$ برای تابع نقطه بازگشت می‌باشد.

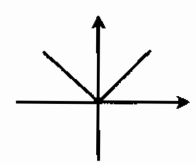
$y=\begin{cases}-\sqrt{x} & x\ge 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$



$x=0$ برای تابع نقطه بازگشت می‌باشد.

تذکر ۴: اگر هر دو مشتق چپ و راست برابر $+\infty$ یا $-\infty$ (یا هر دو مشتق هم علامت باشند) گردد آنگاه نقطه x_0 متعلق به دامنه نقطه عطف تابع خواهد بود.

نقطه زاویه‌دار : تفاوت بین نقطه زاویه دار و نقطه بازگشت در این است که در این نقطه حداقل یکی از مشتقات چپ و راست متناهی است، در هر صورت در این نقاط در صورت وجود مشتق چپ و راست متناهی، با هم برابر نمی‌باشند.
برای مثال نقطه $x=0$ نقطه زاویه‌دار تابع $y=|x|$ می‌باشد.



رابطه بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ دارای مشتق متناهی باشد ، آنگاه $f(x)$ در x_0 پیوسته است . البته پیوستگی در یک نقطه شرط **لازم** برای مشتق پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی باشد، بعبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نمیباشد . یعنی اگرتابعی در نقطه x_0 پیوسته باشد ، دلیل بر مشتق پذیری تابع در نقطه x_0 **نخواهد بود**. برای مثال تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست .

مثال ۵: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+a & , & x\le 1\\ b\sqrt[3]{x} & , & x>1\end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، مقدار $\dfrac{2b-a}{2}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 0

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است لذا پیوسته نیز خواهد بود در نتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\to 1+a=b \qquad (1)$$

و چون تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است لذا مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند لذا خواهیم داشت :

$$f'(x)=\begin{cases}1 & , & x\le 1\\ \dfrac{b}{3\sqrt[3]{x^2}} & , & x>1\end{cases} \Rightarrow \frac{b}{3}=1 \Rightarrow b=3 \xrightarrow{(1)} a=2 \Rightarrow \frac{2b-a}{2}=2$$

مثال ۶ : تابع $f(x)=\begin{cases}Ln(1+e^{\frac{-1}{x^2}}) & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$:

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است. ۲) نه پیوسته و نه مشتق‌پذیر است.
۳) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. ۴) پیوسته نیست ولی مشتق‌پذیر است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا پیوستگی f را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}Ln(1+e^{\frac{-1}{x^2}})=Ln(1+e^{-\infty})=Ln1=0\ ,\ f(0)=0$$

بنابراین f در $x=0$ پیوسته است. حال مشتق‌پذیری f را در $x=0$ به کمک تعریف مشتق بررسی می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+e^{\frac{-1}{x^2}})}{x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}=0$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیز می‌باشد.

رابطه بین مشتق چپ یا راست و پیوستگی <u>تابع مشتق</u> :

اگر حد $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ وجود داشته باشد ، آنگاه $f'(x_0^+)$ وجود دارد و $f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ است در این صورت می‌گوئیم تابع مشتق راست متناهی یا نامتناهی در x_0 دارد در نتیجه دارای پیوستگی راست نیز می باشد (تابع مشتق) و اگر حد $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ وجود داشته باشد آنگاه $f'(x_0^-)$ وجود دارد و گوئیم تابع، دارای مشتق چپ متناهی یا نامتناهی است و تابع مشتق دارای پیوستگی چپ است.

مثال ۷ : پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را بررسی کنید .

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم، توجه شود حد چپ و حد راست هر دو از ضابطه اول تابع محاسبه می‌شوند:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0\times\sin(\frac{1}{0^+})=0\times\underbrace{\sin\infty}_{\text{عددی بین ۱ و ۱-}}=0$$

حد چپ تابع نیز دقیقاً با مقدار فوق و همچنین با مقدار تابع یعنی $f(0)$ برابر می‌باشد، پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است، حال مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

ملاحظه می‌گردد که مقدار حد فوق عدد مشخصی نیست، پس تابع در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۸ : در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ کدام جمله صحیح نیست؟

۱) تابع در نقطه $x_0=0$ پیوستگی دارد.
۲) مقدار تابع مشتق در $x_0=0$ مشخص است.
۳) نقطه $x_0=0$ نقطه بازگشت نیست.
۴) تابع مشتق در صفر پیوسته می‌باشد.

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2\sin\frac{1}{x}=0\times \underbrace{\sin(\infty)}_{-1\le \text{عدد} \le 1}=0$$

حد چپ تابع فوق نیز با حد راست و با مقدار تابع برابر صفر می‌باشد، پس تابع در نقطه $x=0$ پیوستگی دارد. (گزینه ۱ صحیح است.)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

مقدار مشتق تابع فوق در نقطه $x_0=0$ برابر صفر است لذا $x_0=0$ نقطه بازگشت تابع نیز نمی‌تواند باشد. (گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح هستند.)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

لذا گزینه۴ پاسخ مورد نظر است به راحتی ملاحظه می‌گردد مطابق مسئله قبل مقادیر حدود چپ و راست تابع مشتق مشخص نیست و لذا تابع مشتق در نقطه $x_0=0$ پیوسته نیست.

نکته ۱ : تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^n\sin^m\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$ در نظر بگیرید به ازای هر عدد طبیعی m و n شرایط زیر را خواهیم داشت :

۱ـ تابع به ازای تمام مقادیر m و n در تمام نقاط پیوسته است.
۲ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n\ge 2$ تابع در کلیه نقاط مشتق داشته و مشتق آن در نقطه $x=0$ برابر صفر است.
۳ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n<2$ باشد تابع در کلیه نقاط به جز نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر می‌باشد و تابع مشتق آن در صفر ناپیوسته است.
۴ـ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n\ge 3$ باشد تابع در کلیه نقاط مشتق‌پذیر بوده و همچنین تابع مشتق نیز پیوسته می‌باشد.

مثال ۹ : در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ، f............

۱) در همه جا مشتق‌پذیر است.
۲) در صفر پیوسته نیست.
۳) در همه جا پیوسته است ولی در صفر مشتق‌پذیر نیست.
۴) در صفر مشتق‌پذیر و $f'(0)=1$ است.

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به بند ۲ نکته فوق ($n=2$) تابع در کلیه نقاط مشتق‌پذیر می‌باشد.

قواعد مشتق گیری

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $y=x \Rightarrow y'=1$
۲) $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$
۳) $y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$
$y=c \Rightarrow y'=0 \quad (c\in R)$

C عدد ثابت است و مشتق عدد ثابت همواره برابر صفر است.

خلاصه قواعد مشتق‌گیری : (در توابع زیر u , v توابعی مشتق پذیر برحسب x است)

مشتق مثال مربوطه	مثال مربوطه	مشتق تابع در حالت کلی	تابع در حالت کلی
$y'=4(5x^2+3x+1)^3(10x+3)$	$y=(5x^2+3x+1)^4$	$y'=nu^{n-1}.u'$	$y=u^n$
$y'=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}=\frac{5}{6.\sqrt[6]{x}}$	$y=x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{x}$	$y'=\frac{mu'}{n.\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\sqrt[n]{u^m}$

$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin x^2$	$y'=2x\cos x^2$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos 2x$	$y'=-2\sin 2x$
$y=tgu$	$y'=u'(1+tg^2u)=\frac{u'}{\cos^2 u}$	$y=tgx^2$	$y'=(2x)(1+tg^2x^2)$
$y=\cot gu$	$y'=-u'(1+\cot g^2u)=-\frac{u'}{\sin^2 u}$	$y=\cot g3x$	$y'=-3(1+\cot g^2 3x)$
$y=e^u$	$y'=u'.e^u$	$y=-2e^{x^2-1}$	$y'=-2(2x)e^{x^2-1}=-4xe^{x^2-1}$
$y=a^u$	$y'=u'.a^u.Lna$ $(a>0)$	$y=3^{tgx}$	$y'=(1+tg^2x)(3^{tgx})Ln3$
$y=Log_a^u$	$y'=\frac{u'}{u}Log_a^e\ (u>0)$	$y=Log_3^x$	$y'=\frac{1}{x}Log_3^e$
$y=Lnu$	$y'=\frac{u'}{u}$	$y=Ln\cos x$	$y'=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tgx$
$y=ArcSinu$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\ \lvert u\rvert<1$	$y=ArcSinx$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=ArcCosu$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=Arc\cos x^2$	$y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$y=Arctgu$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$	$y=Arctg(x^2-1)$	$y'=\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$y=Arc\cot gu$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$	$y=Arc\cot g\sqrt{x}$	$y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
$y=\sinh u$	$y'=u'\cosh u$	$y=\sinh 5x$	$y'=5\cosh 5x$
$y=\cosh u$	$y'=u'\sinh u$	$y=\cosh\frac{x^3}{3}$	$y'=x^2.\sinh\frac{x^3}{3}$
$y=tghu$	$y'=u'(1-tgh^2u)$	$y=tgh3x$	$y'=3(1-tgh^2 3x)$
$y=\cot ghu$	$y'=u'(1-\cot gh^2u)$	$y=\cot ghx^2$	$y'=2x(1-\cot gh^2x^2)$
$y'=Arc\sinh u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$y=arc\sinh x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y=Arc\cosh x$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$y=arc\cosh x^2$	$y'=\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$y=Arctghu$ $(\lvert u\rvert>1)$	$y'=\frac{u'}{1-u^2}$	$y=Arctgh3x$	$y'=\frac{3}{1-9x^2}$
$y=Arc\cot ghu$ $(\lvert u\rvert<1)$	$y'=\frac{u'}{1-u^2}$	$y=Arc\cot ghx^3$	$y'=\frac{3x^2}{1-x^6}$
$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=x\cos x$	$y'=\cos x-x\sin x$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$y=\frac{e^x}{x^3}$	$y'=\frac{e^x.x^3-3x^2.e^x}{x^6}$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=tgx-(x-1)$	$y'=1+tg^2x-1=tg^2x$

توضیح: مثالهای بالا با استفاده از قواعد، مستقیماً بدست آمد در نتیجه اکثر روابط بالا باید به خاطر سپرده شود، در بعضی موارد می‌توان با استفاده از تلفیق روابط و نکات دیگر مشتق را محاسبه نمود، به مثالهای زیر توجه کنید :

1) $y=\sin^3x \Rightarrow y'=(3\sin^2x)(\cos x)$

2) $y=(\ln x)^2 \Rightarrow y'=(2\ln x)(\frac{1}{x})$

3) $y=\ln(\sin x) \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot gx$

4) $y=\sin(e^x) \Rightarrow y'=e^x.\cos e^x$

5) $y=tg^4x^2 \Rightarrow y'=(4tg^3x^2)(1+tg^2x^2)(2x)$

6) $y=\operatorname{Arctg}(\sin x) \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{1+\sin^2x}$

7) $y=\sqrt{\cos^3 x} \Rightarrow y'=-\frac{3}{2}\sin x.\sqrt{\cos x}$

8) $y=\sin^2(\operatorname{Arctg}x) \Rightarrow y'=2\sin(\operatorname{Arctg}x)\frac{\cos(\operatorname{Arctg}x)}{1+x^2}$

9) $y=\sqrt{\sin(e^x)^2} \Rightarrow y'=\frac{2.e^{2x}.\cos(e^{2x})}{2\sqrt{\sin(e^{2x})}}$

10) $y=\ln^5tg3x \Rightarrow y'=5\ln^4(tg3x)\times\frac{3(1+tg^23x)}{tg3x}=\frac{15\ln^4(tg3x)[1+tg^23x]}{tg3x}$

11) $y=\arccos\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{1-x})}$

12) $y=\sinh(\frac{x}{2})+\cosh(\frac{x}{2}) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(\cosh\frac{x}{2}+\sinh\frac{x}{2})$

13) $y=e^x(\cos x+\sin x) \Rightarrow y'=e^x(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)e^x=2\cos xe^x$

14) $y=\sin^3 4x \Rightarrow y'=12\sin^2 4x\cos 4x$

15) $y=(3-2\sin x)^5 \Rightarrow y'=5(3-2\sin x)^4(-2\cos x)=-10\cos x(3-2\sin x)^4$

مثال ۱۰ : مشتق $y=\sin^2(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}x^2)$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

پاسخ : گزینه «۲» اگر بخواهیم مستقیماً از تابع مشتق بگیریم، بسیار طولانی و وقت‌گیر خواهد بود، لذا ابتدا تابع را ساده می‌کنیم. بدین منظور از رابطه $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$y=\sin^2(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}x^2)=\frac{1-\cos(\operatorname{Arccos}x^2)}{2}=\frac{1-x^2}{2}\Rightarrow y'=-x\Rightarrow y'(\frac{1}{2})=\frac{-1}{2}$$

مشتق گیری توابع ضمنی

اگر y تابعی از x باشد و داشته باشیم $f(x\,,\,y)=0$ آنگاه :

$$y'_x=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=-\frac{\text{مشتق f نسبت به x با فرض y بعنوان عدد ثابت}}{\text{مشتق f نسبت به y با فرض x بعنوان عدد ثابت}}$$

به مثالهای زیر توجه کنید :

1) $y-x^2y+xy=1 \Rightarrow y'=-\frac{(-2xy)+y}{1-x^2+x}=\frac{y-2xy}{x^2-x-1}$

2) $y+\sin(xy)+\cos(xy)=0$

$$\begin{cases} f'_x=y\cos xy-y\sin xy \\ f'_y=1+x\cos xy-x\sin xy \end{cases}\Rightarrow y'_x=-\frac{y\cos xy-y\sin xy}{1+x\cos xy-x\sin xy}$$

مثال ۱۱ : با فرض اینکه y تابع x است مشتق تابع $\operatorname{Arctan}y-y+x=0$ کدام است؟

۱) $y'=1+y^2$ ۲) $y'=1+y^{-2}$ ۳) $y'=1-y^{+2}$ ۴) $y'=1-y^{-2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y'=-\frac{1}{\frac{1}{1+y^2}-1}=\frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}}=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1\Rightarrow y'=1+y^{-2}$$

مثال ۱۲ : اگر $e^x-e^y-y+x=0$ باشد، y''_{xx} را بدست آورید.

پاسخ : به جای استفاده از فرمول، مستقیماً از تابع داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$e^x-y'e^y-y'+1=0\Rightarrow y'=\frac{e^x+1}{e^y+1}\Rightarrow y''=\frac{e^x(e^y+1)-y'e^y(e^x+1)}{(e^y+1)^2}=\frac{e^{x+y}+e^x-(\frac{e^x+1}{e^y+1})\times e^y(e^x+1)}{(e^y+1)^2}$$

$$=\frac{(e^y+1)(e^{x+y}+e^x)-e^y(e^x+1)^2}{(e^y+1)^3}=\frac{e^{x+2y}-e^{y+2x}+e^x-e^y}{(e^y+1)^3}$$

مثال ۱۳ : اگر $x^y=y^x$، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{y\ln x-x}{x\ln y-y}$ ۲) $\frac{y\ln y-y}{y\ln x-x}$ ۳) $\frac{(x\ln y-y)y}{(y\ln x-x)x}$ ۴) $\frac{(y\ln x-x)y}{(x\ln y-y)x}$

پاسخ : گزینه «۳» برای ساده شدن عمل مشتق‌گیری بهتر است ابتدا از طرفین رابطه Ln بگیریم.

$$y\ln x=x\ln y\Rightarrow y\ln x-x\ln y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{y}{x}-\ln y}{\ln x-\frac{x}{y}}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$$

مشتق تابع $f[g(x)]$

$$\left(f[g(x)]\right)'=g'(x)f'(g(x))$$

نکته ۲ : در واقع رابطه بالا همان مشتق تابع$\operatorname{fog}(x)$ نیز می‌باشد.

تذکر ۵: دقت شود که مشتق بالا با $f'(g(x))$ اشتباه نشود.

مثال ۱۴ : اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و g در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، $(\operatorname{gof})'(0)$ کدام است؟

۱) $f'(2)$ ۲) 2 ۳) $g'(2)$ ۴) 0

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$(\operatorname{gof})'(0)=f'(0)g'(f(0))=f'(0)g'(2)$$

از طرفی $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ و بنابراین $f'(0)=0$. در نتیجه $(\operatorname{gof})'(0)=0$.

مثال ۱۵ : اگر $\operatorname{fog}(x)=x, f'(x)=\frac{1}{x}$ باشد، $g'(x)$ را حساب کنید؟

پاسخ :

$$[f(g(x))]'=1\Rightarrow g'(x).f'(g(x))=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'[g(x)]=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow g'(x).\frac{1}{g(x)}=1\Rightarrow g'(x)=g(x)$$

مثال ۱۶ : اگر $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}=-\frac{2}{3}$ باشد مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+2$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به تعریف مشتق حد فوق مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ می‌باشد و یا $f'(2)=-\frac{2}{3}$ لذا داریم :

$$f'(2)=-\frac{2}{3}\to A=\left[f(\sqrt{1-3x})\right]'=\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}f'(\sqrt{1-3x})\xrightarrow{x=-1}A=\frac{-3}{2\sqrt{4}}f'(2)=\frac{-3}{4}\times(-\frac{2}{3})=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۷ : اگر f بر R دو مرتبه مشتق‌پذیر باشد و $g(x)=f(xf(x))$، آنگاه $g''(0)$ کدام است؟

۱) $2(f''(0))^2f(0)+f'(0)$ ۲) $2f'(0)f(0)+(f''(0))^2$ ۳) $f''(0)(f'(0))^2+2f(0)$ ۴) $f''(0)(f(0))^2+2(f'(0))^2$

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$g(x)=f(xf(x)) \Rightarrow g'(x)=(f(x)+xf'(x))f'(xf(x))$$

$$\Rightarrow g''(x)=(f'(x)+f'(x)+xf''(x))f'(xf(x))+(f(x)+xf'(x))\times(f(x)+xf'(x))f''(xf(x))$$

با جایگزینی $x=0$ در رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$g''(0)=2(f'(0))^2+(f(0))^2f''(0)$$

مشتق توابع شامل قدر مطلق

$$y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u'.u}{|u|} \leftarrow (u\neq 0 \text{ شرط})$$

مثال ۱۸ : مشتق تابع $y=|x^3-2x|$ در نقطه‌ای به طول $x_0=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

☑ پاسخ : گزینه «۳»

روش اول:

$$y'=\frac{(3x^2-2)(x^3-2x)}{|x^3-2x|}=\frac{(3-2)(1-2)}{|1-2|}=\frac{(+1)(-1)}{|-1|}=-1$$

روش دوم:

$$y=|x^3-2x| \xrightarrow{x=1, y<0} y=2x-x^3 \Rightarrow y'=2-3x^2=-1$$

در این روش ابتدا با توجه به $x_0=1$ مقدار داخل قدر مطلق را تعیین علامت و از داخل قدر مطلق بیرون می‌آوریم و سپس عمل مشتق گیری را انجام دادیم. ملاحظه می‌شود که در مشتق‌گیری از توابع قدرمطلق مانند انتگرال‌گیری بهتر است که ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را معین کرده و سپس نماد قدرمطلق را حذف کنیم .

مثال ۱۹ : مشتق تابع $y=|1-x|+|x+2|$ بربازه $(-2 , 1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) مشتق ندارد

☑ پاسخ : گزینه «۱»

$$x\in(-2,1) \Rightarrow \begin{cases}1-x>0\\ x+2>0\end{cases} \Rightarrow y=1-x+x+2=3 \Rightarrow y'=0$$

مثال ۲۰ : تابع $y=\left|\text{Sin}x+\frac{1}{2}\right|-|\text{Sin}x-1|$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{2}$:

۱) فقط مشتق چپ دارد ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) مشتق پذیر نیست. ۴) مشتق دارد.

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x)=(\text{Sin}x+\frac{1}{2})-(1-\text{Sin}x)=\text{Sin}x-\frac{1}{2}+\text{Sin}x=2\text{Sin}x-\frac{1}{2} \Rightarrow y'=2\cos x \Rightarrow y'\Big|_{\frac{\pi}{2}}=2\times\cos\frac{\pi}{2}=0$$

توابع به فرم $y=|f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده $f(x)=0$ ، مشتق‌پذیر نیستند و به ازای ریشه‌های تکراری مشتق‌پذیر می‌باشند.

مثال ۲۱ : مشتق‌پذیری توابع $y=|x|$ ، $y=|x^2|$ ، $y=|x^3|$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید .

☑ **پاسخ :** با توجه به نکته فوق $x=0$ ریشه ساده تابع $y=|x|$ می‌باشد لذا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد. اما $x=0$ ریشه مرتبه دوم تابع $y=|x^2|$ و ریشه مکرر مرتبه سوم تابع $y=|x^3|$ می‌باشد، لذا هر دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر می‌باشد .

مثال ۲۲ : تابع $y=|x^5+3x+k|$ در نقطه $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست ، مقدار K کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم توابعی به شکل $y=|f(x)|$ در ریشه‌های ساده معادله $f(x)=0$ مشتق‌پذیر نیستند لذا خواهیم داشت :

$$x^5+3x+k=0 \xrightarrow{x=-1} -1-3+k=0 \Rightarrow k=4$$

مثال ۲۳ : تابع $f(x)=|x(x+2)^2(x-3)^3|$ در کدام یک از نقاط زیر مشتق ناپذیر است ؟

۱) $x=-2$ ۲) $x=3$ ۳) $x=0$ ۴) در هر سه نقطه

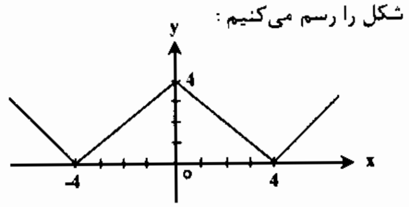
☑ **پاسخ : گزینه «۳»** با توجه به نکته فوق چون $x=0$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است، تابع در این نقطه مشتق ندارد .

نکته ۳ : در مواردی که چند قدرمطلق داخل هم داشته باشیم باید کلیه قدرمطلق‌ها را از داخل به خارج بررسی کنیم و با توجه به نکته فوق نقاطی که در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست را تعیین کنیم .

مثال ۲۴ : تابع $y=||x|-4|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ پاسخ : گزینه «۳» $|x|=0 \Rightarrow x=0$, $|x|=4 \Rightarrow x=\pm4$ برای درک بهتر مطلب شکل را رسم می‌کنیم :



توضیح: با توجه به اینکه در نقاط $x=0$, $x=\pm4$ تابع دارای شکست می‌باشد این نقاط، نقاط زاویه‌دار هستند و می‌دانیم تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نیست .

مثال ۲۵ : تابع f با ضابطه $f(x)=x^2|x|$ در $x=0$

۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد . ۲) مشتق اول و دوم ندارد .
۳) مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد . ۴) مشتق اول و دوم دارد

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & x\geq0\\ -x^3 & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x\geq0\\ -3x^2 & x<0\end{cases}, f''(x)=\begin{cases}6x & x\geq0\\ -6x & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 , f''(0)=0$$

منحنی های پارامتری و مشتق آنها

هرگاه مختصات y,x یک نقطه غیر مشخصی از یک منحنی بر حسب پارامتر دیگری مانند t به وسیله معادلات $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ داده شوند، گوئیم منحنی به صورت پارامتری است. برای مثال $\begin{cases}x=R\text{Sin}t\\ y=R\text{Cos}t\end{cases}$ معادله پارامتری دایره $x^2+y^2=R^2$ است.

مشتق منحنی های پارامتری :

$$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases} \Rightarrow y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

مثال ۲۶ : مشتق منحنی به معادلات پارامتری $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=1+\frac{1}{2}\text{Sin}t\end{cases}$ برابر است با :

۱) $-\cot gt$ ۲) $-\frac{1}{2}\cot gt$ ۳) $\cot gt$ ۴) $\frac{1}{2}\cot gt$

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2}\cos t}{\text{Sin}t}=\frac{1}{2}\cot gt$$

مثال ۲۷ : مشتق دوم منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ ۲) $4t$ ۳) $\frac{4}{3(t^2+1)^3}$ ۴) $\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$

☑ پاسخ : گزینه «۴»

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$

قاعده زنجیره‌ای مشتق

اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ باشند آنگاه مشتق تابع y نسبت به x به فرم زیر تعریف می‌شود :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}}$$

مثال ۲۸ : اگر $y=\sqrt{u^2+u}$ و $u=x^3-3x$ آنگاه y'_x در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{21\sqrt{6}}{4}$ ۲) 0 ۳) $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ ۴) 21

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به اینکه به ازای $x=2$ مقدار u برابر $u=8-6=2$ می‌شود خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}}\times(3x^2-3)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\times2+1}{2\sqrt{6}}\times9=\frac{5\times9}{2\sqrt{6}}=\frac{5\times9\times\sqrt{6}}{2\times6}=\frac{15\sqrt{6}}{4}$$

مشتق مرتبه n ام

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$y=\frac{1}{1-x}\Rightarrow y=(1-x)^{-1}$$
$$y^{(1)}(x)=(-1)(-1)(1-x)^{-2}=(1-x)^{-2}$$
$$y^{(2)}(x)=(-2)(-1)(1-x)^{-3}=2(1-x)^{-3}$$
$$y^{(3)}(x)=2(-3)(-1)(1-x)^{-4}=2\times3(1-x)^{-4}$$
$$y^{(4)}(x)=2.3(-4)(-1)(1-x)^{-5}=2\times3\times4(1-x)^{-5}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x)=2\times3\times4\times\ldots\times n(1-n)^{-(n+1)}=n!(1-x)^{-(n+1)}$$

مثال ۲۹ : مشتق صدم تابع $y=\frac{x^2}{x-1}$ را پیدا کنید؟

$$y=(x+1)+\frac{1}{x-1}\Rightarrow y^{(1)}=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$y^{(2)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$
$$y^{(3)}=\frac{-2(3)}{(x-1)^4}\quad\Rightarrow y^{(100)}=\frac{(-1)^{100}.100!}{(x-1)^{101}}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$$

نکته ۴ : مشتق مرتبه nام تابع $y=\frac{1}{ax+b}$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

نکته ۵: مشتق مرتبه n ام توابع $y=\cos\alpha x,\ y=\sin\alpha x$ به شکل زیر است :

$$\boxed{y=\sin\alpha x\Rightarrow y^{(n)}=\alpha^n\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha x)}\qquad\boxed{y=\cos\alpha x\Rightarrow y^{(n)}=\alpha^n\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha x)}$$

مثال ۳۰ : مشتق مرتبه هشتم تابع $f(x)=\sin 2x$ کدام است؟

۱) $256\cos 2x$ ۲) $256\sin 2x$ ۳) $128\cos 2x$ ۴) $128\sin 2x$

پاسخ : گزینه «۲» $y=\sin 2x\Rightarrow y'=2^8\sin(\frac{8\pi}{2}+2x)=256\sin(4\pi+2x)=256\sin 2x$

مثال ۳۱ : مشتق دهم تابع با ضابطه $f(x)=x\sin x$ کدام است ؟

۱) $x\sin x+10\cos x$ ۲) $10\cos x-x\sin x$ ۳) $10x-x\sin x$ ۴) $\sin x+x\cos x$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مشتقهای ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که مشتق مرتبه دهم برابر با $y=10\cos x-x\sin x$ می‌باشد.

$$y=x\sin x=\begin{cases}y^{(1)}=\sin x+x\cos x\\y^{(2)}=2\cos x-x\sin x\\y^{(3)}=-3\sin x-x\cos x\\y^{(4)}=-4\cos x+x\sin x\end{cases}$$

نکته ۶ : مشتق مرتبه nام تابع با ضابطهٔ $f(x)=(ax+b)^n$ به صورت $\underline{\underline{n!a^n}}$ می‌باشد.

نکته ۷ : مشتق مرتبه n ام تابع $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ به شکل روبرو است: (ثابت کنید) $y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$

فرمول لایب نیتز

اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه nام برحسب x می‌باشند، آنگاه مشتق مرتبه nام uv از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\ldots+\binom{n}{n}u^{(n)}v^{(0)}$$

که به طور خلاصه آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

مثال ۳۲ : مشتق مرتبه دهم $y=(x^2+x+1)e^x$ در $x=0$ کدام است؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۷۳۱ ۳) ۷۱۹ ۴) ۷۲۹

پاسخ : گزینه «۲» قرار می‌دهیم $u=x^2+x+1$ و $v=e^x$، در این صورت:

$$y^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}u^{(k)}v^{(10-k)}=\binom{10}{0}(x^2+x+1)e^x+\binom{10}{1}(2x^2+1)e^x+\binom{10}{2}(6x)e^x+\binom{10}{3}(6)e^x$$
$$\Rightarrow y^{(10)}(0)=1+10+0+720=731$$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

نمودار این گونه توابع که به توابع پله‌ای نیز موسوم هستند، از قطعه‌های موازی محور x ها تشکیل شده است، یعنی شیب آنها صفر و در نتیجه مشتق آنها صفر است (البته در نقاطی که تابع پیوسته است) و در نقاطی که تابع پیوسته نیست، مشتق وجود نخواهد داشت.

نکته ۸ : پس از عبارات بالا می‌توان نتیجه گرفت که معمولاً در نقاط صحیح اگر مشتق‌پذیری سئوال شود، تابع مشتق ندارد، اما در فواصل هر دو عدد صحیح متوالی می‌توان مشتق پذیری را بررسی کرد.

مثال ۳۳ : مشتق پذیری تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ را بررسی کنید.

پاسخ : تابع در هر یک از فواصل $(n, n+1)$ یا به عبارتی دیگر کلیه نقاط مربوط به مجموعه $R-Z$ مشتق پذیر است و مقدار مشتق آن در این فواصل برابر صفر خواهد بود.

مثال ۳۴ : تابع $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ در کدام یک از فواصل زیر مشتق پذیر است؟

۱) $[0,1[$ ۲) $]0,1[$ ۳) $[1,0]$ ۴) $]0,1]$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مطالب گفته شده به ازای $x\in]0,1[$ تابع مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر ۱ می‌باشد.

مثال ۳۵ : مشتق پذیری تابع $f(x)=x^2\left\lfloor x^2 \right\rfloor$ در $x_0=2$ چگونه است ؟

۱) فقط مشتق چپ دارد. ۲) مشتق راست و چپ ندارد. ۳) مشتق موجود نیست. ۴) مشتق دارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$f'(x)=2x^2\left[x^2\right]+0\times x^3=2x^2\left[x^2\right]\Rightarrow f'(2^-)=3\times 4\times 3=36 \qquad \Rightarrow f(2^-)\neq f(2^+)$$
$$f'(2^+)=3\times 4\times 4=48$$

مثال ۳۶ : تابع $f(x)=x^2+x\lfloor x \rfloor$ در نقطه $x_0=0$:

۱) مشتق پذیر نیست. ۲) مشتق پذیر است. ۳) پیوستگی دارد. ۴) نامعین است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» $f'(x)=2x+\lfloor x \rfloor \Rightarrow f'(0^+)=0\ ,\ f'(0^-)=-1\Rightarrow$

نکته ۹: توابعی به فرم $f(x)=(x-\alpha)^n\lfloor x \rfloor$ با شرط $n\geq 2$ در $x=\alpha$ مشتق‌پذیر می‌باشند و در سایر نقاط Z مشتق‌ناپذیر است.

مثال ۳۷ : اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^n\lfloor x \rfloor & ; x\neq 0 \\ \infty & ; x=0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد آنگاه :

۱) $n\geq 1$ ۲) $n\in N, n\geq 2$ ۳) n هر چه باشد ۴) $n\in R, n\neq 0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» به ازای $n=1$ تابع مشتق ناپذیر خواهد بود پس فقط گزینه ۲ می تواند صحیح باشد .

مشتق تابع معکوس

در بعضی مسائل ضابطه تابع داده می‌شود و مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای مورد سوال قرار می‌گیرد، اما به دست آوردن ضابطه تابع معکوس ممکن است کار دشواری باشد، لذا با استفاده از توضیحات زیر می‌توانیم به راحتی مشتق تابع معکوس را محاسبه کنیم:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=b$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x=b$ (طول روی تابع معکوس و عرض روی تابع اصلی) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boxed{(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}}$$

مثال ۳۸ : شیب خط مماس بر تابع معکوس $f(x)=x^3+x-2$ در نقطه‌ای به طول صفر روی تابع معکوس کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در این تست $b=0$ می‌باشد لذا باید با توجه به رابطه $f(a)=b$ مقدار a را به دست آوریم:

$$f(a)=0\Rightarrow a^3+a-2=0\Rightarrow a=1$$
$$f(x)=x^3+x-2\Rightarrow f'(x)=3x^2+1\Rightarrow f'(a)=3a^2+1\xrightarrow{a=1} f'(1)=3\times(1)^2+1=4$$
$$m=(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

مثال ۳۹ : اگر $f(x)=x^3+x^2$ باشد، مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به عرض (۲) واقع بر آن چقدر است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) 12 ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) 16

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» توجه شود چون نقطه‌ای به عرض (۲) روی تابع معکوس است، لذا $x=2$ طول روی تابع اصلی است، لذا داریم:

$$\underset{a}{\underset{\downarrow}{f(2)}}=2^3+2^2=\underset{b}{\underset{\downarrow}{12}}$$

در واقع در این تست $a=2$ و $b=12$ می‌باشد، پس داریم:

$$(f^{-1})'(12)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3(2)^2+2\times 2}=\frac{1}{16}$$

مثال ۴۰ : اگر $y=\frac{e^{2x}+x}{x+1}$ ، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) 3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 4

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» توجه شود همواره $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ می‌باشد، پس با توجه به اینکه محاسبه x برحسب y و سپس مشتق گرفتن از x نسبت به متغیر y سخت است لذا بهتر است $\frac{dy}{dx}$ را به دست آوریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2e^{2x}+1)(x+1)-1\times(e^{2x}+x)}{(x+1)^2}\overset{x=0}{=\!=}\frac{dy}{dx}=2\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$$

مشتق مرتبه دوم تابع معکوس : فرض کنید g وارون تابع f باشد، در این صورت:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\qquad,\qquad g''(f(x))=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$$

مثال ۴۱ : اگر $y=e^x+x$ ، آنگاه x''_{yy} کدام است؟

۱) $\frac{-1}{e^x+x}$ ۲) $\frac{-e^x}{e^x+x}$ ۳) $\frac{-e^x}{(e^x+1)^3}$ ۴) $\frac{-1}{(e^x+1)^3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» منظور از x''_{yy} همان مشتق مرتبه دوم تابع وارون می‌باشد، بنابراین:

$$y=e^x+x\Rightarrow y'=e^x+1\ ,\ y''=e^x\Rightarrow x''_{yy}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$$

نکته ۱۰: اگر دو تابع $y=f(x)$ و $u=g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه:
$$y'_{u(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ۴۲ : مشتق $y=\sin^2 x$ نسبت به $\cos^2 x$ چه مقدار است ؟

روش اول :
$$\left.\begin{array}{l} y=\sin^2 x \\ u=\cos^2 x \end{array}\right\}\Rightarrow y'_{u(x)}=\frac{y'_x}{u'_x}=\frac{2\sin x\cos x}{-2\sin x\cos x}=-1$$

روش دوم : اگر $\cos^2 x$ را بعنوان متغیر فرض کنیم :
$$y=1-\cos^2 x\Rightarrow y'=-1$$

مثال ۴۳ : مشتق تابع $y=2x^9-4x^6+x^3$ را نسبت به x^3 بیابید.

☑ **پاسخ :**
$$y'_{x^3}=\frac{18x^8-24x^5+3x^2}{3x^2}=6x^6-8x^3+1$$

عامل صفر کننده در مشتق

در بعضی توابع که به صورت حاصلضرب چند عامل درهم می‌باشند، اگر مشتق در نقطه‌ای که یکی از عاملها به ازای آن صفر می‌شود را بخواهند آنگاه کافیست فقط از عامل صفر شونده مشتق بگیریم و در بقیه جملات ضرب کنیم و در نهایت طول نقطه را در عبارت حاصل قرار دهیم .

مثال ۴۴ : اگر $f(x)=\frac{x}{2}(2x-2)(3x-2)(x-2)$ باشد، $f'(2)$ کدام است ؟

۱) 8 ۲) 0 ۳) $f(2)$ ۴) -8

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» عامل صفر شونده $(x-2)$ می‌باشد لذا داریم :

$$f'(x)=\frac{x}{2}(2x-2)(3x-2)\times 1+\cdots\Rightarrow f'(2)=\frac{2}{2}(4-2)(6-2)\times 1=8$$

مثال ۴۵ : مشتق تابع $y=\frac{(x^3-1)\cos x}{\sqrt{(x+1)}}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ برابر چه مقداری است ؟

$$y=\frac{x^3-1}{\sqrt{x+1}}\underbrace{\cos x}_{\text{عامل صفرشونده}}\Rightarrow y'=\underbrace{\left(\frac{x^3-1}{\sqrt{x+1}}\right)'}_{\text{نیازی به محاسبه نیست}}\cos x-\sin x\left(\frac{x^3-1}{\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}\right)=\frac{1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}$$

مثال ۴۶: مشتق تابع $y=\frac{(x^2+x+1)\sin x}{x^3-x-1}$ در نقطه $x_0=0$ برابر است با:

۱) ۱-   ۲) ۱   ۳) ۰   ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^3-x-1}\underbrace{\sin x}_{\text{عامل صفر شونده}} \Rightarrow y'=\underbrace{\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-x-1}\right)'\sin x}_{\text{نیازی به محاسبه نیست}}+\cos x\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-x-1}\right) \Rightarrow y'(x_0)=\cos(0)\times\frac{1}{-1}=-1$$

مشتق توابعی به شکل $y=u(x)^{v(x)}$

برای بدست آوردن مشتق اینگونه توابع به شکل زیر عمل می‌کنیم (u , v توابعی بر حسب x هستند)

$$y=u^v \Rightarrow \ln y=\ln u^v \Rightarrow \ln y=v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y}=v'\ln u+v.\frac{u'}{u} \Rightarrow y'=y\left[v'.\ln u+v.\frac{u'}{u}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=u^v.\left[v'.\ln u+\frac{u'.v}{u}\right]}$$

مثال ۴۷: با فرض $y=x^x$ مقدار مشتق این تابع در $x=e$ برابر است با:

۱) e ۲) e^{e-1} ۳) $2e^e$ ۴) e^e

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases}u=x\\u'=1\end{cases}$, $\begin{cases}v=x\\v'=1\end{cases}$ می‌باشند پس داریم: $y'=x^x(\ln x+1)\Rightarrow y'(e)=e^e(\ln e+1)=2e^e$

مثال ۴۸: اگر $y=(\tan x)^{\cos x}$ آنگاه $\frac{1}{y'}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۰   ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با در نظر گرفتن $V=\cos x, U=\text{tg}x$ خواهیم داشت $U'=1+\text{tg}^2x$, $V'=-\sin x$ پس خواهیم داشت:

$$y'=(\text{tg}x)^{\cos x}\left[-\sin x\,\text{Ln}(\text{tg}x)+\frac{(1+\text{tg}^2x)(\cos x)}{\text{tg}x}\right]$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\times\left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{Ln}\left(\text{tg}\frac{\pi}{4}\right)+\frac{(1+\text{tg}^2\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4})}{\text{tg}(\frac{\pi}{4})}\right]=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{y'}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مشتق در فیزیک

در این حالت x و y را می توان مسافت تعریف نموده و x' و y' را سرعت در راستای x و y می‌نامیم، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴۹: متحرکی بر روی نمودار $3y=x-x^2$ حرکت می‌کند درکدام نقطه سرعت متحرک در راستای قائم سه برابر سرعت متحرک در راستای افقی می‌باشد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,\frac{1}{3})$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(\frac{1}{3},0)$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $x(t)$ را جابجائی در راستای قائم در نظر بگیریم آنگاه $x'(t)$ را می‌توان سرعت در راستای قائم در نظر گرفت و به همین ترتیب اگر $y(t)$ را جابجائی در راستای افقی در نظر بگیریم آنگاه $y'(t)$ را می‌توان سرعت در راستای افقی در نظر گرفت:

$$3y=x^2-x \to y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x \ (1) \to y'(t)=\frac{2}{3}x'(t).x-\frac{1}{3}x'(t)$$

$$\Rightarrow y'(t)=\frac{1}{3}x'(t) \Rightarrow \frac{1}{3}x'(t)=\frac{2}{3}x'(t)x-\frac{1}{3}x'(t) \Rightarrow 1=2x-1 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{(1)} y=0$$

پس در نقطه $A(1,0)$ سرعت متحرک در راستای قائم سه برابر سرعت متحرک در راستای افقی می‌باشد.

هزینه نهائی (امور اقتصادی):

مثال ۵۰: اگر برای تولید کتاب، تابع هزینه به شکل $C(x)=3\sqrt[3]{x}+2x$ باشد، اولاً هزینه ۱۰۰۰ کتاب چقدر می شود، ثانیاً هزینه نهائی هزارو یکمین کتاب چقدر می شود؟

پاسخ:

اولاً: $C(1000)=2\times1000+3\times10=2030$

ثانیاً: $C'(x)=2+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow C'(1000)=2+\frac{1}{\sqrt[3]{(1000)^2}}=2/01$

نکاتی در مورد مشتق:

۱) مشتق تابع زوج و مشتق پذیر، تابعی فرد و مشتق یک تابع فرد ومشتق پذیر تابعی زوج است.

مثال ۵۱: اگر $f(x)=x\sin x$ و $g(x)=\log(2x+\sqrt{4x^2+1})$ آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ تابعی زوج است
۲) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ نیز تابعی فرد است
۳) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ تابعی فرد است.
۴) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ نیز تابعی زوج است.

پاسخ: گزینه «۱» $f(x)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است بنابراین مشتق $f(x)$ تابعی فرد و مشتق $g(x)$ تابعی زوج است.

۲) در مشتق گیری ضمنی اگر x تابع و y متغیر باشد داریم: $x'_y=-\frac{f'_y}{f'_x}$

۳) اگر توابع f و g در نقطه x_0 مشتق پذیر نباشند، ممکن است توابع $f+g$, $f.g$, fog در x_0 مشتق پذیر باشند. برای مثال توابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x|$ هیچ کدام در نقطه $x_0=0$ مشتق پذیر نیستند ولی $f.g=x^2$ در $x_0=0$ مشتق دارد.

در حالت کلی می توان گفت اگر یکی از توابع مشتق پذیر و دیگر مشتق ناپذیر باشد، $(f\pm g)$ قطعاً مشتق پذیر نخواهد بود.

۴) اگر f و g هر دو مشتق پذیر باشند، $f.g, f-g, f+g$ نیز مشتق‌پذیرند.

۵) مشتق یک تابع متناوب با دوره تناوب T، متناوب با همان دوره تناوب T می‌باشد.

کاربرد مشتق

• **آهنگ لحظه‌ای تغییر**

با توجه به تعریف مشتق، زمانی که h مقدار کوچکی است: $f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$، وقتی $h=1$ انتخاب شود آنگاه: $\Delta f=f(a+1)-f(a)$ نیز تقریبی از $f'(a)$ خواهد بود، یا به عبارت دیگر $f'(a)$ آهنگ تغییرات f نسبت به متغیر x در نقطه $x=a$ خواهد بود.

• **آهنگ متوسط تغییر**

برای تابع $y=f(x)$ وقتی x از $x=x_1$ به $x=x_2$ تغییر می‌کند، آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

اگر $\Delta x=x_2-x_1$ آنگاه داریم: $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}}$

مثال ۵۲: در تابع با ضابطه $f(t)=2t^2-t$، آهنگ آنی تغییر در لحظه $t=2$، چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t=1$ تا $t=3$ کمتر است؟

پاسخ: برابر یکدیگر خواهند بود

آهنگ آنی تغییر: $f'(t)=4t-1\to f'(2)=4\times2-1=7$

آهنگ متوسط تغییر: $\Delta f=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(2\times9-3)-(2\times1-1)}{2}=7$

مثال ۵۳: سرعت متوسط متحرکی را که تحت رابطه $S=(t^2-5t+2)$ حرکت می‌کند از $t_1=5$ ثانیه تا $t_2=15$ ثانیه حساب کنید.

۱) ۱۵   ۲) ۲۵   ۳) ۱۰   ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}S_1=S(5)=25-5(5)+2=2\\S_2=S(15)=225-75+2=152\end{cases}\Rightarrow \Delta v=\frac{S(15)-S(5)}{15-5}=\frac{150}{10}=15$$

مثال ۵۴ : وقتی شعاع یک حباب کروی با سرعت $0/8\frac{m}{s}$ افزایش یابد در لحظه‌ای که شعاع حباب $1m$ است، آهنگ آنی تغییر حجم چقدر است ؟

☑ پاسخ : $V=\frac{4}{3}\pi.r^3 \to \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\times 0/8=3/2\pi(m^3)$

کمیت‌های وابسته

گاهی دو یا چند متغیر وابسته به یک متغیر دیگر (مانند t، زمان) می‌باشند. با تغییر مقدار t، مقدار متغیرها وابسته نیز تغییر می‌کند و در نتیجه مقدار عبارتی که به این متغیرها وابسته باشد، عوض می‌شود. در این موارد برای به دست آوردن آهنگ تغییر کمیت، از رابطه مربوط به آن نسبت به متغیر t مشتق می‌گیریم.

مثال ۵۵ : حجم یک هرم به نسبت ۳۰ سانتی‌متر مکعب در ثانیه و سطح قاعده آن به نسبت ۵ سانتی‌متر مربع در ثانیه اضافه می‌شود. موقعی که سطح قاعده هرم، ۱۰۰ سانتی‌متر مربع و ارتفاع آن ۸ سانتی‌متر است، ارتفاع آن با چه سرعتی نسبت به زمان اضافه می‌شود؟

۱) $\frac{1}{4}\frac{cm}{s}$ ۲) $\frac{1}{3}\frac{cm}{s}$ ۳) $\frac{1}{2}\frac{cm}{s}$ ۴) $\frac{2}{3}\frac{cm}{s}$

☑ پاسخ : گزینه «۳» حجم هرم را با v، مساحت قاعده را با s و ارتفاع را با h نشان می‌دهیم، در این صورت:

$$v=\frac{1}{3}hs \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{1}{3}(\frac{dh}{dt}s+h\frac{ds}{dt})$$

با جایگزینی مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$30=\frac{1}{3}(\frac{dh}{dt}\times 100+8\times 5) \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}$$

مثال ۵۶ : نقطه‌ای بر خم $y^2=x^3$ چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش $r(t)$ از مبدأ مختصات در صفحه با آهنگ ثابت ۲ واحد در ثانیه زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که نقطه متحرک دارای طول ۲ می‌باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

☑ پاسخ : گزینه «۳»

$$r^2=x^2+y^2 \xrightarrow{y^2=x^3} r^2=x^2+x^3 \Rightarrow 2r\frac{dr}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+3x^2\frac{dx}{dt}$$

به ازای $x=2$، مقدار $r=2\sqrt{3}$ با جایگزینی در رابطه فوق به دست می‌آید:

$$4\sqrt{3}\times 2=4\frac{dx}{dt}+12\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نکته ۱۱ : در برخی کمیت‌های وابسته، آهنگ تغییر متناسب با مقدار کمیت می‌باشد، یعنی $\frac{dx}{dt}=kx$، در این صورت به سادگی می‌توان نتیجه گرفت $x(t)=c_0e^{kt}$ که در این رابطه c_0 مقدار اولیه کمیت می‌باشد. رشد جمعیت، از بین رفتن (نابودی یا زوال یا واپاشی) ماده رادیواکتیو، افزایش یا کاهش تعداد باکتری‌ها و ... از جمله مواردی هستند که در رابطه فوق صدق می‌کنند.

مثال ۵۷ : یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به صورت نمایی وزن کم می‌کند. اگر در ساعت ۴، مقدار آن ۱۰۰ گرم باشد و در ساعت ۶ مقدار ۲۰ گرم از آن باقی مانده باشد، در ساعت ۱۲ وزن آن چقدر است؟

☑ پاسخ :

$$x(t)=c_0e^{kt} \Rightarrow x(4)=c_0e^{4k}\ ,\ x(6)=c_0e^{6k} \Rightarrow \frac{x(6)}{x(4)}=e^{2k}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$

$$x(12)=c_0e^{12k}=c_0e^{4k}\times(e^{2k})^4=100\times(\frac{1}{5})^4=0/16$$

معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی

در تابع $y=f(x)$ اگر بخواهیم در نقطه‌ای مانند x_0 واقع بر منحنی مماسی بر نمودار تابع رسم کنیم، شیب این خط با مقدار مشتق به ازای $x=x_0$ برابر است به عبارت دیگر: $m_{\text{مماس}}=f'(x_0)$، واضح است که ضریب زاویه خط قائم بر منحنی از رابطه $m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$ بدست خواهد آمد.

مثال ۵۸ : ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $x^2+y^2-xy-7=0$ در نقطه $A(1,2)$ کدام است ؟

۱) $-\frac{15}{11}$ ۲) $-\frac{1}{11}$ ۳) $-\frac{1}{13}$ ۴) $-\frac{5}{13}$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$y'=-\frac{3x^2-y}{3y^2-x} \Rightarrow m=y'(1,2)=-\frac{3-2}{3\times 4-1}=-\frac{1}{11}$$

یادآوری: معادله خطی که ازنقطه $A(x_0,y_0)$ بگذرد و دارای شیبی برابر m باشد به فرم زیر است:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

مثال ۵۹ : معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt{x+Lnx}$ در نقطه $x=1$ برابر است با :

۱) $y=2x+e$ ۲) $y=\frac{x}{e}$ ۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{1}{x}$

☑ پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} y=\sqrt{Lnx+x} \Rightarrow y'=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{2\sqrt{Lnx+x}} \Rightarrow m=y'(1)=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-1=x-1 \Rightarrow y=x \\ x_0=1 \Rightarrow y_0=1 \end{cases}$$

مثال ۶۰ : مکان هندسی مرکز تمام دوایر مماس بر منحنی $y=x^2+1$ در نقطه (۱,۲) کدام است؟

۱) $y-2x=0$ ۲) $2y-x=3$ ۳) $y+x=3$ ۴) $x+2y=5$

☑ پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم در نقطه تماس دو منحنی شیب دو منحنی یکسان است. بنابراین خط مماس و خط قائم بر دو منحنی نیز در آن نقطه یکی است و چون خط قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس کافی است معادله خط قائم بر منحنی را در نقطه (۱,۲) به دست آوریم.

$$y=x^2+1 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow y'(1)=2 \Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{2}$$

پس معادله خط قائم به صورت روبرو است:

$$y-2=\frac{-1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y+x=5$$

مثال ۶۱ : معادله مماس بر منحنی $x^2y^2+x-y-1=0$ در نقطه (۱ و ۱) A کدام است؟

۱) $3y-x-2=0$ ۲) $y+3x-4=0$ ۳) $y-3x+4=0$ ۴) $y-3x-2=0$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$y'_x=-\frac{2xy^2+1}{2yx^2-1} \Rightarrow m=y'(1,1)=-\frac{2+1}{2-1}=-3$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-1=-3(x-1) \Rightarrow y+3x-4=0$$

توضیح: توجه شود در بعضی تست‌هائی که معادله خط مماس و یا قائم در یک منحنی داده شده است، می‌توانیم سریعاً مختصات نقطه را در معادله خطوط داده شده در چهار گزینه قرار دهیم و از طریق رد گزینه‌ها تست را پاسخ دهیم برای مثال در تست فوق گزینه‌های ۳ و ۴ از بین جواب‌ها حذف می‌شود و اگر طراح خیلی ریزبینانه تست را طرح نکند، بعضاً سه گزینه را می‌توان رد نمود.

مثال ۶۲ : معادله خط قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ در نقطه به طول $x=4$ کدام است ؟

۱) $4x+y-18=0$ ۲) $x-4y+4=0$ ۳) $x+4y+4=0$ ۴) $4y-x+4=0$

☑ پاسخ : گزینه «۱»

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-4\ ,\ x_0=4 \Rightarrow y_0=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-2=-4(x-4) \Rightarrow \boxed{y+4x-18=0}$$

مثال ۶۳ : معادلات مماس بر منحنی $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ در نقطه‌های تلاقی با محور طولها کدام است ؟

۱) $y=2+x, y=2x-3, y=2x+1$ ۲) $y=2-x, y=2x-3, y=2x-1$

۳) $y=2x-3, y=2x, y=x+1$ ۴) $y=2x-6, y=2x-2, y=2-x$

☑ پاسخ : گزینه «۴» باید نقاط تلاقی منحنی با محور طولها را بدست آوریم برای این منظور منحنی را با خط $y=0$ قطع می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} y=(x-1)(x-2)(x-3) \\ y=0\end{cases} \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)=0 \to \begin{cases} x_1=1\to A(1,0)\\ x_2=2\to B(2,0)\\ x_3=3\to C=(3,0)\end{cases}$$

برای بدست آوردن شیب توجه داریم که مشتق گیری با عامل صفر داریم و با استفاده از این قاعده داریم :

$$\to\begin{cases} m_1=y'(1)=(1-2)(1-3)=2\to y-0=2(x-1)\to \boxed{y=2x-2}\\ m_2=y'(2)=(2-1)(2-3)=-1\to y-0=-1(x-2)\to\boxed{y=-x+2}\\ m_3=y'(3)=(3-1)(3-2)=2\to y-0=2(x-3)\to\boxed{y=2x-6}\end{cases}$$

توضیح: البته پس از به دست آوردن مختصات نقطه A با دقت در گزینه‌ها مشخص می‌شود که مختصات نقطه A فقط در یکی از معادلات گزینه ۴ صدق می‌کند و دیگر نیازی به ادامه حل تست نبود.

مثال ۶۴ : ضریب زاویه خط مماس به منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^2+3t-8\\y=2t^2-2t-5\end{cases}$ در نقطه $A(2,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{7}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ پاسخ : گزینه«۲» مقدار y'_x برابر است با: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4t-2}{2t+3}$ حال مقادیر متناظر t در نقطه $A(2,-1)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}t^2+3t-8=2\\2t^2-2t-5=-1\end{cases}\longrightarrow \boxed{t=2}\ \text{(ریشه مشترک دو معادله)}\longrightarrow m=y'_x(2)=\frac{4(2)-2}{2(2)+3}=\frac{6}{7}$$

تذکر ۶: در بعضی مسائل ممکن است شیب داده شده و نقطه تماس مماس سئوال شود.

مثال ۶۵ : اگر مماس بر منحنی $y=x^3$ با وتر و اصل دو نقطه $A(-1,-1)$ و $B(2,8)$ موازی باشد، آنگاه طول نقاط تماس مماس با منحنی کدام است؟

۱) $x=\pm1$ ۲) فقط $x=-1$ ۳) فقط $x=1$ ۴) $x=3$

☑ پاسخ : گزینه «۱» شیب خط واصل AB برابر است با : $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=\frac{9}{3}=3$

چون مماس بر منحنی با این خط موازی است لذا شیب آن برابر شیب خط AB یعنی $m=3$ می‌باشد :

$y=x^3\to m=y'(x_0)=3x_0^2\Rightarrow 3=3x_0^2\to x_0^2=1\to \boxed{x_0=\pm1}$

تحت مماس و تحت قائم :

به مقدار $\left|\frac{y_0}{m}\right|$ که $m=y'(x_0)$ می‌باشد تحت مماس در نقطه $A(x_0,y_0)$ گفته می‌شود و مقدار $|y_0.m|$ تحت قائم در نقطه $A(x_0,y_0)$ نامیده می‌شود. (شکل A)

مثال ۶۶ : تحت مماس بر منحنی $y=x^4-3x^2-16$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) ۳۶ ۳) $9\sqrt{5}$ ۴) ۹

☑ پاسخ : گزینه «۴» $y=x^4-3x^2-16\Rightarrow y'=4x^3-6x\Rightarrow m=y'(1)=-2\ ,\ y_0=y(1)=-18$

تحت مماس $=\left|\frac{y_0}{m}\right|=\left|\frac{-18}{-2}\right|=9$

مثال ۶۷ : تحت قائم منحنی $y=2x^2-x+5$ در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\6\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۸ ۳) $2\sqrt{10}$ ۴) $6\sqrt{10}$

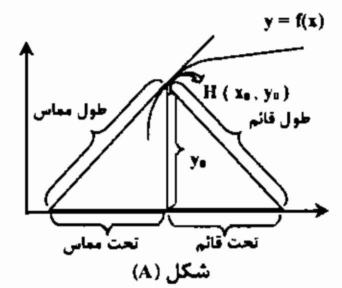
☑ پاسخ : گزینه «۲» $x_0=1\ ,\ y_0=6$ تحت قائم برابر است با : $|my_0|$

$y=2x^2-x+5\Rightarrow y'=4x-1\Rightarrow m=y'(1)=3\Rightarrow |my_0|=|3\times6|=18$

طول مماس و طول قائم

۱ـ اگر بر نمودار تابعی در نقطه $A(x_0,y_0)$ مماسی رسم کنیم آنگاه طول آن مماس برابر است با :

$$L=\sqrt{y_0^2+(\frac{y_0}{m})^2}$$



شکل (A)

۲ـ اگر بر نمودار تابعی در نقطه $A(x_0,y_0)$ قائمی رسم کنیم آنگاه طول قائم برابر است با :

$$L=\sqrt{y_0^2+(y_0.m)^2}$$

تذکر ۷: در محاسبه طول قائم و مماس مطابق شکل طول مماس و قائم از نقطه تماس با منحنی تا نقطه تماس با محور x ها در نظر گرفته شده است.

مثال ۶۸ : طول مماس بر منحنی $y=x^3-3x+2$ در نقطه $A(2,4)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}\sqrt{82}$ ۲) $\frac{4}{9}\sqrt{82}$ ۳) $\frac{1}{36}\sqrt{82}$ ۴) $36\sqrt{82}$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}L=\sqrt{y_0^2+(\frac{y_0}{m})^2}\ ,\ y=x^3-3x+2\Rightarrow y'=3x^2-3\Rightarrow m=y'(2)=9\\ x_0=2\ ,\ y_0=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{(4)^2+(\frac{4}{9})^2}=\sqrt{16(1+\frac{1}{81})}=\sqrt{\frac{16}{81}(82)}=\frac{4}{9}\sqrt{82}$$

نکته ۱۲ : اگر ضریب زاویه خط مماس در نقطه $A(x_0,y_0)$ صفر باشد، معادله خط مماس به شکل $y=y_0$ خواهد بود.

نکته ۱۳ : اگر ضریب زاویه خط مماس در نقطه $A(x_0,y_0)$، ∞ شود، معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه $x=x_0$ خواهد بود.

بدست آوردن زاویه یک منحنی با محورهای مختصات

برای به دست آوردن زاویه منحنی با محور x ها در این حالت باید منحنی را با خط $y=0$ قطع داده و طول نقطه تلاقی با محور x هـا را یافتـه و سپس شیب خط را بدست آورده، و با توجه به اینکه $m=tg\alpha$، زاویه (α) بدست خواهد آمد.

برای به دست آوردن زاویه منحنی با محور y ها باید زاویه مماس بر منحنی را با محـور y هـا بدسـت آوریم. بـا توجـه بـه اینکـه هـر نقطـه روی محور y ها دارای طول صفر خواهد بود. کافیست ضریب زاویه خط مماس بـر منحنـی را در $x=0$ بدسـت آورده و چـون بدسـت آوردن زاویـه بـا محور y ها مورد نظر می‌باشد لذا این زاویه را از 90° کم کنیم.

مثال ۶۹: نمودار تابع $y=\frac{x-1}{1+x^2}$ محور y ها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند ؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $Arctg\sqrt{2}$

☑ پاسخ : گزینه «۳» $y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(1+x^2)^2}\Rightarrow m=y'(0)=1\to m=tg\alpha\to\alpha=\frac{\pi}{4}\to\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

نکته ۱۴ : اگر یک خط بر یک منحنی مماس باشد، معادله تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد.

مثال ۷۰ : به ازای کدام مقدار k منحنی به معادله $y=\frac{2x+k}{x^2+2}$ بر خط به معادله $y=x-3$ مماس است ؟

۱) $-10\ ,-6$ ۲) $-10\ ,6$ ۳) $10\ ,-6$ ۴) $10\ ,6$

☑ پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases}y=\frac{2x+k}{x^2+2}\\ y=x-3\end{cases}\Rightarrow\frac{2x+k}{x^2+2}=x-3\Rightarrow x^3-3x^2-k-6=0\quad(1)$$

با توجه به نکته ۳، معادله (۱) باید دارای ریشه مضاعف باشد و برای این منظور باید ریشه‌های مشتق معادله فوق در خود معادله صدق کنند.

$$\Rightarrow 3x^2-6x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 \xrightarrow{\text{درمعادله}} k=-6\Rightarrow\\ x=2 \xrightarrow{\text{درمعادله}} k=-10\end{cases}$$

نکته ۱۵: اگر دو منحنی بر هم مماس باشند، مقدار مشتق آنها در نقطه تماس و همچنین مقادیر منحنی‌ها در آن نقطه با هم برابر خواهند بود.

مثال ۷۱: اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3-2x^2$ و $g(x)=ax^2+b$ در نقطه‌ای به طول (۲-) بر هم مماس باشند، a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases}f'(x)=3x^2-4x\Rightarrow f'(-2)=20\\ g'(x)=2ax\Rightarrow g'(-2)=-4a\end{cases}\Rightarrow f'(-2)=g'(-2)\Rightarrow -4a=20\Rightarrow a=-5$$

نکته ۱۶: اگر یک منحنی بر محور طولها مماس باشد در محل تلاقی آن با محور طولها، y و y' هردو صفر خواهند شد.

زاویه بین دو منحنی

برای یافتن زاویه بین دو منحنی باید دو منحنی را با هم تلاقی داد و طول نقطه تلاقی را بدست آورده، سپس از دو منحنی مشتق گرفته و m و m' را بدست آوریم (m و m' شیب مربوط به هر یک از دو منحنی در نقطه تلاقی آنها هستند) در پایان از رابطه: $tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$ مقدار α را بدست می‌آوریم.

مثال ۷۲: دو منحنی $y=x^2$ و $y=x^3$ تحت چه زاویه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۰ ۲) $Arctg\frac{5}{7}$ ۳) $Arctg\frac{3}{7}$ ۴) $Arctg\frac{1}{7}$

پاسخ: گزینه «۴» طول نقطه محل تلاقی دو منحنی $x=1$ می‌باشد:

$$\begin{matrix}y=x^2\to y'=2x\to m=y'(1)=2\\ y=x^3\to y'=3x^2\to m'=y'(1)=3\end{matrix}\to tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{2-3}{1+2\times3}\right|=\frac{1}{7}\to\alpha=Arctg\frac{1}{7}$$

توجه شود که در نقطه $(0,0)$ نیز دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند اما در این نقطه بر هم مماسند و زاویه‌ای با یکدیگر نمی‌سازند.

مثال ۷۳: زاویه بین سهمی $y=4-\frac{x^2}{2}$ و خط $y=4-x$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\alpha_1=45^\circ\\ \alpha_2=Arctg\frac{1}{3}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\alpha_1=Arctg\frac{2}{3}\\ \alpha_2=30^\circ\end{cases}$ ۳) فقط $\alpha=45^\circ$ ۴) فقط $Arctg\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» شیب خط برابر $m=-1$ می‌باشد لذا شیب خط مماس بر سهمی را با توجه به اینکه نقطه تلاقی دو منحنی $B(2,2), A(0,4)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم:

$$y=4-\frac{x^2}{2}\to y'=-x\to\begin{cases}m'_1=0\\ m'_2=-2\end{cases}$$

$$tg\alpha_1=\left|\frac{-1-0}{1+0\times(-1)}\right|=1\to\alpha_1=\frac{\pi}{4}\quad,\quad tg\alpha_2=\left|\frac{-1-(-2)}{1+(-1)(-2)}\right|=\frac{1}{3}\to\alpha_2=Arctg\frac{1}{3}$$

مثال ۷۴: زاویه بین خطوط مماس بر منحنی $y=|tgx|$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

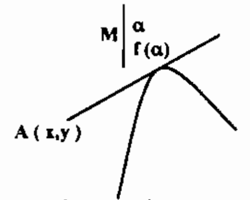
۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تابع را به شکل دو ضابطه ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}tgx & x>0\\ -tgx & x<0\end{cases}\to y'=\begin{cases}1+tg^2x & x>0\\ -(1+tg^2x) & x<0\end{cases}\to\begin{cases}m=1\\ m'=-1\end{cases}\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\infty\to\alpha=\frac{\pi}{2}$$

یافتن معادله خط مماس یا قائم از نقطه‌ای خارج منحنی

نقطه‌ای بطول α روی منحنی فرض می‌کنیم. پس عرض این نقطه $f(\alpha)$ خواهد بود. $M\begin{vmatrix}\alpha\\ f(\alpha)\end{vmatrix}$



با توجه به حالات قبل شیب در نقطه $x=\alpha$ برابر $m=f'(\alpha)$ خواهد بود و معادله خط به شکل $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ در خواهد آمد، و چون نقطه $A(x,y)$ در این معادله صدق می‌کند، معادله‌ای بر حسب α خواهیم داشت تا معادله نهایی بدست آید.

مثال ۷۵: تعداد قائم‌هائی که از نقطه $A(3,0)$ بر منحنی تابع $y^2=4x$ می‌توان رسم کرد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» نقطه به عرض α را روی منحنی فرض می‌کنیم لذا طول نقطه $\frac{\alpha^2}{4}$ می‌باشد.

$$y^2=4x\to 2yy'=4\to y'=\frac{2}{y}\Rightarrow m=y'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\to m_{\text{مماس}}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{\alpha}{2}$$

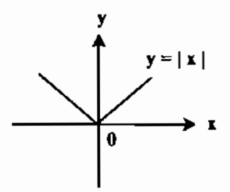
$$y-\alpha=\frac{-\alpha}{2}(x-\frac{\alpha^2}{4})\Rightarrow 0-\alpha=\frac{-\alpha}{2}(3-\frac{\alpha^2}{4})\to\alpha=0\ ,\alpha=-2\ ,\alpha=2\to m=0\ ,\ m_1=1\ ,\ m_2=-1$$

لذا سه خط قائم با ضریب زاویه‌های ۱، ۱- و ۰ می‌توان بر منحنی رسم کرد.

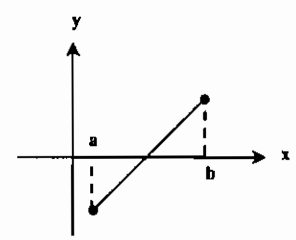
نقاط اکسترمم تابع (نقاط Max و Min تابع)

برای اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد باید مشتق در نقطه c برابر صفر و یا وجود نداشته باشد (بی‌نهایت گردد) و علاوه بر این شرط مشتق حول نقطه c تغییر علامت دهد. بعبارت دیگر ممکن است مشتق تابعی در نقطه‌ای برابر صفر شود ولی مشتق حول این نقطه تغییر علامت ندهد در این صورت آن نقطه نمی‌تواند جزء اکسترمم‌های تابع محسوب گردد.

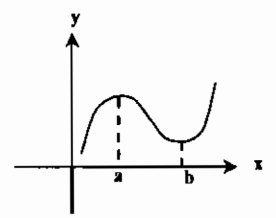
تذکر ۸: تابع ممکن است در نقطه‌ای دارای اکسترمم باشد، ولی در آن نقطه تابع مشتق‌پذیر نباشد. (مانند تابع $y=|x|$)



تذکر ۹: ابتدا و انتهای هر بازه اغلب نمی‌تواند Min, Max نسبی باشند.



نقطه b ماکزیمم مطلق و نقطه a مینیمم مطلق است و تابع max و min نسبی ندارد.

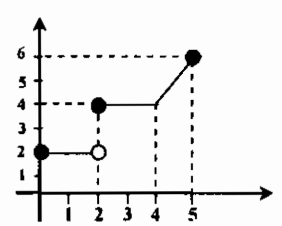


نقطه b مینیمم نسبی و نقطه a ماکزیمم نسبی است.

ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع

در بازه $[a,b]$ بیشترین و کمترین مقدار عرض تابع بترتیب Max مطلق و Min مطلق تابع در فاصله مذکور خواهد بود.

* Max مطلق ۶ می باشد.
* Min مطلق ۲ می باشد.



تذکر ۱۰: معمولاً در مسائل زمانی Max و یا Min مطلق مطرح می‌شود که بازه مشخص شده باشد.

تعیین Max و Min نسبی تابع به کمک مشتق گیری

برای بدست آوردن نقاط Min,Max نسبی در توابع مشتق پذیر از تابع مشتق گرفته و حاصل را برابر صفر قرار میدهیم،ریشه‌های این معادله در صورتی که عبارت حول این نقطه تغییر علامت دهد، نقاط اکسترمم تابع هستند، اگر علامت مشتق از **مثبت به منفی** تبدیل شود نقطه Max و اگر علامت مشتق از **منفی به مثبت** تبدیل شود نقطه Min است.

مثال ۷۶ : به ازای کدام مقدار a تابع $y = x\ln ax$ در نقطه $x = 1$ مینیمم است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$y = x\ln ax \rightarrow y' = \ln ax + \frac{a.x}{ax} \Rightarrow y' = \ln ax + 1 \rightarrow y'(1) = \ln a + 1$$

$$\ln a + 1 = 0 \Rightarrow \ln a = -1 \Rightarrow a = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

مثال ۷۷ : در تابع $f(x) = (x-1)^4$ نقطه بطول $x = 1$ کدام یک از نقاط زیر است؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(x) = (x-1)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(x-1)^3 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 0$$

x	0	1	2
f'(x)	−	0	+
f(x)	1 ↘	0 (min)	↗ 1

توضیح: با دادن نقاط کمکی ۰ و ۲ و تعیین علامت مشتق نتیجه می‌شود که علامت مشتق قبل از نقطه $x = 1$ منفی و بعد از آن مثبت است لذا نقطه $x = 1$ طول نقطه مینیمم تابع می‌باشد.

مثال ۷۸ : مختصات نقطه مینیمم تابع $y = x^3 - 3x + 2$ کدام است؟

۱) $(-1,4)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,2)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	−2	−1	0	1	2
y'	+	0	−	0	+
y	0 ↗	4 (max) ↘	2 ↘	0 (min) ↗	2

با توجه به جدول تعیین علامت ملاحظه می‌شود که نقطه $(1,0)$ نقطه مینیمم تابع می‌باشد علامت مشتق از منفی به مثبت حول نقطه $x = 1$ تبدیل شده است توجه شود نقطه $(-1,4)$ نقطه ماکزیمم تابع می‌باشد .

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط اکسترمم تابع

این راه حل بسیار ساده تر از تعیین علامت مشتق برای تعیین نقاط اکسترمم می باشد.

➤ **قضیه :** فرض کنیم برای تابع $y = f(x)$ نقطه‌ای مانند C وجود داشته باشد که $f'(c) = 0$, $f''(c)$ موجود باشد.

الف- اگر $f''(c) < 0$ آنگاه تابع f در نقطه c ماکزیمم نسبی دارد.

ب- اگر $f''(c) > 0$ آنگاه تابع f درنقطه c مینیمم نسبی دارد.

ج- اگر $f''(c) = 0$ باشد، از این آزمون نتیجه‌ای نخواهیم گرفت.

مثال ۷۹ : تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ مفروض است ، عبارت صحیح در مورد این تابع کدام است؟

۱) تابع ماکزیمم و مینیمم ندارد. ۲) یک مینیمم و یک ماکزیمم دارد.

۳) تابع دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد. ۴) تابع دو ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x = 0 \Rightarrow x\sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} - 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) < 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases}$$

با توجه به آزمون مشتق دوم نقاط $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ هر دو طول نقاط ماکزیمم هستند، اما با توجه به اینکه در $x = 0$ تابع مشتق ندارد و بررسی اینکه حول این نقطه علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر پیدا می‌کند لذا نقطه $x = 0$ طول نقطه مینیمم است.

مثال ۸۰ : فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر روی R باشد و برای هر $x \in R$ داشته باشیم $f(x) \le 0$. اگر $f(c) = 0$، آنگاه:

۱) $f'(c)$ وجود دارد. ۲) $f'(c) = 0$ ۳) $f'(c) > 0$ ۴) $f'(c) < 0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون همواره $f(x) \le 0$، پس c نقطه ماکسیمم تابع می‌باشد و چون طبق فرض f مشتق‌پذیر است پس $f'(c) = 0$.

مثال ۸۱ : نقطه $x = -3$ برای تابع $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 5$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) ماکسیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) نقطه عادی ۴) مینیمم مطلق

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 \Rightarrow f''(x) = 12x + 12$$

$$\Rightarrow f'(-3) = 6(-3)^2 + 12(-3) - 18 = 0 \ , \ f''(-3) = 12 \times (-3) + 12 = -24 < 0$$

چون $f''(-3) < 0$ است پس $x = -3$ ماکزیمم نسبی می‌باشد.

نکته ۱۷ : فرض کنید تابع f در شرایط روبرو صدق کند: $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \ , \ f^n(a) \ne 0$

در این صورت اگر n زوج و $f^{(n)}(a) > 0$، نقطه a، نقطه مینیمم خواهد بود و اگر n زوج و $f^{(n)}(a) < 0$، نقطه a، نقطه ماکسیمم خواهد بود. اگر n فرد باشد، a نقطه عطف است.

تعریف نقاط بحرانی : نقاطی از دامنه تابع که مشتق در آن نقاط برابر صفر شود و یا در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد را نقاط بحرانی تابع می نامند .برای تشخیص از روی نمودار، نقاطی که مماس بر تابع خطی موازی محورxها می‌شود و یا تابع در آن نقاط دارای شکست در نمودار می‌باشد، نقاط بحرانی می‌باشد.

تعیین نقاط Max , Min مطلق تابع

برای تعیین Min,Max مطلق تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a,b]$ به ترتیب زیر عمل خواهیم کرد.

۱- نقاط بحرانی تابع را بدست آورده و مقدار تابع را در این نقاط بدست می‌آوریم.

۲- مقدار تابع در نقاط a, b را نیز بدست می‌آوریم.

۳- بین این نقاط بزرگترین عدد Max مطلق، و کوچکترین عدد Min مطلق تابع خواهد بود.

مثال ۸۲ : نقاط Max و Min نسبی و مطلق تابع $y = x^2 - 3x$ را در بازه $[0,2]$ بدست آورید.

☑ **پاسخ :**

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min نسبی} \\ x = -1 \Rightarrow \text{(خارج بازه) غ.ق.ق} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -2 \\ f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

نقطه $(2,2)$، Max مطلق تابع است، نقطه $(1,-2)$، Minمطلق و همچنین Min نسبی تابع می‌باشد.

مثال ۸۳ : مینیمم عبارت $2x^2 Lnx - x^2$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$A(x) = x^2(2Lnx - 1) \Rightarrow A'(x) = 2x(2Lnx - 1) + (\frac{2}{x})(x^2) = 4xLnx - 2x + 2x = 4xLnx$$

$$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ Lnx = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A = 0 \ \text{غ.ق.ق} \\ x = 1 \rightarrow A = 2Ln1 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Min(A) = -1}$$

تعیین صعودی و نزولی بودن توابع به کمک مشتق

فرض کنیم f تابعی باشد که در فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد، در این صورت :

۱- اگر به ازاء هر x در بازه (a,b)، $f'(x) > 0$ آنگاه f بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است. (اگر $f'(x) \ge 0$ باشد تابع <u>صعودی</u> می‌باشد.)

۲- اگربه ازاء هر x در بازه (a,b)، $f'(x) < 0$ باشد آنگاه f بر $[a,b]$ اکیداً نزولی است. (اگر $f'(x) \le 0$ باشد تابع <u>نزولی</u> می‌باشد.)

۳- اگر $f'(x) = 0$ باشد f در تمام نقاط $[a,b]$ ثابت است.

مثال ۸۴: کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی صعودی است؟

۱) $f(x)=\sin x-x$ ۲) $f(x)=x+2\cos x$ ۳) $f(x)=x+2\sin x$ ۴) $f(x)=x-\sin x$

پاسخ: گزینه «۴» برای آن که تابع $f(x)$ صعودی باشد باید $f'(x)\geq 0$ باشد که تنها گزینه «۴» این حالت را دارا می‌باشد.

$$f'(x)=1-\cos x \Rightarrow 0\leq f'(x)\leq 2$$

نکته ۱۸: اگر تابع f صعودی باشد، $\frac{1}{f}$ تابعی است نزولی.

مثال ۸۵: کدامیک از توابع زیر همواره صعودی نیست؟

۱) $y=x^2|x|$ ۲) $y=x|x|$ ۳) $y=Lnx$ ۴) $y=x+\sin x$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2 & x\geq 0\\ -3x^2 & x<0\end{cases}$$

چون y' در فاصله $(-\infty,0)$ مقداری منفی است پس در این فاصله تابع نزولی است

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$ y' همواره مثبت است

$y=Lnx \Rightarrow y'=\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه Ln، چون } x>0}$ y' همواره مثبت است

$y=x+\sin x \Rightarrow y'=1+\cos x\geq 0$ y صعودی است

مثال ۸۶: تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ ۲) $(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ ۳) $(0,\pi)$ ۴) $(-\pi,0)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x.\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x)>0\Rightarrow 2\cos x+1>0\Rightarrow \cos x>\frac{-1}{2}\Rightarrow \frac{-2\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$$

توجه:
برای حل نامعادله $\cos x>\frac{-1}{2}$ از دایره مثلثاتی استفاده کنید، ابتدا نقاطی را بیابید که در آنها $\cos x=\frac{-1}{2}$ یعنی $x=\pm\frac{2\pi}{3}$ و جواب نامعادله ما بین دو ریشه یا خارج دو ریشه خواهد بود.

مثال ۸۷: اگر تابع $f:[a,b]\Rightarrow R$ پیوسته باشد و روی (a,b) اکسترمم نسبی نداشته باشد، آنگاه کدام عبارت زیر همواره صحیح است؟

۱) f تابعی نزولی است. ۲) f تابعی صعودی است. ۳) f تابعی یک به یک است. ۴) نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

پاسخ: گزینه «۳» اگر f یک به یک نباشد، غیر یکنواست یعنی صعود و نزولی می‌کند و در این صورت نقطه اکسترمم خواهد داشت که خلاف فرض است. پس f یک به یک خواهد بود.

توجه:
از طرفی در مسئله فوق f لزوماً صعودی یا نزولی نخواهد بود، به طور مثال توابع $f(x)=x$ و $f(x)=-x$ را در نظر بگیرید اولی صعودی و دومی نزولی است و در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

مثال ۸۸: به ازای چه مقادیری از b، تابع $f(x)=\sin x-bx+c$ همواره نزولی است؟

۱) $b\geq 1$ ۲) $b\leq 1$ ۳) $b>4$ ۴) $b\leq 0$

پاسخ: گزینه «۱»

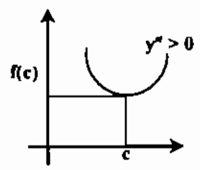
$$f(x)=\sin x-bx+c\Rightarrow f'(x)=\cos x-b\leq 0\Rightarrow \cos x\leq b$$

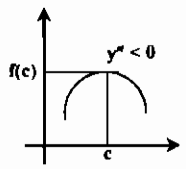
برای برقراری نامساوی فوق باید $b\geq 1$ باشد.

قضیه تقعر: فرض کنیم تابع f در همسایگی نقطه $\underline{c}$ مشتق اول و دوم داشته باشد، داریم:

۱- اگر $f''(c)>0$ آنگاه تقعر (گودی) نمودار f در $(c,f(c))$ به طرف بالا است. (نمودار توابعی به این فرم را مقعر نیز می‌گویند.)

۲- اگر $f''(c)<0$ آنگاه تقعر (گودی) نمودار f در $(c,f(c))$ به طرف پائین است. (نمودار توابعی به این فرم را محدب نیز می‌گویند.)





نقطه عطف: نقطه $\left|\begin{matrix}c\\ f(c)\end{matrix}\right.$ ، را نقطه عطف نمودار تابع f گوئیم هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) مشتق اول در نقطه $\underline{c}$ وجود داشته باشد (متناهی یا نامتناهی) یا به عبارت دیگر در نقطه عطف مماس بر منحنی وجود داشته باشد. (تابع پیوسته باشد)

۲) مشتق دوم حول نقطه $\underline{c}$ تغییر علامت دهد. (واجب نیست $f''(c)=0$ شود)

تذکر ۱۱: برای بدست آوردن طول نقطه عطف غالباً $f''(x)=0$ قرار داده می‌شود، و ریشه این معادله معمولاً طول نقطه عطف است، البته در بعضی موارد این امر درست نیست و شرط تغییر علامت $f''(x)$ نیز باید بررسی شود.

تذکر ۱۲: در نقطه عطف جهت تقعر نمودار منحنی عوض می‌شود.

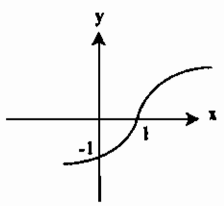
مثال ۸۹: اگرجهت تقعرمنحنی نمایش تابع $f(x)=x^3+2ax^2+a$ در نقطه $x=1$ عوض شود، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» جهت تقعر منحنی در نقطه عطف منحنی عوض می‌شود و با توجه به اینکه طول نقطه عطف $x=1$ می‌باشد لذا داریم:

$$y=x^3+2ax^2+a\Rightarrow y'=3x^2+4ax\Rightarrow y''=6x+4a\xrightarrow{x=1}y''(1)=6+4a=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

مثال ۹۰: جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ را تعیین کنید.



$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}>0\Rightarrow$ تابع اکیداً صعودی است

$$y''=-\frac{2}{9(x-1)^2.\sqrt[3]{(x-1)^2}}\Rightarrow\begin{cases}x\to 1^+\to y''<0\\ x\to 1^-\to y''>0\end{cases}$$

تابع در $x=1$ دارای مشتق دوم ∞ است اما چون تابع $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت دارد و مشتق اول نیز وجود دارد (نامتناهی) $x=1$ طول نقطه عطف خواهد بود. جهت تقعر قبل از نقطه $x=1$ رو به بالا و بعد از نقطه $x=1$ جهت تقعر به طرف پائین می‌باشد.

مثال ۹۱: در تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ نقطه‌ای به طول $x=1$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) عطف ۲) عادی ۳) اکسترمم مطلق ۴) بازگشت

پاسخ: گزینه «۴»

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)}}\to y''=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}<0$$

توجه شود که y'' همواره منفی می‌باشد و حول نقطه $x=1$ هیچگونه تغییر علامت نداریم لذا $x=1$ طول نقطه بازگشت تابع است، البته با توجه به مشتق اول نیز با این استدلال که در نقطه $x=1$ مقادیر مشتق (اول) چپ و راست تابع $+\infty$ و $-\infty$ می باشند، می‌توان به این نتیجه رسید.

با توجه به دو مثال فوق به نتایج زیر خواهیم رسید:

نکته ۱۹: هرگاه مشتق تابع نامتناهی و علامت آن در نقطه‌ای همواره مثبت و یا همواره منفی باشد آنگاه آن نقطه معمولاً طول نقطه عطف است. در غیر این صورت (علامت مشتق اول حول نقطه مختلف‌العلامه باشد) آن نقطه معمولاً طول نقطه بازگشت می‌باشد.

نکته ۲۰: در توابع رادیکالی با فرجه فرد به فرم $f(x)=\sqrt[2k+1]{(x-\alpha)^n}$ اگر $n<2k+1$ باشد آنگاه:

۱) اگر n زوج باشد $x=\alpha$ طول نقطه بازگشت تابع می‌باشد و تابع دارای اکسترمم نسبی نیز می‌باشد و شکل این توابع به فرم $y=\sqrt[3]{x^2}$ است.

۲) اگر n فرد باشد $x=\alpha$ طول نقطه عطف تابع می‌باشد و شکل آن به فرم $y=\sqrt[3]{x}$ است.

نکته ۲۱: در توابع رادیکالی با فرجه زوج به فرم $f(x)=\sqrt[2k]{(x-\alpha)^n}$ داریم:

۱) اگر n زوج و $n<2k$ باشد آنگاه $x=\alpha$ طول نقطه بازگشت تابع می‌باشد تابع در این نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۲) اگر n زوج و $n\ge 2k$، آنگاه $x=\alpha$ می‌تواند طول اکسترمم یا عطف تابع باشد (باید بررسی شود)

۳) اگر n فرد باشد، آنگاه تابع فقط به ازای $x\ge\alpha$ تعریف شده است و نمودار آن شبیه تابع $y=\sqrt{x}$ می‌باشد.

مثال ۹۲: در تابع f(x) در نقطه‌ای به طول c روابط زیر برقرار است، برای تابع f(x) نقطه c چگونه نقطه‌ای است؟

$$f'(c^-)=2\ ,\quad f'(c^+)=-1\ ,\quad f(c)=3\ ,\quad \lim_{x\to c}f(x)=3$$

پاسخ: چون در نقطه به طول c مشتق های چپ و راست یکسان نیستند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و $x=c$ یک نقطه بحرانی تابع f(x) می‌باشد و چون مشتق قبل از c مثبت و بعد از آن منفی می‌شود پس $x=c$ طول نقطه Max است.

مثال ۹۳: در تابع $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$، نقاط ۰ و ۱ به ترتیب چه نوع نقاطی هستند؟

۱) مینیمم، ماکسیمم ۲) ماکسیمم، عطف ۳) می‌نیمم، عطف ۴) بازگشت، ماکسیمم

پاسخ: گزینه «۲» در همسایگی نقطه $x=0$ تابع داده شده را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\sqrt[3]{-x^2}=-\sqrt[3]{x^2}\xrightarrow{\text{نکته (۲۰)}}\text{نقطه بازگشت و ماکسیمم}$$

و در همسایگی $x=1$ تابع را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}=\sqrt[3]{x^2(x-1)}=\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[3]{x-1}\sim\sqrt[3]{x-1}\xrightarrow{\text{نکته (۲۰)}}\text{نقطه عطف}$$

مثال ۹۴: طول نقاط ماکزیمم و عطف تابع $f(x)=xe^{-x}$ بترتیب کدام است؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱- و ۲ ۳) ۱ و ۲- ۴) ۱- و ۲-

پاسخ: گزینه «۱»

$$y'=e^{-x}-xe^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}(1-x)=0\Rightarrow x=1\ \text{طول نقطه ماکزیمم}$$

$$y''=-2e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)=0\Rightarrow x=2\ \text{طول نقطه عطف}$$

نکته ۲۲: در نقطه عطف مماس بر منحنی از خود منحنی عبور می‌کند.

مثال ۹۵: اگر مماس بر منحنی تابع $y=ax^3+6x^2+1$ در نقطه $x=1$ از منحنی عبور کند، a چقدر است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» مماس بر منحنی در توابع درجه سوم در نقطه عطف از منحنی عبور می‌کند پس داریم:

$$y'=3ax^2+12x\Rightarrow y''=6ax+12\Rightarrow 6ax+12=0\xrightarrow{x=1}6a+12=0\Rightarrow a=-2$$

مثال ۹۶: شرط صحیح بین ضرایب a، b و c در منحنی $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ به منظور داشتن نقطه عطف کدام است؟

۱) $3b^2-8ac>0$ ۲) $3b^2-8ac<0$ ۳) $a+b+c=0$ ۴) $a+b=4c$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\Rightarrow y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$y''=12ax^2+6bx+2c$$

$$y''=0\Rightarrow 12ax^2+6bx+2c=0\Rightarrow 6ax^2+3bx+c=0$$

برای این که معادله دارای جواب باشد باید $\Delta>0$ باشد:

$$(3b)^2-4(6a)c>0\Rightarrow 3b^2-8ac>0$$

نکته ۲۳: در توابع درجه سوم به شکل: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ نکات زیر را داریم:

۱) $x=-\frac{b}{3a}$ طول نقطه عطف است.

۲) اگر $a>0$ آنگاه طول نقطه Max بزرگتر از طول نقطه Min است و اگر $a<0$ طول نقطه Min بزرگتر از طول Max است.

۳) نقطه عطف تابع، مرکز تقارن آن است.

اگر معادله مشتق $f'(x)=0$ دارای دو ریشه متمایز باشد آنگاه تابع یک Max و یک Min دارد و مختصات نقطه عطف به صورت $I\left|\begin{array}{l}x_I=\frac{x_{min}+x_{max}}{2}\\ y_I=\frac{y_{min}+y_{max}}{2}\end{array}\right.$ خواهد بود بعبارت دیگر مجموع عرض (یا طول) نقاط ماکزیمم و مینیمم دو برابر عرض (یا طول) نقطه عطف می‌باشد.

مثال ۹۷: به ازای کدام مقدار m مجموع طولهای ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=mx^3-3x^2-x$ برابر یک می‌باشد؟

۱) $m=-2$ ۲) $m=-1$ ۳) $m=1$ ۴) $m=2$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق داریم:

$$X_I=\frac{X_{max}+X_{min}}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ y=mx^3-3x^2-x\Rightarrow x_I=-\frac{b}{3a}=\frac{3}{3m}=\frac{1}{m}\Rightarrow\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{m=2}$$

نکته ۲۴: تابع $y=(x-a)|x-a|$ در $x=a$ دارای نقطه عطف است.

قضایای رُل، مقدار میانگین و لاگرانژ

قضیه رُل: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد بطوریکه $f'(c)=0$ باشد بنابراین اگر f مشتق‌پذیر باشد، f' بین هر دو ریشه متوالی f حداقل یک ریشه دارد.

مثال ۹۸: عدد c مورد نظر در قضیه رُل برای تابع $f(x)=x^2-7x+18$ روی $[3,4]$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x)=x^2-7x+18\Rightarrow f'(x)=2x-7\Rightarrow f'(c)=2c-7=0\Rightarrow c=\frac{7}{2}$$

مثال ۹۹: کدامیک از توابع زیر با توجه به بازه‌های داده شده در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند؟

۱) در بازه $[-1,1]$: $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ ۲) در بازه $[1,2]$: $f(x)=x^3-3x^2-1$

۳) در بازه $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$: $f(x)=\operatorname{Ln}\sin x$ ۴) در بازه $[-1,1]$: $f(x)=1-|x|$

پاسخ: گزینه «۳»

$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Rightarrow$ f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$f(x)=x^3-3x^2-1\Rightarrow f(1)=-3\ ,\ f(2)=-5\Rightarrow$ مقدار f در دو سر بازه با هم برابر نیست.

$f(x)=1-|x|$ f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

اما تابع $f(x)=\operatorname{Ln}\sin x$ در بازه $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و همچنین $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})$.

نتیجه اول قضیه رُل: اگر f(x) در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله(a ، b) مشتق‌پذیر باشد و $f'(x)$ دارای n ریشه در این فاصله باشد آنگاه f(x) حداکثر دارای $n+1$ ریشه در این فاصله است.

مثال ۱۰۰: معادله $x^6+x^4+x^2-1=0$ حداکثر دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) ۶ ریشه ۲) ۴ ریشه ۳) ۲ ریشه ۴) ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» تابع f(x) کلیه مشتقات را دارا می‌باشد و داریم:

$$f'(x)=x(\underbrace{6x^4+4x^2+2}_{\text{همواره مثبت}})\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0\quad\text{(تنها ریشه معادله)}$$

با توجه به نتیجه قضیه رول چون مشتق دارای یک ریشه است لذا تابع اصلی حداکثر دارای دو ریشه می‌تواند باشد.

مثال ۱۰۱: اگر تابع مشتق‌پذیر f در بازه $[a,b]$ دارای ۲۰ ریشه باشد، کدام جمله در مورد $f'(x)$ روی $[a,b]$ صحیح‌تر است؟

۱) حداقل ۲۱ ریشه دارد. ۲) حداقل ۱۹ ریشه دارد. ۳) حداکثر ۱۹ ریشه دارد. ۴) حداکثر ۲۱ ریشه دارد.

پاسخ: گزینه «۲» چون f، ۲۰ ریشه دارد، پس طبق قضیه رُل f' بین هر دو ریشه متوالی f حداقل یک ریشه خواهد داشت، یعنی f حداقل ۱۹ ریشه دارد.

نتیجه دوم قضیه رُل: بسادگی به کمک قضیه رُل می‌توان نشان داد که:

اگر f دارای n ریشه باشد (f از هر مرتبه مشتق‌پذیر)، آنگاه f' حداقل $(n-1)$ ریشه، f'' حداقل $(n-2)$ ریشه و بالاخره $f^{(n-1)}$ حداقل یک ریشه دارد.

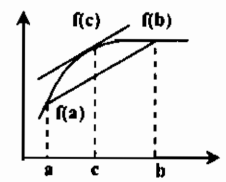
مثال ۱۰۲: اگر منحنی $f(x)$ نیمساز ربع اول و سوم را در سه نقطه قطع کند و f در R دو بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه معادلهٔ $f''(x)=۰$:

۱) حداقل دو ریشه دارد. ۲) حداقل یک ریشه دارد. ۳) حداکثر یک ریشه دارد. ۴) حداکثر دو ریشه دارد.

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $g(x)=f(x)-x$، طبق فرض مسأله $g(x)=۰$ سه ریشه دارد و تابع g در R دو بار مشتق‌پذیر است، پس طبق نتیجه دوم قضیه رُل $g''(x)=f''(x)=۰$ حداقل یک ریشه دارد.

قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ): هرگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c، $(a<c<b)$ وجود دارد بطوریکه: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$m=f'(c)$: شیب میانگین می‌باشد و عبارتست از شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول c که به موازات پاره خط واصل نقاط $(a,f(a)),(b,f(b))$ خواهد بود.



قضیه کُشی:

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشند و همچنین $g(a)\neq g(b)$ و $g'(x)\neq ۰$ در این صورت حداقل یک c بین a و b وجود دارد به طوریکه:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مثال ۱۰۳: در قضیه لاگرانژ عدد C برای تابع $f(x)=۳x^۲-۵$ روی بازهٔ $[-۲,۰]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $+۱$ ۴) در قضیه لاگرانژ صدق نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(۰)-f(-۲)}{۰-(-۲)}=\dfrac{-۵-۷}{۲}=-۶ & (۱)\\ f(x)=۳x^۲-۵ \Rightarrow f'(x)=۶x \Rightarrow f'(c)=۶c & (۲)\end{cases} \Rightarrow ۶c=-۶ \Rightarrow c=-۱$$

* کاربرد مشتق در تعیین مقادیر حداکثر و حداقل (کاربردهای صنعتی)

اینگونه مسائل معمولاً شامل دو متغیر می باشند، که معمولاً یک معادله بر حسب دو متغیر که برابر یک مقدار معلوم (یا پس از رسم شکل مسأله می‌توان معادله را نوشت) که از این معادله ما باید یکی از متغیرها را بر حسب متغیر دیگر بدست آوریم و در معادله دیگری که max و min آن خواسته مسأله می‌باشد قرار دهیم و از آن مشتق گرفته و سپس مقادیر max و min آن را تعیین کنیم، به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱۰۴: ابعاد مستطیلی را پیدا کنید تا محیط آن حداقل و مساحت آن برابر ۳۶ باشد؟

$$\begin{cases} S=x.y=۳۶ \rightarrow \text{معادله برابر مقدار ثابت} \rightarrow y=\dfrac{۳۶}{x}\\ P=۲(x+y) \rightarrow \text{معادله خواسته مساله} \rightarrow P(x)=۲(x+\dfrac{۳۶}{x}) \rightarrow P'(x)=۲(\dfrac{x^۲-۳۶}{x^۲})=۰ \rightarrow x=\pm ۶ \rightarrow \begin{vmatrix} x=۶\\ y=۶\end{vmatrix}\end{cases}$$

مثال ۱۰۵: اگر $x+y=۴$ باشد، حداکثر مقدار $A(x)=x^۲-۲y^۲$ چقدر است؟

$$x+y=۴ \rightarrow y=۴-x \rightarrow A(x)=-x^۲+۱۶x-۳۲$$

$$\rightarrow A'(x)=-۲x+۱۶=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۸\\ y=-۴\end{cases} \Rightarrow A=۳۲$$

مثال ۱۰۶: کوتاهترین فاصله نقطه $A(۵,۰)$ را از منحنی $y^۲=۴x$ را پیدا کنید.

$$B=\begin{vmatrix} x\\ \sqrt{۴x}\end{vmatrix} \Rightarrow \text{روی منحنی قرار دارد} \Rightarrow d=\sqrt{(۵-x)^۲+(۰-\sqrt{۴x})^۲}=\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}$$

کافیست کمترین مقدار عبارت زیر رادیکال را بدست آوریم: $\Rightarrow D(x)=x^۲-۶x+۲۵ \Rightarrow D'(x)=۲x-۶=۰ \Rightarrow x=۳ \rightarrow d=۴$

فرمولهای لازم برای حل مسائل خاص این قسمت:

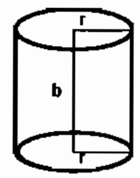
۱- حجم منشور به مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با: $V=S.h$

۲- حجم یک مخروط به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi.r^۲.h$

۳- حجم کره‌ای به شعاع r برابر است با: $V=\frac{۴}{۳}\pi.r^۳$

۴- مساحت کره‌ای به شعاع r برابر است با: $S=۴\pi.r^۲$

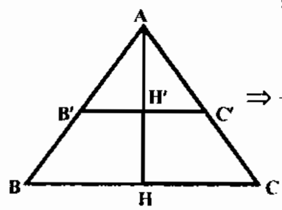
۵- مساحت و حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده r و ارتفاع h: (S: مساحت کل استوانه)



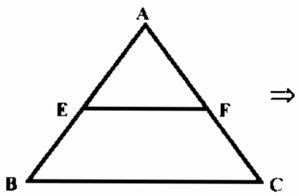
($۲\pi r^۲$: مساحت دو قاعده)، ($۲\pi rh$ مساحت جانبی استوانه)، (S: مساحت کل استوانه)

$$\begin{cases} S=۲\pi rh+۲\pi r^۲\\ V=\pi r^۲h \quad \text{فرمول حجم استوانه}\end{cases}$$

۶- روابط زیر نیز قابل استفاده در تستها می‌باشد:



$$\Rightarrow \frac{AH'}{AH}=\frac{B'C'}{BC}$$

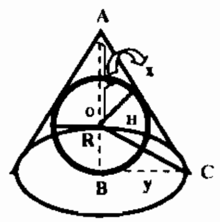


$$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

مثال ۱۰۷: در کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی با مینیمم حجم محیط کنید.

اگر ارتفاع مخروط را $x+R$ وشعاع قاعده آنرا y فرض کنیم حجم مخروط برابر است با: $V=\dfrac{\pi r^۲h}{۳}=\dfrac{\pi.y^۲(R+x)}{۳}$

حال باید از دو متغیر y,x یکی را حذف کنیم از تشابه دو مثلث AOH,ABC داریم:



$$\frac{R}{y}=\frac{\sqrt{x^۲-R^۲}}{x+R}$$

$$V(x)=\frac{۱}{۳}\pi.y^۲(x+R)=\frac{۱}{۳}\pi.R^۲.\frac{(x+R)^۲}{x-R} \Rightarrow$$

$$V'(x)=۰ \Rightarrow x=۳R \;,\; \boxed{h=۴R} \;,\; \boxed{y=R\sqrt{۲}}$$

نکته ۲۵: اگر بر کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی به ارتفاع h با مینیمم حجم محیط کنیم، آنگاه شعاع قاعده مخروط $r=R\sqrt{۲}$ و ارتفاع مخروط $h=۴R$ خواهد بود.

مثال ۱۰۸: اگر در کره‌ای با شعاع ۳ مخروطی به ارتفاع h با مینیمم حجم محیط کنیم آنگاه ارتفاع مخروط کدام است؟

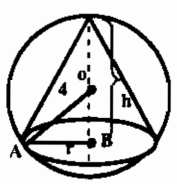
۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) $\frac{۹\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق $h=۴\times۳=۱۲$ خواهد بود.

مثال ۱۰۹: بیشترین حجم مخروطهای قائمی که درون یک کره به شعاع ۳ قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲۱\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲۷\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید یک معادله دو متغیره که برابر یک مقدار ثابت است فراهم سازیم با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم: O مرکز کره می‌باشد در نتیجه $OA=۳$ شعاع کره و وتر مثلث قائم‌الزاویه می باشد لذا داریم:



$(h-۳)^۲+r^۲=۹$ اما با توجه به فرمول حجم مخروط $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ داریم:

$$V=\frac{1}{3}\pi hr^2=\frac{\pi}{3}h[9-(h-3)^2]\Rightarrow V'(h)=0\Rightarrow\frac{\pi}{3}[9-(h-3)^2]+\frac{\pi}{3}h[-2(h-3)]=0$$

$$-3h^2+12h=0\Rightarrow\begin{cases}h=0 & \text{غ ق ق}\\ \text{یا} & \\ h=2\to V(4)=\frac{32\pi}{3}\end{cases}$$

روش دوم: اگر درکره‌ای به شعاع R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم و شعاع قاعده r، ارتفاع h و حجم مخروط V باشد آنگاه حجم ماکزیمم از رابطه: $V_{max}=\frac{32\pi R^3}{81}$ بدست می‌آید در این تست R = ۳ است یعنی: $V_{max}=\frac{32\pi(27)}{81}=\frac{32\pi}{3}$

نکته ۲۶: اگر در کره ای به شعاع ثابت R مخروطی با حجم Max محاط کنیم و شعاع قاعده r، ارتفاع آن h و حجم آن V باشد روابط زیر را داریم: $h=\frac{4R}{3}$ ، $r=\frac{2R\sqrt2}{3}$ ، $V=\pi R^3\times\frac{32}{81}$

مثال ۱۱۰: در داخل کره‌ای به شعاع ۳ مخروطی با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم، ارتفاع مخروط کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق خواهیم داشت: $h=\frac{4\times3}{3}=4$

مثال ۱۱۱: کره‌ای به شعاع R و مخروطی به ارتفاع h در کره محاط شده است. اگر حجم مخروط محاط شده ماکزیمم باشد، نسبت $\frac{h}{R}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

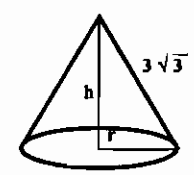
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق $h=\frac{4}{3}R$ در نتیجه $\frac{h}{R}=\frac{4}{3}$ خواهد بود.

مثال ۱۱۲: بیشترین حجم از بین مخروطهائی که طول مولد آنها $3\sqrt3$ است کدام است؟

۱) 12π ۲) 15π ۳) 18π ۴) 27π

پاسخ: گزینه «۳»

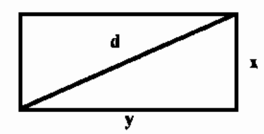
$$r^2+h^2=27\to V=\frac{\pi r^2 h}{3}$$
$$r^2=27-h^2$$
$$\to V=\frac{\pi h}{3}(27-h^2)\to V=9\pi h-\frac{\pi h^3}{3}$$
$$V'=9\pi-\pi h^2\xrightarrow{V'=0}h=3\to V=18\pi$$



مثال ۱۱۳: مجموعه تمام مستطیل هائی که محیط آنها ۱۶ است را در نظر می‌گیریم مینیمم مجموعه طول اقطار این مستطیل‌ها کدام است؟

۱) $3\sqrt2$ ۲) $4\sqrt2$ ۳) $4\sqrt3$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۲»



$$\begin{cases}x+y=8\Rightarrow y=8-x\Rightarrow d^2=x^2+(8-x)^2=2x^2-16x+64\\ d=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow(d^2)'=4x-16=0\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}\Rightarrow d=4\sqrt2\end{cases}$$

مثال ۱۱۴: از یک صفحهٔ فلزی به مساحت 150π یک قوطی استوانه‌ای به حجم ماکزیمم می‌سازیم، مقدار این حجم چقدر خواهد بود.

۱) 250π ۲) 280π ۳) 300π ۴) 320π

پاسخ: گزینه «۱»

مساحت قوطی استوانه‌ای $=2\pi rh+2\pi r^2=150\pi$ (۱)

حجم قوطی استوانه‌ای $=\pi r^2h$ (۲)

$$\xrightarrow{(1)}rh+r^2=75\Rightarrow rh=75-r^2$$
$$\xrightarrow{(2)}V_{(r)}=\pi r(75-r^2)\Rightarrow V'(r)=\pi(75-r^2)-2\pi r^2=0\Rightarrow 75-r^2-2r^2=0$$
$$\Rightarrow 3r^2=75\Rightarrow r^2=25\to\boxed{r=5}\Rightarrow h=\frac{75-r^2}{r}=\frac{75-25}{5}=10\Rightarrow\boxed{V=250\pi}$$

مثال ۱۱۵: کوتاهترین فاصله منحنی $y=x^2$ از خط $y-2x+2=0$ کدام است؟

۱) $\sqrt3$ ۲) $\frac{1}{\sqrt3}$ ۳) $\sqrt5$ ۴) $\frac{1}{\sqrt5}$

پاسخ: گزینه «۴» نقطه $A(\alpha,\alpha^2)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم:

$$d=\frac{|\alpha^2-2\alpha+2|}{\sqrt{4+1}}\Rightarrow d'(\alpha)=0\Rightarrow 2\alpha-2=0\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow d=\frac{1}{\sqrt5}$$

از قضایای زیر نیز می‌توان در تعیین مقادیر حداقل و حداکثر نیز بهره برد:

۱ـ اگر $x+y+z=k$ آنگاه حداکثر مقدار عبارت $A=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ در شرایطی رخ می‌دهد که داشته باشیم $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$

۲ـ اگر $xyz=1$ آنگاه حداکثر مقدار عبارت $A=x^\alpha+y^\beta+z^\gamma$ در شرایطی رخ می‌دهد که: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$

مثال ۱۱۶: بیشترین مقدار $y=5\sin^4x\cos x$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) $16\sqrt5$ ۳) $5\sqrt5$ ۴) $\frac{16\sqrt5}{25}$

پاسخ: گزینه «۴» باید بیشترین مقدار $A=(\sin^2x)^2(\cos^2x)^{\frac12}$ را تعیین کنیم:

$$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{\sin^2x}{2}=\frac{\cos^2x}{(\frac12)}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2x=\frac45\\ \cos^2x=\frac15\end{cases}\Rightarrow Max(y)=5(\frac45)^2(\frac15)^{\frac12}=\frac{16}{5\sqrt5}=\frac{16\sqrt5}{25}$$

نکته ۲۷: اگر $ax+by=c$ باشد، حداکثر xy زمانی اتفاق می‌افتد که $ax=by=\frac{c}{2}$ باشد (a، b و c اعداد ثابت هستند.)

مثال ۱۱۷: اگر $3x+4y=24$ آنگاه ماکزیمم xy کدام است؟

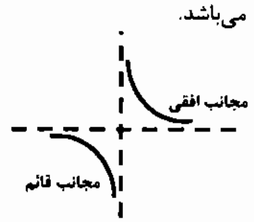
۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۷ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته فوق ماکزیمم xy زمانی است که $3x=4y=\frac{24}{2}$ باشند و یا $x=4$ و $y=3$ باشد، لذا داریم:

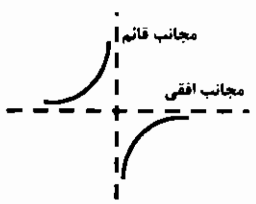
$$Max(xy)=3\times4=12$$

توابع هموگرافیک

توابعی به شکل: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را توابع هموگرافیک نامیم، این تابع دارای دو محور تقارن متعامد می‌باشد که از محل برخورد مجانبهای تابع می‌گذرند. شیب خطوط محور تقارن ۱ و ۱− می‌باشد و دارای مرکز تقارن که همان محل تلاقی مجانبها نیز هست، می‌باشد. مشتق اینگونه توابع به شکل $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ می‌باشد.



$(ad-bc<0)$



$(ad-bc>0)$

نکته ۲۸: اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $ad-bc<0$ باشد تابع اکیداً نزولی است. (در فواصل پیوستگی)

نکته ۲۹: محل برخورد مجانبهای تابع $x=-\frac{d}{c}$ (مجانب قائم) و $y=\frac{a}{c}$ (مجانب افقی) همان مرکز تقارن $w(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ می‌باشد.

مثال ۱۱۸ : محور تقارن و مرکز تقارن منحنی $y=\dfrac{8x+1}{2x+4}$ را بیابید.

پاسخ :

$$\left.\begin{array}{ll} x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{4}{2}=-2 & \text{مجانب قائم} \\ y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{8}{2}=4 & \text{مجانب افقی}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مرکز تقارن}} W(-2,4)$$

چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم کلی $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $(a'\neq 0, a\neq 0)$

۱) معادله مشتق اینگونه توابع یا دارای دو جواب است و یا اصلاً جواب ندارد.

۲) محل برخورد مجانبهای مایل و قائم تابع مرکز تقارن منحنی است.

۳) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع در صورت وجود در هوپیتال تابع یعنی خط $y=\dfrac{2ax+b}{a'}$ صدق می‌کنند و این خط از مرکز تقارن منحنی و نقاط max وmin نسبی تابع عبور می‌کند.

۴) اگر معادله تابع را طرفین و وسطین کنیم و برحسب x مرتب کنیم ، معادله درجه دومی خواهیم داشت که اگر دلتای این معادله را برابر صفر قرار دهیم ، معادله‌ای بدست خواهد آمد که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق خواهند بود.

مثال ۱۱۹ : اگر خط $y=2x-3$ از نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=\dfrac{ax^2+bx-1}{x-1}$ عبورکند ، $a-b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 4 ۳) -4 ۴) 2

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به نکات فوق هوپیتال تابع فوق از نقاط max و min تابع عبور می‌کند لذا داریم :

$$y=\frac{2ax+b}{1}=2x-3\rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}\rightarrow a-b=4$$

چند نکته در مورد نمودار توابعی به فرم کلی $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $(a'\neq 0)$

۱) این نوع توابع دارای مجانب مایل نیستند و فقط می‌توانند دارای مجانبهای قائم و افقی باشند .

۲) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع (در صورت وجود) در هوپیتال تابع یعنی $y=\dfrac{2ax+b}{2a'x+b'}$ صدق می‌کنند.

۳) حاصلضرب عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع برابر با نسبت دلتای صورت به دلتای مخرج می‌باشد: $y_{max}\cdot y_{min}=\dfrac{b^2-4ac}{(b')^2-4a'c'}$

۴) اگر معادله تابع را طرفین و وسطین کرده و برحسب x مرتب کنیم ، معادله درجه دومی بدست خواهد آمد که اگر دلتای معادلهٔ مذکور را مساوی صفر قرار دهیم ، معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق خواهند بود.

مثال ۱۲۰ : در تابع به معادله $y=\dfrac{x^2-2kx+6}{x^2-2x}$ ، k را چنان تعیین کنید که :

الف) مجموع عرضهای ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۶ باشد.

ب) حاصلضرب عرضهای ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۳ باشد.

پاسخ :

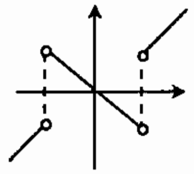
$$y=\frac{x^2-2kx+6}{x^2-2x}\rightarrow yx^2-2xy=x^2-2kx+6\rightarrow(y-1)x^2-2(y-k)x-6=0\rightarrow\Delta'=(y-k)^2+6(y-1)=0$$

$$y^2+k^2-2yk+6y-6=0\rightarrow y^2-(2k-6)y+k^2-6=0\rightarrow\begin{cases}2k-6=6\rightarrow k=6 & \text{حالت الف)}\\ k^2-6=3\rightarrow k=\pm 3 & \text{حالت ب)}\end{cases}$$

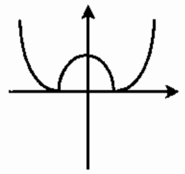
توجه:
در بعضی مسائل نمودار تابع f' و یا f'' داده می‌شود و در مورد تابع $f(x)$ سئوال می‌شود و یا بالعکس با توجه به نمودار f راجع به نمودار f' و f'' سئوال می‌شود در این قسمت مطالبی را در این زمینه بیان می‌کنیم .

حالت اول : اگر نمودار تابع $f(x)$ داده شود و نمودار تابع $f'(x)$ سئوال شود :

الف) اگر در نمودار تابع f نقاط زاویه‌دار و یا نقاط ناپیوستگی و یا نقاطی که در آن نقاط، تابع مماس قائم دارد، وجود داشته باشد آنگاه این نقاط در تابع مشتق بصورت نقاط ناپیوسته مشخص خواهند شد .

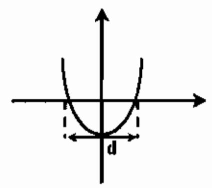


$y'=f'(x)$

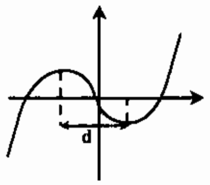


$y=f(x)$

ب) اگر تابع f در فاصله‌ای صعودی باشد مشتق درآن فاصله مثبت است (نمودار آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد) و اگر تابع f در فاصله‌ای نزولی باشد، مشتق درآن فاصله منفی است (نمودار آن زیر محورxها قرارمی‌گیرد)



$y'=f'(x)$



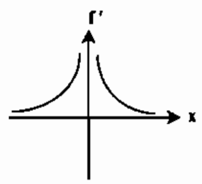
$y=f(x)$

حالت دوم : اگر نمودار f' داده شود و نمودار تابع $f(x)$ سئوال شود.

الف) در بازه‌هائی که نمودار f' صعودی است ، جهت تقعر در نمودار f به سمت بالاست و در بازه‌هائی که نمودار f' نزولی است ، جهت تقعر در نمودار f به سمت پائین است و نقاط اکسترمم نسبی تابع f' نقاط عطف تابع f می‌باشند.

ب) در فواصلی که $f'>0$ (f' بالای محورxهاست) است، تابع f صعودی است و در فواصلی که $f'<0$ (f' پائین محور xهاست) تابع f نزولی است و در نقاطی که نمودار f' محور xها را قطع می‌کند و از محور عبور می‌کند (طبیعتاً f' تغییر علامت خواهد داد) تابع f اکسترمم نسبی خواهد داشت.

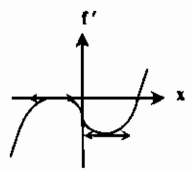
مثال ۱۲۱ : نمودار مشتق تابعی بصورت زیر می‌باشد . کدام گزینه در مورد تابع در $x=0$ صحیح است؟



۱) مینیمم دارد .
۲) ماکزیمم دارد .
۳) نقطه عطف دارد .
۴) $x=0$ نقطه عادی می‌باشد.

پاسخ : گزینه«۳» چون نمودار محورxها را قطع نکرده لذا تابع نمی‌تواند max و min داشته باشد . با توجه به اینکه $f'(0^+)=f'(0^-)=+\infty$ لذا مشتق در نقطه $x=0$ تغییر علامت ندارد ، لذا گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۲۲ : اگر نمودار f' به شکل زیر باشد در مورد تابع f کدام گزینه صحیح است؟



۱) دو نقطه عطف و یک ماکزیمم دارد.
۲) یک عطف یک ماکزیمم و یک مینیمم دارد.
۳) یک عطف و فاقد ماکزیمم و مینیمم است.
۴) دو نقطه عطف و یک مینیمم دارد.

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به بند الف حالت دوم نقاط اکسترمم نسبی f' نقاط عطف تابع f می باشند لذا تابع دارای دو نقطه عطف است اما تابع دارای یک اکسترمم نسبی می‌باشد (محور xها را نمودار قطع کرده) و با توجه به اینکه علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر یافته لذا نقطه مذکور مینیمم است.

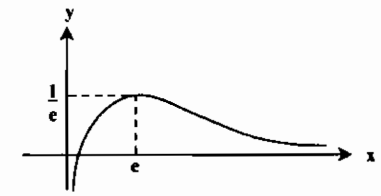
مثال ۱۲۳ : نمودارهای $y=f(x)=\dfrac{\operatorname{Ln}x}{x}$ و $y=c$ را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست هستند؟

۱) اگر $c\le 0$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند.
۲) اگر $0<c<\dfrac{1}{e}$ آنگاه دو نقطه تقاطع دارند.
۳) اگر $c>\dfrac{1}{e}$ آنگاه هیچ نقطه تقاطعی ندارند.
۴) اگر $0<c<\dfrac{1}{e}$ آنگاه یک نقطه تقاطع دارند.

پاسخ: گزینه «۴» جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	۰		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{۱}{e}$	↘	۰

بنابراین نمودار تابع f به شکل مقابل است و با توجه به شکل گزینه (۴)، گزینه موردنظر است.



دیفرانسیل تابع

اگر $y=f(x)$ در نقطه x مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(x).\Delta x$ را دیفرانسیل تابع f نامیده و آن را با df یا dy نمایش می‌دهیم.

برای Δxهای کوچک داریم: $\Delta y \sim dy$ و یا $y_۲ - y_۱ = f'(x).dx$

مثال ۱۲۴: در اندازه گیری شعاع یک کره به اندازه ۰/۰۱cm خطا رخ داده است. اگر شعاع کره ۲۰ cm باشد در محاسبه حجم این کره خطا چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($\pi = ۳$)

۱) ۰/۹۶ ۲) ۱۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲/۴

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول حجم کره $V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و دیفرانسیل‌گیری از طرفین رابطه داریم:

$$dv=\frac{۴}{۳}\pi r^۲ dr \xrightarrow[\text{خطای محاسبه حجم : dv}]{\text{خطای محاسبه شعاع : dr}} dv = ۴\times۳\times(۲۰)^۲\times\frac{۱}{۱۰۰}=۴۸cm^۳$$

کاربرد دیفرانسیل

بدست آوردن مقدار تقریبی بعضی عبارات از جمله کاربردهای دیفرانسیل می‌باشد برای این منظور ابتدا باید تابعی مناسب تعریف نمود، تعیین x و همچنین dx مناسب برای حل مسئله کاملاً ضروری می‌باشد.

مثال ۱۲۵: مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۲۶}$ را بدست آورید.

$f(x)=\sqrt[۳]{x}$, $x_۰=۲۷$, $dx=-۱$

$$dy=\frac{dx}{۳\sqrt[۳]{x_۰^۲}}=\frac{-۱}{۲۷}\approx -۰/۰۳۷$$

$$dy = y_۲-y_۱ \Rightarrow y_۲ = ۳-۰/۰۳۷=۲/۹۶۳$$

توضیح: $\varepsilon=|\Delta y-dy|$ مقدار خطا در محاسبات را برای ما روشن خواهد ساخت:

$$\Delta y = f(x_۰+\Delta x)-f(x_۰)$$

$$\Delta y = f(۲۶)-f(۲۷)=\sqrt[۳]{۲۶}-\sqrt[۳]{۲۷}=\sqrt[۳]{۲۶}-۳$$

مثال ۱۲۶: مقدار تقریبی $\sqrt{۱۴۶}$ را بصورت تقریبی بیابید و سپس با پیدا کردن مقدار Δy، مقدار خطا را در محاسبات مشخص کنید.

$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow x_۰=۱۴۴$, $dx=۲$

$$dy=\frac{dx}{۲\sqrt{x_۰}}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow y_۲-y_۱=dy\Rightarrow y_۲=y_۱+dy$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۴۶}=۱۲+\frac{۱}{۱۲}=۱۲/۰۸۳۳$$

$$\Delta y=f(x_۰+\Delta x)-f(x_۰)=\sqrt{۱۴۶}-\sqrt{۱۴۴}=۱۲/۰۸۳۰-۱۲=۰/۰۸۳۰$$

$$\Rightarrow \varepsilon=|\Delta y-dy|=|۰/۰۸۳۰-۰/۰۸۳۳|=۰/۰۰۰۳$$

مثال ۱۲۷: مقدار تقریبی $\sqrt[۵]{۳۶}$ به کمک دیفرانسیل کدام است؟

۱) ۲/۱۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۰۵ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ,\ x=۳۲\ ,\ dx=۴\\ dy=\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}dx=\frac{۴}{۵\sqrt[۵]{(۳۲)^۴}}=\frac{۴}{۵\sqrt[۵]{(۲^۴)^۵}}=\frac{۱}{۲۰}\end{cases}\Rightarrow y_۲=y_۱+dy=۲+\frac{۱}{۲۰}=۲/۰۵$$

مثال ۱۲۸: مقدار تقریبی Arccotg ۰/۹۹ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲۰۰}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲۰۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arccotg}x\ ,\ x=۱\ ,\ dx=-۰/۰۱\\ dy=-\frac{dx}{x^۲+۱}=-\frac{(-۰/۰۱)}{۱+۱}=\frac{۱}{۲۰۰}\end{cases}\Rightarrow y_۲=y_۱+dy=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲۰۰}$$

مثال ۱۲۹: مقدار تقریبی $\cos(۳۱^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳۶۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۱۸۰}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۳۶۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۱۸۰}$

پاسخ: گزینه «۳»

$f(x)=\cos x\ ,\ x=۳۰^\circ\ ,\ dx=۱^\circ$

$$dy=-\sin x\,dx\ ,\begin{cases} x=۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}\\ dx=۱^\circ=\frac{\pi}{۱۸۰}\end{cases}$$

$$\Rightarrow dy=-\sin\frac{\pi}{۶}\times\frac{\pi}{۱۸۰}=-\frac{\pi}{۳۶۰}\Rightarrow y_۲=y_۱+dy\Rightarrow y_۲=\cos\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳۶۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۳۶۰}$$

نکته ۳۰: از رابطه $\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{n.a^{n-1}}$ در حل بعضی مسائل میتوان استفاده نمود.

مثال ۱۳۰: مقدار تقریبی $\sqrt{۱۴۶}$ را مجدداً با استفاده از نکته فوق بدست آورید.

پاسخ: $a=۱۲\ ,\ n=۲\ ,\ b=۲\Rightarrow\sqrt{۱۴۶}\simeq۱۲+\frac{۲}{۲\times۱۲}=۱۲+\frac{۱}{۱۲}=۱۲/۰۸۳$

مثال ۱۳۱: مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{۸۰}$ کدام است؟

۱) ۲/۷۹۵ ۲) ۲/۹۷۲ ۳) ۲/۹۱۲ ۴) ۲/۸۹۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} a=۳\\ n=۴\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow\sqrt[۴]{۸۰}\approx۳+\frac{(-۱)}{۴\times۳^۳}\approx۲/۹۷۲....$$

نکته ۳۱: در توابع درجه دوم به صورت $y=ax^۲+bx+c$ حاصل $|\Delta y-dy|=(\Delta x)^۲$ می‌باشد.

مثال ۱۳۲: در تابع درجه دوم $y=x^۲+۳x-۱$ اگر x به اندازه ۰/۱ افزایش یابد، حاصل $\Delta y-dy$ کدام است؟

۱) ۰/۰۰۰۱ ۲) ۰/۰۰۱ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۰۱

پاسخ: گزینه «۴» $\Delta y-dy=(\Delta x)^۲=(\frac{۱}{۱۰})^۲=۰/۰۱$

مثال ۱۳۳ : نسبت تغییرات تابع $f(x)=\text{Arctg}x$ به تغییرات تابع $g(x)=\text{Ln}x$ در نقطه $x=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۳۴ : کدامیک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt[3]{9}$ می‌باشند؟

۱) ۲/۰۵ ۲) ۲/۰۶ ۳) ۲/۰۸ ۴) ۲/۱

پاسخ : گزینه «۳»

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\ ,\ x_0=8\ ,\ dx=1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{9}\approx\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\times 1=2+\frac{1}{12}\approx 2/08$$

مثال ۱۳۵ : نسبت تغییرات تابع $y_1=\sqrt{1+x^3}$ به تغییرات تابع $y_2=\sqrt[3]{x^2+4}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{y_1'}{y_2'}=\frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}}=\frac{\frac{12}{6}}{\frac{4}{12}}=6$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ اگر $f(a)=0$ و $f'(a)=4$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲ـ کدامیک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt{5}$ هستند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

۳ـ به فرض اینکه تابع تقاضا برای یک واحد صنعتی به صورت $p=8/25e^{-0/02q}$ باشد که در آن q و p به ترتیب میزان و قیمت فروش می‌باشد. حساب کنید در چه سطحی از فروش درآمد کل این واحد صنعتی حداکثر می‌گردد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $q=37$ ۲) $q=39$ ۳) $q=50$ ۴) $q=55$

۴ـ با کدامیک از شروط زیر حاصل‌ضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازاء جمیع مقادیر x صعودی است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $g(x)>0\ ,\ f(x)>0$ ۲) $g'(x)>0\ ,\ f'(x)>0$

۳) $g'(x)>0\ ,\ f'(x)>0\ ,\ g(x)>0\ ,\ f(x)>0$ ۴) $g''(x)>0\ ,\ f''(x)>0\ ,\ g(x)>0\ ,\ f(x)>0$

۵ـ در نقطه بحرانی، تابع $f(x)=2x.e^{4x}$ کدام وضع را دارد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) بازگشت ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) ماکزیمم

۶ـ ضریب $h''(x)$ در مشتق دوم عبارت $f\{g(h(x))\}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $f'\{g'(h(x))\}g\{h(x)\}$ ۲) $f'\{g(h(x))\}g'\{h(x)\}$ ۳) $f\{g'(h(x))\}g'\{h(x)\}$ ۴) $f\{g'(h(x))\}g\{h'(x)\}$

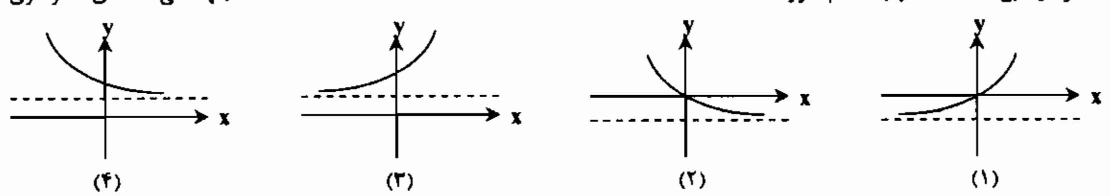
۷ـ ضریب زاویهٔ خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=\sqrt{t^2+1}\end{cases}$ در $t=2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ۳) $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۸ـ مقدار مشتق عبارت $\text{Arctg}x^2$ در $x=2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{4}{11}$ ۲) $\frac{4}{13}$ ۳) $\frac{4}{15}$ ۴) $\frac{4}{17}$

۹ـ نمودار تابع $y=e^x-1$ به کدام صورت است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)



۱۰ـ به ازای کدام مقادیر n، مبدأ مختصات یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $y=x^{3n-2}$ است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $n>\frac{2}{3}$ ۲) $n<1$ ۳) $n<\frac{3}{2}$ ۴) $n>2$

۱۱ـ اگر $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(1,1)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲ـ ماکسیمم تابع با ضابطه $y = |x^2 - 1|$ بر بازه $[-2, \frac{3}{2}]$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳ـ معادله خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2xe^{x^2} + 1$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = 2x - 1$ ۲) $y = 4x - 1$ ۳) $y = 2x + 1$ ۴) $y = 4x + 1$

۱۴ـ توابع f و g با ضوابط $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = e^x$ بر R چگونه‌اند؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) f نزولی و g صعودی است. ۲) f صعودی و g صعودی است.
۳) f و g هردو نزولی هستند. ۴) فقط g صعودی است.

۱۵ـ اگر $Ln2 = 0/7$ و $Ln5 = 1/6$ مقدار $Ln(0/01)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۴/۶- ۲) ۴/۷- ۳) ۳/۷- ۴) ۳/۶-

۱۶ـ جمعیت موریانه‌ها دریک لانه از آنها به نسبت تعداد آنها زیاد می‌شود. اگر در ۱۲ روز تعداد آنها دو برابر شود. ضریب رشد کدام است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{Ln2}{12}$ ۴) $\frac{Ln2}{6}$

۱۷ـ اگر ۲۰ درصد یک جسم رادیواکتیور در سال ناپدید شود، نیمه عمر این جسم رادیواکتیور چقدر است ؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱/۳۸۶ سال ۲) ۲/۲۳ سال ۳) ۳/۱۰۶۷ سال ۴) ۶/۹۳۱ سال

۱۸ـ اگر $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = \sqrt{x}$ مقدار مشتق $f(\frac{1}{x})$ به ازای $x = 1$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۹ـ از معادلهٔ $y^3 + y = x$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{-3}{32}$ ۲) $\frac{-3}{8}$ ۳) $\frac{3}{32}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۲۰ـ هر چه باشد $a > 0$ بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax - (1+a^4)x^2$ چقدر است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۲۱ـ در تابع با ضابطه $0 \le x \le 1$ ؛ $f(x) = Arctgx$ برابر قضیه مقدار میانگین عبارت $\frac{Arctgx}{x}$ در کدام فاصله است؟
(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $(1,\frac{3}{2})$

۲۲ـ تابع f در فاصله $[0,2]$ دو بار مشتق‌پذیر است، و $f(0) = f(2) = 0$ و برای هر $x \in [0,2]$ ، $f''(x) \neq 0$ در بازه $(0,2)$ کدام بیان درست است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) f ریشه ندارد. ۲) f' دو ریشه متمایز دارد. ۳) f حداقل یک ریشه دارد. ۴) f' ریشه ندارد.

۲۳ـ معادلهٔ $2x^5 + 5x^4 + 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۴ـ برای تابع f با ضابطه $f(x) = \cos^2 x + 2x + 5$ کدامیک از عبارات زیر در مورد معادله $f(x) = 0$ صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. ۲) حداقل یک ریشه حقیقی دارد.
۳) می‌تواند سه ریشه حقیقی داشته باشد. ۴) اصلاً ریشه حقیقی ندارد.

۲۵ـ اگر $f(a) = 0$ و $f'(a) = 8$ ، مقدار $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{2h}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۶ـ حجم یک مکعب به نسبت ۷ سانتی‌متر مکعب در دقیقه اضافه می‌شود. سطح کل مکعب وقتی طول ضلع آن ۱۲ سانتی‌متر است به چه نسبتی زیاد می‌شود؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۷ـ تابع f در نقطه $x = 1$ دارای مشتق مرتبه اول و دوم و سوم برابر صفر است و مشتق چهارم تابع f در $x = 1$ منفی است. نقطه $x = 1$ روی منحنی متناظر با چه نوع نقطه‌ای است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکسیمم ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) بازگشت

۲۸ـ ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکسیمم که درون یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد، کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۹ـ اندازه حجم مخروط با حجم ماکزیمم محاط در کره با شعاع R را به دست آورید: (عمرا ن ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{24\pi R^3}{27}$ ۲) $\frac{32\pi R^3}{81}$ ۳) $\frac{24\pi R^2}{27}$ ۴) $\frac{32\pi R^2}{81}$

۳۰ـ اگر داشته باشیم $x^2 - y^2 = 1$ آنگاه: (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $y''.y^3 - 1 = 0$ ۲) $y'.y + x = 0$ ۳) $y'.y + x^2 = 0$ ۴) $y''.y^3 + 1 = 0$

۳۱ـ مقدار C در قضیه مقدار میانگین در تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ در بازه $[-1,2]$ چیست؟ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ ۲) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ ۳) $\frac{4+\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$

۳۲ـ مشتق تابع روبرو را به دست آورید: $y = (\sin 2x)^{Lnx^2}$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{2(\sin 2x)^{Lnx^2}}{x}[Ln\sin 2x + x\cot g2x.Lnx^2]$ ۲) $\frac{2}{x}Ln\sin 2x + 2\cot g2x.Lnx^2$
۳) $(\sin 2x)^{Lnx^2}[\cos 2x + \frac{2}{x}]$ ۴) $\frac{2}{x}(2\cos 2x).(\sin 2x)^{Lnx^2}$

۳۳ـ اگر طول یک مستطیل $15m$ و در حال افزایش با نرخ $3\frac{m}{s}$ بوده و عرض آن $6m$ و در حال کاهش با نرخ $2\frac{m}{s}$ باشد، در این صورت نرخ تغییر مساحت این مستطیل $(\frac{m^2}{s})$ ...... و در حال ...... است. (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۲ ، کاهش ۲) ۴۸ ، کاهش ۳) ۱۲ ، افزایش ۴) ۴۸ ، افزایش

۳۴ـ اگر $f(1) = 10$ و به ازای $1 \le x \le 4$ داشته باشیم $f'(x) \ge 2$ در این صورت مقدار ممکن برای $f(4)$ برابر است با ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۳۵ـ تابع $f(x) = (x-1)|x-1| + |x-2|$ ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) فقط در نقاط $x = 1,2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ۲) فقط در نقطهٔ $x = 2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳) در تمام نقاط مشتق‌پذیر است. ۴) فقط در نقطهٔ $x = 2$ مشتق‌پذیر است.

۳۶ـ $-1 \le f'(x) \le 1$ باشد، کدام نامساوی درست است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(x) - f(a) \ge x - a$ ۲) $|f(x) - f(a)| \ge |x - a|$ ۳) $f(x) - f(a) \le x - a$ ۴) $|f(x) - f(a)| \le |x - a|$

۳۷ـ قانون حرکت جسمی بر روی خط راست $S = t^3 - 4t^2 - 3t$ است. شتاب این متحرک در لحظه‌ای که سرعت به صفر برسد کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۸ـ شیب خط مماس بر $x^2y+xy^2=10$ درنقطه $(1,2)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) -6 ۲) -13 ۳) $-\frac{14}{13}$ ۴) در این نقطه خط مماس ندارد.

۳۹ـ فرض کنید $f(x)=\mathrm{Ln}x$ و $fog(x)=x\mathrm{Ln}x$ در این صورت $g'(2)$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $4\mathrm{Ln}2$ ۲) $2+\mathrm{Ln}2$ ۳) $2\mathrm{Ln}2$ ۴) $4(1+\mathrm{Ln}2)$

۴۰ـ اگر $f'(2)$ وجود داشته باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(2)-f'(2)$ ۲) $f'(2)-2f(2)$ ۳) $f(2)-2f'(2)$ ۴) $f'(2)-f(2)$

۴۱ـ اگر داشته باشیم $\mathrm{Ln}(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{x}{y}=0$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{x+y}{x-y}$ ۲) $\frac{2y}{x}$ ۳) $\frac{x+y}{x-1}$ ۴) $x+y$

۴۲ـ اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد معادله $x^n+nx+1=0$ دارای .... (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) دقیقاً یک ریشه است. ۲) حداکثر یک ریشه است. ۳) یک ریشه مکرر است. ۴) n ریشه است.

۴۳ـ مشتق $y=\arcsin(\mathrm{Ln}x)$ در نقطهٔ $x=\sqrt{e}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $\sqrt{3e}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3e}}$

۴۴ـ در مورد تابع با ضابطه $f(x)=e^x+x-\cos x$ چه می‌توان گفت؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) یک ماکسیمم و دو می‌نیمم دارد. ۲) نزولی است.
۳) دو می‌نیمم و یک ماکسیمم دارد. ۴) صعودی اکید است.

۴۵ـ اگر f تابعی با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^x & x>0 \\ 1 & x=0 \\ 1+e^{-\frac{1}{x^2}} & x<0 \end{cases}$ باشد، f چند نقطه بحرانی و چند اکسترمم دارد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) یک نقطه بحرانی و یک اکسترمم ۲) دو نقطه بحرانی و یک اکسترمم
۳) نقطه بحرانی و اکسترمم ندارد. ۴) دو نقطه بحرانی و دو اکسترمم

۴۶ـ ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر $2r$ محاط است، به طوری که قاعدهٔ ذوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است. ارتفاع ذوزنقه چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ ۳) $\frac{3}{2}r$ ۴) $\frac{3}{4}r$

۴۷ـ اگر $f(x)=\sinh^{-1}(\mathrm{tg}x)$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۴۸ـ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع x و y برابر $\sqrt{5}$ است بیشترین مقدار $x+y$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) 3 ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{16}{5}$ ۴) $\sqrt{10}$

۴۹ـ مختصات نقطه مینیمم نسبی تابع با ضابطه $y=\frac{4\mathrm{Ln}^2x}{x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(1,0)$ ۲) $(e,\frac{4}{e})$ ۳) $(\frac{1}{e},-\frac{4}{e})$ ۴) $(\frac{-1}{e},-4e)$

۵۰ـ گاز به درون یک بالن کره‌ای شکل به نسبت ۵ متر مکعب در دقیقه دمیده می‌شود. وقتی شعاع کره ۳ متر است. شعاع آن با چه نسبتی در دقیقه زیاد می‌شود؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{5}{36\pi}$ ۲) $\frac{5}{30\pi}$ ۳) $\frac{5}{36}$ ۴) $\frac{5}{30}$

۵۱ـ یک نقطه در امتداد منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ به نوعی حرکت می‌کند که مؤلفهٔ x آن در هر دقیقه ۳ واحد افزایش می‌یابد. وقتی $x=1$ مؤلفه y آن به چه نسبتی در دقیقه تغییر می‌کند؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ واحد ۲) $\frac{2}{3}$ واحد ۳) $\frac{3}{2}$ واحد ۴) ۳ واحد

۵۲ـ معادله $3x=2^x$ در کدام بازه جواب دارد؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(0,1)$

۵۳ـ اگر داشته باشیم $y=(x^2+1)^{e^x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $x=1$ کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $2(2)^{2e-1}$ ۲) $2^e(2)^{e-1}$ ۳) $2^e.e(\mathrm{Ln}2+1)$ ۴) $(2e)^e(\mathrm{Ln}2-1)$

۵۴ـ اگر $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=\frac{1}{t} \end{cases}$ باشد، $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=1$ کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۵۵ـ کدام مورد درباره تابع f به معادله $y=\cosh x$ نادرست است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) زوج ۲) محدب ۳) دارای نقطه عطف ۴) دارای می‌نیمم

۵۶ـ اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود ارزش فعلی ۱ میلیون ریال با نرخ سود ۲۰٪ در طی ۵ سال برابر کدام است؟

(مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $2(10)^6$ ۲) $e(10)^6$ ۳) $\frac{1}{2}(10)^6$ ۴) $\frac{1}{e}(10)^6$

۵۷ـ اگر $\mathrm{Ln}\frac{x+y}{x-y}=3$ باشد حاصل $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{y}{x}$ ۲) $\frac{-x}{y}$ ۳) $\frac{x}{y}$ ۴) $\frac{-y}{x}$

۵۸ـ مشتق تابع $y=\mathrm{Arctg}\sqrt{x}$ در $x=1$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 4

۵۹ـ با فرض $x^2+2xy+4y^2=3$، $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $x=1$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) 3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) 1

۶۰ـ اگر $f(x)=xe^{2x}$ باشد، مشتق مرتبه nام این تابع به ازاء $x=0$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $n.2^n$ ۲) $n\times 2^{n-1}$ ۳) 2^n ۴) 1

۶۱ـ اگر نرخ رشد جمعیت پیوسته باشد با نرخ ۲٪ تعداد ۱۰۰ نفر در جامعه پس از ۵۰ سال به چه تعدادی خواهد رسید؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $100e^2$ ۲) $100e$ ۳) $200e$ ۴) $200e^2$

۶۲ـ در معادله $x^2+y^2=xy+1$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

۶۳ـ مشتق تابع $f(x)=[x]\cos x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) ندارد.

۶۴ـ مشتق nام تابع $y=\sin x$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\cos(x+n\frac{\pi}{2})$ ۲) $\sin(x+n\frac{\pi}{2})$ ۳) $-\sin(x+n\frac{\pi}{2})$ ۴) $-\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

۶۵ـ اگر $f(x)=\frac{|x|}{1+|x|}$ آنگاه $f'(0)$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) وجود ندارد.

۶۶ـ فرض کنید f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $f'(x_0)$ ۲) $2f'(x_0)$ ۳) $\frac{1}{2}f'(x_0)$ ۴) حد وجود ندارد.

۶۷ـ اگر $f(x)=x^2-3x+1$ در کدام نقطه در $[0,2]$ مماس بر نمودار تابع، موازی پاره خط واصل بین نقاط $(0,f(0))$، $(2,f(2))$ است؟
(MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

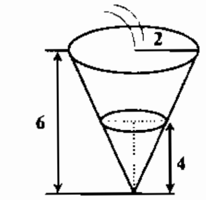
۶۸ـ فرض کنید $f(0)=0$ و $f'(0)=2$ مشتق $f(f(f(f(x))))$ در $x=0$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) 2 ۲) 4 ۳) 8 ۴) 16

۶۹ـ فرض کنید $f(1-x^2)=4x^2$، آنگاه $f'(9)$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۷۰ـ در یک مخزن آب که به شکل مخروط است و رأس مخروط به طرف پائین قرار دارد، آب با سرعت ۰/۵ مترمکعب در دقیقه وارد می‌شود. اگر ارتفاع مخزن ۶ متر و شعاع قاعده آن ۲ متر باشد، ارتفاع آب وقتی به ۴ متری برسد، با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟
(MBA ـ سراسری ۸۱)



۱) $\frac{9}{8\pi}$ ۲) $\frac{9}{32\pi}$ ۳) $\frac{9}{16\pi}$ ۴) $\frac{3}{32\pi}$

۷۱ـ نردبانی که طول آن ۱۳ متر است کنار دیوار قرار دارد. لحظه‌ای که سر نردبان از زمین ۱۲ متر فاصله دارد و پای نردبان از دیوار ۵ متر فاصله دارد، سر نردبان با سرعت ۳ متر در ثانیه سقوط می کند، پای نردبان با چه سرعتی از دیوار دور می‌شود؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

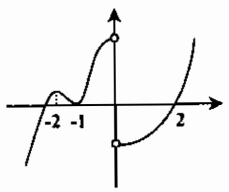
۷۲ـ نقطه $(0,0)$ برای تابع $f(x)=e^{x^3}-1$ چه نقطه‌ای است؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) زاویه‌دار

۷۳ـ زاویه بین نیم مماس چپ و نیم مماس راست برای تابع $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}x & x\ge 0 \\ \frac{x}{\sqrt{3}}\cos x & x<0 \end{cases}$ در مبدا برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{11\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۴ـ نمودار مشتق تابع f مطابق شکل است. اگر f پیوسته باشد و از مبدا بگذرد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
(MBA ـ سراسری ۸۱)



۱) تابع f دارای ۲ مینیمم نسبی است ولی ماکزیمم نسبی ندارد.

۲) تابع f در فاصله $(0,+\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.

۳) مبدا نقطه می‌نیمم نسبی است.

۴) تابع f بر بازه $(-3,-2)$ صعودی اکید است.

۷۵ـ کدام گزینه زیر در مورد تعداد قائمهائی که بر نمودار $x=y^2$ از نقطه $(\alpha,0)$ می‌توان رسم کرد، درست است؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) اگر $\alpha<\frac{1}{2}$ قائمی نمی‌توان رسم کرد. ۲) اگر $\alpha\ge\frac{1}{2}$ حداقل سه قائم می‌توان رسم کرد.

۳) برای $0<\alpha<\frac{1}{2}$ حداقل دو قائم می‌توان رسم کرد. ۴) برای $\alpha>\frac{1}{2}$ دقیقاً سه قائم می‌توان رسم کرد.

۷۶ـ اگر $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>0 \\ 1 & x=0 \\ -\cos x & x<0 \end{cases}$ و $f(x)=xg(x)$ در این صورت: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و $f'(0)=1$ ۲) f در $x=0$ ناپیوسته است.

۳) f در $x=0$ دارای مماسی به معادله $y+x=0$ است. ۴) f در $x=0$ مشتق ناپیوسته دارد.

۷۷ـ مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x(x-1)(x-2)^2}$ در $x=3$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) -17 ۲) $-\frac{11}{36}$ ۳) $\frac{17}{36}$ ۴) $-\frac{17}{36}$

۷۸ـ معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\int_x \sqrt{1+t^2}\,dt$ در نقطه‌ای به طول صفر برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=x+1$ ۲) $y+x=1$ ۳) $y=x$ ۴) $y+x=0$

۷۹ـ $\frac{dy}{dx}$ را برای $y=x[\sin(Lnx)+\cos(Lnx)]$ به دست آورید. (ریاضی ـ آزاد ۸۱)

۱) $-2\sin(Lnx)$ ۲) $2\cos(Lnx)$ ۳) $\frac{\cos(Lnx)}{x}-\frac{\sin(Lnx)}{x}$ ۴) $-2x\sin(Lnx)$

۸۰ـ ماکزیمم تابع f با ضابطه $f(x)=(\frac{1}{x})^x$ برابر است با .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) e^e ۲) $(\frac{1}{e})^e$ ۳) $(e)^{\frac{1}{e}}$ ۴) $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

۸۱ـ اگر $f(x)=(2x^2-4x+1)^{60}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 60 ۳) 120 ۴) 240

۸۲ـ مقدار مشتق عبارت $\sinh^2 2x$ در $x=1$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $2e^2-e^{-2}$ ۲) $2e^4-e^{-4}$ ۳) e^2-e^{-2} ۴) e^4-e^{-4}

۸۳ـ مشتق هر تابع زوج تابع .... و مشتق هر تابع فرد تابع .... است.

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) زوج ـ فرد ۲) زوج ـ زوج ۳) فرد ـ زوج ۴) فرد ـ فرد

۸۴ـ آهنگ افزایش جمعیت یک شهر متناسب با جمعیت آن است. اگر جمعیت یک شهر در سال ۱۳۴۰ برابر ۴۰۰۰۰ و در سال ۱۳۷۰ برابر ۶۰۰۰۰ بوده باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۰ چند نفر است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۸۰۰۰ ۲) ۸۵۰۰۰ ۳) ۹۰۰۰۰ ۴) ۹۵۰۰۰

۸۵ـ خط مماس از مبدأ بر نمودار تابع $y = \operatorname{Ln}\sqrt{x}$ در نقطه (x_0, y_0) بر منحنی مماس است، y_0 کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۶ـ مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر ۹ است. حاصل‌ضرب این دو عدد وقتی حاصل‌ضرب یکی در مربع دیگری ماکسیمم باشد، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۸ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۸۷ـ ماکسیمم تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\operatorname{Ln}x}{x}$ $(x > 0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e

۸۸ـ در مورد ریشه‌های حقیقی $x^7 + 2x + c = 0$ که در آن c مقدار ثابت است کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) ریشه حقیقی ندارد. ۲) فقط سه ریشه حقیقی دارد. ۳) فقط یک ریشه حقیقی دارد. ۴) فقط پنج ریشه حقیقی دارد.

۸۹ـ اگر $f(x) = |\sin x|$، $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

۹۰ـ اگر $y = \frac{e^{2x} + x}{x + 2}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (مهندسی معدن، اکتشاف و استخراج معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۹۱ـ مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در $x = -8$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{64}$

۹۲ـ مشتق تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x - 5}{3x + 1}}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{17}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-5)^{\frac{3}{2}}}$ ۲) $\frac{-17}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-5)^{\frac{3}{2}}}$ ۳) $\frac{17}{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}(2x-5)^{\frac{1}{2}}}$ ۴) $\frac{-17}{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}(2x-5)^{\frac{1}{2}}}$

۹۳ـ مقدار $\frac{dy}{dx}$ از رابطه $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{y - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$ ۲) $\frac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$ ۳) $\frac{y - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + x}$ ۴) $\frac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$

۹۴ـ مقدار $\frac{dy}{dx}$ از رابطه $\operatorname{Ln}(xy) + x + y = 2$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{xy + y}{xy + x}$ ۲) $-\frac{xy + y}{xy + x}$ ۳) $\frac{xy - y}{xy + x}$ ۴) $\frac{xy + y}{xy - x}$

۹۵ـ حد $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) ۹ ۲) ۱۲− ۳) ۳ ۴) ۶−

۹۶ـ تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$ در نقطه $x = 1$ و نقطه $x = 8$ به ترتیب دارای: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) یک ماکزیمم و یک نقطه عطف است. ۲) یک می‌نیمم و یک نقطه عطف است.
۳) یک نقطه عطف و یک ماکزیمم است. ۴) یک می‌نیمم و یک ماکزیمم است.

۹۷ـ کره‌ای به شعاع b مفروض است. استوانه‌ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h قرار است در داخل این کره محاط کنیم. مقادیر R و h‌ای که بزرگترین حجم را برای استوانه حاصل خواهند ساخت کدامند؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $R = b\sqrt{\frac{3}{2}}$، $h = \frac{2b}{\sqrt{3}}$ ۲) $R = b\sqrt{\frac{3}{2}}$، $h = \frac{3b}{\sqrt{2}}$ ۳) $R = b\sqrt{\frac{2}{3}}$، $h = \frac{3b}{\sqrt{2}}$ ۴) $R = b\sqrt{\frac{2}{3}}$، $h = \frac{2b}{\sqrt{3}}$

۹۸ـ فرض کنید که قطر یک مکعب با سرعت ۳ اینچ در دقیقه در حال افزایش باشد سرعت افزایش طول هر ضلع این مکعب در دقیقه برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\sqrt{2}$ اینچ در دقیقه ۲) $\sqrt{3}$ اینچ در دقیقه ۳) ۲ اینچ در دقیقه ۴) ۳ اینچ در دقیقه

۹۹ـ یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به صورت نمایی وزن کم می‌کند. به عنوان مثال جسم ۲۰۰ گرمی پس از یک ساعت به ۵۰ گرم می‌رسد. بعد از سه ساعت چه مقدار از این جسم باقی خواهد ماند؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲۵ گرم ۲) ۵۰ گرم ۳) ۳/۱۲۵ گرم ۴) ۵۰/۹ گرم

۱۰۰ـ پولی را در نظر بگیرید که در هر ۸ سال ۵ برابر بشود. فرض کنید که صاحب پول به این پول واگذاری تا ۲۴ سال دست نزند. اگر در پایان ۲۴ سال ۱۰۰۰۰ واحد پول به صاحب پول بدهند، اصل پول شخص چقدر بوده است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) ۸۰ واحد پول ۲) ۶۶۶/۶۷ واحد پول ۳) ۲۰۰۰ واحد پول ۴) ۴۰۰ واحد پول

۱۰۱ـ تابع $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۱۰۲ـ ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در نقطهٔ (x, y) عبارتست از $3x^3y^2$ و منحنی از نقطهٔ $(2, 1)$ می‌گذرد. عرض نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۸− ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۸

۱۰۳ـ زاویه بین منحنی‌های $y = x^2 + 1$ ، $y = \cos x$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰۴ـ اگر $f(x) = (5 + x^3)e^{\sin x}$ مقدار $(f^{-1})'(5)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۰۵ـ معادلهٔ $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$ در کدام فاصله فاقد ریشه است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $(1, +\infty)$ ۲) $(2, +\infty)$ ۳) $(3, +\infty)$ ۴) $(4, +\infty)$

۱۰۶ـ ماکسیمم تابع، $f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 2|}$ ، $x \in \mathbb{R}$، کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۱۰۷ـ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1 - x^3 & x < 0 \end{cases}$ باشد، $(f^{-1})(-1)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۸ـ اگر برای $x \geq 0$ داشته باشیم $2x \leq f(x) \leq x^2+1$ مقدار $f'(1)$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۱۰۹ـ تابع $f(x)=xe^{-x}$ و $x \geq 0$ را در نظر بگیرید، کدامیک از گزینه‌های زیر بهترین کران را برای f می‌دهد؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $0 \leq f(x) \leq e^{-1}$ ۲) $1 \leq f(x) \leq e$ ۳) $0 \leq f(x) \leq e$ ۴) $0 \leq f(x) \leq e^{-\frac{1}{2}}$

۱۱۰ـ فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر بر R باشند. کدامیک از گزاره‌های زیر اشتباه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) ممکن است همه‌جا $f<g$ ، $f'>g'$

۲) ممکن است همه‌جا $f>0$ ، $f'<0$ ، $f''>0$

۳) ممکن است همه‌جا $f''<0$ ، $f'>0$ ، $f>0$

۴) اگر $f'=g'$ و $f(x_0)=g(x_0)$ به ازای یک x_0، آنگاه $f=g$.

۱۱۱ـ فرض کنید f تابعی منفی و f'' بر $(0,1)$ موجود باشد. اگر $f(x)$ حداقل به ازای دو مقدار x در $(0,1)$ برابر صفر شود، آنگاه معادله $f''(x)=0$ در $(0,1)$ چند ریشه دارد؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) حداکثر یک ریشه ۲) حداقل دو ریشه ۳) دقیقاً دو ریشه ۴) ریشه ندارد.

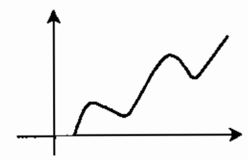
۱۱۲ـ اگر F در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $2af'(a)-a^2f(a)$ ۲) $a^2f(a)-2af'(a)$ ۳) $2af'(a)-2af(a)$ ۴) $2af(a)-a^2f'(a)$

۱۱۳ـ اگر به ازاء تابع f، f'' موجود باشد آنگاه f'' زوج است به شرط آنکه: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) f زوج باشد. ۲) f فرد باشد. ۳) f و f' زوج باشند. ۴) f و f' فرد باشند.

۱۱۴ـ برای منحنی $y=f(x)$، با نمودار زیر $f'(x)=0$ چند جواب دارد؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۵ـ اگر $0<a<1$ و $f(x)=xa^x$. به ازای چه مقادیری از x ، f نزولی است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x>-\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ ۲) $x<-\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ ۳) $x>-\mathrm{Ln}a$ ۴) $x<-\mathrm{Ln}a$

۱۱۶ـ اگر $f(x)=(\sin\frac{\pi}{2}x)^n(\cos\pi x)^m$ و $m,n>1$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\pi(\frac{\pi}{2}-m)$ ۴) $\pi(n+m)$

۱۱۷ـ مشتق عبارت $\sinh^2x+\cosh^2x$ در $x=\frac{1}{2}$ چقدر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $e+\frac{1}{e}$ ۲) e^2+1 ۳) $\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) $\frac{e^2+e^{-2}}{2}$

۱۱۸ـ آهنگ افزایش شعاع یک دایره ۲ سانتی‌متر بر ثانیه است، آهنگ افزایش مساحت آن چه موقع π سانتی‌متر بر ثانیه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) هنگامی که شعاع آن ۰/۲۵ سانتی‌متر است.

۲) هنگامی که شعاع آن ۰/۵ سانتی‌متر است.

۳) هنگامی که شعاع آن ۱ سانتی‌متر است.

۴) هنگامی که شعاع آن π سانتی‌متر است.

۱۱۹ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $x\sin y+y\sin x=\pi$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{2}$ واقع بر منحنی کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x+y=0$ ۲) $y=x$ ۳) $x+y=\pi$ ۴) $x+y=\frac{\pi}{2}$

۱۲۰ـ مجموع دو عدد یک است و مجموع مکعبات این دو عدد می‌نیمم است، حاصل‌ضرب این دو عدد چقدر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{4}{25}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۱ـ تابع $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+3}$ مفروض است. کدامیک از ادعاهای زیر برای این تابع کاملاً مصداق دارد؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۲)

۱) این تابع دارای یک مجانب $y=2$، یک نقطه می‌نیمم و دو نقطه عطف دارد.

۲) این تابع دارای یک مجانب افقی و سه نقطه می‌نیمم است.

۳) این تابع دارای دو نقطه می‌نیمم است.

۴) این تابع دارای دو نقطه عطف و یک می‌نیمم است ولیکن مجانب افقی ندارد.

۱۲۲ـ تابع $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$ مفروض است. کدامیک از گزاره‌های ذیل در مورد این تابع صادق است؟ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) در نقطه $x=0$ ناپیوسته است. یک نقطه می‌نیمم و یک نقطه عطف دارد.

۲) یک نقطه می‌نیمم و یک نقطه ماکزیمم دارد.

۳) در نقطه $x=0$ مشتق ندارد و یک نقطه ماکزیمم دارد.

۴) در نقطه $x=0$ یک مجانب عمودی دارد و فقط یک نقطه عطف دارد و نقاط می‌نیمم و ماکزیمم ندارد.

۱۲۳ـ در مورد معادله $x^2-x\sin x-\cos x=0$ می‌توان گفت: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) فقط یک جواب دارد. ۲) بیش از دو جواب دارد. ۳) فقط دو جواب دارد. ۴) اصلاً جواب ندارد.

۱۲۴ـ حجم استوانه محاط در مخروط قائم حداکثر چند برابر حجم آن مخروط است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{16}{27}$

۱۲۵ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=e^{x^2-1}$ در $x=1$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=2x+1$ ۳) $y=2e^x-2$ ۴) $y=2e(x-1)+1$

۱۲۶ـ اگر $f'(\mathrm{tg}x)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}2x$ باشد، مشتق $f(\sin x)$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) $\mathrm{tg}x$ ۴) $\frac{x}{1-x^2}$

۱۲۷ـ اگر $\begin{cases}x=(t+2)e^t\\ y=t^2e^t\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t=3$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۲۸ـ اگر $\begin{cases}x=\sec t\\ y=\tan t\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=\frac{\pi}{4}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

۱۲۹ـ فرض کنید $u=(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ و $v=3x^2-2x$ ، ضابطهٔ $\frac{du}{dv}$ به عنوان تابعی از x کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}\ ,\ x\neq\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x^2+9}}$

۳) $\frac{1}{4(3x-1)\sqrt{x^2+9}}\ ,\ x\neq\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2x(3x-1)}{\sqrt{x^2+9}}$

۱۳۰ـ اگر $x\neq 0$ ، مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=3x^5+6x^4-12x^3+7$ نسبت به x^3 کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $5x^2+8x-12$ ۲) $5x^4+8x^3-12x^2$ ۳) $15x^4+24x^3-36x^2$ ۴) وجود ندارد.

۱۳۱ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی با معادلهٔ $y=x^x$ در نقطه‌ای به طول ۲ از آن محور xها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طولش برابر است با:
(آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $2\ln 2$ ۲) $1+\ln 2$ ۳) $\frac{1}{1+\ln 2}$ ۴) $\frac{1+2\ln 2}{1+\ln 2}$

۱۳۲ـ در یک ذوزنقه، قائم‌الزاویه به اندازه ساق غیرقائم ۷ واحد و اندازه قاعده‌ها ۲ و ۴ واحد است، نقطه M بر روی ساق قائم متحرک است، کمترین مجموع فاصله‌های M از دو رأس غیر قائم چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $7\sqrt{2}$

۱۳۳ـ سرعت متحرکی در هر لحظه برابر $V=\frac{dx}{dt}=\sqrt{x}$ است، شتاب آن کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴ـ از معادله $y^3+y=x$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-3}{16}$ ۲) $\frac{-5}{32}$ ۳) $\frac{-3}{32}$ ۴) $\frac{-1}{16}$

۱۳۵ـ فاصله نقطه می‌نیمم نسبی منحنی تابع $y=x^2e^{-x}$ از خط مجانب آن چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۶ـ نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار این جمعیت است، اگر این نسبت دائماً برقرار باشد، با گذشت چند سال این جمعیت دو برابر می‌شود $(\ln 2=0/69)$ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۵۷/۵

۱۳۷ـ اگر $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{d}{dx}[\cosh(\ln\frac{1}{x})]$، مقدار A کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $+\infty$

۱۳۸ـ اگر $f(x)=2^{\sin x}+x2^x$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)+h}{2h}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1+\ln 2$ ۳) $\frac{1}{2}+\ln 2$ ۴) $\frac{3}{2}+\ln 2$

۱۳۹ـ اگر $f(x)=(2+x^2)e^x$ مقدار $(f^{-1})'(2)$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $22e^2$ ۴) $\frac{1}{22e^2}$

۱۴۰ـ اگر $f(x)=x^{\sin \pi x}$ مقدار $f'(1)$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) ۰ ۴) -2π

۱۴۱ـ اگر $f(1)=1$ و $f'(1)=3$ باشد و $g(x)=\frac{f(x^2)}{1+x^2}$ آنگاه $g'(1)$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

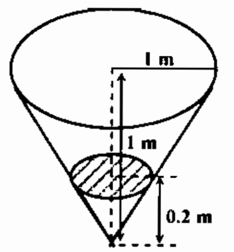
۱۴۲ـ زاویه بین دو منحنی $y=e^x$ و $y=1-x^2$ در نقطه $x=0$ برابر است با:
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۴۳ـ بیشترین مساحت از بین مستطیل‌ها محاط در بیضی به معادله $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ کدامست؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۴۴ـ در یک مخزن مخروطی شکل با ارتفاع یک متر و شعاع قاعده یک متر مایعی را به سرعت ۲ لیتر در دقیقه وارد می‌کنیم. در لحظه‌ای که مایه در ارتفاع ۲۰ سانتی قرار دارد، سرعت افزایش ارتفاع مایع چند متر در دقیقه است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{1}{20\pi}$
۲) $\frac{1}{15\pi}$
۳) $\frac{1}{10\pi}$
۴) $\frac{2}{15\pi}$

۱۴۵ـ چنانچه $x=\frac{t^2-1}{\sqrt{t+1}}$ و $y=e^{\frac{t-3}{t+1}}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ به ازای $t=3$ برابر کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۴۶ـ در داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{6}$ استوانه‌ای با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم. شعاع قاعده استوانه کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

۱۴۷ـ تابع f به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin(\frac{1}{x}) & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد تابع f درست است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است.
۲) تابع f در همه نقاط به جز مبداء مشتق‌پذیر است.
۳) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ نزولی است.
۴) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ صعودی است.

۱۴۸ـ در صورتی که $f'(4)=3$, $g(4)=4$ ، $g(x)\neq 4$ به ازای $x\neq 4$ و $g'(4)$ موجود باشد، آنگاه: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

$$\lim_{x\to 4}\frac{f[g(x)]-f(4)}{\sqrt{g(x)}-2}$$

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) $12g'(4)$

۱۴۹ـ اگر تابع f در صفر مشتق‌پذیر بوده و $g(x)=f(x\cos x+2^x\sin x)$ مقدار $g'(0)$ کدام است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}f'(0)$ ۳) $f'(0)$ ۴) $2f'(0)$

۱۵۰ـ بزرگترین مقدار حجم استوانه‌هایی که مجموع محیط قاعده و ارتفاع آنها برابر ۱۲ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر مکعب است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{36}{\pi}$ ۲) $\frac{48}{\pi}$ ۳) $\frac{56}{\pi}$ ۴) $\frac{64}{\pi}$

۱۵۱ـ اگر تابع $f(x)=(|\sin x|)^x$ ، $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۴) $-e^{\frac{\pi}{2}}$

۱۵۲ـ تابع f در رابطه $f(x)=\begin{cases}x^2-\ln x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) تابع f تنها دو نقطه مینیمم نسبی دارد. ۲) تابع f دارای نقطه عطف است.

۳) معادله $f(x)=\frac{\pi}{2}$ دو ریشه حقیقی دارد. ۴) معادله $f(x)=x$ سه ریشه حقیقی دارد.

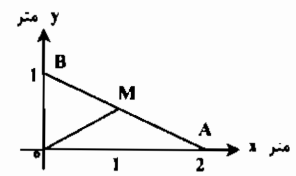
۱۵۳ـ تابع f در رابطه $f(x)=\sqrt{x}+e^{ax}$ صدق می‌کند. اگر $x=1$ طول نقطه عطف منحنی باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) ۰ ۲) $1+\frac{1}{4a^2}$ ۳) $1+\frac{1}{4a}$ ۴) $1+\frac{1}{2a^2}$

۱۵۴ـ در شکل زیر ذره M با سرعت $2\sqrt{5}$ متر بر ثانیه پاره‌خط AB را طی می‌کند. سرعت مؤلفه افقی آن وقتی به وسط مسیر می‌رسد چند متر بر ثانیه است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)



۱) ± 2 ۲) ± 5 ۳) ± 4 ۴) ± 10

۱۵۵ـ اگر آهنگ تغییر کمیت x در رابطه $\frac{dx}{dt}=-2x+1$ صدق کند و داشته باشیم $x^2+y^2=5y$. آهنگ تغییر y وقتی $x=2$ است، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $(4,0)$ ۲) $(-4,-1)$ ۳) $(4,2)$ ۴) $(-4,4)$

۱۵۶ـ توابع f و g مشتق‌پذیرند به طوریکه $\begin{cases}f(2)=3\\ f'(2)=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}g(2)=-5\\ g'(2)=2\end{cases}$ مقدار عددی $(\frac{g}{f})'$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{-3}{5}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) صفر ۴) $\frac{-6}{5}$

۱۵۷ـ اگر $y=(\cos 2x)^{\frac{2}{3}}$ باشد، حاصل $(y''+9y)\cos^2 2x$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $3y$ ۲) $2y'$ ۳) yy' ۴) $y+y'$

۱۵۸ـ تقعر منحنی تابع $y=\ln(8x-x^2)$ روی بازه (a,b) همواره رو به پایین است. بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ∞

۱۵۹ـ مینیمم تابع با ضابطه $y=e^{2x}+e^{-2x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۶۰ـ در کدام نقطه نمودار تابع $f(x)=(x^2)^x$ دارای مینیمم نسبی است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $x=-e$ ۲) $x=-\frac{1}{e}$ ۳) $x=\frac{1}{e}$ ۴) $x=e$

۱۶۱ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطه $y=x^{2x}+e^{2\ln x}$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $x+4y=9$ ۲) $4x+y=4$ ۳) $4x-y=2$ ۴) $x-4y=9$

۱۶۲ـ اگر $x^2y-e^{2x}=\sin y$ ، آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2e^{2x}-2xy}{x^2-\sin y}$ ۲) $\frac{2e^{2x}-2xy}{x^2+\cos y}$ ۳) $\frac{2e^{2x}-2xy}{x^2-\cos y}$ ۴) $\frac{2e^{2x}-2x^2y}{x-\cos y}$

۱۶۳ـ اگر $h(x)=e^{xf(2x)}$ مقدار $h'(1)$ با توجه به جدول زیر کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

x	f(x)	f'(x)
۱	۱۰	۱
۲	۸	۴

۱) $2e^8$ ۲) $8e^{18}$ ۳) $12e^8$ ۴) $16e^8$

۱۶۴ـ به ازای کدام مجموعه از مقادیر k معادله $x^3-3x+k=0$ دو جواب متمایز و متعلق به بازهٔ $[0,1]$ دارد؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) ϕ ۲) R ۳) $[0,1]$ ۴) $[-1,0]$

۱۶۵ـ اگر $f(x)=x^3+x^5$ و g تابع وارون f باشد. مقدار مشتق g در نقطه ۲ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{-1}{15}$ ۲) $\frac{-1}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۱۶۶ـ طول نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{3x}$ (برای $x\geq 0$) از نقطهٔ $(5,0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{13}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۱

۱۶۷ـ اگر $f(1)=3$ و $f'(1)=2$ حاصل $\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{\sqrt{x}-1})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۸ـ فرض کنیم $f:[a,b]\to R$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $g=f'$. در این صورت: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) g بر $[a,b]$ پیوسته است. ۲) g بر $[a,b]$ در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

۳) g بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر است. ۴) g بر $[a,b]$ همواره نامنفی یا همواره نامثبت است.

۱۶۹ـ تابع با ضابطه $y=\sqrt{x}-\ln x$ از نظر ماکسیمم و مینیمم نسبی چگونه است؟ $(x>0)$ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) فقط یک مینیمم دارد. ۲) فقط یک ماکسیمم دارد.

۳) یک ماکسیمم و یک مینیمم دارد. ۴) ماکسیمم و مینیمم نسبی ندارد.

۱۷۰ـ اگر $f(x)=\frac{1}{(x+1)^{100}(x+2)^{100}(x+3)^{100}(x+4)^{100}}$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{-1250}{3(24)^{100}}$ ۲) $\frac{-1250}{6(24)^{100}}$ ۳) $\frac{-125}{3(24)^{100}}$ ۴) $\frac{-125}{6(24)^{100}}$

۱۷۱ـ اگر مقدار مشتق تابع f در نقطه $x=3$ برابر ۲ باشد مقدار مشتق تابع g با ضابطه $g(x)=f(3x^2)$ در $x=1$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۷۲ـ مینیمم تابع با ضابطه $y=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

۱۷۳ـ اگر $x=e^t\sin t$ و $y=e^t\cos t$ ، $y'(x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{y+x}{y-x}$ ۲) $\frac{y-x}{y+x}$ ۳) $\frac{y}{x+y}$ ۴) $\frac{x}{y-x}$

۱۷۴ـ ماکسیمم تابع با ضابطه $y=\frac{\ln x}{x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) e

۱۷۵ـ مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۰۰ است. اگر حاصل‌ضرب مربع یکی از این دو عدد در دو برابر مکعب عدد دیگر ماکسیمم باشد، تفاضل این دو عدد کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۷۶ـ در کدام نقطه نمودار تابع با ضابطه $y = x^۲e^{-x}+۱$ دارای ماکسیمم نسبی است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $x=۰$ ۲) $x=۲-\sqrt{۲}$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۲+\sqrt{۲}$

۱۷۷ـ تابع با ضابطهٔ $y=(x-۳)^{\frac{۱}{۳}}(۲x-۳)^{\frac{۱}{۳}}$ در کدام نقطه دارای عطف است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $x=۱$ ۲) $x=\frac{۳}{۲}$ ۳) $x=\frac{۵}{۲}$ ۴) $x=۳$

۱۷۸ـ تابع f بر بازهٔ $[-۱,۴]$ پیوسته و بر بازهٔ $(-۱,۴)$ مشتق‌پذیر است. $f(-۱)=۲$ و $f(۴)=-۴$. مقدار $f'(x)$ که در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $-\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۱۷۹ـ مقدار مشتق تابع $f(x)=x(x+۱)(x+۲)...(x+۲۰)$ در نقطه $x=-۱۰$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $۱۰!$ ۲) $۱۰!۱۰!$ ۳) $۱۰۰!$ ۴) $۲۰!-۱۰!$

۱۸۰ـ تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در بازه $[-۲,۲]$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) مشتق‌پذیر نیست و می‌نیمم مطلق دارد.
۲) مشتق‌پذیراست و می‌نیمم مطلق ندارد.
۳) مشتق‌پذیر است و می‌نیمم مطلق دارد.
۴) مشتق‌پذیر نیست و می‌نیمم مطلق ندارد.

۱۸۱ـ تابع $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}+۴x^{\frac{۱}{۳}}$ مفروض است، کدام گزینه نادرست است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) تابع f در فاصله $(-۱,۰)$ صعودی است.
۲) تابع f در نقطه $x=۱$ می‌نیمم نسبی دارد.
۳) تابع f در نقطه $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد.
۴) تابع f در فاصله $x>۰$ صعودی است.

۱۸۲ـ در تابع $y=x^۳+px^۲+q$ مقادیر p و q را طوری بیابید که نقطه می‌نیمم تابع به طول ۲ روی محور $x'x$ باشد.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $q=۴\ ,\ p=-۳$ ۲) $q=-۴\ ,\ p=۳$ ۳) $q=-۴\ ,\ p=-۳$ ۴) $q=۴\ ,\ p=۳$

۱۸۳ـ تابع $y=\frac{x^۲+۲}{ax+b}$ مفروض است، $a\neq۰$ این تابع: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) همواره دارای یک ماکزیمم و یک می‌نیمم است.
۲) Min و Max ندارد
۳) فقط یک Max دارد.
۴) فقط یک Min دارد.

۱۸۴ـ نقطه‌ای بر منحنی $y=x^۲+۱$ پیدا کنید که به نقطه $P\left|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}\right.$ نزدیکترین نقطه باشد.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $(۲,۵)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(۲,۱)$

۱۸۵ـ مشتق تابع $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $y'=\frac{۱}{۲y+۲}$ ۲) $y'=\frac{۱}{y+۱}$ ۳) $y'=\frac{۱}{۲y-۱}$ ۴) $y'=\frac{۱}{y-۱}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(a+۲h)-f(a)}{۵h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to۰}\frac{۲f'(a+۲h)}{۵}=\frac{۲f'(a)}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

۲ـ گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n+b}=a+\frac{b}{n.a^{n-۱}}$ در این تست $n=a=۲$ و $b=۱$ می‌باشد.

$$\sqrt{۵}=\sqrt{۲^۲+۱}=۲+\frac{۱}{۲\times۲}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۳ـ گزینه «۳» اگر مقدار درآمد واحد صنعتی را با A نشان دهیم، در این صورت:

$$A=p.q=۸/۲۵qe^{-۰/۰۲q}$$

$$\frac{dA}{dq}=۸/۲۵e^{-۰/۰۲q}-۸/۲۵\times۰/۰۲qe^{-۰/۰۲q}=۰\Rightarrow q=۵۰$$

۴ـ گزینه «۳» برای اینکه $f(x).g(x)$ صعودی باشد باید $[f(x).g(x)]'>۰$ باشد، لذا داریم: $f'(x).g(x)+g'(x).f(x)>۰$

هرگاه $f(x),g(x),f'(x)$ و $g'(x)$ همگی مثبت باشند، رابطه فوق برقرار خواهد بود.

۵ـ گزینه «۳»

$$f(x)=۲x.e^{۴x}\Rightarrow f'(x)=۲e^{۴x}+۴.e^{۴x}\times۲x=۲e^{۴x}(۱+۴x)\ ,\ f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

$$f''(x)=۸e^{۴x}(۱+۴x)+۴\times۲e^{۴x}\Rightarrow f''(x)=۸e^{۴x}(۲+۴x)\Rightarrow f''(-\frac{۱}{۴})=۸e^{-۱}(۲-۱)=\frac{۸}{e}>۰$$

بنابر آزمون مشتق دوم نقطه $x=-\frac{۱}{۴}$ نقطه می‌نیمم تابع است.

۶ـ گزینه «۲»

$$F(x)=f(g(h(x)))\Rightarrow F'(x)=h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow F''(x)=h''(x)\times g'(h(x))\times f'(g(h(x)))+[g'(h(x))f'(g(h(x)))]'\times h'(x)$$

۷ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{۲t}{۲\sqrt{t^۲+۱}}}{۲t}=\frac{۱}{۲\sqrt{t^۲+۱}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}\Big|_{t=۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$$

۸ـ گزینه «۴»

$$f(x)=\text{Arctg}\,x^۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۱+x^۴}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۱۷}$$

۹ـ گزینه «۱» اولاً نمودار داده شده باید از مبدأ مختصات عبور کند (زیرا به ازای $x=۰$، مقدار y برابر صفر خواهد بود) ثانیاً $y'=e^x>۰$، پس تابع اکیداً صعودی خواهد بود.

۱۰ـ گزینه «۱» برای اینکه مبدأ بتواند نقطه بحرانی باشد لازم است مبدأ جزء دامنه تابع باشد، پس بایستی $۲-۳n>۰$ و یا $n<\frac{۲}{۳}$ باشد.

۱۱ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{-۲x}{x^۴}}{\frac{-۲y}{y^۴}}=-\frac{y^۳}{x^۳}\Rightarrow\frac{dy}{dx}\Big|_{(۱,۱)}=-۱$$

۱۲ـ گزینه «۳» $y' = \dfrac{(x^2-1)\times 2x}{|x^2-1|} \Rightarrow$ مجموعه نقاط بحرانی $= \{-1, 1, 0\}$

برای بدست آوردن ماکسیمم تابع در بازه داده شده نقاط بحرانی و نقاط مرزی بازه را درون ضابطه تابع قرار می‌دهیم تا ماکسیمم تابع بدست آید:

$$y(-1) = y(1) = 0,\ y(0) = 1,\ y(-2) = 3,\ y(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{5}{4}$$

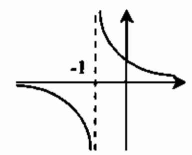
◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۳» $y = 2xe^{x^2} + 1 \Rightarrow y(0) = 1,\ y' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} \Rightarrow y'(0) = 2$

$$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۴» $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0\ ,\ g'(x) = e^x > 0$



به نظر می‌رسد که f نزولی باشد ولی چون f در $x = -1$ ناپیوستگی دارد، لذا فقط در فواصل پیوستگی نزولی است و بر کل R نزولی نیست (به شکل توجه کنید.)

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۱» $\text{Ln}\dfrac{1}{100} = -2\,\text{Ln}10 = -2(\text{Ln}2 + \text{Ln}5) = -2(0/7 + 1/6) = -4/6$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ـ گزینه «۳» اگر جمعیت حاضر را c فرض کنیم و ضریب رشد را α فرض کنیم، در اینصورت تعداد جمعیت بسه صورت $x(t) = ce^{\alpha t}$ خواهد بود. چون پس از گذشت ۱۲ روز جمعیت دو برابر شده، پس :

$$2c = ce^{12\alpha} \Rightarrow e^{12\alpha} = 2 \Rightarrow 12\alpha = \text{Ln}2 \Rightarrow \alpha = \frac{\text{Ln}2}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۳» اگر مقدار اولیه ماده رادیواکتیو را a فرض کنیم در این صورت مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t برابر $x(t) = ae^{kt}$ خواهد بود.

چون در یک سال ۲۰ درصد ماده رادیواکتیو از بین می‌رود، پس: $0/8a = ae^k \Rightarrow e^k = 0/8 \Rightarrow k = \text{Ln}(0/8)$

بنابراین نیمه عمر برابر است با: $T = \dfrac{-\text{Ln}2}{k} = \dfrac{-\text{Ln}2}{\text{Ln}\,0/8} \cong 3/1067$

تذکر: نیمه عمر مدت زمانی است که طول می‌کشد تا مقدار ماده رادیواکتیو نصف شود و از فرمول $T = \dfrac{-\text{Ln}2}{k}$ به دست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h) + f'(x-h)}{1} = 2f'(x)$

پس داریم:

$$2f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{x}}$$

$$y = f(\tfrac{1}{x}) \Rightarrow y' = -\tfrac{1}{x^2}f'(\tfrac{1}{x}) = -\tfrac{1}{x^2}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{x}} \Rightarrow y'(1) = -\tfrac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹ـ گزینه «۱» در نقطه $x = 2$، مقدار $y = 1$ خواهد بود.

$$y^3 + y = x \Rightarrow (3y^2+1)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2+1} \Rightarrow y'\Big|_{(2,1)} = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{3y^2+1} \Rightarrow y'' = \frac{-6yy'}{(3y^2+1)^2} = \frac{-6\times\frac{1}{4}}{(3+1)^2} = \frac{-3}{32}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰ـ گزینه «۳» $f'(x) = a - 2(1+a^4)x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2(1+a^4)} \Rightarrow f(\dfrac{a}{2(1+a^4)}) = \dfrac{a^2}{2(1+a^4)}$

حال لازم است بیشترین مقدار عبارت $\dfrac{a^2}{2(1+a^4)}$ را به دست آوریم $(a > 0)$. بدین منظور ابتدا مشتق آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$(\frac{a^2}{2(1+a^4)})' = \frac{4a(1-a^4)}{4(1+a^4)^2} = 0 \Rightarrow a = 0, 1, -1$$

که فقط $a = 1$ قابل قبول است و به ازای $a = 1$ مقدار عبارت برابر $\dfrac{1}{8}$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۱ـ گزینه «۳» قضیه مقدار میانگین را برای تابع $f(x) = \text{Arctg}x$ در فاصله $[0, x]$ به کار می‌بریم:

$$\frac{\text{Arctg}x - \text{Arctg}\,0}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2} \qquad 0 < c < x \le 1$$

حال توجه کنید که از $0 < c < 1$ نتیجه می‌شود $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{c^2+1} < 1$.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲ـ گزینه «۱» با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم که f در بازه $(0, 2)$ ریشه ندارد. فرض کنید f یک ریشه مانند a بین 0 و 2 داشته باشد. در این صورت طبق قضیه رُل، چون $f(0) = f(a) = 0$، پس نقطه‌ای مانند a_1 بین 0 و a وجود دارد به طوریکه $f'(a_1) = 0$، و به همین ترتیب نقطه‌ای مانند a_2 بین a و 2 وجود دارد به طوریکه $f'(a_2) = 0$. حال چون $f'(a_1) = f'(a_2)$، پس طبق قضیه رل نقطه‌ای مانند a_3 بین a_1 و a_2 وجود دارد به طوریکه $f''(a_3) = 0$. که این خلاف فرض مسأله می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۳ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 1$، در این صورت: $f'(x) = 10x^4 + 20x^3\ ,\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -2$

از جدول زیر نتیجه می‌شود تابع f در فاصله $[-2, +\infty)$ ریشه ندارد و در فاصله $(-\infty, -2)$ حداکثر یک ریشه دارد و چون $f(-2) > 0$ و $f(-\infty) < 0$، پس f دقیقاً یک ریشه در فاصله $(-\infty, -2)$ دارد.

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	1	$\nearrow$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۴ـ گزینه «۱» $f'(x) = -2\sin x\cos x + 2 = -\sin 2x + 2 > 0$

بنابراین تابع f، یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس f حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد. از طرفی:

$$f(-\pi) = \cos^2(-\pi) + 2(-\pi) + 5 = 6 - 2\pi < 0\ ,\ f(0) = 6$$

پس طبق قضیه مقدار میانی f حداقل یک ریشه بین $-\pi$ و 0 دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً یک ریشه دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۵ـ گزینه «۲» $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)}{2h} \overset{\text{Hop}}{\Rightarrow} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)}{2} = \dfrac{f'(a)}{2} = 4$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۶ـ گزینه «۲» $v = a^3 \Rightarrow dv = 3a^2da \Rightarrow da = \dfrac{dv}{3a^2}$

$$S = 6a^2 \Rightarrow ds = 12a\,da = 12a \times \frac{dv}{3a^2} = \frac{4dv}{a} = \frac{4\times 7}{12} = \frac{7}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۷ـ گزینه «۱»

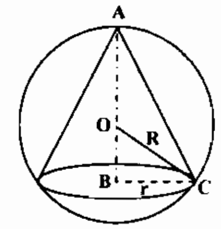
◆ ◆ ◆ ◆

۲۸ـ گزینه «۴» ارتفاع استوانه مورد نظر را h و شعاع قاعده آنرا r فرض کنید، در اینصورت: $(\dfrac{h}{2})^2 + r^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 - \dfrac{h^2}{4}$

استوانه $v = \pi r^2h \Rightarrow v = \pi(h - \dfrac{h^3}{4}) \Rightarrow v' = \pi(1 - \dfrac{3h^2}{4}) = 0 \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۹ـ گزینه «۲» حجم مخروط برابر $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ می‌باشد که در آن h ارتفاع مخروط و r شعاع قاعده مخروطی می‌باشد. از طرفی



$$OB^2+BC^2=R^2 \Rightarrow (h-R)^2+r^2=R^2 \Rightarrow r^2=R^2-(h-R)^2$$

بنابراین:

$$V=\frac{1}{3}\pi(2R-h^2)h=\frac{\pi}{3}(2h^2R-h^3) \Rightarrow V'=\frac{\pi}{3}(4hR-3h^2)$$

$$V'=0 \Rightarrow h=0\ ,\ h=\frac{4R}{3}$$

به ازای $h=0$ حجم برابر صفر می‌شود، پس $h=\frac{4R}{3}$ حجم را ماکسیمم می‌کند، که به ازای آن حجم برابر است با:

$$V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{8R^2}{3}-\frac{16R^2}{9}\right)\frac{4R}{3}=\frac{32\pi R^3}{81}$$

۳۰ـ گزینه «۴»

$$x^2-y^2=1 \Rightarrow y'=-\frac{2x}{-2y} \Rightarrow y'=\frac{x}{y} \Rightarrow y''=\frac{y-y'x}{y^2}$$

$$y''=\frac{y-\frac{x}{y}\times x}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=\frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''y^3+1=0$$

۳۱ـ گزینه «۱»

$$f'(x)=3x^2-4x=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow 3x^2-4x=\frac{1-(-2)}{3} \Rightarrow 3x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

۳۲ـ گزینه «۱»

$$y'=(\sin 2x)^{Lnx^2}\left[\frac{2}{x}Ln\sin 2x+Lnx^2\times \cot g2x\right]=\frac{2(\sin 2x)^{Lnx^2}}{x}\left[Ln\sin 2x+x\cot g2x.Lnx^2\right]$$

۳۳ـ گزینه «۱» طول، عرض و مساحت مستطیل مربوطه تابعی از زمان (t) می‌باشند.

$$S=xy \Rightarrow \frac{ds}{dt}=y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}=6\times 3+15\times(-2)=-12$$

۳۴ـ گزینه «۴» طبق قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[1,4]$ داریم:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c) \qquad 1<c<4$$

چون $f'(c)\ge 2$، بنابراین:

$$\frac{f(4)-10}{3}\ge 2 \Rightarrow f(4)\ge 16$$

۳۵ـ گزینه «۲»

۳۶ـ گزینه «۴» با توجه به قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[a,x]$ داریم:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \Rightarrow -1\le \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 1$$

$$\Rightarrow -(x-a)\le f(x)-f(a)\le (x-a) \Rightarrow |f(x)-f(a)|\le|x-a|$$

۳۷ـ گزینه «۴»

$$S(t)=t^3-4t^2-3t \Rightarrow V(t)=S'(t)=3t^2-8t-3 \Rightarrow V(t)=0 \Rightarrow t=3$$

$$a=V'(t)=6t-8 \Rightarrow a=6\times 3-8=10$$

۳۸ـ گزینه «۳»

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3x^2y+y^3}{x^3+3xy^2} \Rightarrow m=y'_x(1,2)=-\frac{6+8}{1+12}=-\frac{14}{13}$$

۳۹ـ گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=xLnx \\ f(g(x))=Lng(x) \end{array}\right\} \Rightarrow Lng(x)=xLnx \Rightarrow g(x)=e^{xLnx}$$

بنابراین:

$$g'(x)=(Lnx+1)e^{xLnx}=(Lnx+1)x^x \Rightarrow g'(2)=4(Ln2+1)$$

۴۰ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-2f'(x)}{1}=f(2)-2f'(2)$$

۴۱ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+2\times\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}}{\frac{2y}{x^2+y^2}+2\times\frac{\frac{-x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}}=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}}=\frac{x+y}{x-y}$$

۴۲ـ گزینه «۱» می‌دانیم هر چند جمله‌ای از درجه فرد، حداقل یک ریشه دارد، و چون مشتق چند جمله‌ای داده شده بزرگتر از صفر است، پس چند جمله‌ای حداکثر یک ریشه دارد.

۴۳ـ گزینه «۴»

$$y=Arc\sin(Lnx) \Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(Lnx)^2}} \Rightarrow y'(\sqrt{e})=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}=\frac{2}{\sqrt{3e}}$$

۴۴ـ گزینه «۴»

$$f(x)=e^x+x-\cos x \Rightarrow f'(x)=e^x+1+\sin x>0$$

بنابراین f صعودی اکید است.

۴۵ـ گزینه «۲» اگر $x<0$، آنگاه:

$$f(x)=1+e^{-x^{-2}} \Rightarrow f'(x)=2x^{-3}e^{-x^{-2}}<0$$

بنابراین f در فاصله $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است و نقطه بحرانی و اکسترمم ندارد.

اگر $x>0$، آنگاه:

$$f(x)=x^x \Rightarrow f'(x)=x^x(Lnx+1)\ ,\ f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

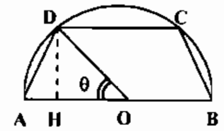
بنابراین $\frac{1}{e}$ یک نقطه بحرانی می‌باشد و چون در دو طرف این نقطه مشتق تغییر علامت می‌دهد بنابراین نقطه اکسترمم نیز می‌باشد.

چون ضابطه f در دو طرف نقطه $x=0$ عوض می‌شود، برای بررسی مشتق‌پذیر در $x=0$، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^{-x^{-2}}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x^{-2}}}{x}=0$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(Lnx+1)}{1}=-\infty$$

چون مشتق چپ و راست f در صفر با هم برابر نیست، بنابراین f در صفر مشتق‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین صفر یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌باشد. ولی نقطه بحرانی صفر، نقطه اکسترمم نیست، زیرا مشتق f در دو طرف صفر منفی می‌باشد.



۴۶ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل:

$$DH = r\sin\theta\ ,\ OH = r\cos\theta \Rightarrow S = \frac{r\sin\theta}{2}(2r + 2r\cos\theta) = r^2\sin\theta(1+\cos\theta)$$

برای محاسبه ماکسیمم مساحت، لازم است ماکسیمم عبارت فوق را در فاصله $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، به دست می‌آوریم.

$$S' = r^2(\cos\theta(1+\cos\theta) - \sin^2\theta) = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1\ ,\ \frac{1}{2}$$

و بنابراین $\theta = \frac{\pi}{3}$ تنها ریشه معادله فوق در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ می‌باشد.

$$S(0) = 0\ ,\ S(\frac{\pi}{2}) = r^2\ ,\ S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

بنابراین S در $\theta = \frac{\pi}{3}$ ماکسیمم خواهد شد، که در این صورت ارتفاع ذوزنقه برابر است با:

$$h = r\sin\frac{\pi}{3} = r\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۷ـ گزینه «۳»

$$f'(x) = \frac{1+tg^2x}{\sqrt{1+tg^2x}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

۴۸ـ گزینه «۴»

$$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5-x^2} \Rightarrow x + y = x + \sqrt{5-x^2} = f(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{5-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{5-x^2} = x \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$Max(x+y) = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

۴۹ـ گزینه «۱»

$$y' = \frac{8Lnx - 4Ln^2x}{x^2} = 0 \Rightarrow Ln\,x(8 - 4Lnx) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ln\,x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 & Min \\ Ln\,x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow y(e^2) = \frac{16}{e^2} & Max \end{cases}$$

۵۰ـ گزینه «۱»

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr \Rightarrow 5 = 4\pi \times 3^2 dr \Rightarrow dr = \frac{5}{36\pi}$$

۵۱ـ گزینه «۳» به ازای $x = 1$، مقدار y برابر ۱ خواهد بود.

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

۵۲ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم $f(x) = 2^x - 3x$. بنابر قضیه بولتزانو معادله $f(x) = 0$ در بازه‌ای که $f(a)f(b) < 0$، حداقل یک جواب دارد، و چون $f(0)f(1) < 0$، بنابراین f در بازه $(0,1)$ حداقل یک جواب دارد.

۵۳ـ گزینه «۳» می‌دانیم هرگاه $y = u^v$، آنگاه:

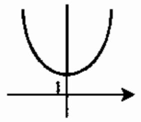
$$\frac{dy}{dx} = u^v[v'Lnu + v \times \frac{u'}{u}] = (x^2+1)^{e^x}[e^x Ln(x^2+1) + e^x \times \frac{2x}{x^2+1}]$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2^e[eLn2 + e]$$

۵۴ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-1}{t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{6t^2}{4t^6}}{2t} = \frac{3}{4t^5} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{3}{4}$$

۵۵ـ گزینه «۳» به نمودار $y = \cosh x$ توجه کنید:



۵۶ـ گزینه «۲» مقدار سرمایه را در سال t ام با $x(t)$ نمایش می‌دهیم.

$$x(t) = 10^6 e^{0/2t} \Rightarrow x(5) = 10^6 e^{0/2\times5} = 10^6 e$$

۵۷ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$Ln\frac{x+y}{x-y} = 2 \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = e^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1\times(x-y) - 1\times(x+y)}{(x-y)^2}}{\frac{1\times(x-y) + 1(x+y)}{(x-y)^2}} = \frac{+2y}{2x} = \frac{y}{x}$$

و چون $\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$، بنابراین $\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x}{y}$.

۵۸ـ گزینه «۱»

$$y = Arctg\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{4}$$

۵۹ـ گزینه «۲» از $x = 1$ نتیجه می‌شود $y = -1$. با مشتق‌گیری ضمنی از عبارت داده شده خواهیم داشت:

$$2x + 2y + 2xy' + 8yy' = 0 \xrightarrow[y=-1]{x=1} y' = 0$$

از رابطه اخیر دوباره نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2 + 2y' + 2y' + 2xy'' + 8y'^2 + 8yy'' = 0 \xrightarrow[y'=0]{x=1,\ y=-1} y'' = \frac{1}{3}$$

۶۰ـ گزینه «۲»

$$f(x) = xe^{2x}\ ,\ f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}\ ,\ f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} + 4e^{2x} + 8xe^{2x} \Rightarrow f'''(0) = 12$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $n = 3$، مقدار ۱۲ را تولید می‌کند، گزینه ۲ می‌باشد.

۶۱ـ گزینه «۲»

$$x(t) = 100e^{0/02t} \Rightarrow x(50) = 100e^{0/02\times50} = 100e$$

۶۲ـ گزینه «۱» به ازای $x = 1$، مقدار y برابر ۱-، ۱ یا ۰ خواهد بود.

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{2y^2 - x}{2x^2 - y}$$

مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $(1,0)$ برابر $\frac{1}{3}$، در نقطه $(1,1)$ برابر ۱-، و در نقطه $(1,-1)$ برابر $\frac{-1}{2}$ می‌باشد. که با توجه به گزینه‌ها مقدار ۱- مدنظر طراح محترم بوده است!

۶۳ـ گزینه «۳» در همسایگی $x = \frac{\pi}{2}$، مقدار $[x]$ برابر یک می‌باشد. بنابراین:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

۶۴ـ گزینه «۲»

۶۵ـ گزینه «۴» تابع قدر مطلق در ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیست، بنابراین تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم: از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{|x|}{1+|x|} - 0}{x} = \lim_{x\to0}\frac{|x|}{x(1+|x|)}$$

حد چپ در صفر برابر ۱- و حد راست برابر ۱ است و لذا در $x = 0$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

۶۶ـ گزینه «۲» $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\overset{HOP}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{1}=2f'(x_0)$

۶۷ـ گزینه «۱» شیب پاره‌خط بین دو نقطه داده شده برابر ۱ $=\frac{3-1}{2}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$ می‌باشد، بنابراین در نقطه موردنظر نیز شیب منحنی (مشتق منحنی) باید برابر ۱ باشد:

$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow 3x^2-3=1\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

جواب $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ در فاصله $[0,2]$ قرار ندارد و بنابراین قابل قبول نیست.

۶۸ـ گزینه «۴» با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$y=f(f(f(f(x))))\Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x))f'(f(f(x)))f'(f(f(f(x))))$

$\Rightarrow y'(0)=f'(0)f'(f(0))f'(f(f(0)))f'(f(f(f(0))))=f'(0)f'(0)f'(0)f'(0)=2^4=16$

۶۹ـ گزینه «۲» از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم: $f(1-x^3)=4x^2\Rightarrow -3x^2f'(1-x^3)=8x$

به ازای $x=-2$ داریم: $-12f'(9)=-16\Rightarrow f'(9)=\frac{4}{3}$

۷۰ـ گزینه «۲» می‌دانیم حجم یک مخروط با ارتفاع h و شعاع قاعده r برابر $V=\frac{\pi}{3}r^2h$ می‌باشد. از طرفی در این مخروط نسبت ارتفاع به شعاع برابر ۶ به ۲ است، یعنی $\frac{h}{r}=\frac{6}{2}$. بنابراین $r=\frac{h}{3}$ پس فرمول حجم مخروط به صورت زیر در می‌آید:

$V=\frac{\pi}{3}\times(\frac{h}{3})^2h=\frac{\pi}{27}h^3\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\pi}{9}\times 4^2\times\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{9}{32\pi}$

۷۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. $x^2+y^2=13^2\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow 2(5)\frac{dx}{dt}+2(12)(-3)=0\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{36}{5}$

۷۲ـ گزینه «۳» $f(x)=e^{x^3}-1\Rightarrow f'(x)=3x^2e^{x^3}\Rightarrow f'(0)=0$

با توجه به اینکه مشتق تابع حول نقطه $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد، نقطه $x=0$ نقطه عطف منحنی می‌باشد.

۷۳ـ گزینه «۱»

$$f'(x)=\begin{cases}1+tg^2x & x>0\\ \frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{x\sin x}{\sqrt{3}} & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(0^+)=1,\ f'(0^-)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

چون به ازای $x<0$ مقدار تابع f منفی می‌باشد، پس زاویه نیم مماس چپ با جهت مثبت محور xها برابر $\pi+\frac{\pi}{6}$ می‌باشد، بنابراین:

زاویه بین دو نیم مماس $=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$

۷۴ـ گزینه «۲» اگر f بیش از یک ریشه در فاصله $(0,+\infty)$ داشته باشد، آنگاه با توجه به اینکه $f(0)=0$، پس f در $[0,+\infty)$ حداقل سه ریشه دارد و بنابراین f' حداقل دو ریشه در $(0,+\infty)$ خواهد داشت که با توجه به شکل درست نیست. پس f حداکثر یک ریشه در $(0,+\infty)$ دارد.

۷۵ـ گزینه «۴» $y^2=x\Rightarrow y^2-x=0\Rightarrow y'=-\frac{-1}{2y}=\frac{1}{2y}\Rightarrow$ ضریب زاویه قائم $=-2y$

فرض کنید نقطه تقاطع خط قائم بر منحنی با منحنی (x_0,y_0) باشد (توجه کنید که $x_0=y_0^2$)، در این صورت معادله خط قائم به صورت زیر در می‌آید:

$y-y_0=-2y_0(x-x_0)\Rightarrow y-y_0=-2y_0(x-y_0^2)$

با توجه به اینکه معادله خط قائم باید از $(\alpha,0)$ عبور کند، داریم: $0-y_0=-2y_0(\alpha-y_0^2)\Rightarrow y_0=0$ یا $y_0=\pm\sqrt{\alpha-\frac{1}{2}}$

پس به ازای $\alpha>\frac{1}{2}$ دقیقاً سه قائم می‌توان رسم کرد.

۷۶ـ گزینه «۳» $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xg(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=-1$

بنابراین شیب خط مماس بر f در $x=0$ برابر ۱- می‌باشد، و چون $f(0)=0$ پس معادله خط مماس به صورت $y+x=0$ در می‌آید.

۷۷ـ گزینه «۴»

$\ln f(x)=-\ln x-\ln(x-1)-2\ln(x-2)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$

$\Rightarrow\frac{f'(3)}{f(3)}=\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}-2\Rightarrow f'(3)=\frac{-17}{6}f(3)=\frac{-17}{36}$

۷۸ـ گزینه «۴» $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}\Rightarrow f'(0)=-1,\ f(0)=0$

بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو در می‌آید: $y-0=-1(x-0)\Rightarrow y=-x\Rightarrow y+x=0$

۷۹ـ گزینه «۲» $\frac{dy}{dx}=1\times[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+[\frac{1}{x}\cos(\ln x)-\frac{1}{x}\sin(\ln x)]\times x=2\cos(\ln x)$

۸۰ـ گزینه «۳» $y=(\frac{1}{x})^x=x^{-x}\Rightarrow y'=x^{-x}(-\ln x-1)$

$y'=0\Rightarrow -\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ نقطه بحرانی

با توجه به اینکه به ازای $x<\frac{1}{e}$، $y'>0$ و به ازای $x>\frac{1}{e}$، $y'<0$ پس نقطه $x=\frac{1}{e}$ نقطه ماکسیمم تابع می‌باشد، بنابراین: $y(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}}$

۸۱ـ گزینه «۱» $f'(x)=60(4x-4)(2x^2-4x+1)^{59}\Rightarrow f'(1)=0$

۸۲ـ گزینه «۴» $f(x)=\sinh^2 2x\Rightarrow f'(x)=2\times 2\sinh 2x\cosh 2x=2\sinh 4x=2\times(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2})=e^{4x}-e^{-4x}\Rightarrow f'(1)=e^4-e^{-4}$

۸۳ـ گزینه «۳»

تابع زوج: $f(x)=f(-x)\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}f'(x)=-f'(-x)$ مشتق، تابع فرد است

تابع فرد: $f(x)=-f(-x)\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}f'(x)=f'(-x)$ مشتق، تابع زوج است

۸۴ـ گزینه «۳» اگر $x(t)$ را جمعیت شهر در سال t فرض کنیم، در این صورت $x(t)=x_0e^{kt}$ و بنابراین:

$\frac{x(1370)}{x(1340)}=\frac{x_0e^{1370k}}{x_0e^{1340k}}=e^{30k}\Rightarrow e^{30k}=\frac{60000}{40000}=\frac{3}{2}$

$\frac{x(1400)}{x(1370)}=\frac{x_0e^{1400k}}{x_0e^{1370k}}=e^{30k}\Rightarrow x(1400)=\frac{3}{2}\times 60000=90000$

۸۵ـ گزینه «۲» $y=\ln\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\ln x \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲x} \Rightarrow m=y'(x_۰)=\frac{۱}{۲x_۰}$

این خط با شیب $\frac{۱}{۲x_۰}$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بنابراین معادله آن به صورت روبرو خواهد بود: $y-۰=\frac{۱}{۲x_۰}(x-۰) \Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{۲x_۰}}$

خط از نقطه $(x_۰, y_۰)$ نیز عبور می‌کند پس داریم: $y_۰=\frac{x_۰}{۲x_۰}=\frac{۱}{۲}$

۸۶ـ گزینه «۳»

روش اول: می‌دانیم برای اینکه $x.y^۲$ ماکزیمم شود باید $x=\frac{y}{۲}$ باشد. $\frac{y}{۲}+y=۹ \Rightarrow \frac{۳}{۲}y=۹ \Rightarrow y=۶\,,\, x=۳ \Rightarrow \boxed{x\times y=۱۸}$

روش دوم:

$x+y=۹ \Rightarrow x=۹-y \Rightarrow A(y)=(۹-y).y^۲=۹y^۲-y^۳$

$\Rightarrow A'(y)=۱۸y-۳y^۲ \Rightarrow ۳y(۶-y)=۰ \Rightarrow y=۶$

$\Rightarrow x=۹-۶=۳ \Rightarrow x\times y=۶\times ۳=۱۸$

۸۷ـ گزینه «۲» $f(x)=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱-\ln x}{x^۲}=۰ \Rightarrow ۱-\ln x=۰ \Rightarrow x=e$ نقطه ماکسیمم

بنابراین مقدار ماکسیمم تابع برابر $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{۱}{e}$ خواهد بود.

۸۸ـ گزینه «۳» فرض کنید $f(x)=x^۷+۲x+c$، چون $f'(x)=۷x^۶+۲>۰$، پس f تابعی اکیداً صعودی است و حداکثر یک ریشه دارد. از طرفی f یک چند جمله‌ای از درجه فرد می‌باشد، پس حداقل یک ریشه دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً یک ریشه دارد.

۸۹ـ گزینه «۱» در همسایگی نقطه $\frac{\pi}{۲}$، تابع $\sin x$ مثبت است، بنابراین: $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۰$

۹۰ـ گزینه «۲» $\frac{dy}{dx}=\frac{(۲e^{۲x}+۱)(x+۲)-۱\times(e^{۲x}+x)}{(x+۲)^۲} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=۰}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=۰}=\frac{۴}{۵}$

۹۱ـ گزینه «۲» $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=x^{\frac{-۱}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{۳}x^{\frac{-۴}{۳}} \Rightarrow f'(۸)=\frac{-۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(-۸)^۴}}=\frac{-۱}{۴۸}$

۹۲ـ گزینه «۳» $g(x)=\sqrt{\frac{۲x-۵}{۳x+۱}} \Rightarrow \ln g(x)=\ln\sqrt{\frac{۲x-۵}{۳x+۱}} \Rightarrow \ln g(x)=\frac{۱}{۲}\ln(۲x-۵)-\frac{۱}{۲}\ln(۳x+۱)$

از طرفین رابطه اخیر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{۱}{۲x-۵}-\frac{۳}{۲(۳x+۱)} \Rightarrow g'(x)=\sqrt{\frac{۲x-۵}{۳x+۱}}\times\frac{۱۷}{۲(۲x-۵)(۳x+۱)}=\frac{۱۷}{۲(۲x-۵)^{\frac{۱}{۲}}(۳x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۹۳ـ گزینه «۴» $\sqrt{xy}+۲x-\sqrt{y}=۰ \Rightarrow y'=-\frac{\frac{y}{۲\sqrt{xy}}+۲}{\frac{x}{۲\sqrt{xy}}-\frac{۱}{۲\sqrt{y}}}=-\frac{y+۴\sqrt{xy}}{x-\sqrt{x}}=\frac{y+۴\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$

۹۴ـ گزینه «۲» $\ln(xy)+x+y=۲ \Rightarrow \ln x+\ln y+x+y=۲ \Rightarrow y'=-\frac{\frac{۱}{x}+۱}{\frac{۱}{y}+۱}=-\frac{xy+y}{xy+x}$

۹۵ـ گزینه «۴» $\lim_{x\to\frac{-۳}{۲}}\frac{۴x^۲-۹}{۲x+۳}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{-۳}{۲}}\frac{۸x}{۲}=-۶$

۹۶ـ گزینه «۲»

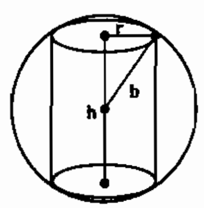
$f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}(x^{\frac{-۱}{۳}}-x^{\frac{-۲}{۳}})$

$f'(۱)=۰$ نقطه بحرانی f می‌باشد $x=۱$

$f''(x)=\frac{۲}{۳}(\frac{-۱}{۳}x^{\frac{-۴}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۵}{۳}})=\frac{-۲}{۹}(x^{\frac{-۴}{۳}}-۲x^{\frac{-۵}{۳}}) \Rightarrow f''(۸)=۰$

چون $f''(۸)=۰$ و f'' حول نقطه $x=۸$ تغییر علامت می‌دهد، پس $x=۸$ نقطه عطف است و چون $f'(۱)=۰$ و $f''(۱)=\frac{-۲}{۹}(۱-۲)=\frac{۲}{۹}>۰$، پس $x=۱$ نقطه مینیمم می‌باشد.

۹۷ـ گزینه «۴» با توجه به شکل رابطه $R^۲+\frac{h^۲}{۴}=b^۲$ برقرار است، بنابراین:



$V=\pi R^۲h=\pi(b^۲-\frac{h^۲}{۴})h=\pi(b^۲h-\frac{h^۳}{۴})$

$V'=\pi(b^۲-\frac{۳h^۲}{۴})=۰ \Rightarrow h=\frac{۲b}{\sqrt{۳}}\ ,\ R=b\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۹۸ـ گزینه «۲» اگر طول ضلع مکعب را x و طول قطر آن را y فرض کنیم، آنگاه $y=\sqrt{۳}x$ بنابراین:

$dy=\sqrt{۳}dx \Rightarrow ۳=\sqrt{۳}dx \Rightarrow dx=\sqrt{۳}$

۹۹ـ گزینه «۳» اگر وزن جسم در حال حاضر ۲۰۰ باشد، وزن جسم پس از t ساعت $\omega(t)=۲۰۰(\frac{۱}{۴})^t$ خواهد بود. بنابراین:

$\omega(۳)=۲۰۰(\frac{۱}{۴})^۳=\frac{۲۰۰}{۶۴}=۳/۱۲۵$

۱۰۰ـ گزینه «۱» طبق فرض هر ۸ سال مقدار پول ۵ برابر می‌شود، بنابراین پس از ۲۴ سال مقدار پول $۱۲۵=۵^۳$ برابر می‌شود. بنابراین:

اصل پول شخص $=\frac{۱۰۰۰۰}{۱۲۵}=۸۰$

۱۰۱ـ گزینه «۲»

$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}+۴x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}+\frac{۴}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}$

$f'(x)=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=۰ \Rightarrow \frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=۰ \Rightarrow \boxed{x=-۱}$ نقطه بحرانی

با توجه به ضابطه f'، تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین نقاط ۱- و ۰ نقاط بحرانی هستند.

۱۰۲ـ گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=3x^2y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=3x^2dx \Rightarrow \frac{-1}{y}=x^3+c \Rightarrow y=\frac{-1}{x^3+c}$$

چون منحنی طبق فرض از نقطه (۱ و ۲) عبور می‌کند، پس $c=-9$.

$$c=-9 \Rightarrow y=\frac{-1}{x^3-9} \Rightarrow y(1)=\frac{1}{8}$$

۱۰۳ـ گزینه «۱» ابتدا نقطه تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$\cos x=x^2+1 \Rightarrow x=0$$

$$\begin{cases} y_1=x^2+1 \Rightarrow m=y_1'(0)=2(0)=2\times 0=0 \\ y_2=\cos x \Rightarrow m'=y_2'(0)=-\sin 0=0 \end{cases} \Rightarrow m=m'$$

با توجه به رابطه $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$ ملاحظه می‌گردد که $\alpha=0$ خواهد بود.

۱۰۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آنگاه $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ خواهد بود.

$$5=(5+x^3)e^{\sin x} \Rightarrow x=0$$

$$(f^{-1})'(5)=\frac{1}{f'(0)}\ ,\ f'(x)=[3x^2+(5+x^3)\cos x]e^{\sin x} \Rightarrow f'(0)=5 \Rightarrow (f^{-1})'(5)=\frac{1}{5}$$

۱۰۵ـ گزینه «۴» فرض کنید $f(x)=2x^3-3x^2-12x-6$ چون $f(4)>0$ و مشتق f یعنی $f'(x)=6x^2-6x-12$ در فاصله $(4,+\infty)$ همواره مثبت است. پس f در $(4,+\infty)$ ریشه ندارد.

۱۰۶ـ گزینه «۳» نقاط $x=0$ و $x=2$ نقاط مشتق‌ناپذیر تابع می‌باشند، بنابراین جزء نقاط بحرانی محسوب می‌شوند:

مقدار ماکسیمم تابع : $f(0)=f(2)=\frac{4}{3}$

۱۰۷ـ گزینه «۱» از رابطه $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا به جای $f(x)$ مقدار ۱- را قرار می‌دهیم تا x مربوط به آن به دست آید.

توجه کنید که $1-x^2$ وقتی $x<0$ باشد همواره مثبت است، پس فقط $-x^2$ را برابر ۱- قرار می‌دهیم، از آنجا $x=1$ به دست می‌آید، در نتیجه:

$$(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(1)}\ ,\ f'(x)=-2x \Rightarrow f'(1)=-2 \Rightarrow (f^{-1})'(-1)=-\frac{1}{2}$$

۱۰۸ـ گزینه «۳»

روش اول: ابتدا مقدار تابع f را در $x=1$ به دست می‌آوریم.

$$2x\le f(x)\le x^2+1 \Rightarrow 2\le f(1)\le 2 \Rightarrow f(1)=2$$

حال برای محاسبه $f'(1)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$2x\le f(x)\le x^2+1 \Rightarrow \frac{2x-2}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}\le\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow 2\le f'(1)\le 2$$

و بنابراین $f'(1)=2$.

روش دوم: به عنوان یک راه حل کوتاه و غیر دقیق می‌توان از طرفین رابطه داده شده مشتق گرفت و به جای x، مقدار ۱ را قرار داد:

$$2x\le f(x)\le x^2+1 \Rightarrow 2\le f'(x)\le 2x \Rightarrow 2\le f'(1)\le 2 \Rightarrow f'(1)=2$$

۱۰۹ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که $f(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{e}$ با توجه به موارد فوق $\frac{1}{e}$ مقدار ماکسیمم f و ۰ مقدار مینیمم f خواهد بود.

۱۱۰ـ گزینه «۲»

۱۱۱ـ گزینه «۲» ریشه‌های f در بازه $(0,1)$ را x_1 و x_2 فرض کنید. چون f نامنفی است و $f(x_1)=f(x_2)=0$، پس نقاط x_1 و x_2 نقاط مینیمم هستند و چون f مشتق‌پذیر است پس $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. از طرفی طبق قضیه رُل یک نقطه مانند x_3 بین x_1 و x_2 وجود دارد به طوریکه $f'(x_3)=0$. با استفاده مجدد از قضیه رُل برای f' نتیجه می‌شود که f'' حداقل دو ریشه در $(0,1)$ دارد.

۱۱۲ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to a}\frac{2xf(a)-a^2f'(x)}{1}=2af(a)-a^2f'(a)$$

۱۱۳ـ گزینه «۱»

۱۱۴ـ گزینه «۲» نقاطی که در آن شیب منحنی f برابر صفر باشد، همان نقاطی است که $f'(x)=0$ می‌باشد.

۱۱۵ـ گزینه «۱»

$$f'(x)=a^x+xa^x\operatorname{Ln}a=a^x(x\operatorname{Ln}a+1)$$

$$f'(x)\le 0 \Rightarrow a^x(x\operatorname{Ln}a+1)\le 0 \Rightarrow x\operatorname{Ln}a+1\le 0 \Rightarrow x\operatorname{Ln}a\le -1 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{\operatorname{Ln}a}$$

۱۱۶ـ گزینه «۱»

$$f'(x)=\frac{n\pi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\pi x}{2}\left(\operatorname{Sin}\frac{\pi x}{2}\right)^{n-1}(\operatorname{Cos}\pi x)^m-m\pi\operatorname{Sin}\pi x(\operatorname{Cos}\pi x)^{m-1}\left(\operatorname{Sin}\frac{\pi x}{2}\right)^n \Rightarrow f'(1)=0-0=0$$

۱۱۷ـ گزینه «۱»

مشتق $=2\operatorname{Sihh}x\operatorname{Cosh}x+2\operatorname{Sinh}x\operatorname{Cosh}x=4\operatorname{Sinh}x\operatorname{Cosh}x=2\operatorname{Sinh}2x$

مشتق در $x=\frac{1}{2}$ $=2\operatorname{Sinh}1=e+e^{-1}=e+\frac{1}{e}$

۱۱۸ـ گزینه «۱»

$$V=\pi r^2 \Rightarrow dv=2\pi r dr \Rightarrow \pi=2\pi r\times 2 \Rightarrow r=0/25$$

۱۱۹ـ گزینه «۳» نقطه $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ روی منحنی قرار دارد، کافی است شیب منحنی را در نقطه P بدست آوریم :

$$y'=-\frac{\operatorname{Sin}y+y\operatorname{Cos}x}{x\operatorname{Cos}y+\operatorname{Sin}x}\bigg|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}=-1 \Rightarrow y-\frac{\pi}{2}=-1\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y+x=\pi$$

۱۲۰ـ گزینه «۴»

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x$$

مجموع مکعبات : $x^3+y^3=x^3+(1-x)^3=1-3x+3x^2=f(x)$

مجموع فوق وقتی مینیمم می‌شود که مشتق برابر صفر شود : $\Rightarrow f'(x)=6x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{1}{2}$

۱۲۱ـ گزینه «۱»

مجانب افقی $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+3}=2 \Rightarrow \boxed{y=2}$

نقطه بحرانی $f'(x)=\frac{4x(x^2+3)-2x(2x^2)}{(x^2+3)^2}=\frac{12x}{(x^2+3)^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$$f''(x)=\frac{12(x^2+3)^2-48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{36-36x^2}{(x^2+3)^3}\ ,\ f''(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

چون در دو طرف نقاط $x=\pm 1$، f'' تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط، نقطه عطف هستند. ضمناً در نقطه بحرانی $x=0$، $f''>0$ بنابراین نقطه $x=0$ نقطه می‌نیمم منحنی می‌باشد.

۱۲۲ـ گزینه «۱» تابع f در $x=0$ ناپیوسته است و $x=0$ مجانب قائم تابع محسوب می‌شود.

$$f'(x)=2x+\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3+2}{x^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$f''(x)=2-\frac{4}{x^3}\ ,\ f''(x)=0 \Rightarrow x^3=2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

در دو طرف نقطه $x=\sqrt[3]{2}$، f'' تغییر علامت می‌دهد، پس نقطه عطف منحنی می‌باشد. ضمناً در نقطه بحرانی $x=-1$، $f''>0$، بنابراین ۱- نقطه می‌نیمم منحنی می‌باشد.

۱۲۳ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $f(-\pi)>0$ و $f(0)<0$، پس طبق قضیه مقدار میانی f حداقل یک ریشه در بازه $(-\pi,0)$ دارد. همچنین $f(0)<0$ و $f(\pi)>0$. پس f حداقل یک ریشه در بازه $(0,\pi)$ دارد. از طرفی:

$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x \Rightarrow f'(x)=2x-x\cos x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-x\cos x=0 \Rightarrow x=0$$

چون f'، یک ریشه دارد، پس خود تابع f حداکثر دو ریشه دارد.

از بحث فوق نتیجه می‌شود معادله داده شده دقیقاً دو ریشه دارد.

۱۲۴ـ گزینه «۲»

$$\text{حجم مخروط}=V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H \qquad \text{و} \qquad \text{حجم استوانه}=U_2=\pi r^2h$$

$$\text{با توجه به شکل}:\ \frac{H}{R}=\frac{H-h}{r} \Rightarrow r=\frac{R(H-h)}{H}$$

با جایگزینی رابطه فوق در U_2 به دست می‌آید:

$$U_2=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2h\ ,\ \frac{dU_2}{dh}=\frac{\pi R^2}{H^2}(-2(H-h)h+(H-h)^2)=0 \Rightarrow h=\frac{H}{3}$$

$$\Rightarrow U_2=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-\frac{H}{3})^2\frac{H}{3}=\frac{4\pi}{27}R^2H \Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=\frac{4}{9}$$

۱۲۵ـ گزینه «۱»

$$y=e^{x^2-1} \Rightarrow y(1)=e^0=1\ ,\ y'=2xe^{x^2-1} \Rightarrow y'(1)=2$$

$$\text{معادله خط مماس}:\ y-1=2(x-1) \Rightarrow y=2x-1$$

۱۲۶ـ گزینه «۳»

$$f'(\mathrm{tg}x)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}2x=\frac{1}{2}\times\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}=\frac{\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}\xrightarrow{u=\mathrm{tg}x}f'(u)=\frac{u}{1-u^2}$$

$$y=f(\sin x) \Rightarrow y'=\cos x f'(\sin x)=\cos x\times\frac{\sin x}{1-\sin^2x}=\mathrm{tg}x$$

۱۲۷ـ گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2te^t+t^2e^t}{e^t+(t+2)e^t}=\frac{t^2+2t}{t+3}\bigg|_{t=3}=\frac{15}{6}=2/5$$

۱۲۸ـ گزینه «۴»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{\cos^2t}}{\frac{\sin t}{\cos^2t}}=\frac{1}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{-\cos t}{\sin^2t}}{\frac{\sin t}{\cos^2t}}=-\cot g^3t\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$$

۱۲۹ـ گزینه «۱»

$$u=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$v=3x^2-2x \Rightarrow \frac{dv}{dx}=6x-2$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{du}{dv}=\frac{du}{dx}.\frac{dx}{dv}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\times\frac{1}{6x-2}=\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$$

۱۳۰ـ گزینه «۱»

$$\frac{df}{dx^3}=\frac{df}{dx}.\frac{dx}{dx^3}=(15x^4+24x^3-36x^2)\times\frac{1}{3x^2}=5x^2+8x-12$$

۱۳۱ـ گزینه «۴»

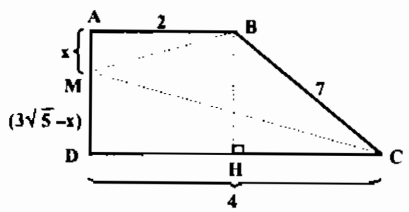
$$y=x^x \Rightarrow y'=x^x(\mathrm{Ln}x+1) \Rightarrow y'(2)=4(\mathrm{Ln}2+1)$$

پس معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(2,4)$ روی منحنی به صورت روبرو است: $y-4=4(\mathrm{Ln}2+1)(x-2)$

برای به دست آوردن محل تلاقی با محور x ها، به جای y در معادله فوق صفر قرار می‌دهیم:

$$-4=4(\mathrm{Ln}2+1)(x-2) \Rightarrow x-2=\frac{-1}{\mathrm{Ln}2+1}=\frac{2\mathrm{Ln}2+1}{\mathrm{Ln}2+1}$$

۱۳۲ـ گزینه «۲»



$$BH^2+CH^2=BC^2 \Rightarrow BH^2+2^2=7^2 \Rightarrow BH=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \Rightarrow AD=3\sqrt{5}$$

طول MA را برابر x و بنابراین طول MD را $(3\sqrt{5}-x)$ فرض می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$MB+MC=\sqrt{AM^2+AB^2}+\sqrt{DM^2+DC^2}=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(3\sqrt{5}-x)^2+16}=f(x)$$

می‌خواهیم عبارت فوق را می‌نیمم کنیم:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}-\frac{2(3\sqrt{5}-x)}{2\sqrt{(3\sqrt{5}-x)^2+16}}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+4}=\frac{(3\sqrt{5}-x)^2}{(3\sqrt{5}-x)^2+16}$$

$$\Rightarrow 16x^2=4(3\sqrt{5}-x)^2 \Rightarrow 4x^2=45+x^2-6\sqrt{5}x \Rightarrow x=\sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{5})=\sqrt{9}+\sqrt{36}=9$$

۱۳۳ـ گزینه «۲»

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{x} \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

۱۳۴ـ گزینه «۳» به ازای $x=2$ از $y^3+y=x$ نتیجه می‌شود $y=1$.

$$y^3+y=x \Rightarrow (3y^2+1)y'=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{4}\ ,\ 6yy'^2+(3y^2+1)y''=0 \Rightarrow 6(1)(\frac{1}{4})^2+4y''=0 \Rightarrow y''=\frac{-6}{64}=\frac{-3}{32}$$

۱۳۵ـ گزینه «۱» منحنی داده شده فقط یک مجانب افقی دارد.

$$y=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0 \Rightarrow y=0 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } 2$$

$$\begin{cases} y(0)=0 & \text{می‌نیمم نسبی} \\ y(2)=4e^{-2} & \text{ماکسیمم نسبی} \end{cases}$$

نقطه می‌نیمم یا همان $(0,0)$ روی خط $y=0$ قرار دارد، پس فاصله برابر ۰ می‌باشد.

۱۳۶ـ گزینه «۴» نسبت افزایش جمعیت $12 = 9 - 21$ در هزار می‌باشد پس اگر جمعیت کنونی را x_0 فرض کنیم، تعداد جمعیت در سال tام برابر $x(t) = x_0 e^{\frac{12}{1000}t}$ می‌باشد. برای اینکه جمعیت دو برابر شود لازم است $x(t) = 2x_0$ شود، بنابراین:

$$2x_0 = x_0 e^{\frac{12}{1000}t} \Rightarrow e^{\frac{12}{1000}} = 2 \Rightarrow \frac{12}{1000}t = Ln2 \Rightarrow t = \frac{1000}{12} \times \frac{69}{100} = 57/5$$

۱۳۷ـ گزینه «۲»

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}(\cosh(Ln\frac{1}{x})) = \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}(\cosh(-Lnx)) = \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}(\frac{e^{-Lnx} + e^{Lnx}}{2})$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(\frac{-1}{x^2} + 1) = \frac{1}{2}$$

۱۳۸ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که: $f(x) = 2^{\sin x} + x2^x \Rightarrow f'(x) = \cos x 2^{\sin x} Ln2 + x2^x Ln2 + 2^x \Rightarrow f'(0) = Ln2 + 1$

برای محاسبه حد داده شده از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h) + h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) + f'(-h) + 1}{2} = f'(0) + \frac{1}{2} = Ln2 + \frac{3}{2}$$

۱۳۹ـ گزینه «۲» $f(x) = (2 + x^3)e^x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \times e^x + (2 + x^3)e^x = (x^3 + 3x^2 + 2)e^x$

$$f(a) = b \Rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

در این تست $b = 2$ می‌باشد، لذا باید مقدار a را به دست آوریم:

$$f(a) = b \Rightarrow (2 + x^3)e^x = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 \times e^0} = \frac{1}{2}$$

۱۴۰ـ گزینه «۳» اگر $y = u(x)^{v(x)}$ آنگاه مشتق تابع y برابر است با: $y' = u^v[v'.Lnu + \frac{u'.v}{u}]$

که البته این فرمول با گرفتن Ln از طرفین به دست می‌آید: توجه شود در این تست $u = x$ و $v = \sin \pi x$ و به ازای $x = 1$، $u = 1$ و $v = \sin\pi = 0$ خواهد بود، و لذا دیگر نیاز به محاسبه و نوشتن فرمول نیست چون $u = 1$ جمله اول داخل کروشه و $v = 0$ جمله دوم داخل کروشه را صفر می‌کند پس $y'(1) = 0$ خواهد بود.

۱۴۱ـ گزینه «۴» $g'(x) = \frac{2x.f'(x^2)(1 + x^3) - 3x^2.f(x^2)}{(1 + x^3)^2} \Rightarrow g'(1) = \frac{2 \times 1 \times f'(1)(1+1) - 3 \times 1 \times f(1)}{(1+1)^2} = \frac{9}{4}$

۱۴۲ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases} m_1 = y_1'(0) = (e^x)'(0) = e^0 = 1 \\ m_2 = y_2'(0) = (1 - x^2)'(0) = -2 \times 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow tg\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{1 - 0}{1 + 1 \times 0}\right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

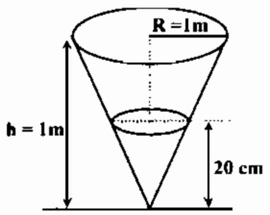
۱۴۳ـ گزینه «۲» اگر طول مستطیل محاط شده را $2x$ و عرض آن را $2y$ بنامیم، مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = (2x)(2y) = 4xy \Rightarrow S^2 = 16x^2y^2$$

از طرفی با توجه به رابطه $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ داریم: $y^2 = 9(1 - \frac{x^2}{4}) \Rightarrow S^2 = 16.x^2.9(1 - \frac{x^2}{4}) = 36 \times x^2(4 - x^2)$

توجه شود $x^2 + (4 - x^2) = 4$ لذا مقدار $x^2.(4 - x^2)$ وقتی ماکزیمم است که $x^2 = 4 - x^2$ باشد، پس داریم:

$$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow S^2 = 36 \times 2(4 - 2) = 144 \Rightarrow S = 12$$

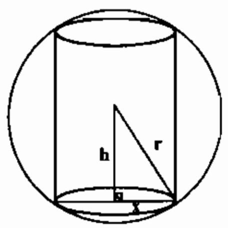


۱۴۴ـ گزینه «۱» واضح است که $h = r$ می‌باشد و با توجه به رابطه حجم مخروط که به صورت $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ بیان می‌گردد داریم: $V = \frac{1}{3}\pi \times h^2 \times h = \frac{1}{3}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \pi h^2(\frac{dh}{dt})$

در صورت سؤال عنوان شده که سرعت تغییر حجم در دقیقه برابر ۲ لیتر در دقیقه و به عبارت دیگر ۰/۰۰۲ مترمکعب در دقیقه می‌باشد: $0/002 = \pi \times (0/2)^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{20\pi}(\frac{\text{متر}}{\text{دقیقه}})$

۱۴۵ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2t(\sqrt{t+1}) - \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \times (t^2 - 1)}{(\sqrt{t+1})^2} \Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=3} = \frac{2 \times 3 \times \sqrt{4} - \frac{8}{2 \times \sqrt{4}}}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(t+1) - (t-3)}{(t+1)^2} \times e^{\frac{t-3}{t+4}} = \frac{4}{(t+1)^2} \times e^{\frac{t-3}{t+4}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=3} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{4}} = 10$$



۱۴۶ـ گزینه «۲» اگر ارتفاع استوانه را $2h$ فرض کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه مشخص شده داریم:

$$x^2 + h^2 = r^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - h^2$$
$$V = \pi x^2 2h = 2\pi(r^2 - h^2)(h) = 2\pi(r^2h - h^3)$$
$$V'(h) = 2\pi(r^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{r^2}{3} \Rightarrow \boxed{h = \frac{r}{\sqrt{3}}}$$
$$x = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}r^2} = r\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2$$

۱۴۷ـ گزینه «۴» ابتدا مشتق‌پذیر بودن تابع f را در مبدأ بررسی می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + 2x\sin\frac{1}{x}) = 1$$

همچنین توجه کنید که در همسایگی مبدأ تابع f را می‌توان به صورت $f(x) \sim x$ فرض نمود (هم‌ارزی). بنابراین f در همسایگی مبدأ صعودی است.

۱۴۸ـ گزینه «۲» $\lim_{x\to 4} \frac{f(g(x)) - f(4)}{\sqrt{g(x)} - 2} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 4} \frac{g'(x)f'(g(x))}{\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}} = \lim_{x\to 4} 2\sqrt{g(x)}f'(g(x)) = 12$

۱۴۹ـ گزینه «۴» $g'(x) = (Cosx - xSinx + 2^x Ln2Sinx + 2^x Cosx)f'(xCosx + 2^x Sinx) \Rightarrow g'(0) = 2f'(0)$

۱۵۰ـ گزینه «۴» $V = \pi r^2 h , 2\pi r + h = 12 \Rightarrow h = 12 - 2\pi r$

$$V = \pi r^2(12 - 2\pi r) = 12\pi r^2 - 2\pi^2 r^3 \Rightarrow V' = 24\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{4}{\pi} , h = 4$$
$$V = \pi(\frac{4}{\pi})^2 \times 4 = \frac{64}{\pi}$$

۱۵۱ـ گزینه «۱» توجه کنید که در همسایگی $\frac{\pi}{2}$، تابع $\sin x$ مثبت می‌باشد، بنابراین:

$$f(x) = (\sin x)^x \Rightarrow f'(x) = (\sin x)^x[Ln\sin x + x \times \frac{\cos x}{\sin x}] \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

۱۵۲ـ گزینه «۴»

نقطه بحرانی: $f(x)=x^2-2\mathrm{Ln}x \Rightarrow f'(x)=2x-\frac{2}{x}\ ,\ f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

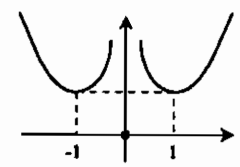
تابع f نقطه عطف ندارد. $f''(x)=2+\frac{2}{x^2}>0$

نقطه بحرانی ± 1 هر دو مینیمم نسبی هستند زیرا $f''(\pm 1)>0$. همچنین نقطه $x=0$ نیز نقطه مینیمم تابع می‌باشد. (با توجه به شکل)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-\mathrm{Ln}x^2)=+\infty$$

برای رسم نمودار f ابتدا جدول تغییرات تابع f را در نظر می‌گیریم.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



بنابراین نمودار f به شکل مقابل است و با توجه به شکل معادله $f(x)=\frac{\pi}{3}$ چهار ریشه دارد و معادله $f(x)=x$ سه ریشه دارد.

۱۵۳ـ گزینه «۲» برای اینکه $x=1$ طول نقطه عطف باشد، لازم است $f''(1)=0$. بنابراین:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+ae^{ax} \Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}+a^2e^{ax}$$

$$f''(1)=0 \Rightarrow \frac{-1}{4}+a^2e^a=0 \Rightarrow e^a=\frac{1}{4a^2}\ ,\ f(1)=1+e^a=1+\frac{1}{4a^2}$$

۱۵۴ـ گزینه «۳» سرعت مؤلفه افقی را با V_x و سرعت مؤلفه قائم را با V_y نشان می‌دهیم. در این صورت:

$$\begin{cases} V_x^2+V_y^2=(2\sqrt{5})^2 \\ V_x=2V_y \end{cases} \Rightarrow V_x^2+\frac{V_x^2}{4}=20 \Rightarrow V_x=\pm 4$$

۱۵۵ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$x^2+y^2-5y=0 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-5\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 2x(-2x+1)+2y\frac{dy}{dt}-5\frac{dy}{dt}=0$$

با جایگذاری نقاط (۲,۱) و (۲,۴) در رابطه فوق مقادیر ۳- و ۳+ برای $\frac{dy}{dt}$ به دست می‌آید.

۱۵۶ـ گزینه «۲»

$$\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-f'g}{f^2}\bigg|_{x=2}=\frac{2\times 3-(-1)(-5)}{3^2}=\frac{1}{9}$$

۱۵۷ـ گزینه «۱»

$$y=(\cos 2x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y'=-3\sin 2x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y''=-9(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\Rightarrow (y''+9y)\cos^2 2x=(-9(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{\cos 2x}}+9(\cos 2x)^{\frac{3}{2}})\cos^2 2x=3(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}=3y$$

۱۵۸ـ گزینه «۳»

$$y'=\frac{8-2x}{8x-x^2} \Rightarrow y''=\frac{-2(x^2-8x+32)}{(8x-x^2)}=\frac{-2((x-4)^2+16)}{(8x-x^2)^2}$$

ملاحظه می‌شود که y'' همواره منفی است، بنابراین تقعر منحنی همواره رو به پایین است و با توجه به اینکه دامنه تابع بازه (۰,۸) می‌باشد. بنابراین در فاصله (۰,۸) تقعر منحنی رو به پایین است. در نتیجه: $b-a=8-0=8$

۱۵۹ـ گزینه «۴»

$$y=e^{2x}+e^{-2x} \Rightarrow y'=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$y'=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y(0)=2$$

۱۶۰ـ گزینه «۳»

$$f(x)=x^{2x}=f'(x)=x^{2x}(2\mathrm{Ln}x+2)=2x^{2x}(\mathrm{Ln}x+1)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x+1=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

۱۶۱ـ گزینه «۱»

$$y=x^{2x}+e^{2\mathrm{Ln}x}=x^{2x}+x^2 \Rightarrow y'=x^{2x}(2\mathrm{Ln}x+2)+2x$$

$x=1 \Rightarrow y=1+1=2\ ,\ y'=1(0+2)+2=4 \Rightarrow$ شیب خط قائم $=\frac{-1}{4}$

بنابراین معادله خط قائم به صورت زیر خواهد بود: $y-2=\frac{-1}{4}(x-1) \Rightarrow 4y+x=9$

۱۶۲ـ گزینه «۳»

$$x^2y-e^{2x}-\sin y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy-2e^{2x}}{x^2-\cos y}=\frac{2e^{2x}-2xy}{x^2-\cos y}$$

۱۶۳ـ گزینه «۴»

$$h(x)=e^{xf(2x)} \Rightarrow h'(x)=(f(2x)+2xf'(2x))e^{xf(2x)}$$

$$\Rightarrow h'(1)=(f(2)+2f'(2))e^{f(2)}=(8+2\times 4)e^8=16e^8$$

۱۶۴ـ گزینه «۱» فرض کنید $f(x)=x^3-3x+k$، در این صورت $f'(x)=3x^2-3$ چون f' در بازه (۰,۱) ریشه ندارد، پس تابع f در بازه (۰,۱) حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد.

توجه: فقط به ازای $k=0$، معادله دو جواب متمایز در بازه [۰,۱] دارد که همان دو سر بازه می‌باشند.

۱۶۵ـ گزینه «۳» از رابطه $(f^{-1})'(y)=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مقدار $g'(2)$، ابتدا به جای $f(x)$، مقدار ۲ را قرار می‌دهیم. از آنجا $x=1$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}\ ,\ f'(x)=3x^2+5x^4 \Rightarrow f'(1)=8 \Rightarrow g'(2)=\frac{1}{8}$$

۱۶۶ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فاصله نقطه دلخواه $P(x,\sqrt{3x})$ روی نمودار f از نقطه (۵,۰) از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$d=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{3x})^2}=\sqrt{x^2-7x+25}$$

$$d'=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+25}}=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \Rightarrow d=\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{49}{2}+25}=\frac{\sqrt{51}}{2}$$

۱۶۷ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{1}}}=1$$

۱۶۸ـ گزینه «۲» می‌دانیم مشتق تابع دارای خاصیت مقدار میانی است.

۱۶۹ـ گزینه «۱»

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\ ,\ y' = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=4}$ نقطه بحرانی

x	0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
			min		

۱۷۰ـ گزینه «۲»

$$\mathrm{Ln}f(x) = -100(\mathrm{Ln}(x+1) + \mathrm{Ln}(x+2)) + \mathrm{Ln}(x+3) + \mathrm{Ln}(x+4))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -100\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) \Rightarrow f'(0) = -100f(0)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = -100 \times \frac{1}{24^{100}} \times \frac{25}{12}$$

۱۷۱ـ گزینه «۴»

$$g(x) = f(3x^3) \Rightarrow g'(x) = 9x^2f'(3x^3) \Rightarrow g'(1) = 9f'(3) = 18$$

۱۷۲ـ گزینه «۲»

$$y = \frac{2x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$$

۱۷۳ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\sin t + e^t\cos t} = \frac{y-x}{y+x}$$

۱۷۴ـ گزینه «۱»

$$y' = \frac{1-\mathrm{Ln}x}{x^2} = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow y = \frac{1}{e}$$

۱۷۵ـ گزینه «۳»

$$x + y = 100 \Rightarrow x^2 \times 2y^3 = 2y^3(100-y)^2 = f(y)$$

$f'(y) = 6y^2(100-y)^2 - 4y^3(100-y) = 0 \Rightarrow 2y^2(100-y)(3(100-y) - 2y) = 0 \Rightarrow y = 0$ یا $y = 100$ یا $y = 60$

نقاط $y=0$ و $y=100$ نقاط می‌نیمم، و نقطه $y=60$ نقطه ماکسیمم می‌باشد. $y = 60 \Rightarrow x = 40 \Rightarrow y - x = 20$

۱۷۶ـ گزینه «۳»

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$\begin{cases} y(0) = 1 & \text{می‌نیمم نسبی} \\ y(2) = 4e^{-2} + 1 & \text{ماکسیمم نسبی} \end{cases}$

۱۷۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در همسایگی نقطه $x = 3$، تابع داده شده را می‌توان بصورت $\sqrt[3]{3}(x-3)^{\frac{1}{3}}$ در نظر گرفت و بنابراین $x = 3$ طول نقطه عطف قائم تابع است. به روش مشابه $x = \frac{3}{2}$ نیز طول نقطه عطف قائم است.

۱۷۸ـ گزینه «۳»

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{-4-2}{5} = \frac{-6}{5}$$

۱۷۹ـ گزینه «۲» فقط از عامل صفر کننده یعنی $(x+10)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (x+10)' \times x(x+1)\ldots(x+9)(x+11)\ldots(x+20)$$

$$f'(-10) = 1 \times (-10)(-9) \times \ldots \times (-1) \times 1 \times 2 \times \ldots \times 10 = 10!10!$$

۱۸۰ـ گزینه «۱» تابع f در نقاط $x = \pm 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۸۱ـ هر سه گزینه (۲)، (۳) و (۴) صحیح هستند.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}(x+1) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+1)$$

بنابراین وقتی $x \geq -1$، $f'(x) \geq 0$ و تابع f صعودی است و وقتی $x \leq -1$، $f'(x) \leq 0$ و تابع f نزولی خواهد بود. تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین $x = 0$ نقطه بحرانی می‌باشد. ولی $f'(x)$ حول نقطه $x = 0$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین $x = 0$ نقطه ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی نمی‌باشد. نقطه $x = 1$، نقطه عادی روی منحنی می‌باشد زیرا f در $x = 1$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن مخالف صفر می‌باشد.

۱۸۲ـ گزینه «۱» نقطه $(2,0)$ روی منحنی قرار دارد و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4p + q = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 6 + 2p = 0 \Rightarrow p = -3\ ,\ q = 4 \end{cases}$$

۱۸۳ـ گزینه «۱»

$$y' = \frac{2x(ax+b) - a(x^2+3)}{(ax+b)^2} = \frac{ax^2 + 2bx - 3a}{(ax+b)^2} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2bx - 3a = 0$$

معادله اخیر همواره دو ریشه دارد (زیرا $\Delta > 0$). و چون y' در دو طرف ریشه‌ها تغییر علامت می‌دهد، پس یکی می‌نیمم و دیگری ماکسیمم می‌باشد.

۱۸۴ـ گزینه «۲» فاصله یک نقطه دلخواه مانند $P'(x,y)$ از نقطه $P(3,1)$ برابر $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$ می‌باشد و چون نقطه P' روی منحنی $y = x^2 + 1$ قرار دارد، بنابراین:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + ((x^2+1)-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

$$d' = \frac{4x^3 + 2(x-3)}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0 \Rightarrow x = 1\ ,\ y = 2$$

۱۸۵ـ گزینه «۳»

$$y^2 = x + y \Rightarrow y^2 - y - x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$$

تست‌های تکمیلی فصل سوم

۱ـ اگر $f(x)=\dfrac{e^x+\sin x}{xe^x}$ آنگاه $f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi+e^{\pi}}{\pi^2e^{\pi}}$ ۲) $\dfrac{-\pi-e^{\pi}}{\pi^2e^{\pi}}$ ۳) $\dfrac{\pi-e^{\pi}}{\pi^2e^{\pi}}$ ۴) $\dfrac{-\pi+e^{\pi}}{\pi^2e^{\pi}}$

۲ـ اگر به ازاء هر x داشته باشیم $|f(x)|\le x^2$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع f در صفر پیوسته نیست.
۲) f در صفر مشتق‌پذیر بوده و $f'(0)=0$
۳) ممکن است f در صفر مشتق‌پذیر باشد یا نباشد.
۴) اگر f درصفر مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(0)=0$ است.

۳ـ اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و g در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر باشد $(gof)'(0)$ کدام است؟

۱) $f'(2)$ ۲) ۲ ۳) $g'(2)$ ۴) صفر

۴ـ اگر $y=(\tan x)^{\cos x}$ آنگاه $\dfrac{1}{y'}$ در نقطه $x=\dfrac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) 0 ۴) ۲

۵ـ اگر $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ باشد ، رابطه صحیح کدام است؟

۱) $y'=(1-x^2)y$ ۲) $y'=(1-x^2)\dfrac{y}{x}$ ۳) $y'=(1-x^2)\dfrac{x}{y}$ ۴) $y'=(1-\dfrac{x}{2})\dfrac{y}{x}$

۶ـ اگر $y=\operatorname{Arc}\tan(\operatorname{Arc}\cos(\sin x^2))$ باشد ، حاصل $\dfrac{dy}{dx}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۷ـ اگر $f'(x)=3x^2$ باشد ، آنگاه مشتق $f(1+\sqrt{x})$ برابر کدام است؟

۱) $3-\dfrac{3(1+x^2)}{2\sqrt{x}}$ ۲) $3(1+\sqrt{x})^2$ ۳) $(1+\sqrt{x})^2$ ۴) $3+\dfrac{3(1+x)}{2\sqrt{x}}$

۸ـ مشتق تابع $y=x^2e^{-x}$ کدام است؟

۱) $y'=x(\dfrac{2+x}{y})$ ۲) $y'=e^{-x}(2x^2-x)$ ۳) $y'=x(\dfrac{2-x}{y})$ ۴) $y'=y(\dfrac{2-x}{x})$

۹ـ اگر $f(2x)=6x+\sin(f(x))$ و $f(0)=0$ باشد ، آنگاه $f'(0)$ کدام است؟

۱) ‎-۶ ۲) ‎-۳ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰ـ اگر $y=\dfrac{z+1}{z-1}$ و $z=x^2-2x$ و $x=\sqrt{t+3}$. مقدار $\dfrac{dy}{dt}$ به ازای $t=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ‎-۱ ۳) ۲ ۴) ‎-۲

۱۱ـ مشتق مرتبه n ام $y=a^x$ برابر کدام است؟

۱) $(a^x)^n\operatorname{Ln}a$ ۲) $(\operatorname{Ln}a)^n a^x$ ۳) $(a^x)^n(\operatorname{Ln}a)^n$ ۴) $a^x\operatorname{Ln}a$

۱۲ـ با فرض $f'(\dfrac{1}{x-2})=\dfrac{x}{2x-1}$ مقدار $f'(-2)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{4}$ ۲) $\dfrac{3}{8}$ ۳) $\dfrac{5}{6}$ ۴) $\dfrac{5}{12}$

۱۳ـ اگر $f(x)=x^3+x$ باشد، آنگاه $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۴

۱۴ـ مشتق $f(x)=\operatorname{Ln}(\operatorname{Cos}2x+\operatorname{Sin}2x)$ کدام است؟

۱) $2\operatorname{tg}(2x-\dfrac{\pi}{4})$ ۲) $2\operatorname{tg}(2x+\dfrac{\pi}{4})$ ۳) $2\operatorname{Cotg}(2x-\dfrac{\pi}{4})$ ۴) $2\operatorname{Cotg}(2x+\dfrac{\pi}{4})$

۱۵ـ اگر $y^2=x+\operatorname{Ln}\dfrac{y}{x}$ آنگاه y'_x در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ‎-۱ ۴) ۲

۱۶ـ مشتق تابع $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ وقتی $|x|<1$ کدام است؟

۱) $y=-\dfrac{2}{1+x^2}$ ۲) $y=-\dfrac{1}{x^2+1}$ ۳) $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ ۴) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

۱۷ـ در تابع پارامتری $\begin{cases}x=2\operatorname{Ln}\cot gt\\ y=\operatorname{tg}t+\cot gt\end{cases}$ ، y'_x کدام است؟

۱) $\cot g2t$ ۲) $\operatorname{tg}2t$ ۳) $\cot gt$ ۴) $\operatorname{tg}t$

۱۸ـ در تابع پارامتری $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=b\sin^3t\end{cases}$ ، y''_{xx} کدام است؟

۱) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}t$ ۲) $-\dfrac{b}{a\cos^2t}$ ۳) $y=\dfrac{b}{3a^2\cos^4t\sin t}$ ۴) $y=\dfrac{b}{3a\cos^2t}$

۱۹ـ اگر $\operatorname{arctg}y-y+x=0$ باشد آنگاه y''_{xx} کدام است؟

۱) $-\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$ ۲) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$ ۳) $\dfrac{2(1+y^2)}{y^4}$ ۴) $-\dfrac{2(1+y^2)}{y^2}$

۲۰ـ اگر $f(x)=|x|$, $\phi(x)=|x^3|$ آنگاه در نقطه $x=0$ کدام گزاره برای توابع ذکر شده صحیح است ؟

۱) تابع f در نقطه $x=0$ مشتق دارد .
۲) هر دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق دارند .
۳) تابع ϕ در نقطه $x=0$ مشتق دارد .
۴) هیچکدام از دو تابع در نقطه $x=0$ مشتق ندارند .

۲۱ـ اگر تابع f در نقطه $x=x_0$ مشتق‌پذیر و تابع g در نقطه $x=x_0$ مشتق ناپذیر باشد آنگاه کدام گزاره صحیح است ؟

۱) $f.g$ در نقطه $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر می باشد .
۲) $f+g$ در نقطه $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر است .
۳) $\dfrac{f}{g}$ همیشه مشتق‌پذیر است .
۴) $f-g$ همیشه مشتق‌پذیر است .

۲۲ـ اگر $f(x)=x(x+1)(x+2).....(x+6)$ باشد، مقدار $f'(-5)$ کدام است؟

۱) ‎-۷۲۰ ۲) ‎-۱۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲۰

۲۳ـ تابع $f(x)=|x^5(x^2-1)|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۴ـ اگر $f(x)=|\sin x-1|$, $g(x)=|1-\sin x|$ آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است ؟

۱) f و gدر تمام نقاط مشتق‌پذیر هستند .
۲) f و g در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند .
۳) f در $x=\dfrac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر نمی باشد .
۴) g در $x=\dfrac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر باشد .

۲۵ـ اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد آنگاه مشتق تابع fog چگونه تابعی است ؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) هم زوج و هم فرد ۴) نه فرد و نه زوج

۲۶ـ کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه $|f(x)|$ در a مشتق‌پذیر است .
۲) اگر تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $|f(x)|$ در a مشتق‌پذیر است .
۳) اگر در تابع $f(x)$، $f(a)=0$ باشد، در این صورت تابع $|f(x)|$ در a مشتق‌پذیر است .
۴) مشتق هر تابع زوج تابعی فرد و مشتق هر تابع فر د تابعی زوج است .

۲۷ـ فرض کنید f تابعی فرد باشد بطوری که $f'(1) = 2$، در این صورت $f'(-1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

۲۸ـ اگر طول و عرض مستطیلی بر حسب زمان بصورت $x = t^2 + t + 5$ ، $y = t^2 + 4$ باشند در لحظه‌ای که عرض مستطیل ۸ واحد است، سرعت تغییر مساحت آن چقدر است؟

۱) ۸۴ ۲) ۷۷ ۳) ۷۴ ۴) ۸۷

۲۹ـ مشتق مرتبه n ام e^{kx} کدام است؟

۱) $k^n e^{kx}$ ۲) ke^{knx} ۳) $k!e^{kx}$ ۴) $k!e^{knx}$

۳۰ـ اگر $f(x) = \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$ باشد. آنگاه حاصل $A = f(\frac{\pi}{4}) - 3f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $A = -3$ ۲) $A = 0$ ۳) $A = 3$ ۴) $A = \frac{\pi}{4}$

۳۱ـ مشتق عبارت $f(x) = \sqrt{1+\sinh^2 4x}$ کدام است؟

۱) $4\sinh 4x$ ۲) $\frac{1}{4}\sinh 4x$ ۳) $\tanh 4x$ ۴) $\frac{1}{4}\cosh 4x$

۳۲ـ اگر $x^4 - xy + y^4 = 1$ آنگاه مقدار y''_{xx} در نقطه $(0,1)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{1}{16}$

۳۳ـ اگر $\begin{cases} x = \mathrm{Cos}2t \\ y = \mathrm{Sin}^2 t \end{cases}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

۱) $-\mathrm{Cos}2t$ ۲) صفر ۳) $\mathrm{Sin}t$ ۴) -2

۳۴ـ گزاره صحیح دربارهٔ تابع $f(x) = x^2 \mathrm{Ln}x$ در فاصله $[1,e]$ کدام است؟

۱) تابع در نقطه $x = \frac{1+e}{2}$ حداقل است.
۲) نقطه بحرانی تابع در $x = \frac{1+e}{2}$ می‌باشد.
۳) تابع در نقطه $x = \frac{e}{2}$ حداکثر است.
۴) در فاصله $[1,e]$ تابع نقطهٔ بحرانی ندارد.

۳۵ـ نقطه‌ای بر روی منحنی $12y = x^3$ تغییر می‌کند، در کدام نقطه تغییرات طول برابر تغییرات عرض می‌باشد؟

۱) $x = \pm 2$ ۲) $-2 < x < 2$ ۳) $x < -2$ یا $x > 2$ ۴) $x > \sqrt[3]{12}$

۳۶ـ کمترین مقدار تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ در فاصلهٔ [۲/۵ ,۲-] چقدر است؟

۱) ۳- ۲) ۱۶/۵- ۳) ۸ ۴) ۱۹-

۳۷ـ تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ مفروض است ، عبارت صحیح در مورد این تابع کدام است؟

۱) تابع ماکزیمم و مینیمم ندارد.
۲) یک مینیمم و یک ماکزیمم دارد.
۳) تابع دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد.
۴) تابع دو ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

۳۸ـ در کدام نقطه مماس بر نمودار تابع $y = x\mathrm{Arc}\tan x$ از منحنی عبور می‌کند؟

۱) $x = -1$ ۲) $x = 0$ ۳) $x = 1$ ۴) هیچ نقطه‌ای

۳۹ـ اگر تابع $f(x) = x^3 - bx^2 + ax + 1$ بر بازه $[-1,2]$ در نقطه $c = 1$ در شرایط قضیه رول صدق کند، a کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰ـ در چه نقطه‌ای مماس بر منحنی $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$ با جهت مثبت محور x زاویهٔ 45° می‌سازد؟

۱) $M(2,2)$ ۲) $M(-2,-\frac{14}{3})$ ۳) $M(2,-\frac{14}{3})$ ۴) $M(2,-2)$

۴۱ـ اندازه تقریبی $\sqrt[3]{1042}$ کدام است؟

۱) ۱۰/۲۸ ۲) ۱۰/۱۴ ۳) ۱۰/۲۱ ۴) ۱۰/۴۲

۴۲ـ تابع $f(x) = \cos x - x$ مفروض است. گزارهٔ صحیح کدام است؟

۱) تابع همواره صعودی است.
۲) تابع همواره نزولی است.
۳) تابع در فاصله $0 < x < 1$ نزولی است.
۴) تابع در فاصله $0 < x < 1$ صعودی است.

۴۳ـ شرط صحیح بین ضرایب a ، b و c در منحنی $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ به منظور داشتن نقطه عطف کدام است؟

۱) $3b^2 - 8ac > 0$ ۲) $3b^2 - 8ac < 0$ ۳) $a + b + c = 0$ ۴) $a + b = 4c$

۴۴ـ عرض از مبدأ معادله خط مماس بر منحنی $y = \tan(x+y)$ در نقطه $A(\frac{\pi}{4}-1,1)$ کدام است؟

۱) $y = \frac{\pi}{2} + 1$ ۲) $y = \frac{\pi}{2} - 1$ ۳) $y = -\frac{\pi}{2} + 3$ ۴) $y = -\frac{\pi}{2} - 3$

۴۵ـ اگر $f(a) = 0$ ، $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ باشد، نقطه $x = a$ روی منحنی $y = f(x)$ دارای .... است.

۱) ماکزیمم روی محور عرضها ۲) ماکزیمم روی محور طولها ۳) مینیمم روی محور طولها ۴) مینیمم روی محور عرضها

۴۶ـ اگر شعاع داخلی یک کره فلزی ۴ و شعاع خارجی آن $4\frac{1}{16}$ سانتی‌متر باشد ، حجم تقریبی جدار کره چقدر است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

۴۷ـ عبارت صحیح در مورد تابع $f(x) = x^2 \mathrm{Ln}x$ کدام است؟

۱) تابع در فاصله [e و ۱] یک مینیمم و دو ماکزیمم دارد.
۲) مقدار ماکزیمم تابع در فاصله [e و ۱] برابر e^2 است.
۳) مقدار مینیمم تابع در فاصه [e و ۱] برابر e^2 است.
۴) تابع در فاصله [c و ۱] حداقل دو نقطه بحرانی دارد.

۴۸ـ برای تابع $y = 3x^5 - 5x^3$ ، وضعیت نقطه‌ای به طول $x = 1$ چگونه است؟

۱) ماکزیمم ۲) مینیمم ۳) عطف ۴) عادی

۴۹ـ در تابع $y = e^x + e^{1-x}$ اگر $x \in [0,1]$ باشد، مقدار C در قضیه رول کدام است ؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵۰ـ کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی به معادله $y^2 = -2x + 4$ کدام است ؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) 2

۵۱ـ به ازای چه مقدار x تابع $y = \cos^2 x - \cos x$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ کمترین مقدار خود را خواهد داشت ؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۵۲ـ اگر $f(-1) = 0$ ، $f'(-1) > 0$ ، $f''(-1) < 0$ آنگاه نقطه $(-1,0)$ چه نوع نقطه‌ای برای تابع f است ؟

۱) عادی ۲) مینیمم ۳) ماکزیمم ۴) عطف

۵۳ـ اگر تابع $y = \frac{x+a}{1+ax}$ همواره نزولی باشد، حدود تغییرات a کدام است ؟

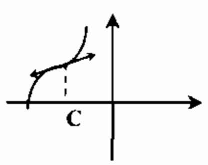
۱) $a > -1$ ۲) $a > 1$ ۳) $-1 < a < 1$ ۴) $a < -1$ یا $a > 1$

۵۴ـ نمودار تابع $y = \sin kx$ محور xها را در فاصله $[0,2\pi]$ ، پنج بار قطع کرده ، مقدار k کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵ـ قسمتی از نمودار تابع f به صورت شکل زیر است، کدام گزینه صحیح است ؟

۱) $f''(c) > 0 , f'(c) < 0$
۲) $f''(c) = 0 , f'(c) > 0$
۳) $f''(c) = 0 , f'(c) < 0$
۴) $f''(c) > 0 , f'(c) > 0$



۵۶ـ اگر $y=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ در نقطه $A(1,2)$ مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه a کدام است ؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 4 ۴) 6

۵۷ـ فرض کنیم f تابعی باشد که $f'(1)=0, f''(1)=0$ در این صورت نقطه‌ای به طول $x=1$ چه نوع نقطه‌ای است ؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۵۸ـ رابطه بین r شعاع قاعده و h ارتفاع یک استوانه بصورت $r+h=15$ است شعاع قاعده چقدر انتخاب شود تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم گردد .

۱) $7/5$ ۲) 8 ۳) 10 ۴) 12

۵۹ـ اگر S سطح جانبی استوانه و s سطح قاعده آن باشد و $S+s=12$ باشد، آنگاه شعاع قاعده استوانه چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود؟

۱) $\dfrac{2}{\pi}$ ۲) $\dfrac{3}{\pi}$ ۳) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$

۶۰ـ تابع $f(x)=\sin x-x$ چند نقطه عطف دارد ؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) بی‌شمار

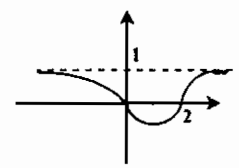
۶۱ـ طول نقطه عطف تابع $y=(1-\mathrm{Ln}x)^2$ کدام است ؟

۱) $\dfrac{1}{e}$ ۲) e ۳) e^2 ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

۶۲ـ معادله $e^x-2e^{-x}=2$ حداکثر چند ریشه می‌تواند داشته باشد ؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 0

۶۳ـ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+mx+2}$ است مقدار b کدام است ؟



۱) 2
۲) -1
۳) 1
۴) -2

۶۴ـ اگر $x=1$ متناظر به نقطه عطف تابع با ضابطه $y=\dfrac{(x+a)^3}{x^2}$ باشد مقدار a چقدر است ؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۶۵ـ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\arccos x^2$ در بازه $\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|$ کدام است ؟

۱) $\dfrac{\pi}{4}$ ۲) $\dfrac{\pi}{6}$ ۳) $\dfrac{\pi}{3}$ ۴) $\dfrac{\pi}{2}$

۶۶ـ تابع $y=\dfrac{2x}{\mathrm{Ln}x}$ در کدام‌یک از فواصل زیر نزولی است ؟

۱) $(1,e)$ ۲) $(e,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۶۷ـ تابع $y=\cos(\dfrac{\pi}{x})$ در کدام‌یک از فواصل زیر صعودی است ؟

۱) $(\dfrac{1}{2k+2},\dfrac{1}{2k+1})$ ۲) $(\dfrac{1}{2k+1},\dfrac{1}{2k})$ ۳) $(2k+1,2k+2)$ ۴) $(2k,2k+1)$

۶۸ـ مقدار تقریبی $\log 10/21$ به کمک دیفرانسیل کدام است ؟

۱) $1/09$ ۲) $1/0009$ ۳) $1/009$ ۴) $1/039$

۶۹ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ را در نقطه تلاقی با سهمی $y=\dfrac{1}{x+1}$ کدام است ؟

۱) $x+2y+2=0$ ۲) $x+2y-2=0$ ۳) $y=2$ ۴) $y=3$

۷۰ـ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y=x^2\mathrm{Ln}x$ در نقطهٔ عطف آن کدام است ؟

۱) $-3e^{-\frac{3}{2}}$ ۲) $e^{-\frac{3}{2}}$ ۳) $4e^{-\frac{3}{2}}$ ۴) $-2e^{-\frac{3}{2}}$

۷۱ـ مقدار m برای آنکه حاصلضرب مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\dfrac{mx^2+x+3}{x^2+x+1}$ برابر $\dfrac{23}{3}$ باشد، کدام است ؟

۱) $m=-1$ ۲) $m=1$ ۳) $m=2$ ۴) $m=-2$

۷۲ـ برای تابع $y=x^2+\cos x$ نقطه‌ای بطول $x_0=0$ ....

۱) مینیمم است ۲) ماکزیمم است ۳) عطف است ۴) عادی است

۷۳ـ تابع $y=\sin x+x+x^3$ چند نقطه عطف دارد؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۷۴ـ نمودار کدام تابع دارای نقطه عطف است؟

۱) $y=x^2|x|$ ۲) $y=x|x|$ ۳) $y=\sqrt{x}$ ۴) $y=\sqrt[5]{(x-2)^2}$

۷۵ـ مینیمم مطلق تابع $y=\sqrt{4-x}-\sqrt{x}-2x$ کدام است ؟

۱) -10 ۲) 10 ۳) -8 ۴) 8

۷۶ـ فرض کنید $y=\dfrac{-1}{2x^2e^{x^2}}$ ، در اینصورت y' در کدامیک از روابط زیر صدق می‌کند؟

۱) $xy'+2y=e^{-x^2}$ ۲) $x'y'-2y=e^{-x^2}$ ۳) $y'-2y=e^{-x^2}$ ۴) هیچکدام

۷۷ـ کدامیک از نامساوی‌های زیر همواره برقرار است؟ $(x>0)$

۱) $\mathrm{Ln}(1+x)<x$ ۲) $\mathrm{Ln}(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$ ۳) گزینه ۱ و ۲ ۴) هیچکدام

۷۸ـ کدام رابطه زیر صحیح نیست؟

۱) $\mathrm{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}\ ,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ۲) $\mathrm{tg}x<x+x^3\ ,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

۳) $\mathrm{Arctg}x>x-\dfrac{x^3}{3}\ ,0<x<1$ ۴) $\mathrm{Arctg}x<x-\dfrac{x^3}{6}\ ,\ 0\le x<1$

۷۹ـ تابع $y=2x^2-\mathrm{Ln}x$ در کدامیک از فواصل زیر نزولی است؟

۱) $(0,2]$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(0,\dfrac{1}{2})$ ۴) $(\dfrac{1}{2},+\infty)$

۸۰ـ به ازای چه مقادیر b تابع $y=\sin x-bx+c$ همواره نزولی است؟

۱) $b\ge 0$ ۲) $b\le 0$ ۳) $b\ge 1$ ۴) $b\le 1$

۸۱ـ نقطه $x=0$ در تابع $y=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) ماکسیمم ۲) مینیمم ۳) عطف ۴) بازگشت

۸۲ـ بیشترین مقدار عبارت $\sin x\sin 2x$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

۸۳ـ کمترین مقدار تابع $f(x)=\mathrm{arctg}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}x$ در فاصله $[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \sqrt{3}]$ چقدر است؟

۱) $\dfrac{\pi}{6}$ ۲) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{4}\mathrm{Ln}3$ ۳) $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{4}\mathrm{Ln}3$ ۴) $\dfrac{1}{4}\mathrm{Ln}3$

۸۴ـ در کره‌ای به شعاع R می‌خواهیم استوانه‌ای با بیشترین مساحت جانبی محاط کنیم. ارتفاع استوانه چقدر است؟

۱) R ۲) $\frac{R}{2}$ ۳) $2R$ ۴) $R\sqrt{2}$

۸۵ـ در کدامیک از نقاط زیر $y=\frac{x}{1+x^2}$ ، خط مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند؟

۱) نقاط $x=\pm 1$ ۲) نقاط $x\pm\sqrt{2}$ ۳) نقاط $x=\pm\sqrt{3}$ ۴) $x=0$

۸۶ـ به ازای چه مقدار a منحنی $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ مقعر است؟

۱) $|a|\geq 1$ ۲) $|a|\geq 2$ ۳) $|a|\leq 2$ ۴) $|a|\leq 1$

۸۷ـ تابع $y=\frac{2x}{Lnx}$ در کدامیک از فواصل زیر نزولی است؟

۱) $(1,e)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(0,e)$ ۴) $(1,+\infty)$

۸۸ـ مینیمم عبارت $f(x)=x-2Lnx$ در فاصله $[1,e]$ چقدر است؟

۱) 1 ۲) $e-2$ ۳) $2-Ln4$ ۴) هیچکدام

۸۹ـ کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد معادله $x^{2n}+px+q=0$ صحیح است؟

۱) معادله حداقل ۲ ریشه دارد. ۲) معادله حداکثر ۲ ریشه دارد.
۳) معادله فقط ۲ ریشه حقیقی می‌تواند داشته باشد. ۴) معادله حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

۹۰ـ تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در فاصله $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) نزولی و سپس صعودی

۹۱ـ آب با سرعت ثابت ۲ متر مکعب در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکلی می‌شود. رأس مخروط به طرف پایین و قطر قاعده برابر ارتفاع آن است. وقتی عمق آب به ۶ متر برسد، سطح آب با چه سرعتی بالا می‌رود؟

۱) $\frac{1}{3\pi}$ ۲) $\frac{1}{4\pi}$ ۳) $\frac{1}{6\pi}$ ۴) $\frac{2}{9\pi}$

۹۲ـ معادله $x^8+x^4+x^2-1=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ریشه ۲) ۲ ریشه ۳) ۴ ریشه ۴) ۶ ریشه

۹۳ـ چنانچه $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ و $\frac{dy}{dt}=3$ باشد، هنگامیکه $x=1$ ، مقدار $\frac{dx}{dt}$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{-3}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۹۴ـ اگر $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ، آنگاه:

۱) $f'(0)\neq 0\neq f''(0)$ ۲) $f'(0)=0\neq f''(0)$ ۳) $f'(0)=0=f''(0)$ ۴) $f'(0)\neq 0=f''(0)$

۹۵ـ نقطه‌ای روی دایره $x^2+y^2=13$ متحرک است. در نزدیکی نقطه $P(2,-3)$ تصویر سرعت بر محور y ها $\frac{dy}{dt}=0/4$ در این نقطه چقدر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۹۶ـ مشتق تابع $f(x)=x|x|$ در صفر:

۱) برابر یک است. ۲) وجود ندارد. ۳) برابر صفر است. ۴) برابر ۱- است.

۹۷ـ کدامیک از توابع زیر در بازه $(0,1)$ ماکسیمم مطلق دارند؟

۱) 2^{-x} ۲) $\sin\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) $Ln(x+1)$

۹۸ـ ماکسیمم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه‌ای که طول وتر آن ۱ سانتی‌متر باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۹ـ نقاط $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ برای تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-Sinx$ چه نوع نقاطی هستند؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکسیمم نسبی ۳) عطف ۴) ساده

۱۰۰ـ اگر $f(x)=\frac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+4)^{\frac{1}{2}}(x+8)^{\frac{1}{3}}}$ ، $f'(0)$ چقدر است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{15}{3}$ ۴) $\frac{20}{3}$

۱۰۱ـ تعداد ریشه‌های معادله $\pi\cos\pi x-4(1-2x)=0$ در بازه $(0,\frac{1}{2})$ برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بیشمار

۱۰۲ـ در تابع $0\leq x\leq 1$ ، $f(x)=Arctg\,x$ ، طبق قضیه مقدار میانگین $\frac{Arctgx}{x}$ در کدام فاصله قرار دارد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $(0,2)$

۱۰۳ـ دو تابع $f(x)=\log(\sqrt{x^2+9}-x)$ و $g(x)=\log(x+\sqrt{x^2+9})$ مفروضند. کدامیک از روابط زیر همواره برقرار است؟

۱) $f'(x)=\frac{1}{g'(x)}$ ۲) $f'(x)=g'(x)$ ۳) $f'(x)=-g'(x)$ ۴) $f'(x)g'(x)=0$

۱۰۴ـ نرخ تغییر $\sqrt{x^2+8}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=1$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 6

۱۰۵ـ مشتق n اُم تابع $f(x)=\frac{1}{x-x^2}$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $2^n n![1+(-1)^n]$ ۲) $2^{n+1}n![1+(-1)^n]$
۳) $2^n(n+1)![1+(-1)^n]$ ۴) $2^{n+1}(n+1)![1+(-1)^n]$

۱۰۶ـ در تابع $y=\sqrt{x}\,Ln\,x$ طول نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟

۱) e^{-1} مینیمم ۲) e^{-2} مینیمم ۳) e^{-1} ماکسیمم ۴) e^{-2} ماکسیمم

۱۰۷ـ مشتق $y=Arctg(Lnx)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۱۰۸ـ مشتق تابع $y=x^{Lnx}$ در $x=e$ کدام است؟

۱) e ۲) $2e$ ۳) 1 ۴) 2

۱۰۹ـ اگر $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{...}}}}$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2y+1}$ ۲) $\frac{-1}{2y+1}$ ۳) $\frac{1}{2y-1}$ ۴) $\frac{-1}{2y-1}$

۱۱۰ـ تابع $y=||x|-1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

خودپسندی همان ابلهی است. **«حضرت علی (ع)»**
به حافظه‌ات اعتماد نکن؛ همه چیز را یادداشت کن.

فصل چهارم

« انتگرال »

تابع پیوسته f را در نظر می‌گیریم، اگر تابع اولیه آن را با F نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

بعبارت دیگر تاکنون (قبل از این فصل) تابعی مشخص شده بود و مشتق آن از ما خواسته می‌شد اما در این فصل مشتق تابعی داده می‌شود و تابع اولیه آن از ما خواسته می‌شود توجه شود که اگر از سمت راست تساوی مشتق بگیریم باید به $f(x)$ برسیم (c عدد ثابتی می‌باشد)

فرمولهای مهم انتگرال

تذکر۱: در فرمولهای زیر u تابعی از x می باشد، (c و a اعداد ثابت هستند)

۱) $\int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c \qquad (n \neq -1)$

۲) $\int \frac{du}{u} = Ln|u|+c$

۳) $\int a^u du = \frac{a^u}{Lna}+c \qquad (a>0, a\neq 1)$

۴) $\int e^u du = e^u + c$

۵) $\int Sinu.du = -\cos u + c$

۶) $\int \cos u.du = \sin u + c$

۷) $\int (1+tg^2u).du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$

۸) $\int (1+\cot g^2 u).du = \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot gu + c$

۹) $\int tgu.du = -Ln|\cos u| + c$

۱۰) $\int \cot gu.du = Ln|Sinu| + c$

۱۱) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}Arctg\frac{u}{a}+c$

۱۲) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSin(\frac{u}{a})+c$

۱۳) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$

۱۴) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+c = \sinh^{-1}(\frac{u}{a})+c$

۱۵) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+c = \cosh^{-1}u + c$

۱۶) $\int \frac{du}{\sin u} = Ln|tg\frac{u}{2}|+c = Ln|\csc u - \cot gu|+c$

۱۷) $\int \frac{du}{\cos u} = Ln|tg(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2})|+c = Ln|tgu+\sec u|+c$

۱۸) $\int \sinh u du = \cosh u + c$

۱۹) $\int \cosh u du = \sinh u + c$

۲۰) $\int tghudu = Ln(\cosh u)+c$

۲۱) $\int \cot ghudu = Ln|\sin u|+c$

۲۲) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{u}{a}|+c$

۲۳) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{1}{2}[u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm a^2 Ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})]+c$

۲۴) $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}[u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\sin^{-1}\frac{u}{|a|}]+c$

۲۵) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{-1}{a}Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u})+c$

توجه ۱ : $\int [f(u)+g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$

توجه ۲ : k عددی حقیقی می‌باشد . $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

توجه ۳ : $\int \frac{f(u)}{g(u)}du \neq \frac{\int f(u)du}{\int g(u)du}$, $\int f(u).g(u)du \neq \int f(u)du \times \int g(u)du$

به مثالهای زیر توجه کنید .

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c = 2x^{\frac{1}{2}}+c = 2\sqrt{x}+c$

۲) $\int \frac{dx}{x+2} = Ln|x+2|+c$

۳) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{Ln3}+c$

۴) $\int 5e^x = 5e^x + c$

۵) $\int \sin 3xdx = \int (\frac{3}{3})\sin 3xdx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)3dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

۶) $\int \cos 7x dx = \int \frac{7}{7}\cos 7x dx = \frac{1}{7}\int (\cos 7x)7dx = \frac{1}{7}\sin 7x + c$

۷) $\int (2+tg^2x)dx = \int [1+(1+tg^2x)]dx = \int dx + \int (1+tg^2x)dx = x + tgx + c$

۸) $\int \pi(1+\cot g^2 x)dx = -\pi \cot gx + c$

۹) $\int tg\pi xdx = -\frac{1}{\pi}Ln|\cos \pi x|+c$

۱۰) $\int (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x})dx = \int \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x + Ln|\sin x|+c$

۱۱) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}Arctg(\frac{x}{3})+c$

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{3}})+c$

۱۳) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}Ln|\frac{x-2}{x+2}|+c$

۱۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+9}} = Ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+9}\right|+c$

۱۵) $\int \frac{3dx}{\sin 3x} = Ln\left|tg\frac{3x}{2}\right|+c = Ln|\cos ec3x - \cot g3x|+c$

۱۶) $\int \frac{2dx}{\cos 2x} = Ln\left|tg(x+\frac{\pi}{4})\right|+c = Ln|tg2x+\sec 2x|+c$

۱۷) $\int \cosh 8x dx = \frac{1}{8}\sinh 8x + c$

۱۸) $\int \frac{1}{9}\sinh 9x dx = \frac{1}{81}\cosh 9x + c$

تذکر ۲: در فرمولهای ذکر شده توجه داریم که وقتی عبارت بر حسب u داریم، du نیز کنار آن موجود است در بعضی از مثالهای فوق مانند مثال شماره ۵ عبارت $\sin 3x$ داخل انتگرال موجود ولی $3dx$ کنار آن وجود ندارد لذا با تغییری که مشاهده کردید $3dx$ را ایجاد کردیم تا بتوانیم از فرمولهای ذکر شده استفاده کنیم، این تغییر در مثالهای ۶، ۹، ۱۷و ۱۸ نیز انجام شده است، تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع **تغییر متغیر** می‌باشد که با توجه به مثالهای زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم تغییر متغیر داشت :

مثال ۱: حاصل انتگرالهای زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید .

۱) $I = \int (3x+5)^{17}dx \Rightarrow u = 3x+5 \rightarrow du = 3dx \rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{3}}$

$\Rightarrow I = \int u^{17}.\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{17}du = \frac{1}{3}(\frac{u^{18}}{18})+c = \frac{(3x+5)^{18}}{54}+c$

۲) $I = \int \cos(1+\pi x)dx \Rightarrow u = \pi x + 1 \rightarrow du = \pi dx \rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\pi}}$

$\Rightarrow I = \int (\cos u)\frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int \cos u du = \frac{1}{\pi}\sin u + c = \frac{1}{\pi}\sin(1+\pi x)+c$

۳) $I = \int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u = \arccos x \Rightarrow \boxed{du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\Rightarrow I = \int \frac{-du}{u^5} = -\int u^{-5}du = \frac{1}{4}u^{-4}+c = \frac{1}{4(\arccos x)^4}+c$

$$۴)\ I=\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \sqrt{x}=u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}}=du \rightarrow \boxed{dx=2\sqrt{x}\,du}$$

$$\Rightarrow I=\int 2\sin u\,du=-2\cos u+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

$$۵)\ I=\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int(1+\frac{2}{2x+1})dx=\int dx+\underbrace{\int\frac{2dx}{2x+1}}_{I_1}$$

حاصل انتگرال اول برابر x می‌باشد برای حل انتگرال دوم داریم :

$$2x+1=u \rightarrow 2dx=du \rightarrow I_1=\int\frac{2dx}{2x+1}=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|2x+1|+c \Rightarrow I=x+Ln|2x+1|+c$$

$$۶)\ I=\int\frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\underbrace{\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} I_1:\arcsin x=u \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=du} & (1) \\ I_2:1-x^2=t \Rightarrow -2x\,dx=dt \rightarrow \boxed{x\,dx=-\frac{dt}{2}} & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow I=\int u\,du-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{u^2}{2}-t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} I=\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}+c$$

$$۷)\ I=\int\frac{Ln\sqrt{x}}{x}dx=\int\frac{Ln\,x^{\frac{1}{2}}}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{Lnx}{x}dx \Rightarrow Lnx=u \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{x}=du} \rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\int u\,du=\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2})+c=\frac{1}{4}(Lnx)^2+c$$

$$۸)\ I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{1+\frac{1}{1+tg^2x}}=\int\frac{(1+tg^2x)}{2+tg^2x}dx \rightarrow tgx=u \rightarrow \boxed{(1+tg^2x)dx=du} \rightarrow$$

$$I=\int\frac{du}{2+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}Arctg(\frac{u}{\sqrt{2}})+c=\frac{1}{\sqrt{2}}Arctg(\frac{tgx}{\sqrt{2}})+c$$

$$۹)\ I=\int x^2\cos(x^3+3)dx \Rightarrow x^3+3=u \Rightarrow 3x^2dx=du \rightarrow \boxed{x^2dx=\frac{du}{3}} \rightarrow$$

$$I=\frac{1}{3}\int\cos u\,du=\frac{\sin u}{3}+c=\frac{\sin(x^3+3)}{3}+c$$

$$۱۰)\ I=\int x(2x+5)^{10}dx \Rightarrow 2x+5=u \rightarrow \left|\begin{array}{l} 2x=u-5 \rightarrow \boxed{dx=\frac{du}{2}} \\ x=\frac{u-5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$I=\int(\frac{u-5}{2})(u)^{10}(\frac{du}{2})=\frac{1}{4}\int(u-5)u^{10}du=\frac{1}{4}\int(u^{11}-5u^{10})du=\frac{1}{4}[\frac{u^{12}}{12}-\frac{5}{11}u^{11}]+c=\frac{1}{4}[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}]+c$$

$$۱۱)\ I=\int\frac{e^x}{e^x-1}dx \Rightarrow e^x-1=u \rightarrow e^xdx=du \rightarrow I=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|e^x-1|+c$$

$$۱۲)\ I=\int\frac{a^xdx}{1+a^{2x}} \Rightarrow a^x=u \Rightarrow a^xLna\,dx=du \rightarrow a^xdx=\frac{du}{Lna}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{a^xdx}{1+(a^x)^2}=\frac{1}{Lna}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{Lna}[arctgu]+c=\frac{arctg(a^x)}{Lna}+c$$

مثال ۲ : مطلوبست محاسبه $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$.

☑ **پاسخ :** از تغییر متغیر $u=x^{\frac{1}{3}}$ ، $du=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}=\int\frac{3du}{1+u^2}=3Arctgu+c=3Arctg\sqrt[3]{x}+c$$

مثال ۳ : حاصل $I=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$ **کدام است ؟**

۱) $\frac{1}{\cos x}+tgx+c$ ۲) $\frac{1}{\cos x}+cotgx+c$ ۳) $2\sqrt{1+tgx}+c$ ۴) $2(1+tgx)+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$1+tgx=u \Rightarrow (1+tg^2x)dx=du \rightarrow \boxed{\frac{dx}{\cos^2 x}=du} \Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2u^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{1+tgx}+c$$

با توجه به مثال‌های فوق به نتایج غیررسمی زیر می‌توان رسید :

۱) در تغییر متغیرها باید کاری کنیم تا فقط نماد تغییر یافته (u در مثالهای بالا) زیر انتگرال وجود داشته باشد و اثری از x نباشد .

۲) باید مشتق عبارت کنار آن ایجاد شود .

۳) معمولاً در توابعی که بصورت رادیکالی هستند عبارت داخل رادیکال یا کل رادیکال را u در نظر می‌گیریم .

۴) در توابع کسری که توابع نمائی در ترکیب مخرج وجود دارد بهتر است کل مخرج کسر و یا خود تابع نمائی را برابرu در نظر بگیریم .

۵) در نهایت وقتی جواب انتگرال بر حسب u بدست آمد آنگاه به جای u همان عبارتی برحسب x که از ابتدا برابر u فرض شده بود را قرار می‌دهیم.

مثال ۴ : حاصل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}$ **کدام است ؟**

۱) $\frac{2}{\sqrt{Lnx}}+c$ ۲) $\frac{\sqrt{Lnx}}{x}+c$ ۳) $2\sqrt{Lnx}+c$ ۴) $Ln(Ln\sqrt{x})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}=\int(\underbrace{Lnx}_{u})^{-\frac{1}{2}}(\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du})=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{Lnx}+c$$

مثال ۵ : حاصل $I=\int\frac{e^{Arctgx}}{1+x^2}dx$ **کدام است ؟**

۱) $e^{Arctgx}+c$ ۲) $2e^{Arctgx}+c$ ۳) $\frac{1}{2}e^{Arctgx}+c$ ۴) $Arctg(e^x+1)+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$Arctgx=u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2}=du \rightarrow I=\int e^udu=e^u+c=e^{Arctgx}+c$$

مثال ۶ : حاصل $\int\frac{\cos x-\sin x}{2+\sin 2x}dx$ **کدام است ؟**

۱) $Arctg(\sin x-\cos x)+c$ ۲) $Arctg(\sin x+\cos x)+c$ ۳) $\frac{1}{\sin x+\cos x}+c$ ۴) $\frac{1}{\sin x-\cos x}+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر عبارت مخرج را به فرم $2+\sin 2x=1+(\sin x+\cos x)^2$ بنویسیم، داریم :

$$I=\int\frac{\cos x-\sin x}{1+(\sin x+\cos x)^2}dx \Rightarrow (\sin x+\cos x)=u \Rightarrow (\cos x-\sin x)dx=du$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{1+u^2}=Arctgu+c=Arctg(\sin x+\cos x)+c$$

مثال ۷ : اگر $F(x)=\int f(x)dx$ **آنگاه** $I=\int f(ax+b)dx$ **کدام است ؟**

۱) $aF(ax+b)$ ۲) $\frac{1}{a}F(x)$ ۳) $aF(x)$ ۴) $\frac{1}{a}F(ax+b)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$ax+b=u \Rightarrow adx=du \Rightarrow \boxed{dx=\frac{du}{a}} \Rightarrow I=\frac{1}{a}\int f(u)du \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} I=\frac{F(u)}{a}=\frac{1}{a}F(ax+b)$$

مثال ۸ : مطلوبست محاسبه $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

پاسخ : ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

بنابراین:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\sec^2 x dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=tgx-\frac{1}{\cos x}+c=tgx-\sec x+c$$

انتگرالهای Cos, Sin با توان فرد

در حل اینگونه انتگرالها، یک توان را جدا کرده و بقیه عبارت را با استفاده از رابطه $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ برحسب نسبت دیگر (اگر سینوس بود برحسب کسینوس و بالعکس) نوشته و با استفاده از تغییر متغیر مناسب حاصل انتگرال بدست خواهد آمد.

مثال ۹ :

$$I=\int Sin^3 xdx=\int Sinx.Sin^2 xdx=\int Sinx(1-\cos^2 x)dx \Rightarrow \cos x=u \Rightarrow -Sinx.dx=du$$

$$\Rightarrow I=-\int(1-u^2)du=\frac{u^3}{3}-u+c=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c$$

مثال ۱۰ : حاصل $I=\int\cos^3 2x dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ۲) $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+c$ ۳) $\frac{1}{2}\sin^3 2x-\frac{1}{6}\sin 2x=c$ ۴) $\frac{1}{6}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^3 2x+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int\cos^3 2x=\int\cos 2x(1-\sin^2 2x)dx=\int\cos 2x dx-\int\cos 2x\sin^2 2x dx$$

$$=\int\cos 2x dx-\frac{1}{2}\int(\underbrace{\sin 2x}_{u})^2\underbrace{2\cos 2x dx}_{du}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}[\frac{(\sin 2x)^3}{3}]+c=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+c$$

نکته ۱:

۱) $\int\sin^3 ax dx=-\frac{1}{a}(\cos ax-\frac{1}{3}\cos^3 ax)+c$ و ۲) $\int\cos^3 ax dx=\frac{1}{a}(\sin ax-\frac{1}{3}\sin^3 ax)+c$

انتگرال Cos, Sin با توان زوج

با استفاده از فرمولهای توان شکن (طلائی) توان آنها را کاهش می‌دهیم و سپس حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم :

$$Sin^2 x=\frac{1-Cos 2x}{2} \quad و \quad Cos^2 x=\frac{1+Cos 2x}{2}$$

مثال ۱۱ :

$$I=\int\cos^4 xdx=\int(\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int[1+2\cos 2x+\cos^2 2x].dx=\frac{1}{4}\int[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)].dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+Sin 2x)+\frac{1}{8}(x+\frac{Sin 4x}{4})=\frac{3x}{8}+\frac{Sin 2x}{4}+\frac{Sin 4x}{32}+c$$

مثال ۱۲ : حاصل انتگرال $I=\int\sin^4 x dx$ کدام است ؟ .

۱) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ ۲) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

۳) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ ۴) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int\sin^4 x dx=\int(\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{4}\int[1-2\cos 2x+(\frac{1+\cos 4x}{2})]dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+c=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

انتگرالهای cotg, tg با توان فرد

در حل اینگونه انتگرالها باید توانهای کمتر از آن نسبت را به اندازه ۲ واحد اضافه و کم کنیم.

مثال ۱۳ :

$$I=\int tg^3 xdx=\int[(tg^3 x+tgx)-tgx].dx=$$

$$\int[tgx(tg^2 x+1)-tgx].dx=\int\underbrace{tgx}_{u}\underbrace{(tg^2 x+1)dx}_{du}-\int tgx dx=\frac{1}{2}tg^2 x+Ln|\cos x|+c$$

مثال ۱۴ : حاصل انتگرال $I=\int\cot g^3 x dx$ کدام است ؟

۱) $-\frac{1}{2}\cot g^2 x+Ln|\sin x|+c$ ۲) $-\frac{1}{2}\cot g^2 x-Ln|\sin x|+c$

۳) $\frac{1}{2}\cot g^2 x+Ln|\sin x|+c$ ۴) $\frac{1}{2}\cot g^2 x-Ln|\sin x|+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int\cot g^3 x=\int[(\cot g^3 x+\cot gx)-\cot gx]dx=\int\underbrace{\cot gx}_{u}\underbrace{(\cot g^2 x+1)dx}_{-du}-\int\cot gx dx=-\frac{\cot g^2 x}{2}-Ln|\sin x|+c$$

نکته ۲: در فرمولهای زیر $n=2k+1$ می‌باشد .

$$\int tg^n xdx=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\frac{tg^{n-3}x}{n-3}+....+(-1)^k Ln|\sec x|+c$$

$$\int\cot g^n x dx=-\frac{\cot g^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot g^{n-3}x}{n-3}-....+(-1)^k Ln|\sin x|+c$$

مثال ۱۵ : حاصل انتگرال $I=\int tg^5 x dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+Ln(\sec x)+c$ ۲) $\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}+c$

۳) $\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}+Ln|\sin x|+c$ ۴) $\frac{tg^2 x}{4}-\frac{tg^4 x}{2}+c$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به نکته(۲) در این تست $n=5$ لذا $k=2$ خواهد بود :

$$\int tg^5 x dx=\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+(-1)^2\times Ln|\frac{1}{\cos x}|+c$$

انتگرالهای cotg, tg با توان زوج

در حل این نوع انتگرالها نیز باید توانهای کمتر از آن نسبت را ۲ واحد اضافه و کم کنیم.

مثال ۱۶ :

$$I=\int tg^4 xdx=\int[(tg^4 x+tg^2 x)-(tg^2 x+1)+1]dx=\int[tg^2 x(tg^2 x+1)-(tg^2 x+1)+1]dx=\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+c$$

مثال ۱۷ : حاصل انتگرال $I=\int 2tgx\cot g2x dx$ کدام است ؟

۱) $x+tgx+c$ ۲) $x+\cot gx+c$ ۳) $2x-tgx+c$ ۴) $2x-\cot gx+c$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به رابطه : $2\cot g2x=\cot gx-tgx$ خواهیم داشت :

$$I=\int tgx(\cot gx-tgx)dx=\int dx-\int tg^2 x dx=x-(tgx-x)+c=2x-tgx+c$$

مثال ۱۸ : حاصل انتگرال $I=\int \cot g^4 x\,dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{\cot g^3 x}{3}+x+\cot gx+c$
۲) $\cot gx+x-\frac{\cot g^3 x}{3}+c$
۳) $x+\cot g^2 x-\frac{\cot g^3 x}{3}+c$
۴) $x+\cot g^2 x+\frac{\cot g^3 x}{3}+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\int \cot g^4 x\,dx=\int[(\cot g^4 x+\cot g^2 x)-(\cot g^2 x+1)+1]dx=$$

$$\int \underbrace{\cot g^2 x}_{u}\underbrace{(\cot g^2 x+1)dx}_{-du}-\int(\cot g^2 x+1)dx+\int dx=-\frac{\cot g^3 x}{3}+\cot gx+x+c$$

نکته ۳: اگر $n=2k$ باشد داریم :

۱) $\int tg^n x\,dx=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\frac{tg^{n-3}x}{n-3}+\dots+(-1)^k x+c$

۲) $\int \cot g^n x\,dx=-\frac{\cot g^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot g^{n-3}x}{n-3}-\dots+(-1)^k x+c$

مثال ۱۹ : حاصل انتگرال $I=\int tg^6 x\,dx$ کدام است ؟

۱) $tg^5 x-\frac{1}{3}tg^3 x+tgx+c$
۲) $\frac{1}{5}tg^5 x+\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+c$
۳) $\frac{1}{5}tg^3 x+\frac{1}{3}tg^5 x-tgx+c$
۴) $\frac{1}{5}tg^5 x-\frac{1}{3}tg^3 x+tgx-x+c$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به نکته (۳) در این تست $n=6$ و لذا $k=3$ می‌باشد :

$$I=\int tg^6 x\,dx=\frac{tg^5 x}{5}-\frac{tg^3 x}{3}+tgx+(-1)^3 x+c$$

محاسبه انتگرالهای حاصلضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی

برای محاسبه این نوع انتگرالها باید از فرمول تبدیل حاصلضرب به مجموع، استفاده نمود .

$$1)\ \mathrm{Sin}a.\cos b=\frac{1}{2}[\mathrm{Sin}(a+b)+\mathrm{Sin}(a-b)]$$

$$2)\ \cos a.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

$$3)\ \mathrm{Sin}a.\mathrm{Sin}b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

مثال ۲۰ : حاصل هریک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ I=\int \mathrm{Sin}3x\mathrm{Sin}2x\,dx=\int\frac{1}{2}[\mathrm{Cos}(3x-2x)-\cos(3x+2x)]dx=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos 5x\,dx=\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{10}+c$$

$$2)\ I=\int\sin 3x\cos 5x\,dx=\int\frac{1}{2}[\sin(3x-5x)+\sin(3x+5x)]dx=-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 8x=\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+c$$

$$3)\ I=\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx=\int\frac{1}{2}[\cos(\frac{x}{2}-\frac{x}{3})+\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{3})]dx=\frac{1}{2}\int\cos(\frac{x}{6})dx+\frac{1}{2}\int\cos(\frac{5x}{6})dx=3\sin(\frac{x}{6})+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+c$$

مثال ۲۱ : حاصل انتگرال $I=\int\sin 9x\sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$
۲) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin 10x+c$
۳) $\frac{1}{20}\sin 10x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$
۴) $\frac{1}{20}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin x+c$

پاسخ : گزینه «۱»

$$I=\int\frac{1}{2}[\cos 8x-\cos 10x]=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$$

محاسبه انتگرالهائی به صورت $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ که در آنها m و n اعدادی صحیح هستند.

- **حالت اول:** اگر یکی از اعداد m و یا n فرد باشد، تغییر متغیر $\cos x=u$ و یا $\sin x=u$ بکار می‌بریم:

مثال ۲۲ : حاصل $\int\sin^{10}x\cos^3 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin^{11}x}{11}+\frac{\sin^{13}x}{13}+c$
۲) $\frac{\sin^{11}x}{11}-\frac{\sin^{13}x}{13}+c$
۳) $\frac{\sin 3x}{13}-\frac{\sin^{11}x}{11}+c$
۴) $-\frac{\sin 3x}{13}-\frac{\sin^{11}x}{11}+c$

پاسخ : گزینه «۲» در این تست $m=10$ و $n=3$ می‌باشد لذا داریم:

$$I=\int\sin^{10}x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int\underbrace{\sin^{10}x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{du}-\int\underbrace{\sin^{12}x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{du}$$

$$\Rightarrow I=\int u^{10}du-\int u^{12}du=\frac{u^{11}}{11}-\frac{u^{13}}{13}+c=\frac{\sin^{11}x}{11}-\frac{\sin^{13}x}{13}+c$$

- **حالت دوم:** اگر m و n هر دو مثبت و زوج باشند، با استفاده از روشهای محاسبه انتگرال توابع sinx و cosx با توان زوج انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۲۳ : مقدار $I=\int\cos^2 3x\sin^4 3x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$I=\int(\cos 3x\sin 3x)^2\sin^2 3x\,dx=\int\frac{\sin^2 6x}{4}(\frac{1-\cos 6x}{2})dx=$$

$$\frac{1}{8}\int(\sin^2 6x-\sin^2 6x\cos 6x)dx=\frac{1}{8}\int(\frac{1-\cos 12x}{2}-\sin^2 6x\cos 6x)dx$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 12x)dx-\frac{1}{8}\int\underbrace{(\sin 6x)^2}_{u}\underbrace{\cos 6x\,dx}_{\frac{du}{6}}=\frac{x}{16}-\frac{\sin 12x}{16\times 12}-\frac{\sin^3 6x}{8\times 18}+c$$

- **حالت سوم:** اگر m و n اعداد صحیح منفی و هردو زوج و یا هر دو فرد باشند، تغییر متغیر $tgx=u$ را بکار می‌بریم .

مثال ۲۴ : مطلوبست محاسبه $I=\int\frac{1}{\cos^4 x}dx$

$$I=\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(\frac{1}{\cos^2 x})(\frac{1}{\cos^2 x})dx=\int(1+tg^2 x)(1+tg^2 x)dx=\int(1+tg^2 x)dx+\int\underbrace{tg^2 x}_{u}\underbrace{(1+tg^2 x)dx}_{du}=tgx+\frac{tg^3 x}{3}+c$$

مثال ۲۵ : مطلوبست محاسبه $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.

پاسخ : فرض می‌کنیم $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$، در این صورت $r^2=a^2+b^2$ و $tg\theta=\frac{b}{a}$، بنابراین $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ، $\theta=tg^{-1}(\frac{a}{b})$.

در نتیجه:

$$a\sin x+b\cos x=r\cos\theta\sin x+r\sin\theta\cos\theta=r\sin(x+\theta)$$

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\int\frac{dx}{r\sin(x+\theta)}=\frac{1}{r}\mathrm{Ln}tg(\frac{x+\theta}{2})=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{Ln}tg(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}tg^{-1}(\frac{a}{b}))$$

مثال ۲۶ : مطلوبست محاسبه $I=\int\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta$.

پاسخ : ابتدا انتگرال را به شکل روبرو در می‌آوریم:

$$I=\int\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=\int\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=\int\frac{2tg\theta\sec^2\theta}{tg^4\theta+1}d\theta$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از تغییر متغیر $u=tg^2\theta$ ، $du=2tg\theta\sec^2\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$I=\int\frac{du}{u^2+1}=\mathrm{Arctg}u+c=\mathrm{Arctg}(tg^2\theta)+c$$

محاسبه انتگرال $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ وقتی m و n اعداد ی گویا باشند:

در این حالت قاعده کلی وجود ندارد اما می‌توان یک قاعده که : اگر $m+n$ زوج باشد، آنگاه تغییر متغیر $tgx=u$ را بکار می‌بریم را بیان نمود.

مثال ۲۷ : مطلوبست محاسبه $I=\int \frac{4\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

پاسخ : $I=4\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}(\frac{dx}{\cos^2 x}) \to tgx=u \to \frac{dx}{\cos^2 x}=du \Rightarrow I=4\int tg^3 udu = tg^4 u + c = tg^4(tgx)+c$

روش انتگرال‌گیری جزء به جزء

از این روش معمولاً در محاسبه انتگرالهائی بفرم کلی $\int f(x).g(x)dx$ استفاده می‌شود که f تابعی است که بدست آوردن مشتق آن به سادگی صورت می‌گیرد. (مانند.) ... , x^2 , $\text{Arcsin}\,x$ و g تابعی است که انتگرال آن براحتی قابل محاسبه است. (مانند:...., $\sin x$, $\cos x$, e^x).
برای حل اینگونه انتگرالها ابتدا یکی از توابع را U در نظر گرفته و بقیه عبارت زیر انتگرال را برابر dV در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرمول کلی $\int UdV = UV - \int VdU$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم .

مثال ۲۸ : حاصل $I=\int \text{Arcsin}\,xdx$ برابر است با:

۱) $x\text{Arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}+C$ ۲) $\text{Arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}+C$ ۳) $\sqrt{1-x^2}-\text{Arcsin}\,x+C$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} \text{Arc}\sin x = u \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=du \\ dv=dx \quad \Rightarrow x=v \end{cases} \Rightarrow \int \text{Arc}\sin dx = x\,\text{Arc}\sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\text{Arcsin}\,x+\sqrt{1-x^2}+C$$

مثال ۲۹ : حاصل $I=\int x\sin xdx$ کدام است؟

۱) $\sin x - x\cos x + c$ ۲) $\cos x - x\sin x + c$ ۳) $\sin x + x\cos x + c$ ۴) $\cos x + x\sin x + c$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases} x=u \Rightarrow dx=du \\ \sin xdx = dv \Rightarrow v=-\cos x \end{cases} \Rightarrow \int x\sin xdx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=-x\cos x+\int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c$$

مثال ۳۰ : حاصل $I=\int Lnxdx$ کدام است؟

۱) $xLnx+x+c$ ۲) $xLnx-x+c$ ۳) $\frac{1}{x}Lnx+x+c$ ۴) $\frac{1}{x}Lnx+-x+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} \ln x = u \to \frac{dx}{x}=du \\ dx=dv \to x=v \end{cases} \to I = x\ln x - \int x(\frac{dx}{x}) = x\ln x - x + c$$

بهتر است حاصل انتگرال فوق را به خاطر سپرده شود.

مثال ۳۱ : حاصل $I=\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $xLnx-x^2+c$ ۲) $-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c$ ۳) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$ ۴) $xLnx+x^2+c$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} u=\ln x \to du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{x^2} \to v=-\frac{1}{x} \end{cases} \to I=-\frac{\ln x}{x}-\int(-\frac{1}{x})(\frac{dx}{x})=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$$

توضیح: به طور کلی داریم: $\int x^n.Lnxdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}(Lnx-\frac{1}{n+1})+c$ (برای دو مثال فوق $n=0$ و $n=-2$ می‌باشد.)

مثال ۳۲ : حاصل $I=\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln\sqrt{x^2+1}+c$ ۲) $\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$
۳) $\sqrt{1+x^2}arctgx+arctgx+c$ ۴) $\sqrt{1+x^2}arctgx-arctgx+c$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases} arctgx=u \to \frac{dx}{1+x^2}=du \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=dv \to \sqrt{1+x^2}=v \end{cases} \Rightarrow I=\sqrt{1+x^2}arctgx-\int\sqrt{1+x^2}.\frac{dx}{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$$

تذکر ۳: معمولاً در انتگرال‌هائی که شامل توابع Ln وArc هستند باید این توابع را برابرu در نظر بگیریم و بقیه عبارت زیر انتگرال را dv فرض کنیم.

مثال ۳۳ : جواب انتگرال $\int \frac{Ln(Lnx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $LnxLn(Lnx)-Lnx+c$ ۲) $Lnx-Ln(Lnx)+c$ ۳) $Ln(Lnx)-Lnx+c$ ۴) $LnxLn(Lnx)+c$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $u=Lnx$ $du=\frac{dx}{x}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int \frac{Ln(Lnx)}{x}dx=\int Lnudu \xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} uLnu-u+c=LnxLn(Lnx)-Lnx+c$$

توجه:
در بعضی انتگرالها لازم است که از چند بار قاعدهٔ جزء به جزء استفاده نمائیم که معمولاً به معادله‌ای می‌رسیم که از آن می‌توانیم حاصل انتگرال مورد نظر را بدست آوریم .

مثال ۳۴ : حاصل $I=\int e^x\cos xdx$ کدام است؟

۱) $e^x(\sin x-\cos x)+c$ ۲) $e^x(\sin x+\cos x)+c$ ۳) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+c$ ۴) $\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+c$

پاسخ : گزینه «۴»

$$I=\int e^x\cos xdx \to \begin{cases} e^x=u \to e^xdx=du \\ \cos xdx=dv \to \sin x=v \end{cases} \to I=e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin xdx}_{I_1} \Rightarrow I_1=e^x\sin x-I \quad (1)$$

توجه شود که انتگرال I_1 تقریباً شبیه انتگرال اصلی می باشد لذا با استفاده مجدد از قاعده جزءبه جزء داریم:

$$I_1:\begin{cases} e^x=u \to e^xdx=du \\ \sin xdx=dv \to -\cos x=v \end{cases} \to I_1=(-\cos x)e^x+\underbrace{\int e^x\cos xdx}_{I} \Rightarrow I_1=-e^x\cos x+I \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} e^x\sin x-I=-e^x\cos x+I \Rightarrow 2I=e^x(\sin x+\cos x) \to I=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}$$

نکته ۴:

$$1)\ \int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+c \quad , \quad 2)\ \int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

مثال ۳۵ : مطلوبست محاسبه $I=\int e^{5x}\cos 4xdx$

پاسخ : با توجه به نکته فوق داریم : $I=\frac{e^{5x}}{41}(5\cos 4x+4\sin 4x)+c$

مثال ۳۶ : حاصل $I=\int xe^{2x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{xe^{2x}}{4}-\frac{e^{2x}}{2}+c$ ۲) $\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+c$ ۳) $\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+c$ ۴) $\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+c$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{cases} x=u\to dx=du \\ e^{2x}dx=dv\to \frac{1}{2}e^{2x}=v \end{cases}\to I=x(\frac{e^{2x}}{2})-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=x(\frac{e^{2x}}{2})-\frac{e^{2x}}{4}+c$$

مثال ۳۷ : مطلوبست محاسبه $A=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

پاسخ :

$$A=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int tg\frac{x}{2}dx$$

برای محاسبه $\int x\sec^2\frac{x}{2}dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$A=\frac{1}{2}[x\frac{tg\frac{x}{2}}{1/2}-\int\frac{tg\frac{x}{2}}{1/2}dx]+\int tg\frac{x}{2}dx=xtg\frac{x}{2}+c$$

توجه:
انتگرالگیری به روش جزء به جزء از جمله روشهای بی قاعده در انتگرالگیری می‌باشد ولی یک قاعده تقریباً کلی در انتخاب U و dV این است که معمولاً آن تابعی را که انتگرالش ساده است را همراه dV, dx انتخاب کرده و بقیه را U در نظر می‌گیریم.

انتگرال‌گیری به کمک تشکیل جدول

در این روش مطابق جدول تابع $f(x)$ و مشتقهایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرالهایش را در سمت راست قرار می‌دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود از تابع $g(x)$ انتگرال گرفته و در نهایت مانند پیکانهای مشخص شده توابع مربوط با پیکان در هم ضرب و آنها را با علامت روی آنها با جمله بعد جمع یا تفریق می‌نمائیم که البته این علامتها از بالا به پائین یک در میان مثبت یا منفی هستند. (اگر مشتق $f(x)$ صفر نشود یا بخواهیم در یک سطر دلخواه متوقف شویم دو عبارت روبروی هم را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.)

مثال ۳۸ : حاصل $I=\int xe^{2x}dx$ بیابید.

$f(x)$ و مشتقاتش	$g(x)$ و انتگرالهایش
x	$+$ e^{2x}
1	$-$ $\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

(جدول A)

$$\begin{cases} f(x)=x\ ,\ g(x)=e^{2x} \\ I=x(\frac{e^{2x}}{2})-(1\times\frac{e^{2x}}{4})+c \end{cases}$$

مثال ۳۹ : حاصل انتگرال $I=\int x\cos 3x\,dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+c$ ۲) $\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$ ۳) $\frac{x\sin 3x}{3}-\frac{\cos 3x}{9}+c$ ۴) $\frac{x\cos 3x}{3}-\frac{\sin 3x}{9}+c$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از روش جدول داریم :

x	$\cos 3x$
1	$+$ $\frac{1}{3}\sin 3x$
0	$-$ $-\frac{1}{9}\cos 3x$

$$\Rightarrow I=\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+c$$

مثال ۴۰ : مطلوبست محاسبه $I=\int(x^3+1)\cos x\,dx$.

x^3+1	$\cos x$
$3x^2$	$+$ $\sin x$
$6x$	$-$ $-\cos x$
6	$+$ $-\sin x$
0	$-$ $\cos x$

$$\Rightarrow I=(x^3+1)\sin x+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x+c$$

محاسبه انتگرالهائی بفرم کلی $\int R\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ (R چند جمله‌ای گویا برحسب x می‌باشد)

◆ **حالت اول** : در صورتی که مشتق جمله زیر رادیکال خارج از رادیکال موجود باشد، عبارت زیر رادیکال را برابر U فرض کرده و سپس انتگرال را محاسبه می‌کنیم :

مثال ۴۱ : حاصل انتگرال $I=\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx$ به ازای $x=0$ و $C=1$ کدام است ؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{6}{5}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx=\int x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\Rightarrow u=1-x^2\Rightarrow du=-2x\,dx\Rightarrow\boxed{x\,dx=-\frac{du}{2}}$$

$$I=\int(u^{\frac{3}{2}})(-\frac{du}{2})=-\frac{1}{2}(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}})+C=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C\xrightarrow{C=1}I\underset{x=0}{=}1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

◆ **حالت دوم** : درصورتی که مشتق زیر رادیکال خارج از رادیکال موجود نباشد عبارت زیر رادیکال را با مربع‌سازی به یکی از شکل‌های $\sqrt{u^2+a^2}$، $\sqrt{u^2-a^2}$ و یا $\sqrt{a^2-u^2}$ تبدیل کرده و سپس به ترتیب با استفاده از تغییر متغیرهای $\begin{cases} u=a\,tg\theta \\ u=a\sinh\theta \end{cases}$ و $u=a\sec\theta$ و $u=a\sin\theta$ پاسخ انتگرال را محاسبه می‌کنیم .

مثال ۴۲ : حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ کدام است ؟

۱) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$ ۲) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+C$ ۳) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+C$ ۴) $\frac{-\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به اینکه مشتق عبارت داخل رادیکال بیرون رادیکال موجود نیست و عبارت زیر رادیکال بفرم $\sqrt{u^2+a^2}$ می‌باشد از متغیر $u=a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$x=2tg\theta\Rightarrow dx=2(1+tg^2\theta)d\theta=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4+4tg^2\theta}}=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4(1+tg^2\theta)}}=\int\frac{2\sec^2 d\theta}{(4tg^2\theta)(2\sec\theta)}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta}{tg^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}d\theta$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\underbrace{(\sin\theta)^{-2}}_{u}\underbrace{\cos\theta d\theta}_{du}=-\frac{1}{4}\sin^{(-2+1)}\theta+C=-\frac{1}{4\sin\theta}+C=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$$

محاسبه انتگرالهائی بصورت $\int R(\sin x,\cos x)dx$ (R یک تابع گویا می‌باشد)

برای تعیین حاصل اینگونه انتگرالها از تغییر متغیر $t=tg\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم. بدینوسیله $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ، $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ خواهند بود و انتگرال فوق به انتگرال توابع گویا با متغیر جدید t تبدیل می‌شود.

مثال ۴۳: حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ و $c=0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $Ln2$ ۴) $Ln\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+t}=Ln|1+t|+c=Ln|1+tg\frac{x}{2}|+c\xrightarrow[c=0]{x=\frac{\pi}{2}}I=Ln|1+tg\frac{\pi}{4}|+0=Ln2$$

روش انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها

برای محاسبه انتگرالهائی به فرم کلی $I=\int\frac{p(x)}{q(x)}$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر درجه چند جمله‌ای $p(x)$ از $q(x)$ بیشتر باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و به فرم $I=\int R(x)+\int\frac{M(x)}{N(x)}$ خواهیم رسید که $R(x)$ یک چند جمله‌ای خطی می‌باشد و انتگرال آن براحتی قابل محاسبه است. و برای محاسبه انتگرال $\int\frac{M(x)}{N(x)}$ که در آن درجه صورت کسر از مخرج آن کمتر است به حالتهای زیر خواهیم رسید:

الف) اگر $N(x)=(ax+b)^m(cx+d)^n$ باشد، که آنگاه تجزیه کسر به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+.....+\frac{A_n}{(ax+b)^m}+\frac{B_1}{(Cx+d)}+\frac{B_2}{(Cx+d)^2}+.....+\frac{B_n}{(Cx+d)^n}$$

در عبارتهای سمت راست تساوی مخرج مشترک گرفته و صورت آنها را متحد با $M(x)$ قرار داده و مقادیر A_1, A_2, A_n و $B_1, B_2, ...B_n$ بدست می‌آیند.

ب – اگر $N(x)=(x^2+px+q)^n$ باشد که $\Delta=p^2-4q<0$ می‌باشد آنگاه:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+Px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+Px+q)^2}+....\frac{A_nx+B_n}{(x^2+Px+q)^n}$$

و سپس مانند حالت الف مقادیر $A_1, A_2,....A_n$ و $B_1, B_2, ...B_n$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۴۴: مقدار انتگرال $I=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: چون درجه صورت از مخرج کمتر است باید کسر تجزیه شود.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow 1=(A+B)x-3A-2B\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-3A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{1}{x-3}dx=-Ln|x-2|+Ln|x-3|+C=-Ln|\frac{x-2}{x-3}|+C$$

مثال ۴۵: حاصل $I=\int\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}dx$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا کسر داده شده را به کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+4}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $(x-1)(x^2+4)$ به دست می‌آید:

$$A(x^2+4)+(Bx+c)(x-1)=x\Rightarrow(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-c)=x$$

با برابر قرار دادن ضرایب در دو طرف رابطه فوق مقادیر A، B و C به ترتیب برابر $\frac{1}{5}$، $\frac{-1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ به دست می‌آیند. بنابراین:

$$I=\int\frac{\frac{1}{5}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{-1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}dx=\frac{1}{5}Ln(x-1)-\frac{1}{10}Ln(x^2+4)+\frac{2}{5}Arctg\frac{x}{2}+c$$

مثال ۴۶: حاصل انتگرال $A=\int\frac{dx}{x(1+x^6)}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا توجه کنید که انتگرال داده شده را می‌توان به فرم روبرو نوشت. $A=\int\frac{dx}{x(1+x^6)}=\int\frac{x^5dx}{x^6(1+x^6)}$

حال با استفاده از تغییر متغیر $u=x^6$ ، $du=6x^5dx$ یا $x^5dx=\frac{du}{6}$ خواهیم داشت:

$$A=\int\frac{du}{6u(1+u)}=\frac{1}{6}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1})du=\frac{1}{6}Ln\frac{u}{u+1}+c=\frac{1}{6}Ln\frac{x^6}{x^6+1}+c$$

یک فرمول فرعی: $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}Ln|\frac{x-a}{x-b}|$

حل مثال (۴۴) با توجه به فرمول فرعی: $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=-Ln|\frac{x-2}{x-3}|+C$

مثال ۴۷: انتگرالهای زیر را بیابید.

الف) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ ب) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ ج) $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$

پاسخ:

الف) ابتدا صورت و مخرج کسر را به x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx$$

حال با تغییر متغیر $u=x-\frac{1}{x}$ ، $du=(1+\frac{1}{x^2})$ خواهیم داشت:

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}tg^{-1}(\frac{u}{\sqrt{2}})+c=\frac{1}{\sqrt{2}}tg^{-1}(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x})+c$$

ب) با تقسیم صورت و مخرج کسر بر x^2 به دست می‌آید:

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}dx$$

حال با تغییر متغیر $u=x+\frac{1}{x}$ ، $du=(1-\frac{1}{x^2})dx$ خواهیم داشت:

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{du}{u^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+c$$

ج) با روش مشابه قسمتهای (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت (به عهده دانشجو):

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}Ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

روش هویساید:

این روش معمولاً خیلی سریع‌تر ما را در تعیین ضرائب یاری می‌کند، اگر کسر گویای $f(x)$ به شکل زیر تجزیه شود:

$$f(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}$$

آنگاه ضرائب به صورت زیر تعیین می‌شوند :

$$A_3=\lim_{x\to a}[(x-a)^3 f(x)]$$
$$A_2=\lim_{x\to a}[(x-a)^3 f(x)]'$$
$$A_1=\frac{1}{2!}\lim_{x\to a}[(x-a)^3 f(x)]''$$
$$B_2=\lim_{x\to a}[(x-b)^2 f(x)]'$$
$$B_1=\lim_{x\to a}[(x-b)^2 f(x)]$$

توجه شود که در رابطه فوق $f(x)$ تابعی با داشتن عاملهای $(x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, (x-b), (x-b)^2$ در نظر گرفته شده است، برای مثال برای حل مثال قبل داریم :

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{x\to 2}[(x-2)\times\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}]=\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-3})=-1 \\ B=\lim\limits_{x\to 3}[(x-3)\times\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-2}=1 \end{cases}$$

تذکر ۴: چون این نوع انتگرالها در قالبهای تستی بندرت مورد سئوال قرار می‌گیرد بحث را در اینجا خاتمه می‌دهیم.

کاهش مرتبه انتگرال‌گیری

فرمولهای کاهش مرتبه انتگرال‌گیری، فرمولهایی هستند که انتگرال را به یک انتگرال مشابه ولی با اندیس کمتر تبدیل می‌کنند.

مثال ۴۸ : فرمول کاهش $I_n=\int x^n e^x dx$ را به دست آورید.

پاسخ : از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=x^n \Rightarrow du=nx^{n-1} \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{cases}$$

بنابراین:

$$I_n=x^n e^x-\int nx^{n-1}e^x dx \Rightarrow I_n=x^n e^x-nI_{n-1}$$

مثال ۴۹ : فرمول کاهش $I_n=\int tg^n x dx$ را به دست آورید.

پاسخ :

$$I_n=\int tg^n x dx=\int(tg^n x+tg^{n-2}x)dx-\int tg^{n-2}xdx=\int tg^{n-2}x(tg^2x+1)dx-\int tg^{n-2}xdx=\frac{tg^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$$

بنابراین فرمول روبرو به دست می‌آید: $I_n=\frac{1}{n-1}tg^{n-1}x-I_{n-2}$

مثال ۵۰ : فرمول کاهش $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ را به دست آورید و سپس I_2 را به کمک آن محاسبه کنید.

پاسخ : از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du=-\dfrac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

بنابراین:

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\times\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\times I_n$$

برای محاسبه I_2، ابتدا لازم است I_1 را به دست آوریم: $I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}Arctg\frac{x}{a}+c$

بنابراین: $I_2=\frac{1}{2a^2}\times\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1 \Rightarrow I_2=\frac{1}{2a^2}\times\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}Arctg\frac{x}{a}+c$

• انتگرال معین

تعریف ۲: اگر انتگرال دارای حد بالا و پائین باشد، انتگرال معین می‌شود : $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

$F(x)$: تابع اولیه $f(x)$ می‌باشد، توجه شود که در انتگرال معین مقدار ثابت c وجود ندارد، و همانطور که از نام آن پیداست، حاصل آن عددی معین خواهد بود.

تذکر ۵: تابع زیر انتگرال باید در بازه تعیین شده برای انتگرال پیوسته باشد.

مثال ۵۱ : حاصل $I=\int^{\frac{\pi}{3}}\frac{tgx}{\sqrt{\cos x}}dx$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}-2$ ۲) $2\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2-\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{\cos x\sqrt{\cos x}}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{\cos^{\frac{3}{2}}x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\underbrace{(\cos x)}_{u}^{-\frac{3}{2}}\underbrace{\sin xdx}_{-du}=[\frac{2}{\sqrt{\cos x}}]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}-2$$

مثال ۵۲ : حاصل عبارت $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) $2+\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx\to\begin{cases} x^2+1=u\to 2xdx=du\Rightarrow xdx=\dfrac{du}{2} \\ x=0\to u=1\ ,\ x=1\to u=2 \end{cases}$$

$$I=\int_1^2\frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{du}{\sqrt{u}}=[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{u}]_1^2=\sqrt{2}-1$$

توضیح: توجه شود وقتی کل عبارات برحسب u نوشته شد، لذا بازه انتگرال‌گیری را نیز برای متغیر u تغییر دادیم .

مثال ۵۳ : حاصل $I=60\int_1^2(x^2-4x)(x-2)^9dx$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=60\int[(x-2)^2-4](x-2)^9dx=60\int[(x-2)^{11}-4(x-2)^9]dx=60[\frac{(x-2)^{12}}{12}-\frac{4(x-2)^{10}}{10}]_1^2=19$$

مثال ۵۴ : حاصل $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۰

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}=u\to x^2+1=u^2\to 2xdx=2udu\to xdx=udu \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & \sqrt{3} \\ \hline u & 1 & 2 \end{array} \end{cases}$$

بازه انتگرال‌گیری را نیز با توجه به تغییر متغیر عوض می‌کنیم .

$$\Rightarrow I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(3x^2)(x)dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_1^2\frac{3(u^2-1)udu}{u}=\int_1^2(3u^2-3)du=[u^3-3u]_1^2=4$$

مثال ۵۵ : اگر $\int^{k\pi}\sin\frac{x}{k}dx=6$ باشد آنگاه k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$I=\int_0^{k\pi}\sin(\frac{x}{k})dx=[-k\cos(\frac{x}{k})]_0^{k\pi}=-k\cos(\frac{k\pi}{k})+k\cos(0)=k+k=2k=6\ \to k=3$$

مثال ۵۶: مقدار $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} d(x|x|)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 2 ۳) $2(1+e^{-1})$ ۴) $2(1-e^{-1})$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}d(x|x|)=\int_{-1}^{0} e^{-x^2}d(-x^2)+\int_0^1 e^{-x^2}d(x^2)=e^{-x^2}\Big|_{-1}^{0}+(-e^{-x^2})\Big|_0^1=2(1-e^{-1})$$

مثال ۵۷: حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ کدام است؟

۱) $2\text{Arcsin}\sqrt{e^x-1}+c$ ۲) $2\text{Arctg}\sqrt{e^x-1}+c$ ۳) $2\text{Ln}(1+\sqrt{e^x-1})+c$ ۴) $2\text{Ln}(1+\sqrt{e^x-1}-1)+c$

پاسخ: گزینه «۲» از تغییر متغیر $u^2=e^x-1$ ، $dx=\frac{2u}{u^2+1}du$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{\frac{2u}{u^2+1}du}{u}=2\int\frac{du}{u^2+1}=2\text{Arctg}u+c=2\text{Arctg}\sqrt{e^x-1}+c$$

مثال ۵۸: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا انتگرال داده شده را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{a^2+b^2tg^2x}$$

حل از تغییر متغیر $u=tgx$ ، $du=\frac{dx}{\cos^2x}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$I=\int_0^1\frac{du}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{b^2}\int_0^1\frac{du}{(\frac{a}{b})^2+u^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\text{Arctg}\frac{bu}{a}\Big|_0^1=\frac{1}{ab}\text{Arctg}\frac{b}{a}$$

نکات مهم انتگرالهای معین

نکته ۵: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^a f(x)=\int_b^b f(x)=0$

نکته ۶: اگر $f(x)$ تابعی زوج و پیوسته باشد، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

نکته ۷: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

مثال ۵۹: حاصل $I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2x}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) π ۳) $\frac{\pi}{\sqrt3}$ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=\int_0^\pi\frac{dx}{\sin^2x+\cos^2x+2\sin^2x}=\int_0^\pi\frac{dx}{\cos^2x+3\sin^2x}=\int_0^\pi(\frac{1}{\cot g^2x+3})\frac{dx}{\sin^2x}$$

$$\cot gx=u\to\frac{-dx}{\sin^2x}=du \Rightarrow I=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{-du}{u^2+(\sqrt3)^2}\xrightarrow{\text{نکته (۵)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u^2+(\sqrt3)^2}=[\frac{1}{\sqrt3}\text{Arctg}\frac{u}{\sqrt3}]_{-\infty}^{\infty}$$

x	0	π
u	∞	$-\infty$

$$=\frac{1}{\sqrt3}\text{Arctg}(+\infty)-\frac{1}{\sqrt3}\text{Arctg}(-\infty)=\frac{1}{\sqrt3}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{\sqrt3}$$

مثال ۶۰: مقدار انتگرال $\int_{-2}^{2}x.2^{x^2}dx$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 4 ۴) $\ln2+1$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته ۷ و توجه به اینکه تابع زیر انتگرال تابعی فرد است پس حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

نکته ۸: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه داریم: $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx$

نکته ۹: اگر $f(x)$ بر بازه بسته $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و $c\in[a,b]$ آنگاه داریم: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

مثال ۶۱: اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le1\\ \sqrt{x} & 1\le x\le2\end{cases}$ آنگاه حاصل $I=\int_0^2 f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt2-1}{2}$ ۲) $\frac{4\sqrt2+1}{2}$ ۳) $\frac{4\sqrt2-1}{3}$ ۴) $\frac{4\sqrt2+1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1x^2dx+\int_1^2\sqrt x\, dx\Rightarrow I=[\frac{x^3}{3}]_0^1+[\frac{2}{3}x^{\frac32}]_1^2=\frac13+\frac{4\sqrt2}{3}-\frac23=\frac{4\sqrt2-1}{3}$$

نکته ۱۰: $\int_b^a\frac{|x|}{x}dx=|a|-|b|$

مثال ۶۲: حاصل $I=\int_{-2}^{3}\frac{|x|}{x}dx$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 5 ۳) 0 ۴) -5

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته فوق داریم: $I=|3|-|-2|=3-2=1$

نکته ۱۱: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\text{Sin}x)dx$

نکته ۱۲: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{Sin}^nx}{\text{Sin}^nx+\cos^nx}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^nx}{\text{Sin}^nx+\cos^nx}dx=\frac{\pi}{4}$

مثال ۶۳: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{1383}x}{\sin^{1383}x+\cos^{1383}x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 1382π ۴) 1383π

پاسخ: گزینه «۱» (با توجه به نکته ۱۲)

نکته ۱۳: $\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$

مثال ۶۴: حاصل انتگرال $I=\int_0^2\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}dx$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 3

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته (۱۳) در این تست $a=2$ می‌باشد. لذا داریم: $I=\frac{2}{2}=1$

نکته ۱۴: اگر در بازه $[a,b]$؛ $f(x)\le g(x)$ آنگاه: $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

مثال ۶۵: اگر $I_1=\int_0^1 x\,dx$, $I_2=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$ آنگاه کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $I_1>I_2$ ۲) $I_1<I_2$ ۳) $I_1=I_2$ ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» در فاصله $[0,1]$ مقدار $\sqrt{1+x^2}$ از x بزرگتر است و با توجه به نکته فوق حاصل انتگرال $\sqrt{1+x^2}$ نیز از حاصل انتگرال x در این فاصله بزرگتر است.

مثال ۶۶ : مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}dy$ برابر کدام است؟

۱) ∞ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 0

پاسخ : گزینه «۲» قرار می‌دهیم $A_n=\int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}dy$. در این صورت برای محاسبه A_n از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$A_n=\frac{y^n}{1+y}+\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy=\frac{1}{2}+\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy$$

حال برای $y\in[0,1]$، داریم:

$$0\le\frac{y^n}{(1+y)^2}\le y^n \Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy\le\int_0^1 y^n dy=\frac{1}{n+1}$$

لذا بنا بر قضیه ساندویچ (فشردگی)، $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^n}dy=0$. پس $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\frac{1}{2}$.

نکته ۱۵:

$$\int_0^n\lfloor x\rfloor dx=\frac{n(n-1)}{2}$$

مثال ۶۷ : حاصل $I=\int^{1383}\lfloor x\rfloor dx$ کدام است ؟

۱) $(1382)^2$ ۲) $(1383)^2$ ۳) 1382×1383 ۴) 955653

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به نکته فوق داریم :

$$I=\frac{1383(1382)}{2}=955653$$

نکته ۱۶: اگر $f(a-x)=-f(x)$ آنگاه $\int_0^a f(x)dx=0$ خواهد بود .

مثال ۶۸ : اگر K عدد صحیح باشد آنگاه حاصل $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}dx$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به نکته فوق در این تست $a=\pi$ می‌باشد، لذا داریم :

$$f(a-x)=f(\pi-x)=\frac{\sin(2k\pi-2kx)}{\sin(\pi-x)}=-\frac{\sin 2kx}{\sin x}=-f(x)$$

مثال ۶۹ : اگر $\int_2^{-3}f(x)dx=7$, $\int_2^1 f(x)dx=4$ در این صورت حاصل $I=\int_1^{-3}f(x)$ کدام است ؟

۱) 11 ۲) 3 ۳) -11 ۴) -3

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به نکته ۹ و ۵ داریم :

$$\int_1^{-3}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{-3}f(x)dx=-\int_2^1 f(x)dx+\int_2^{-3}f(x)dx=-4+7=3$$

مثال ۷۰ : نشان دهید که $\int^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$.

پاسخ : قرار می‌دهیم $I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$، در این صورت:

$$I=\int_0^{\pi}(\pi-x)f[\sin(\pi-x)]dx=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx-I$$

بنابراین $2I=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx$ یا $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$ و چون $f(\sin x)=f(\sin(\pi-x))$ رابطه اخیر را می‌توان به صورت $I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$ نیز نوشت.

مثال ۷۱ : مقدار $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}\,\mathrm{tg}x\,dx$ را بیابید.

پاسخ :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}\cot gx\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}\,\mathrm{tg}x\,dx=-I$$

بنابراین $2I=0$ و در نتیجه $I=0$.

مثال ۷۲ : حاصل $I=\int^{\pi}\frac{x\,\mathrm{tg}x}{\sec x+\mathrm{tg}x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ ۲) $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi(\pi+1)}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که انتگرال را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $\int_0^{\pi}\frac{x\,\mathrm{tg}x}{\sec x+\mathrm{tg}x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$

حال با استفاده از رابطه $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{1+\sin x})dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1-\sin x}{\cos^2 x})\,dx=\pi(x-\mathrm{tg}x+\frac{1}{\cos x})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\mathrm{tg}x+\frac{1}{\cos x})-1]=\pi(\frac{\pi}{2}-1)$$

محاسبه انتگرالهای شامل براکت (جزء صحیح)

براکت در محاسبه انتگرال معین به عنوان یک ضریب عمل می‌کند و باید فاصله انتگرال‌گیری را به ترتیبی بشکنیم که عدد صحیح برای براکت در آن فاصله بدست آید.

مثال ۷۳ : حاصل انتگرال $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\lfloor x\rfloor\cos x\,dx$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 2 ۳) $1-\mathrm{Sin}1$ ۴) $1+\mathrm{Sin}1$

پاسخ : گزینه «۳»

$$I=\int_0^1 0\times\cos x\,dx+\int_1^{\frac{\pi}{2}}1\times\cos x\,dx=0+[\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}}=1-\mathrm{Sin}1$$

مثال ۷۴ : حاصل $I=\int_{\frac{1}{2}}^1\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\frac{dx}{x^2}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{1}{2}<x<1\Rightarrow 1<\frac{1}{x}<2\Rightarrow\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=1\Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^1 1\times\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{3}{2}$$

مثال ۷۵ : مقدار انتگرال $\int^{\frac{\pi}{2}}[4\sin^2 x]dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه بازه انتگرال‌گیری $0 < x < \frac{\pi}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$0 \le 4\sin^2 x < 1 \Rightarrow 0 \le \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{6}$$
$$1 \le 4\sin^2 x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{4}$$
$$2 \le 4\sin^2 x < 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{3}$$
$$3 \le 4\sin^2 x < 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin x < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2}$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\sin^2 x]dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 0dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3dx = 0 + (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) + (\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{4}) + (\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{3}) = \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۷۶: حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor dx$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{8}$ ۲) $\frac{5\pi}{6}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۳»

$$0 < x \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x < 1 \Rightarrow 4 \le 4\cos^2 x + 1 < 5 \Rightarrow \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor = 4$$
$$\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 \le 4\cos^2 x + 1 < 4 \Rightarrow \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor = 3$$
$$\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 \le 4\cos^2 x + 1 < 3 \Rightarrow \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor = 2$$
$$\frac{\pi}{3} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \le 4\cos^2 x + 1 \le 2 \Rightarrow \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor = 1$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lfloor 4\cos^2 x + 1 \rfloor dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 3dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{5\pi}{4}$$

مثال ۷۷: اگر $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$، آنگاه حاصل $I = \int_b^a f(x)dx$ کدام است؟

۱) $b+a$ ۲) $b-a$ ۳) $\frac{a+b}{2}$ ۴) $a-b$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -1 & x \notin Z \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow I = \int_b^a (-1)dx = [-x]_b^a = b - a$$

مثال ۷۸: مقدار $\int_1^{n+1} Ln\lfloor x \rfloor dx$ کدام است؟

۱) $Ln(n!)$ ۲) $Ln(n+1)!$ ۳) $Ln\frac{n}{n+1}$ ۴) $Ln\frac{n+1}{n}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_1^{n+1} Ln[x]dx = \int_1^2 Ln[x]dx + \int_2^3 Ln[x]dx + \int_3^4 Ln[x]dx + \dots + \int_n^{n+1} Ln[x]dx$$
$$= \int_1^2 Ln1dx + \int_2^3 Ln2dx + \int_3^4 Ln3dx + \dots + \int_n^{n+1} Lnndx = Ln1 + Ln2 + Ln3 + \dots + Lnn = Ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = Ln(n!)$$

محاسبه انتگرالهای شامل قدر مطلق

در محاسبه انتگرالهای شامل قدر مطلق باید فاصله ها را طوری بشکنیم تا داخل قدرمطلق مقدارش در آن فاصله مثبت و یا منفی باشد.

مثال ۷۹: حاصل $I = \int_0^2 (|x-1|+1)dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I = \int_0^1 (-x+1+1)dx + \int_1^2 (x-1+1)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

مثال ۸۰: حاصل $I = \int_{-1}^1 \big|x + |x|\big| dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$I = \int_{-1}^1 \big|x + |x|\big| dx = \int_{-1}^0 |x - x|dx + \int_0^1 |x + x|dx = \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

تابع گاما و بتا

تابع گاما به صورت روبرو تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad x > 0$$

خواص تابع گاما:

۱) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

۲) اگر x عددی طبیعی یا صفر باشد، آنگاه: $\Gamma(x+1) = x!$

۳) اگر $x < 0$، تابع گاما را می‌توان به صورت $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ تعریف کرد.

۴) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

۵) $\int \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

۶) اگر در تعریف تابع گاما به جای e عدد دلخواه مثبت p قرار گیرد، فرمول روبرو به دست می‌آید: $\int t^{x-1}p^{-t}dt = \frac{\Gamma(x)}{(Lnp)^x}$

۷) اگر در فرمول تابع گاما به جای t، st و به جای x از $n+1$ استفاده کنیم، فرمول روبرو به دست می‌آید: $\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

۸) اگر در فرمول تابع گاما از تغییر متغیر $t = u^2$ استفاده کنیم، فرمول روبرو حاصل می‌شود: $\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\Gamma(x)$

۹) اگر در خاصیت (۷) از تغییر متغیر $t = -Lnx$ استفاده می‌کنیم، با کمی تغییر فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 x^s(-Lnx)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}}$$

مثال ۸۱: مقادیر $\Gamma(\frac{5}{2})$ و $\Gamma(\frac{-5}{2})$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

با استفاده از خاصیت (۳) داریم:

$$\Gamma(\frac{-5}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-5}{2}+1)}{\frac{-5}{2}} = \frac{-2}{5}\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{-2}{5} \times \frac{\Gamma(\frac{-3}{2}+1)}{\frac{-3}{2}} = \frac{4}{15}\Gamma(\frac{-1}{2}) = \frac{4}{15} \times \frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}} = \frac{-8}{15}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{-8\pi}{15}$$

مثال ۸۲ : حاصل $\int_0^\infty x^2 2^{-x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2!}{Ln2}$ ۲) $\frac{2!}{(Ln2)^2}$ ۳) $\frac{2!}{(Ln2)^3}$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از خاصیت (۶) داریم:

$$\int_0^\infty x^2 2^{-x}dx=\frac{\Gamma(3)}{(Ln2)^3}=\frac{2!}{(Ln2)^3}$$

تابع بتا: تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt \qquad m,n>0$$

برای محاسبه مقدار تابع بتا می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

خواص مهم تابع بتا:

۱) $\beta(m,n)=\beta(n,m)$

۲) $\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}dx=(b-a)^{m+n-1}\beta(m,n)$

۳) $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}dt=\beta(m,n)$

۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}t\cos^{2n-1}t\,dt=\frac{1}{2}\beta(m,n)$

مثال ۸۳ : حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^4x\,dx$ را به دست آورید.

پاسخ : با توجه به خاصیت (۴) داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^4x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^4x\,dx=\beta(\frac{3}{2},\frac{5}{2})=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{5}{2})}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{15}{16}\pi$$

مشتق‌گیری از انتگرال

اگر $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$ باشد آنگاه $F'(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F'(x)=\left(\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right)'=v'(x).f\left[v(x)\right]-u'(x).f\left[u(x)\right]$$

مثال ۸۴ : اگر $S(t)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^{10}}$ در این صورت $S'(0)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ :گزینه «۴»

$$S'(t)=1\times\frac{1}{1+(t)^{10}}-(-1)\times\frac{1}{1+(-t)^{10}}=\frac{2}{1+t^{10}}\Rightarrow S'(0)=2$$

مثال ۸۵ : حاصل $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{x^2}\sin 2t\,dt}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه در محاسبه حد به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x^2-\sin 2x}{\sin x+x\cos x}\xrightarrow{Hop}A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x^2+(4x\cos 2x^2)(2x)-2\cos 2x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\frac{2}{2}=-1$$

مثال ۸۶ : اگر $f(x)=e^{1-\cos x}+\int_0^2 Ln(\sin x)dx$ باشد آنگاه مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) e ۲) $Ln\sin 2$ ۳) صفر ۴) $(\sin 2)e^{\frac{\pi}{2}}$

پاسخ :گزینه «۱» توجه داریم جمله دوم تابع $f(x)$ که انتگرال معین است حاصلش عددی ثابت است و مشتق آن برابر صفر است لذا فقط مشتق جمله اول را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=(\sin x)e^{1-\cos x}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=(\sin\frac{\pi}{2})e^{1-\cos\frac{\pi}{2}}=e$$

مثال ۸۷ : مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) 0

پاسخ :گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}\xrightarrow{Hop}A=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

مثال ۸۸: اگر $f(x)=\int^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ و $g(x)=\int^{\cos x}(1+\sin^2 t)dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sin 2$

پاسخ :گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}\ ,\ g'(x)=(1+\sin^2(\cos x))\times(-\sin x)$$

بنابراین:

$$\Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=-1\ ,\ g(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=-1$$

مثال ۸۹ : در تابع منحنی با ضابطه $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int^{y}\cos t\,dt=0$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$ ۳) $\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\sin y}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3-2\cos^2 x}}{\sin y}$

پاسخ :گزینه «۲» با توجه به قاعده مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\begin{cases}f'_x=\sqrt{3-2\sin^2 x}\\ f'_y=\cos y\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

توضیح: توجه شود که وقتی f'_x را محاسبه می‌کنیم باید y را عدد ثابت فرض کنیم که مشتق آن صفر است لذا نیازی به محاسبه مشتق انتگرال دوم نیست به همین صورت در مورد محاسبه f'_y دیگر نیازی به محاسبه مشتق انتگرال اول نیست.

مثال ۹۰ : در تابع منحنی $y=\int_5^{Lnt}e^z dz$, $x=\int_2^t\frac{Lnz}{z}dz$ ، $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{e^t}{Lnt}$ ۲) e^t ۳) $\frac{t}{Lnt}$ ۴) $\frac{t^2}{Lnt}$

پاسخ :گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t}e^{Lnt}}{\frac{Lnt}{t}}=\frac{t}{Lnt}$$

مثال ۹۱: در تابع منحنی $x=\int^{\sin t}\arcsin z\,dz$ ، $y=\int^{\sqrt t}\frac{\sin z^2}{z}dz$ ، y'_x کدام است؟

۱) $\frac{\sin t}{t\sqrt t}$ ۲) $\frac{tgt}{t^2}$ ۳) $\frac{tgt}{2t^2}$ ۴) $\frac{\cos t}{t\sqrt t}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2\sqrt t}\cdot\frac{\sin t}{\sqrt t}}{\cos t.\underbrace{\arcsin(\sin t)}_{t}}=\frac{tgt}{2t^2}$$

مثال ۹۲: فرض کنید $I(\beta)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\beta x\,dx$ تابعی از پارامتر حقیقی β باشد. در این صورت $I'(2)$ برابر کدام است؟

۱) $-I(2)$ ۲) $I(2)$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt\pi$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I'(\beta)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos\beta x)dx=\int_0^\infty -xe^{-x^2}\sin\beta x\,dx$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\sin\beta x\Rightarrow du=\beta\cos\beta x\\ -xe^{-x^2}dx=dv\Rightarrow v=\frac12 e^{-x^2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$I'(\beta)=\int_0^\infty -xe^{-x^2}\sin\beta x\,dx=\frac12 e^{-x^2}\sin\beta x\Big|_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\beta x\Rightarrow I'(\beta)=\frac{-\beta}{2}I(\beta)\Rightarrow I'(2)=\frac{-2}{2}I(2)=-I(2)$$

مثال ۹۳: شیب خط قائم بر منحنی تابع $f(x)=\int^x\frac{dt}{t^2+2t+2}$ در نقطه‌ای بطول $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac12$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $-\frac12$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=f'(-1)=1\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-1$$

تعمیم فرمول مشتق انتگرال

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)dt=f(x,b(x))b'(x)-f(x,a(x))a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

مثال ۹۴: اگر $f(x)=\int^x\frac{\cos(tx)}{t}dt$ ، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$ بیابید.

پاسخ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\cos(x\times x)}{x}\times1+\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(tx)}{t}\right)dt=\frac{\cos x^2}{x}+\int_0^x\frac{-t\sin(tx)}{t}dt=\frac{\cos x^2}{x}-\int_0^x\sin(tx)dt$$

$$\frac{\cos x^2}{x}+\frac1x\cos(tx)\Big|_0^x=\frac{2\cos x^2}{x}-\frac1x$$

انتگرالهای غیرعادی (ناسره)

❖ **تعریف:** انتگرالهائی که یکی یا هر دو حد انتگرالگیری بی‌نهایت باشد و یا تابع زیر انتگرال در بازه انتگرالگیری بیکران باشد را انتگرالهای ناسره (غیرعادی) می‌نامند.

۱ـ انتگرال با حدود بی‌نهایت: اگر تابع $f(x)$ به ازای $a\le x\le\infty$ پیوسته باشد در این صورت برای محاسبه $I=\int_a^{+\infty}f(x)dx$ داریم:

$$I=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

اگر حد سمت راست تساوی موجود و متناهی باشد آنگاه انتگرال را همگرا و در غیر اینصورت انتگرال را واگرا می‌نامند، به همین صورت روابط زیر را نیز داریم:

$$I=\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx \qquad (3)$$

مثال ۹۵: حاصل $I=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac\pi2$ ۳) $\frac\pi4$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۲»

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}(Arctg\,b-Arctg\,0)=\frac\pi2$$

مثال ۹۶: حاصل $I=\int_2^\infty\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) -1 ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»

$$I=\int_2^\infty\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}=\lim_{b\to+\infty}\left[-(x^2-3)^{-\frac12}\right]_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{b^2-3}}+1\right]=1$$

مثال ۹۷: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac\pi4$ ۳) π ۴) $\frac\pi2$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c\frac{dx}{(x-3)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b\frac{dx}{(x-3)^2+1}$$

می‌توانیم c را هر نقطه‌ای در بازه $(-\infty,+\infty)$ انتخاب کنیم برای راحتی در محاسبات $c=3$ انتخاب می‌کنیم.

$$I=\lim_{a\to-\infty}[Arctg(x-3)]_a^3+\lim_{b\to+\infty}[Arctg(x-3)]_3^b$$

$$\Rightarrow I=-\lim_{a\to-\infty}[Arctg(a-3)]+\lim_{b\to+\infty}[Arctg(b-3)]=\frac\pi2+\frac\pi2=\pi$$

آزمون مقایسه

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای تمام مقادیر $x\ge a$ معین باشند و $0\le f(x)\le g(x)$ آنگاه از همگرائی انتگرال $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ می‌توان همگرائی انتگرال $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ را نتیجه گرفت و از واگرائی انتگرال $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ می‌توان واگرائی انتگرال $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ را نتیجه گرفت.

مثال ۹۸: واگرائی یا همگرائی انتگرال $I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x+2}{\sqrt x}dx$ را بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به نامساوی $\frac{2+\cos x}{\sqrt x}>\frac{1}{\sqrt x}$ و بررسی انتگرال $I_1=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt x}$ داریم:

$$I_1=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\frac12}dx=\lim_{b\to+\infty}[2\sqrt x]_1^b=\lim_{b\to+\infty}(2\sqrt b)-2=+\infty$$

با توجه به اینکه انتگرال I_1 واگراست لذا با توجه به توضیح فوق انتگرال I نیز واگراست.

نکته ۱۷: در محاسبه انتگرال $I=\int_a^{+\infty} f(x)dx$ که $f(x)>0$، اگر بتوانیم وقتی $x\to\infty$، $f(x)$ را هم‌ارز با عبارت $\frac{A}{x^n}$ قرار دهیم آنگاه داریم:

۱) اگر $n>1$ انتگرال همگراست.

۲) اگر $n\le 1$ انتگرال واگراست.

مثال ۹۹: واگرائی و یا همگرائی انتگرال $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+\sin^2 x}$ را بررسی کنید.

پاسخ: برای xهای بزرگ تابع $f(x)=\frac{1}{x+\sin^2 x}$ هم‌ارز $\frac{1}{x}$ می‌باشد لذا با توجه به نکته فوق $(n=1)$ انتگرال واگراست.

همگرایی مطلق و همگرایی مشروط

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a,\infty)$ تعریف شده و انتگرال ناسره و $\int_a^\infty |f(x)|dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست و در این حالت می‌گوییم انتگرال همگرای مطلق است و رابطه $|\int_a^\infty f(x)dx| < \int_a^\infty |f(x)|dx$ برقرار است.

ولی اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشد ولی $\int_a^\infty |f(x)|dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال را همگرای مشروط می‌گوییم.

مثال ۱۰۰: ثابت کنید $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ همگرای مشروط است.

پاسخ: ابتدا انتگرال داده شده را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ یک انتگرال عادی است و بنابراین همگراست (زیرا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$) برای محاسبه $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u=\frac{1}{x} \Rightarrow du=\frac{-1}{x^2}dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty-\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{\sin x}{x^2}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{\sin x}{x^2}dx$$

و انتگرال اخیر همگرای مطلق است، زیرا $|\frac{\cos x}{x^2}|\le\frac{1}{x^2}$ و $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{dx}{x^2}$ همگراست. از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست. حال ثابت می‌کنیم $\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$ یا به عبارتی $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

با استفاده از نامساوی روبرو:

$$\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$$

کافی است نشان دهیم $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{1-\cos 2x}{x}dx$ واگراست (به عهده دانشجو). و آنگاه طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

توضیح: انتگرال $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ به انتگرال دیریکله معروف است و مقدار آن برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال ۱۰۱: همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\int_1^\infty\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}dx$ ب) $\int_1^\infty\frac{1-4\sin 2x}{x^2+\sqrt{x}}dx$ ج) $\int_2^\infty(1-\cos\frac{2}{x})dx$

الف) وقتی $x\to\infty$، عبارت $\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$ هم‌ارز $\frac{1}{x}$ می‌باشد، و بنابراین انتگرال واگراست.

ب) توجه کنید که علامت عبارت $\frac{1-4\sin 2x}{x^2+\sqrt{x}}$ به ازای xهای مختلف در فاصله $[1,+\infty)$ عوض می‌شود. بنابراین انتگرال $\int_1^\infty\frac{|1-4\sin 2x|}{x^2+\sqrt{x}}dx$ را بررسی می‌کنیم. چون $\frac{|1-4\sin 2x|}{x^2+\sqrt{x}}<\frac{5}{x^2}$، و انتگرال $\int_1^\infty\frac{5dx}{x^2}$ همگراست. پس انتگرال $\int_1^\infty\frac{|1-4\sin 2x|}{x^2+\sqrt{x}}dx$ نیز همگراست. و در نتیجه انتگرال اولیه همگرای مطلق خواهد بود.

ج) وقتی $x\to\infty$، $\frac{2}{x}\to 0$ و بنابراین $1-\cos\frac{2}{x}\sim\frac{(\frac{2}{x})^2}{2}=\frac{2}{x^2}$ و چون انتگرال $\int_1^\infty\frac{2}{x^2}dx$ همگراست، پس انتگرال اصلی نیز همگرا خواهد بود.

۲ـ انتگرال با توابع بیکران:

شرایط تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ بررسی می‌کنیم:

الف) اگر $f(x)$ فقط در نقطه $x=a$ بیکران باشد:
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

ب) اگر $f(x)$ فقط در نقطه $x=b$ بیکران باشد:
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

ج) اگر $f(x)$ در نقطه $x=c$ داخل فاصله $[a,b]$ بیکران باشد:
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

در تمامی حالات فوق در صورت وجود حدود سمت راست انتگرال همگرا و در غیر اینصورت واگراست.

مثال ۱۰۲: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) انتگرال واگراست ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» تابع $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ بیکران است لذا داریم:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln[tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})]\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\right]=\infty\Rightarrow$$ انتگرال واگراست

نکته ۱۸: انتگرال $I=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^n}$ برای $n<1$ همگرا و برای $n\ge 1$ واگراست.

نکته ۱۹: انتگرال $I=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^n}$ برای $n<1$ همگرا و برای $n\ge 1$ واگراست.

مثال ۱۰۳: حاصل $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) ۶− ۲) ۰ ۳) انتگرال واگراست ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳»

$$I=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}+\int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$$

با توجه به نکات (۱۸) و (۱۹) هر دو انتگرال واگرا هستند. $(n=\frac{4}{3}>1)$

مثال ۱۰۴ : مقدار انتگرال $\int_1^\infty \frac{Lnx}{x^2}dx$ چقدر است؟

۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) انتگرال واگراست.
۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases} u = Lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{Lnx}{x^2}dx = \underbrace{\frac{-Lnx}{x}\Big|_1^\infty}_{\text{صفر}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

مثال ۱۰۵ : حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{x-\sin x}{x^2+1}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) انتگرال واگراست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» وقتی $x \to \infty$، داریم $\frac{x-\sin x}{x^2+1} \sim \frac{1}{x}$ و چون $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x}$ واگراست، پس انتگرال موردنظر نیز واگراست.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ به ازای چه مقدار $x \in [2,3]$ تساوی $\int^x [t]^2 dt = 2(x-1)$ (که در آن [ ] علامت جزء صحیح است)، برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $x = \frac{5}{2}$
۲) $x = \frac{7}{3}$
۳) $x = \frac{8}{3}$
۴) $x = 3$

۲ـ به ازای چه مقدار C، انتگرال $\int_1^\infty (\frac{x}{2x^2+2c} - \frac{c}{x+1})dx$ همگرا است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $C = -\frac{1}{2}$
۲) $C = \frac{1}{2}$
۳) $C = 0$
۴) $C = 1$

۳ـ حاصل $\int^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{e}{2} - 1$
۲) $2e - 1$
۳) $\frac{e}{2} + 1$
۴) $2e + 1$

۴ـ حاصل $\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+x}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}Ln\frac{3}{2}$
۲) $\frac{1}{3}Ln\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{4}{3}$
۴) $\frac{1}{2}Ln\frac{3}{4}$

۵ـ انتگرال تابع $y = x^3 \times e^{x^4}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\int x^3 \times e^{x^4}.dx = \frac{1}{4}e^{x^4} + c$
۲) $\int x^3 \times e^{x^4}.dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$
۳) $\int x^3 \times e^{x^4}.dx = \frac{x^4}{4}e^{x^4} + c$
۴) $\int x^3 \times e^{x^4}.dx = \frac{1}{3}x^3.e^{x^4} + c$

۶ـ تابع اولیه $I = \int \frac{Lnx}{x(1+Lnx)}dx$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $Ln(\frac{1+Lnx}{x}) + c$
۲) $Ln|\frac{x}{1+Lnx}| + c$
۳) $Ln(x(1+Lnx)) + c$
۴) $Ln(Lnx) + Lnx + 1$

۷ـ مطلوبست محاسبه انتگرال $y = \int_{-1}^2 \sqrt{|1-x|}\,|x|\,dx$.
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = 3/00676$
۲) $y = 3/507$
۳) $y = 4/004$
۴) $y = 5/3$

۸ـ مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x-2}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر
۲) $Ln|x-2|$
۳) $Ln3 - Ln2$
۴) نامتناهی

۹ـ تابع اولیه تابع $f(x) = \int \frac{dx}{x(1+x)^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $Ln|x| - 2Ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + c$
۲) $Ln(x) - 2\frac{x+1}{Ln(x+1)} + c$
۳) $Ln(x) - 2Ln|x+1| + \frac{Lnx}{2(1+x)} + c$
۴) $Ln|x| - Ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + c$

۱۰ـ حد تابع $y = \lim_{x\to 0} \frac{\int^x e^{t^2}.dt}{\sin(x)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = 1$
۲) $y = 2$
۳) $y = 3$
۴) $y = 4$

۱۱ـ اگر $f''(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a) = f(b) = 0$، حاصل $\int_a^b xf''(x)dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $af'(a) - bf'(b)$
۲) $af'(b) - bf'(a)$
۳) $bf'(b) - af'(a)$
۴) $bf'(a) - af'(b)$

۱۲ــ حاصل $\int^{1} \coth x dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $Ln(e^2-1)+1$ ۲) $Ln(e-1)+1$ ۳) $Ln(e+1)-1$ ۴) $Ln(e^2+1)-1$

۱۳ــ حاصل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۴ــ حاصل $\int_1^{e} xLnxdx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ۳) $\frac{1}{4}(e^2-1)$ ۴) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

۱۵ــ مقدار $\int^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\, dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

۱۶ــ حاصل $\int x^{4x}(Lnx+1)\, dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{4}x^{4x}+c$ ۲) $4xLn+c$ ۳) $4xe^{4xLnx}+c$ ۴) $\frac{1}{4}x(Lnx+1)+c$

۱۷ــ حاصل $\int^{\pi} |\sin x-\cos x|\, dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) $4\sqrt{2}-4$

۱۸ــ هرگاه $\int_1^{2} f(x)dx=3$، آنگاه مقدار $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) 6 ۲) 3 ۳) 2 ۴) $\frac{3}{4}$

۱۹ــ اگر $f(x)=\int^{x} \sqrt{1+\sin^{17} t}\, dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) 1

۲۰ــ اگر f تابعی پیوسته باشد، حاصل $\int^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ برابر کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ۲) $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ ۳) $-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ ۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

۲۱ــ حاصل انتگرال $\int^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $4-Ln9$ ۲) $9-Ln4$ ۳) $4+Ln9$ ۴) $9+Ln4$

۲۲ــ حاصل $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $-Ln2$ ۲) $-Ln3$ ۳) $Ln2$ ۴) $Ln3$

۲۳ــ حاصل $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{9}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

۲۴ــ حاصل $\int^{2} xe^{2x}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{4}(3e^4+1)$ ۲) $\frac{1}{4}(3e^3+1)$ ۳) $\frac{1}{4}(4e^4+1)$ ۴) $\frac{1}{4}(4e^3+1)$

۲۵ــ به ازاء چه مقدار a، انتگرال $\int_1^{2} \frac{dx}{x(Lnx)^a}$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $|a|=1$ ۲) $a>1$ ۳) $a<1$ ۴) هر مقدار a

۲۶ــ مقدار انتگرال $\int^{\pi} \sin(nx)f''(x)\; dx$ کدام است؟ (n عدد صحیح و $f''(x)$ روی $[0,\pi]$ پیوسته است) (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $nf(0)+(-1)^n nf'(\pi)-n^2\int_0^{\pi} \sin(nx)f''(x)dx$

۲) $nf(0)+(-1)^{n+1} nf(\pi)-n^2\int_0^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۳) $nf(0)+(-1)^n nf(\pi)-n^2\int_0^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۴) $nf(0)+(-1)^{n+1} nf'(\pi)-n^2\int_0^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۲۷ــ با فرض $p<q$، انتگرال $\int^{1} \frac{dx}{x^p+x^q}$ به ازاء چه مقادیری از p و q همگرا است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $|p|\le 1$ ۲) $q\le 1$ ۳) $|q|<2$ ۴) $p\le 1<q$

۲۸ــ هرگاه $f(x)=\int_1^{x} \frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه $f(4)-f(2)<A$، عدد A کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۲۹ــ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)\cot gxdx$ برابر کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{1}{2}(Ln2)^2$ ۲) $-\frac{1}{2}Ln2$ ۳) $\frac{1}{2}Ln4$ ۴) $\frac{1}{2}Ln2$

۳۰ــ اگر $\int(\frac{\sec x}{1+\tan x})^2 dx=\frac{f(x)}{\sin x+\cos x}$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\cos x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $\sin x$

۳۱ــ حاصل $\int^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ کدام است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 0

۳۲ــ مقدار انتگرال $\int^{1} \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}$ چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\sqrt{2\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۴) $2\sqrt{\pi}$

۳۳ــ حاصل $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^4+x^2+1}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\pi-1$

۳۴ــ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2}\int_2^{x} \sqrt{20-t^4}dt$ برابر کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 4

۳۵ـ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1}^{1+h}e^{-x^2}dx$ برابر کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $2e$ ۲) e ۳) $2e^{-1}$ ۴) e^{-1}

۳۶ـ مقدار انتگرال $\int^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\cos^5 t\,dt$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) 60 ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) 360 ۴) $\frac{1}{360}$

۳۷ـ به ازای چه مقدار c، انتگرال $\int_{1}^{\infty}\left(\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\right)dx$ همگرا است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۸ـ تابع f با رابطه $f(x)=\int^{x}(1+t^3)^{-\frac{1}{2}}dt\ ,\ x\geq 0$ تعریف شده است (لازم نیست این انتگرال را محاسبه کنید) و تابع g، معکوس f می‌باشد. کدام گزینه برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $g''(x)=g^2(x)$ ۲) $g''(x)=\frac{1}{2}g^2(x)$ ۳) $g''(x)=\frac{3}{2}g^2(x)$ ۴) $g''(x)=\frac{2}{3}g^2(x)$

۳۹ـ مقدار انتگرال روبرو چیست؟ $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\csc^{-1}|x|+c$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{(x^2-1)}+c$ ۳) $\sec^{-1}|x|+c$ ۴) $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{2x}+c$

۴۰ـ انتگرال روبرو را به دست آورید؟ $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(9-x^2)}}$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{9}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{(9-x^2)}}{9}]+c$ ۲) $\frac{9}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{(9-x^2)}}{9}]+c$

۳) $\frac{3}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{(9-x^2)}}{3}]+c$ ۴) $\frac{3}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{(9-x^2)}}{3}]+c$

۴۱ـ انتگرال بگیرید: $\int\sec\theta.d\theta$ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $Ln|\sec\theta+tg\theta|+c$ ۲) $Ln|\operatorname{cosec}\theta+tg\theta|+c$ ۳) $Ln\sqrt{(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta})}+c$ ۴) $Ln(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta})^2+c$

۴۲ـ مقدار $\int^{1}(Lnx)^n dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $n!$ ۲) $(-1)^n(n-1)!$ ۳) $(n-1)!$ ۴) $(-1)^n n!$

۴۳ـ مقدار انتگرال $\int_{-2}^{2}x(2^{x^2})dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 4 ۴) $1+Ln2$

۴۴ـ مقدار انتگرال $I=\int_{1}^{2}\frac{x+3x^2}{\sqrt{x^2+2x^3+5}}dx$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}-1$ ۳) $3-\sqrt{2}$ ۴) $5-2\sqrt{2}$

۴۵ـ اگر $F(\theta)=\int\frac{\cos\theta d\theta}{1+\sin\theta}$ حاصل $F(\theta)$ با شرط $F(0)=0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $Ln(2-\cos\theta)$ ۲) $Ln(1+\sin\frac{\theta}{2})$ ۳) $Ln(1-\sin\theta)$ ۴) $Ln(1+\sin\theta)$

۴۶ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

۴۷ـ $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۴۸ـ انتگرال $\int^{\infty}e^{-x^2}dx$ چگونه است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) واگرا ـ حد پایین صفر ۲) واگرا ـ حد بالا $\frac{1}{e}$ ۳) همگرا ـ حد بالا $\frac{1}{e}+1$ ۴) همگرا ـ حد بالا $\frac{1}{e}$

۴۹ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۰ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}xArctgx\,dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$

۵۱ـ $f(x)=\int_{0}^{x}e^{2t}\sqrt{1+9t^4}dt$ ، $g(x)=x^n e^{2x}$، اگر $\lim\limits_{x\to\infty}|\frac{f'(x)}{g(x)}|=3$، آنگاه n برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۵۲ـ اگر $F(x)=\frac{1}{x}\int^{x}t\cos t\,dt$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۵۳ـ اگر $m>0$، مقدار $\frac{d}{dm}\int^{+\infty}e^{-mx}dx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{m^2}$ ۲) $-\frac{1}{m}$ ۳) $\frac{1}{m^2}$ ۴) $\frac{1}{m}$

۵۴ـ اگر $A=\int_{1}^{2}\frac{2^x}{x}dx$، مقدار $\int_{1}^{2}\frac{2^x}{x^2}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $2+ALn3$ ۲) $1+LnA$ ۳) $ALn2$ ۴) $A+Ln2$

۵۵ـ حاصل $\int^{1}x\sqrt{x+1}\,dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{5}(\sqrt{2}+1)$ ۲) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۳) $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$

۵۶ـ حاصل $\int_{0}^{2}\frac{x^2+1}{x+1}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $Ln3$ ۲) $2Ln3$ ۳) $3Ln2$ ۴) $2Ln2$

۵۷ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{x^4+2x^2+4}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

۵۸ـ درمورد انتگرال نامتعارف (غیرعادی) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) این انتگرال واگراست.

۲) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی صفر است.

۳) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی یک است .

۴) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی $\frac{1}{2}$ است.

۵۹ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+4}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

۶۰ـ انتگرال $I=\int_0^1 x^2e^x dx$ برابر کدام است؟ (مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) e ۲) $2e$ ۳) $e-1$ ۴) $e-2$

۶۱ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۶۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{16}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

۶۳ـ مقدار $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \sin(tx^2)dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\int_0^{t^2} x^2\cos(tx^2)dx+2t\sin t^5$

۲) $\int_0^{t^2} x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^5$

۳) $\int_0^{t^2} x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^3$

۴) $\int_0^{t^2} x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^3$

۶۴ـ حاصل انتگرال معین $\int_2^4 \frac{dx}{x-3}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) صفر ۲) $\text{Ln}|x-3|$ ۳) نامتناهی ۴) $\text{Ln}4-\text{Ln}2$

۶۵ـ حاصل انتگرال معین $\int_0^1 (3x+1)d(x^2-1)$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۶۶ـ حاصل انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) π ۲) 2π ۳) ۱ ۴) صفر

۶۷ـ حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^6 x dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۲) $3+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{11}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{9}{15}+\frac{\pi}{4}$

۶۸ـ به ازای چه مقدار c ، انتگرال، $\int_1^{\infty}(\frac{cx}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1})dx$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $c=2$ ۲) $c=1$ ۳) $c=-2$ ۴) $c=-1$

۶۹ـ فرض کنید g تابعی همه جا پیوسته باشد، و $\int^1 g(t)dt=1$ ، $f(x)=\int^x (x-t)^2g(t)dt$ مقدار $f''(1)$ کدام است؟

(عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $f''(1)=-1$ ۲) $f''(1)=-2$ ۳) $f''(1)=1$ ۴) $f''(1)=2$

۷۰ـ انتگرال $\int x^2\sin x dx$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x+C$

۲) $-x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$

۳) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

۴) $x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x+C$

۷۱ـ انتگرال $\int\frac{\cot\theta d\theta}{1+\sin^2\theta}$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\text{Ln}|\sin\theta|-\frac{1}{2}\text{Ln}|1+\sin^2\theta|+C$

۲) $\text{Ln}|\cos\theta|-\frac{1}{2}\text{Ln}|1+\sin^2\theta|+C$

۳) $\text{Ln}|\cos\theta|+\frac{1}{2}\text{Ln}|1+\sin^2\theta|+C$

۴) $\text{Ln}|1+\sin^2\theta|+C$

۷۲ـ انتگرال $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{4}{5}x^{5/4}-x+\frac{4}{3}x^{3/4}-2x^{1/2}+4x^{1/4}-4\text{Ln}|1+x^{1/4}|+C$

۲) $\sin^{-1}(x^2-\sqrt{x})+C$

۳) $\text{Ln}|\sin^{-1}\sqrt{x}|+C$

۴) $\frac{3}{4}x^{3/4}-2x^{1/2}+\text{Ln}|x^2-\sqrt{x}|+C$

۷۳ـ $\int_0^2 \frac{x^2}{x^6+64}dx$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{96}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{32}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۷۴ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x|\cos x dx$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $1-\frac{1}{2}\sin 1$ ۲) $1-\sin 1$ ۳) $1+\sin 1$ ۴) $1+\frac{1}{2}\sin 1$

۷۵ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) ۱ ۴) ۲

۷۷ـ حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\sin x dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$ ۲) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ۴) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1)$

۷۸ــ حاصل $\int_{4}^{6} \frac{dx}{9-x^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\frac{7}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\frac{3}{5}$

۷۹ــ حاصل $\int_{-1}^{2} (x+|x|)dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۰ــ حاصل $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

۸۱ــ اگر $F(x)=\int f(x)dx$، حاصل $\int f(1-2x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}F(1-2x)$ ۲) $-\frac{1}{2}F(1-2x)$ ۳) $-2F(1-2x)$ ۴) $F(1-2x)$

۸۲ــ حاصل $I=\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2+2x}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$ ۳) $e\sqrt{\pi}$ ۴) $e\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۸۳ــ مقدار مشتق عبارت $\int_{2x}^{2x^2+2} \sqrt{\cos t}\,dt$ در $x=0$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) -3 ۲) -2 ۳) 0 ۴) 3

۸۴ــ اگر $f(x)=\int^{x} \frac{2+e^{-t}}{1+\tan^2 t}dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $(f^{-1})'(0)$ وجود ندارد.

۸۵ــ حاصل $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۶ــ مقدار انتگرال معین $\int_{2}^{5} \frac{dx}{x^2+x}$ کدام است؟ (مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\mathrm{Ln}(\frac{5}{3})$ ۲) $\mathrm{Ln}(\frac{4}{5})$ ۳) $\mathrm{Ln}(\frac{3}{5})$ ۴) $\mathrm{Ln}(\frac{5}{4})$

۸۷ــ مقدار انتگرال $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x}$ کدام است؟ (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) e ۲) e^2 ۳) ۲ ۴) ۱

۸۸ــ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{2} (x-1)(2x+3)dx$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۸۹ــ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{2} \frac{xdx}{x+2}$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $4-3\mathrm{Ln}2$ ۲) $4+3\mathrm{Ln}2$ ۳) $3+4\mathrm{Ln}2$ ۴) $3-4\mathrm{Ln}2$

۹۰ــ مقدار انتگرال $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\mathrm{Ln}^2x}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{\mathrm{Ln}^2 2}$ ۲) $\frac{1}{\mathrm{Ln}2}$ ۳) $\frac{1}{2\mathrm{Ln}2}$ ۴) $2\mathrm{Ln}^2 2$

۹۱ــ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+x\mathrm{tg}x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\mathrm{Ln}\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $e^{\frac{\pi}{2}}$

۹۲ــ به ازای چه مقادیری از ثابت‌های b,a، $\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx-\sin x}\int^{x} \frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=1$. (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $a=2 , b=4$ ۲) $a=4 , b=1$ ۳) $a=0 , b=4$ ۴) $a=2 , b=1$

۹۳ــ حد عبارت روبرو چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int^{x} \sin(t^2x^2)dt}{x^5}$$

۱) 0 ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ∞

۹۴ــ یک ایزوتوپ رادیواکتیو توسط کارخانه‌ای در هوا آزاد می‌شود. این ایزوتوپ پایا نیست و بـه علـت تـساتع رادیواکتیـور دو سـوم آن خاصیت رادیواکتیو خود را پس از گذشت یک ماه از دست می‌دهد. اگر ۱۰ گرم از این ایزوتوپ در پایان ماه اول و سپس در پایان ماههای بعـد در هوا آزاد شود، در دراز مدت یعنی با فرض اینکه این فرآیند زباله‌سازی و تساتع رادیواکتیو همچنان ادامه داشته باشد، مقدار این ایزوتوپ در پایان هر ماه چقدر خواهد بود؟ (MBA ۸۲)

۱) ۱۰ گرم ۲) ۱۵ گرم ۳) ۳۰ گرم ۴) $\frac{20}{3}$ گرم

۹۵ــ فرض کنید تابع حقیقی f بر R مشتق‌پذیر باشد و $f(1)=1$ و $f(-1)=-1$ و روی تمام R، $|f'(x)|\leq 1$، در این صورت: (MBA ۸۲)

۱) $f(0)=0$ ۲) $f(0)=1$
۳) $f(0)=2$ ۴) با این اطلاعات نمی‌توان $f(0)$ را تعیین کرد.

۹۶ــ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x}\cos xdx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}(\sqrt{27}+\sqrt{8})$ ۳) $\frac{3}{2}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$ ۴) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

۹۷ــ انتگرال $\int_{0}^{1} \mathrm{Ln}(1+x)dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) -1 ۲) $2\mathrm{Ln}2$ ۳) $2\mathrm{Ln}2-1$ ۴) $2\mathrm{Ln}2+1$

۹۸ــ مقدار $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ∞

۹۹ــ حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty} x^3e^{-x}dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) ۲۴ ۴) $2\sqrt{\pi}$

۱۰۰ــ حد تابع $f(x)=\frac{\int_{0}^{x} \sin t^4dt}{2x^5}$ هرگاه $x\to 0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) ∞

۱۰۱ــ مقدار انتگرال معین $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) $\mathrm{Ln}2-1$ ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) $+\infty$

۱۰۲ـ در مورد تابع $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{3+t^2}$، کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) f تابعی است اکیداً صعودی
۲) f تابعی است اکیداً نزولی
۳) تابع f دارای یک نقطه ماکزیمم مطلق است.
۴) تابع f دارای یک نقطهٔ می‌نیمم مطلق است.

۱۰۳ـ مقدار $\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}\int_{0}^{b}e^{x^2-b^2}(x^2+1)dx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $+\infty$

۱۰۴ـ اگر $A=\int_{1}^{3}\frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ آنگاه A برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۰۵ـ حاصل $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{e^{2x}+e^{2x}}\,dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 12 ۲) $\frac{37}{3}$ ۳) $\frac{38}{3}$ ۴) e^8-e^3

۱۰۶ـ حاصل $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$ ۲) $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$ ۳) $\frac{2}{3}(3-\sqrt{2})$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۰۷ـ حاصل $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2(1-x^2)}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\ln 3)$ ۲) $\frac{1}{6}+\ln 6$ ۳) $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\ln 2)$ ۴) $\frac{1}{6}(1+\ln 6)$

۱۰۸ـ کدام گزینه جواب $\int\sin x\cos x\,dx$ نیست ؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2}\cos^2x+c$ ۲) $\frac{1}{2}\cos^2x+c$ ۳) $-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ ۴) $\frac{1}{2}\sin^2x+c$

۱۰۹ـ حاصل $\int_{0}^{1}x\ln x\,dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۱۰ـ تحت چه شرایطی رابطه $\int_{0}^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ برقرار است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر m و n فقط اعداد صحیح باشند.
۲) اگر m و n فقط اعداد صحیح و نامساوی باشند.
۳) برای کلیه مقادیر m و n برقرار است.
۴) به ازاء هیچ مقدار از m و n تساوی برقرار نیست.

۱۱۱ـ اگر $f(x)=\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ و $f(0)=1$، $f(x)$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{-xe^x}{x+1}+1$ ۲) $\frac{xe^x}{x+1}+1$ ۳) $\frac{e^x}{x+1}+x+1$ ۴) $\frac{-e^x}{x+1}+e^x+1$

۱۱۲ـ فرض کنیم $I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ و $J=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) I و J هر دو همگرای مشروط هستند.
۲) I و J هر دو همگرای مطلق هستند.
۳) I همگرای مطلق و J همگرای مشروط است.
۴) I همگرای مشروط و J همگرای مطلق است.

۱۱۳ـ مقدار انتگرال $\int_{1}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۱۴ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}e^{-xt}\cos t\,dt$، برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $\frac{x^2}{x^2+1}$ ۴) $\frac{x}{x^2+1}$

۱۱۵ـ مقدار انتگرال $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+c$ ۲) $\sqrt{x}-1+c$ ۳) $2\ln|\sqrt{x}+1|+c$ ۴) $2\ln|\sqrt{x}-1|+c$

۱۱۶ـ اگر $f(t)=\int_{0}^{1}\frac{\sin tx}{x}dx$ باشد آنگاه $\frac{df}{dt}$ برابر کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $t\sin t$ ۲) $\frac{\sin tx}{x}$ ۳) $\frac{2\sin t^2}{t}$ ۴) $\int_{0}^{1}\cos tx\,dx$

۱۱۷ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{4}\frac{dx}{x^2+2x-8}$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{-1}{2}\ln 4$ ۲) انتگرال واگراست. ۳) $\frac{-1}{2}\ln 8$ ۴) $\frac{-1}{2}\ln 2$

۱۱۸ـ اگر $f(t)=\int_{0}^{1}\frac{\sin tx}{x}dx$ آنگاه $\frac{df}{dt}$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $\int_{0}^{1}\cos tx\,dx$ ۲) $\frac{2\sin t^2}{t}$ ۳) $\frac{\sin tx}{x}$ ۴) $t\sin t$

۱۱۹ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}x}$ برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\pi-1$

۱۲۰ـ حاصل $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\cosh x}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۲۱ـ اگر $F(x)=x.\int_{4}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}}$ خط مماس بر منحنی تابع $F(x)$ در نقطه $x=2$ محور y ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۱۲۲ـ شیب خط مماس بر یک منحنی در هر نقطه $M(x,y)$ از آن برابر $\sqrt{1+x+y+xy}$ است. اگر این منحنی از $(-1,-1)$ عبور کند. محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-8}{9}$ ۲) $\frac{-7}{9}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

۱۲۳ـ اگر $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt[3]{1+t^2}\,dt$، آنگاه مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

۱۲۴ـ حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۲۵ـ اگر $F(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\sin^{-1} 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ آنگاه $\lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} F(\alpha)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{16}$

۱۲۶ـ حاصل $\int_1^e \frac{\mathrm{Ln}x}{x(1+\mathrm{Ln}x)}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $1-\mathrm{Ln}2$ ۲) $e-\mathrm{Ln}2$ ۳) $2-\mathrm{Ln}2$ ۴) $\frac{-1}{e}+\mathrm{Ln}2$

۱۲۷ـ مقدار انتگرال $\int^{\infty} \frac{dx}{1+e^{ax}}$ ($a > 0$ ثابت) برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $a\mathrm{Ln}2$ ۳) $\frac{1}{a}\mathrm{Ln}2$ ۴) ∞ (انتگرال واگراست)

۱۲۸ـ مقدار انتگرال $\int^1 \cos(\mathrm{Ln}x)dx$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۱۲۹ـ حاصل $\int \frac{dx}{e^{2x}-4e^x+4}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\left|\frac{e^x}{e^x-2}\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x-2}\right)+C$

۲) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|e^x-2|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x+2}\right)+C$

۳) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|e^x+2|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x+2}\right)+C$

۴) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}(e^x-2)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^x-2}\right)+C$

۱۳۰ـ حاصل $\int x^2 \tan^{-1} x dx$ ، برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\mathrm{Ln}(1+x^2)+C$

۲) $\frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\mathrm{Ln}(1+x^2)+C$

۳) $\frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}\tan^{-1} x+C$

۴) $\frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\tan^{-1} x+C$

۱۳۱ـ مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\int^x \sin t^2 dt$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد.

۱۳۲ـ مقدار $\lim_{h \to 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2}dt-\int_1^x e^{-t^2}dt}{h}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $-2xe^{-x^2}$ ۲) e^{-x^2} ۳) ۰ ۴) ۱

۱۳۳ـ y تابعی از x است و تساوی $x = \int^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$ برقرار است. کدام رابطه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $y''+4yy'=0$ ۲) $y''+4y=0$ ۳) $y''-4y=0$ ۴) $y''+4y'=0$

۱۳۴ـ اگر g تابعی پیوسته و $f(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt$ ، آنگاه $f'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $xg(x)$ ۳) $2xg(x)$ ۴) $\int_0^x g(t)dt$

۱۳۵ـ مقدار $\int^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) $+\infty$

۱۳۶ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x+y^2\cos^2 x}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2y}$ ۲) $\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{\pi}{2y}$ ۳) $\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{2}{\pi y}$ ۴) $\frac{2}{\pi y}$

۱۳۷ـ کدام گزینه در مورد $I = \int_1^2 \frac{dx}{\log x}$ صحیح است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) I واگرا است. ۲) I همگرا به صفر است. ۳) I همگرا به ۱ است. ۴) I همگرا به $\frac{1}{2}$ است.

۱۳۸ـ اگر $g(1) = 1$ و برای هر $x > 0$ ، $g'(x^2) = x^2$ ، $g(4)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{64}{5}$ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{66}{5}$ ۴) $\frac{67}{5}$

۱۳۹ـ اگر تابع g پیوسته، $\int^1 g(t)dt = 2$ و $f(x) = \frac{1}{2}\int^x (x-t)^2 g(t)dt$ ، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۴۰ـ مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2t)^{1/t}dt$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $e^{1/2}$ ۳) ۱ ۴) e^2

۱۴۱ـ اگر $f(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ ، آنگاه $f'(x)$ برابر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $xf(x^2)$ ۲) $2x^2f(x^2)$ ۳) $\int_0^{x^2} f(t)dt$ ۴) $2x^2f(x^2)+\int_0^{x^2} f(t)dt$

۱۴۲ـ اگر تابع f و مشتق‌های آن تا مرتبه سوم پیوسته و $f(1) = f'(1)$ و $f''(1) = f(0) = -5$ باشند حاصل انتگرال $\int^1 x^2 f'''(x)dx$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) -5 ۴) -15

۱۴۳ـ حاصل $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $7+\mathrm{Ln}2$ ۲) $8+\mathrm{Ln}2$ ۳) $7+2\mathrm{Ln}2$ ۴) $8+2\mathrm{Ln}2$

۱۴۴ـ انتگرال نامعین زیر برابر با کدام گزینه است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$$

۱) $\mathrm{Ln}|x|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x^2+4|+c$

۲) $\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}\frac{x}{2}+\mathrm{Ln}x+c$

۳) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x^2+4|+\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}\frac{x}{2}+c$

۴) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}\frac{x}{2}+c$

۱۴۵ـ انتگرال $\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}dx$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $\sqrt{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|$ ۲) $\sqrt{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|-2\sqrt{1+x}+c$

۳) $\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|+\mathrm{Ln}\sqrt{1+x}+c$ ۴) $\sqrt{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|+2\sqrt{1+x}+c$

۱۴۶ـ اگر $f(x)=\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ باشد، مشتق $y=x^2f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{-1}{2}$

۱۴۷ـ انتگرال $\int^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\pi$ ۲) صفر ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) 2π

۱۴۸ـ اگر $f(x)=\int\frac{dx}{x\mathrm{Ln}x}$ باشد آنگاه $f(e^2)-f(e)$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) 0 ۲) e ۳) $\mathrm{Ln}3$ ۴) $\mathrm{Ln}2$

۱۴۹ـ حاصل انتگرال $\int^{\infty}(\frac{x^2}{1+x^4}-\frac{1}{1+x^4})dx$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\pi\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۵۰ـ با توجه به حاصل $\int^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$ مقدار $\int^{\infty}x^6.e^{-x}dx$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۷۲۰

۱۵۱ـ تابع $F(x)=\int_x^{2x}e^{-t^2}dt$ به ازای کدام مقدار x بیشترین مقدار را دارد؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sqrt{\mathrm{Ln}8}$ ۲) $\sqrt{\mathrm{Ln}9}$ ۳) $\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{Ln}2}$ ۴) $\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}3}$

۱۵۲ـ حاصل $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) 1 ۲) 2 ۳) π ۴) 2π

۱۵۳ـ اگر $a>1$ باشد، مقدار $\int_1^a\log_a xdx+\int^1 a^y dy$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) a ۲) $\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ ۳) $a\mathrm{Ln}a$ ۴) $\frac{a}{a\mathrm{Ln}}$

۱۵۴ـ اگر f در فاصلهٔ $[0,b]$ پیوسته باشد مقدار $\int^b\frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) $\frac{b}{2}$ ۳) b ۴) $2b$

۱۵۵ـ اگر $\Gamma(\frac{1}{2})=\int^{\infty}x^{\frac{-1}{2}}e^{-x}dx$، مقدار آن چقدر است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) ∞ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۱۵۶ـ مقدار $\int^1\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{18}{15}$ ۴) $\frac{28}{15}$

۱۵۷ـ بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m xdx}{x^n}$ همگرا گردد؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $n<m$ ۲) $m<n$ ۳) $n<m+1$ ۴) $m<n+1$

۱۵۸ـ اگر $f(x)=\int_2^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه $f'(2)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{4}{65}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{4}{33}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۱۵۹ـ فرض کنیم $f(x)=\int_1^{\mathrm{Ln}x}\sqrt{1+e^t}dt$. مقدار $(f^{-1})''(0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $e(1+e)^{-2}$ ۲) $e(1+e)^{-1}$ ۳) $e(1-e)^{-2}$ ۴) $e(1-e)^{-1}$

۱۶۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}x^{-2}\int^{x^2}e^{t^2}\sin tdt$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 2 ۴) بی‌نهایت

۱۶۱ـ در صورتیکه تابع f مخالف صفر و $x\neq 0$، $f^2(x^2+1)=\int^{x^2+1}\frac{f(t)}{(t+1)^2}dt$. ضابطه $f(x)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2(x+1)}+C$ ۲) $\frac{2}{x+1}+C$ ۳) $-\frac{1}{2(x+1)}+C$ ۴) $\frac{1}{2(x+1)^2}+C$

۱۶۲ـ اگر f تابعی پیوسته باشد حاصل مقدار $\int^1\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

۱۶۳ـ حاصل $\int_1^2\frac{(y^2+1)dy}{\sqrt{y^3+3y+5}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۶۴ـ مقدار $\int_1^a\frac{\log_a x^2}{x}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $2\mathrm{Ln}a$ ۲) 1 ۳) $\mathrm{Ln}a$ ۴) $\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$

۱۶۵ـ حاصل $\int_1^e\cos(\mathrm{Ln}x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}e(\cos 1+\sin 1)$ ۲) $\frac{1}{2}e(\cos 1-\sin 1)$ ۳) $2e(\cos 1+\sin 1)$ ۴) $2e(\cos 1-\sin 1)$

۱۶۶ـ حاصل $\int^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۶۷ـ اگر $F(x)=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+6}}$، مقدار $F(30)-F(3)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Ln}\frac{13-3\sqrt{5}}{13+3\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{Ln}\frac{13+3\sqrt{5}}{13-3\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{Ln}\frac{13-3\sqrt{5}}{13+3\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Ln}\frac{13+3\sqrt{5}}{13-3\sqrt{5}}$

۱۶۸ـ حاصل $\int_3^4\frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\mathrm{Ln}\frac{3^4}{2^{12}}$ ۲) $\mathrm{Ln}\frac{3^5}{2^{12}}$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{2^{12}}{3^4}$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{2^{13}}{3^4}$

۱۶۹ـ اگر $F(x)=\int x^2\cos x\,dx$ و $F(0)=0$، $F(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{8}-2$ ۲) $\frac{\pi}{6}-2$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}-2$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}-2$

۱۷۰ـ اگر $\int\cos(Lnx)dx=\frac{1}{2}x\cos(Lnx)+f(x)+C$، $f(x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $x\sin(Lnx)$ ۲) $\frac{1}{2}xLn(\sin x)$ ۳) $\frac{1}{2}x\sin(Lnx)$ ۴) $xLn(\sin x)$

۱۷۱ـ اگر $y=\int_x^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $2x\sin x-\sin\sqrt{x}$ ۲) $2x\sin x+\sin\sqrt{x}$ ۳) $x\sin x-2\sin\sqrt{x}$ ۴) $x\sin x+2\sin\sqrt{x}$

۱۷۲ـ حاصل انتگرال $I=\int_1^2\frac{dx}{x^2(1+x)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}+Ln3-Ln4$ ۲) $-\frac{1}{2}+Ln\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}+Ln3-Ln4$ ۴) $\frac{1}{2}+Ln\frac{3}{2}$

۱۷۳ـ اگر ثابت انتگرال‌گیری $c=-1$ فرض شود، حاصل انتگرال $\int\frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$ به ازای $x=0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ∞

۱۷۴ـ معادله منحنی که در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر خط $y=x-2$ مماس باشد و داشته باشیم $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $y=x^3-2x+1$ ۲) $y=x^3-2x-2$ ۳) $y=x^3-2x+4$ ۴) $y=x^3-2x$

۱۷۵ـ حاصل $\int_e^{e^3}\frac{dx}{x}$ کدام است؟ (مهندسی شیمی نساجی ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e^3-e ۴) e^2

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ گزینه «۱»

$$\int_0^x [t]^2dt=\int_0^1 0dt+\int_1^2 1dt+\int_2^x 2^2dt=1+4(x-2)\Rightarrow 4x-7=2x-2\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

۲ـ گزینه «۲»

$$\int_1^\infty\left(\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{4}Ln(2x^2+2c)-cLn(x+1)\right)\Big|_1^\infty=Ln\frac{(2x^2+2c)^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^c}\Big|_1^\infty$$

برای همگرایی انتگرال فوق لازم است، صورت و مخرج کسر هم درجه باشند، یعنی $c=\frac{1}{2}$.

۳ـ گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$u=xe^x\Rightarrow du=e^x(x+1)dx$$

$$dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\Rightarrow v=\frac{-1}{x+1}$$

$$\int_0^1\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\frac{-xe^x}{x+1}\Big|_0^1+\int_0^1 e^xdx=\frac{-xe^x}{x+1}\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$$

۴ـ گزینه «۳»

$$\frac{1}{x(2x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{2x^2+1}\Rightarrow A(2x^2+1)+(Bx+C)x=1$$

از رابطه فوق مقادیر A، B و C به ترتیب برابر ۱، ۲- و ۰ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\int_1^2\frac{dx}{2x^3+x}=\int_1^2\frac{dx}{x}-\int_1^2\frac{2x}{2x^2+1}dx=Lnx\Big|_1^2-\frac{1}{2}Ln(2x^2+1)\Big|_1^2=\frac{1}{2}Ln\frac{4}{3}$$

۵ـ گزینه «۱»

$$x^4=u\Rightarrow 4x^3dx=du\Rightarrow x^3.dx=\frac{du}{4}$$

$$I=\int x^3.e^{x^4}.dx=\frac{1}{4}\int e^u.du=\frac{1}{4}e^u+c=\frac{1}{4}e^{x^4}+c$$

۶ـ گزینه «۲»

$$Lnx=u\Rightarrow\frac{dx}{x}=du\Rightarrow$$

$$I=\int\frac{u}{1+u}.du=\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du=u-Ln|u+1|+c=Lnx-Ln|Lnx+1|+c=Ln\left|\frac{x}{1+Lnx}\right|+c$$

۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$I=\int_{-1}^2\sqrt{|1-x|}.|x|dx=\int_{-1}^0\sqrt{1-x}.(-x)dx+\int_0^1\sqrt{1-x}.xdx+\int_1^2\sqrt{x-1}.xdx$$

$$1-x=u\Rightarrow -dx=du\,,\,-x=u-1\,,\,x=-1\Rightarrow u=2\,,\,x=0\Rightarrow u=1$$

$$1-x=u\Rightarrow -dx=du\,,\,x=1-u\,,\,x=0\Rightarrow u=1\,,\,x=1\Rightarrow u=1$$

$$\Rightarrow I=\int_2^1\sqrt{u}(1-u)du-\int_1^0\sqrt{u}(1-u)du+\int_0^1\sqrt{u}(u+1)du=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_2^1-\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^0+\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{5}\times1\right)-\left(\frac{2}{3}\times2\sqrt{2}-\frac{2}{5}\times4\sqrt{2}\right)\right]+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=3\times\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$=\frac{30-6}{15}+\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{24}{15}+\frac{4}{15}\sqrt{2}\simeq 1/97$$

۸ـ گزینه «۴»

$$\int_1^3\frac{dx}{x-2}=\int_1^2\frac{dx}{x-2}+\int_2^3\frac{dx}{x-2}=[\ln(x-2)]_1^2+[\ln(x-2)]_2^3\ \Rightarrow$$ ملاحظه می‌گردد که حاصل انتگرال نامتناهی است.

۹ـ گزینه «۴»

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(1+x)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0}=1\\ B=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=-1}=(-\frac{1}{x^2})\Big|_{x=-1}=-1\\ C=\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}=-1\end{cases}$$

$$I=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2})dx=\ln|x|-\ln|1+x|+\frac{1}{1+x}+c$$

۱۰ـ گزینه «۱» اگر $x=0$ را در تابع قرار دهیم به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم که با استفاده از قاعده هوپیتال و قاعده مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$y=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{\cos x}=1$$

۱۱ـ گزینه «۳»

مشتق	انتگرال
$\oplus x$	$f''(x)$
$\ominus 1$	$f'(x)$
$\oplus 0$	$f(x)$

$$\int_a^b xf''(x)dx=[xf'(x)-f(x)]_a^b=bf'(b)-af'(a)$$

۱۲ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_0^1\coth x\,dx=\ln|\sinh x|\Big|_0^1=\ln\sinh 1-\ln\sinh 0=\ln\sinh 1-\ln(0^+)=\ln\sinh 1-\ln(0^+)=+\infty$$

۱۳ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\sec t$, $dx=\sec t.\mathrm{tg}t\,dt$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t.\mathrm{tg}t\,dt}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}t\,dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$

۱۵ـ گزینه «۳» $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

۱۶ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $u=x^{4x}$، $du=4x^{4x}(\ln x+1)dx$ استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$\int x^{4x}(\ln x+1)dx=\int\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}u+c=\frac{1}{4}x^{4x}+c$$

۱۷ـ گزینه «۲»

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$$

۱۸ـ گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $u=\frac{1}{x}$ ، $du=\frac{-1}{x^2}dx$ داریم:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx=\int_2^1-f(u)du=\int_1^2 f(u)du=3$$

۱۹ـ گزینه «۴» از رابطه $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین برای محاسبه $(f^{-1})'(0)$، ابتدا به جای $f(x)$، مقدار 0 را قرار می‌دهیم.

$$0=\int_0^x\sqrt{1+\sin^{17}t}\,dt\Rightarrow x=0$$

$$f(x)=\int_0^x\sqrt{1+\sin^{17}t}\,dt\Rightarrow f'(x)=\sqrt{1+\sin^{17}x}\Rightarrow f'(0)=1\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

۲۰ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $u=\frac{\pi}{2}-x$, $du=-dx$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0-f(\cos(\frac{\pi}{2}-u))du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin u)du$$

۲۱ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=t^2$ استفاده می‌کنیم در این صورت $dx=2tdt$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2\frac{2tdt}{1+t}=\int_0^2(2-\frac{2}{1+t})dt=2t-2\ln(1+t)\Big]_0^2=4-2\ln 3=4-\ln 9$$

۲۲ـ گزینه «۴» $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 3=\ln 3$$

۲۳ـ گزینه «۳» $$\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{3}\mathrm{Arctg}\frac{x}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty}=\frac{1}{3}\mathrm{Arctg}\infty-\frac{1}{3}\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{9}$$

۲۴ـ گزینه «۱» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \\ u = x \Rightarrow du = dx \end{cases}$$

$$\int_0^2 xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x}\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x}dx = e^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^2 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3e^4+1)$$

۲۵ـ گزینه «۳» $u = \mathrm{Ln}x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $x=1 \Rightarrow u=0$, $x=2 \Rightarrow u = \mathrm{Ln}2$

بنابراین: $\int_1^2 \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^a} = \int_0^{\mathrm{Ln}2} \frac{du}{u^a} \Rightarrow$ برای همگرایی لازم است $a<1$ باشد.

۲۶ـ گزینه «۲»

مشتق	انتگرال
$\oplus \sin nx$	$f''(x)$
$\ominus n\cos x$	$f'(x)$
$\oplus -n^2\sin nx$	$f(x)$

بنابراین: $\int_0^\pi \sin(nx)f''(x)dx = (\sin(nx)f'(x) - n\cos xf(x))\Big|_0^\pi - \int_0^\pi n^2\sin(nx)f(x)dx$

$$= nf(0) + (-1)^{n+1}nf(\pi) - n^2\int_0^\pi \sin(nx)f(x)dx$$

۲۷ـ گزینه «۲» انتگرال داده شده در $x=0$ ناسره می‌باشد. چون طبق فرض $p<q$ ، بنابراین در همسایگی نقطه $x=0$ داریم $\frac{1}{x^p+x^q} \sim \frac{1}{x^p}$ از طرفی شرط همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ این است که $p<1$. با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

۲۸ـ گزینه «۳» $f(4)-f(2) = \int_1^4 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int_2^4 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_2^4 \frac{dt}{1+t^2} \le \frac{1}{1+(2)^2}(4-2) = \frac{2}{5}$

توجه کنید که عبارت $\frac{1}{1+t^2}$ در فاصله $[2,4]$ بیشترین مقدار خود را به ازای $t=2$ اتخاذ می‌کند.

۲۹ـ گزینه «۱»

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(\sin x)\times\frac{\cos x}{\sin x}dx \ , \ \mathrm{Ln}(\sin x) = u \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x}dx = du \Rightarrow du = \cot gxdx \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \mathrm{Ln}1 = 0 \ , \ x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \mathrm{Ln}\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(\sin x)\times\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int_{\mathrm{Ln}\frac{1}{2}}^{0} u.du = [\frac{u^2}{2}]_{\mathrm{Ln}\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2}(-\mathrm{Ln}2)^2 = -\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}2)^2$$

۳۰ـ گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال سمت چپ از تغییر متغیر $u = 1+tgx$ استفاده می‌کنیم:

$$1+tgx = u \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}dx = du \Rightarrow (\sec x)^2 dx = du$$

$$I = \int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Rightarrow I = -\frac{1}{1+tgx} = -\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = -\frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

۳۱ـ گزینه «۳» صورت و مخرج کسر زیر انتگرال را در e^x ضرب می‌کنیم:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_0^\infty \frac{\overbrace{e^x dx}^{du}}{1+\underbrace{(e^x)}_{u}{}^2} = \mathrm{Arctg}e^x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۳۲ـ گزینه «۱» $-\mathrm{Ln}x = u \Rightarrow -\frac{dx}{x} = du \Rightarrow dx = -xdu$, $-\mathrm{Ln}x = u \Rightarrow x = e^{-u}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\mathrm{Ln}x}} = \int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \int_0^{+\infty} e^{-u}.u^{-\frac{1}{2}}du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

۳۳ـ گزینه «۱» تابع مقابل انتگرال، تابعی فرد می‌باشد، پس انتگرال موردنظر برابر صفر است.

۳۴ـ گزینه «۴» $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\int_2^x \sqrt{20-t^4}dt}{x-2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 2}\frac{\int_2^x \sqrt{20-t^4}dt + x\sqrt{20-x^4}}{1} = 4$

۳۵ـ گزینه «۴» $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h} e^{-x^2}dx}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-(1+h)^2}\times 1}{1} = e^{-1}$

۳۶ـ گزینه «۲» از رابطه $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}xdx = \frac{1}{2}\beta(m,n)$ استفاده می‌کنیم.

$$2m-1=5 \Rightarrow m=3 \ , \ 2n-1=5 \Rightarrow n=3$$

بنابراین: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^5 x.dx = \frac{1}{2}\beta(3,3) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(3+3)} = \frac{1}{2}\times\frac{2\times 2}{5!} = \frac{1}{60}$

۳۷ـ گزینه «۴» به حل تست (۲) مراجعه کنید.

۳۸ـ گزینه «۳» تابع g معکوس تابع f می‌باشد، بنابراین :

$$f(g(x)) = x \Rightarrow g'(x)f'(g(x)) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \Rightarrow g''(x) = \frac{-g'(x)f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

حال مقادیر f' و f'' را از رابطه داده شده به دست می‌آوریم: $f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \frac{-3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$

با جایگزینی روابط فوق در g'' خواهیم داشت: $g''(x) = -\frac{\frac{-3}{2}g^2(x)(1+g^3(x))^{\frac{-3}{2}}}{(1+g^3(x))^{\frac{-3}{2}}} = \frac{3}{2}g^2(x)$

۳۹ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $x = \frac{1}{\cos t}$ ، $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} = \int dt = t+c = \cos^{-1}(\frac{1}{x})+c = \sec^{-1}x+c$$

۴۰ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = 3\sin t$ ، $dx = 3\cos t dt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{9\sin^2 t\times 3\cos tdt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int 9\sin^2 tdt = \frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{9}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+c = \frac{9}{2}(\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9})+c$$

۴۱ـ گزینه «۱»

۴۲ـ گزینه «۴» مقدار انتگرال موردنظر را I_n فرض می‌کنیم. برای محاسبه I_n از روش جزبه‌جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = (Lnx)^n \Rightarrow du = n(Lnx)^{n-1}\dfrac{dx}{x} \\ du = dx \Rightarrow u = x \end{cases}$$

$$I_n = x(Lnx)^n \Big|_0^1 - \int n(Lnx)^{n-1}dx = -nI_{n-1}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $I_n = (-1)^n n! I_0$ و با توجه به اینکه $I_0 = 1$، بنابراین:

$$I_n = (-1)^n n!\times 1 = (-1)^n n!$$

۴۳ـ گزینه «۲» تابع $y = 2^{x^2}$ تابعی زوج و تابع $y = x$ تابعی فرد است و حاصل‌ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است، پس چون تابع زیر انتگرال فرد است لذا با توجه به متقارن بودن بازه انتگرال‌گیری مقدار انتگرال صفر است.

۴۴ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} u = x^2 + 2x^3 + 5 \Rightarrow du = (2x + 6x^2)dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = (x + 3x^2)dx \\ x = 1 \Rightarrow u = 8 , x = 2 \Rightarrow u = 25 \end{cases}$$

$$I = \int\frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_8^{25}\frac{du}{\sqrt{u}} = [\sqrt{u}]_8^{25} = 5 - 2\sqrt{2}$$

۴۵ـ گزینه «۴»

$$1+\sin\theta = u \Rightarrow \cos\theta d\theta = du$$

$$I = \int\frac{du}{u} = Lnu + c \Rightarrow f(\theta) = Ln(1+\sin\theta) + c \quad , \quad f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \boxed{f(\theta) = Ln(1+\sin\theta)}$$

۴۶ـ گزینه «۴»

$$\cos x = u \Rightarrow \begin{cases} -\sin xdx = du \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 , x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow u = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-du}{u^3} = \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{du}{u^3} = [-\frac{1}{2}u^{-2}]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2}[\frac{1}{u^2}]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{2}$$

۴۷ـ گزینه «۱»

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [Arc\sin(x-1)]_{\frac{1}{2}}^1 = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

۴۸ـ گزینه «۳»

روش اول:

$$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ انتگرال همگراست

از طرفی $1+\frac{1}{e} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ می‌باشد، لذا حد بالای انتگرال برابر $1+\frac{1}{e}$ است.

روش دوم: ابتدا توجه کنید که در فاصله $[0,1]$ ، $0 \le e^{-x^2} \le 1$. بنابراین:

$$0 < \int_0^1 e^{-x^2}dx \le \int_0^1 dx = 1$$

و در فاصله $[1,+\infty)$، $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$، بنابراین:

$$0 < \int_1^\infty e^{-x^2}dx \le \int_1^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{e}$$

از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست و مقدار آن از $1+\frac{1}{e}$ بزرگتر نیست.

۴۹ـ گزینه «۱»

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2xdx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{3}{2}Arc\sin x^2]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2}Arc\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

۵۰ـ گزینه «۱» به نظر می‌رسد منظور طراح از عدد $\frac{\pi}{4}$، عدد ۱ بوده است.

$$\begin{cases} u = Arctgx \to du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = xdx \to v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 xArctgxdx = \frac{x^2}{2}Arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx = \frac{\pi}{8} - (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}Arctgx)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

۵۱ـ گزینه «۲»

$$f(x) = \int_0^x e^{2t}\sqrt{1+9t^4}dt \Rightarrow f'(x) = e^{2x}\sqrt{1+9x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{e^{2x}\sqrt{1+9x^4}}{x^n e^{2x}}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^n} = \lim_{x\to\infty}3x^{2-n}$$

برای اینکه حد فوق برابر ۳ باشد، لازم است $2 - n = 0$، و یا $n = 2$.

۵۲ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\cos tdt}{x} = \frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{1} = 0$$

۵۳ـ گزینه «۱»

$$\int_0^{+\infty}e^{-mx}dx = \frac{-1}{m}e^{-mx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{m}$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dm}\int_0^{+\infty}e^{-mx}dx = \frac{d}{dm}(\frac{1}{m}) = \frac{-1}{m^2}$$

۵۴ـ گزینه «۳» از روش انتگرال‌گیری جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = 2^x \Rightarrow du = 2^x Ln2 \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_1^2\frac{2^x}{x^2}dx = -\frac{2^x}{Ln2}\Big|_1^2 + Ln2\int_1^2\frac{2^x}{x}dx = ALn2$$

۵۵ـ گزینه «۲»

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1}\,dx - \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1 - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{5}\times 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\times 2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$$

۵۶ـ گزینه «۲»

$$\int_0^2 \frac{x^2+1}{x+1}dx = \int_0^2 (x-1+\frac{2}{x+1})dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\mathrm{Ln}(x+1)\Big]_0^2 = 2\mathrm{Ln}3$$

۵۷ـ گزینه «۳»

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}} + c$$

بنابراین:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

۵۸ـ گزینه «۳»

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$$

۵۹ـ گزینه «۳»

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}} + c$$

بنابراین:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

۶۰ـ گزینه «۴»

	مشتق	انتگرال
$+$	x^2	e^x
$-$	$2x$	e^x
$+$	2	e^x
$-$	0	e^x

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2e^x dx = (x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)\Big|_0^1 = e-2$$

۶۱ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $x = \pi - t$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt) = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t dt}{1+\cos^2 t} - \underbrace{\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt}_{I} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

برای حل انتگرال اخیر از تغییر متغیر $u = \cos t$ ، $du = -\sin t dt$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\mathrm{Arctg}u\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

۶۲ـ گزینه «۴» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$dv = xe^{-x^2}dx \ , \ v = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{-x}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

۶۳ـ گزینه «۱»

$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \sin(tx^2)dx = \sin t^5 \times 2t + \int_0^{t^2} \frac{\partial}{\partial t}(\sin tx^2)dx = 2t\sin t^5 + \int_0^{t^2} x^2\cos(tx^2)dx$$

۶۴ـ گزینه «۳»

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-3} = \int_2^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^4 \frac{dx}{x-3}$$

و چون $\int_3^4 \frac{dx}{x-3}$ و $\int_2^3 \frac{dx}{x-3}$ واگرا می باشند. پس انتگرال داده شده نیز واگراست.

۶۵ـ گزینه «۳»

$$\int_0^1 (3x+1)d(x^2-1) = \int_0^1 (3x+1)2xdx = \int_0^1 (6x^2+2x)dx = (2x^3+x^2)\Big|_0^1 = 3$$

۶۶ـ گزینه «۴» تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ ، تابع فرد می‌باشد و بنابراین انتگرال خواسته شده برابر صفر است.

۶۷ـ گزینه «۱»

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^6 x dx = (\frac{1}{5}tg^5x - \frac{1}{3}tg^3x + tgx - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

۶۸ـ گزینه «۱»

$$I = \int_1^\infty (\frac{cx}{2x^2+1} - \frac{1}{x+1})dx = (\frac{c}{4}\mathrm{Ln}(2x^2+1) - \mathrm{Ln}(x+1))\Big|_1^\infty = \mathrm{Ln}\frac{(2x^2+1)^{\frac{c}{4}}}{x+1}\Big|_1^\infty$$

برای همگرایی لازم است صورت و مخرج هم‌درجه باشند، یعنی $c = 2$.

۶۹ـ گزینه «۴»

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2g(t)dt \Rightarrow f'(x) = (x-x)^2g(x) + \int_0^x 2(x-t)g(t)dt = \int_0^x 2(x-t)g(t)dt$$

$$f''(x) = 2(x-x)g(x) + \int_0^x 2g(t)dt = 2\int_0^x g(t)dt \Rightarrow f''(1) = 2\int_0^1 g(t)dt = 2$$

۷۰ـ گزینه «۳» با توجه به جدول مقابل نتیجه می‌شود:

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x^2	$\sin x$
$\ominus$	$2x$	$-\cos x$
$\oplus$	2	$-\sin x$
$\ominus$	0	$\cos x$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

۷۱ـ گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $x = \sin\theta$ ، $dx = \cos d\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{\cot g\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta(1+\sin^2\theta)} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \mathrm{Ln}|x| - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2) + c = \mathrm{Ln}|\sin\theta| - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+\sin^2\theta) + c$$

۷۲ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = u^4$ ، $dx = 4u^3du$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \int\frac{4u^5}{1+u}du = 4\int(u^4-u^3+u^2-u+1-\frac{1}{u+1})du$$

$$=\frac{4}{5}u^5-u^4+\frac{4}{3}u^3-2u^2+4u-4Ln(u+1)+c=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4Ln(1+x^{\frac{1}{4}})+c$$

۷۳ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\int\frac{x^2}{x^6+64}dx = \int\frac{x^2dx}{(x^3)^2+8^2} = \int\frac{\frac{1}{3}du}{u^2+8^2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}Arctg\frac{u}{8} = \frac{1}{24}Arctg\frac{x^3}{8}$$

$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx$

بنابراین:

$$\int_0^2\frac{x^2}{x^6+64}dx = \frac{1}{24}Arctg\frac{x^3}{8}\Big]_0^2 = \frac{1}{24}Arctg1 = \frac{\pi}{96}$$

۷۴ـ گزینه «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x]\cos xdx = \int_0^1 0dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx = \sin x\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = 1-\sin 1$$

۷۵ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = u^2$ ، $dx = 2udu$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}2u\sin u\,du = (-2u\cos u+2\sin u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۷۶ـ گزینه «۲»

$$I = \lim_{x\to\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}\overset{HOP}{=\!=}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

۷۷ـ گزینه «۳»

$$1+\cos x = u \Rightarrow -\sin xdx = du \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 2 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_2^1 -\sqrt{u}du = \int_1^2\sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

۷۸ـ گزینه «۲»

$$\int_4^6\frac{dx}{9-x^2} = -\int_4^6\frac{dx}{x^2-(3)^2} = -\frac{1}{2\times3}Ln\frac{x-3}{x+3}\Big|_4^6 = [\frac{1}{6}Ln\frac{x+3}{x-3}]_4^6 = \frac{1}{6}[Ln\frac{9}{3}-Ln7] = \frac{1}{6}[Ln3-Ln7] = \frac{1}{6}Ln\frac{3}{7} = -\frac{1}{6}Ln\frac{7}{3}$$

۷۹ـ گزینه «۲»

$$\int_{-1}^2(x+|x|)dx = \int_{-1}^2 xdx + \int_{-1}^2|x|dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^2 xdx = \frac{4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^0+\frac{x^2}{2}\Big|_1^0 = \frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2} = 4$$

۸۰ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta.tg\theta d\theta \\ x = -2 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}\ ,\ x = -1 \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}(\sec\theta.tg\theta.d\theta) = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{tg^2\theta}.tg\theta.d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}|tg\theta|.tg\theta.d\theta$$

چون θ در ربع دوم قرار دارد لذا $tg\theta < 0$ خواهد بود:

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-tg^2\theta d\theta = (\theta-tg\theta)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = (\pi-0)-(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

۸۱ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = 1-2x$, $du = -2dx$ ، استفاده می‌کنیم.

$$\int f(1-2x)dx = \int\frac{-1}{2}f(u)du = \frac{-1}{2}\int f(u)du = \frac{-1}{2}F(u) = \frac{-1}{2}F(1-2x)$$

۸۲ـ گزینه «۴»

$$\int_1^\infty e^{-x^2+2x}dx = e\int_0^\infty e^{-(x-1)^2}dx = e\int_0^\infty e^{-u^2}du = e\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۸۳ـ گزینه «۱»

$$f(x) = \int_{3x}^{2x^2+3}\sqrt{\cos t}dt \Rightarrow f'(x) = 4x\sqrt{\cos(2x^2+3)}-3\sqrt{\cos 3x} \Rightarrow f'(0) = -3$$

۸۴ـ گزینه «۲»

$$f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^x\frac{2+e^{-t}}{1+tg^2t}dt = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (f'^{-1})(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x) = \frac{2+e^{-x}}{1+tg^2x} \Rightarrow f'(0) = 3 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{3}$$

۸۵ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = Sint$ استفاده می‌کنیم، در اینصورت $dx = Cost\,dt$. و وقتی $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $0 < t < \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin^2tCos^2t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-Cos4t}{2}dt = \frac{1}{4}(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}Sin4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

۸۶ـ گزینه «۴»

$$\int_2^5\frac{dx}{x^2+x} = \int_2^5\frac{dx}{x(x+1)} = Ln\frac{x}{x+1}\Big|_2^5 = Ln\frac{5}{6}-Ln\frac{2}{3} = Ln\frac{15}{12} = Ln\frac{5}{4}$$

۸۷ـ گزینه «۳»

$$\int_e^{e^3}\frac{dx}{x} = Lnx\Big|_e^{e^3} = Lne^3-Lne = 2$$

۸۸ـ گزینه «۳»

$$\int_{-1}^2(x-1)(2x+3)dx = \int_{-1}^2(2x^2+x-3)dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-3x\Big|_{-1}^2 = \frac{-3}{2}$$

۸۹ـ گزینه «۴»

$$\int_{-1}^2\frac{xdx}{x+2} = \int_{-1}^2\frac{(x+2)-2}{x+2}dx = \int_{-1}^2(1-\frac{2}{x+2})dx = (x-2Ln(x+2))\Big|_{-1}^2 = 3-4Ln2$$

۹۰ـ گزینه «۲»

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\mathrm{Ln}^2x}=\frac{-1}{\mathrm{Ln}x}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{Ln}2}$$

۹۱ـ گزینه «۱»

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+x\mathrm{tg}x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos xdx}{\cos x+x\sin x}=\mathrm{Ln}(\cos x+x\sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{Ln}\frac{\pi}{2}$$

۹۲ـ گزینه «۲»

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_{0}^{x}\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$$

اگر $b\neq 1$ باشد حاصل حد برابر صفر خواهد بود که خلاف فرض است. بنابراین $b=1$.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a}}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

پس $1=\frac{2}{\sqrt{a}}$، و در نتیجه $a=4$.

۹۳ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\sin(t^2x^2)dt}{x^5}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4+\int_{0}^{x}2t^2x\cos(t^2x^2)dt}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^4}{5x^4}+\frac{2}{5}\times\frac{\int_{0}^{x}t^2\cos(t^2x^2)dt}{x^3}\right)\overset{\text{HOP}}{=\!=}\frac{1}{5}+\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\times\frac{x^2\cos x^4-\int_{0}^{x}2t^4x\sin(t^2x^2)dt}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{5}+\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\times\left(\frac{\cos x^2}{3}-\frac{\int_{0}^{x}2t^4\sin(t^2x^2)dt}{3x}\right)=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}-\frac{4}{15}\times\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}t^4\sin(t^2x^2)dt}{x}$$

$$\overset{\text{HOP}}{=\!=}=\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin x^4-\int_{0}^{x}2xt^6\cos(t^2x^2)dt}{1}=\frac{1}{3}$$

۹۴ـ گزینه «۲» اگر مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t را $x(t)$ فرض کنیم، با توجه به فرضیات مسأله به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dx}{dt}=10-\frac{2}{3}x\Rightarrow x(t)=15+ce^{\frac{-2}{3}t}$$

حال اگر $t\to+\infty$، مقدار ماده تقریباً ۱۵ گرم خواهد بود.

۹۵ـ گزینه «۱» از رابطه $|f'(x)|\le 1$ نتیجه می‌شود:

$$-1\le f'(x)\le 1\Rightarrow\int_{0}^{1}-1dx\le\int_{0}^{1}f'(x)dx\le\int_{0}^{1}1dx\Rightarrow -1\le f(1)-f(0)\le 1$$

$$-1\le f'(x)\le 1\Rightarrow\int_{1}^{0}-1dx\le\int_{-1}^{0}f'(x)dx\le\int_{0}^{1}1dx\Rightarrow -1\le f(0)-f(-1)\le 1$$

از دو رابطه فوق نتیجه می‌شود $0\le f(0)\le 2$ و $-2\le f(0)\le 0$، بنابراین $f(0)=0$.

۹۶ـ گزینه «۴»

$$2+\sin x=u\Rightarrow\begin{cases}\cos xdx=du\\ x=0\Rightarrow u=2\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=3\end{cases}$$

$$I=\int_{2}^{3}\sqrt{u}.du=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{3}=\frac{2}{3}\left[\sqrt{3^3}-\sqrt{2^3}\right]=\frac{2}{3}\left[3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right]$$

۹۷ـ گزینه «۳» انتگرال زیر باید به خاطر سپرده شود و می‌توان از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء به این نتیجه رسید.

$$\boxed{\int \mathrm{Ln}u.du=u\mathrm{Ln}u-u}$$

$$\int_{0}^{1}\mathrm{Ln}(1+x)dx=\left[(1+x)\mathrm{Ln}(1+x)-(1+x)\right]_{0}^{1}=2\mathrm{Ln}2-2-(-1)=2\mathrm{Ln}2-1$$

۹۸ـ گزینه «۲»

$$I=\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctg}\frac{x}{2}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}(\infty)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

۹۹ـ گزینه «۱» انتگرال فوق تابع گاما به ازای $x=4$ می‌باشد، بنابراین:

$$\int_{0}^{+\infty}x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

۱۰۰ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\sin t^4dt}{2x^5}\overset{\text{HOP}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{10x^4}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{10x^4}=\frac{1}{10}$$

۱۰۱ـ گزینه «۳»

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\mathrm{Ln}\frac{x}{x+1}\Big|_{1}^{\infty}=\mathrm{Ln}1-\mathrm{Ln}\frac{1}{2}=\mathrm{Ln}2$$

۱۰۲ـ گزینه «۱»

$f'(x)=\frac{1}{3+x^2}\times 1-\frac{1}{3+(-x)^2}\times(-1)=\frac{2}{3+x^2}>0\Rightarrow$ f اکیداً صعودی

۱۰۳ـ گزینه «۲»

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\int_{0}^{b}e^{x^2-b^2}(x^2+1)dx}{b}=\lim_{b\to\infty}\frac{\int_{0}^{b}e^{x^2}(x^2+1)dx}{be^{b^2}}\overset{\text{HOP}}{=\!=}\lim_{b\to\infty}\frac{e^{b^2}(b^2+1)}{e^{b^2}(1+2b^2)}=\frac{1}{2}$$

۱۰۴ـ گزینه «۲» ابتدا انتگرال را به شکل روبرو می‌نویسیم:

$$A=\int_{1}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_{1}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{2^2-(2-x)^2}}$$

حال از تغییر متغیر $u=2-x$ ، $dx=-du$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\int_{1}^{-1}\frac{(2-u)(-du)}{\sqrt{2^2-u^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{2-u}{\sqrt{2^2-u^2}}du=\int_{-1}^{1}\frac{2du}{\sqrt{2^2-u^2}}+\int_{-1}^{1}\frac{-udu}{\sqrt{2^2-u^2}}$$

انتگرال دوم برابر صفر است، زیرا تابع $\frac{-u}{\sqrt{2^2-u^2}}$ فرد می‌باشد، بنابراین:

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{2du}{\sqrt{2^2-u^2}}=2\mathrm{Arcsin}\frac{u}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\pi}{3}$$

۱۰۵ـ گزینه «۳»

$$\int_{\mathrm{Ln}3}^{\mathrm{Ln}8}e^x\sqrt{1+e^x}\,dx=\frac{2}{3}(1+e^x)\sqrt{1+e^x}\Big]_{\mathrm{Ln}3}^{\mathrm{Ln}8}=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

۱۰۶ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = tgt$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $dx = (1+tg^2t)dt$ و انتگرال داده شده بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tg^4t}(1+tg^2t)dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cost}{Sin^4t}dt = \frac{-1}{3Sin^3t}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$$

۱۰۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int_2^3 \frac{x^2+(1-x^2)}{x^2(1-x^2)}dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left(-\frac{1}{2}Ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\Big]_2^3 = -\frac{1}{2}Ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Ln\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

۱۰۸ـ گزینه «۲» کافی است از گزینه‌ها مشتق بگیرید.

۱۰۹ـ گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = Lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 xLnx\,dx = \frac{x^2}{2}Lnx\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}dx = 0 - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{-1}{4}$$

۱۱۰ـ گزینه «۲»

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right)\Big]_0^{2\pi}$$

واضح است که اگر m و n اعداد صحیح و نامساوی باشند حاصل عبارت فوق برابر صفر خواهد بود.

۱۱۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = xe^x \Rightarrow du = (e^x+xe^x)dx \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

$$f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{-xe^x}{x+1} + \int e^x dx = \frac{-xe^x}{x+1}+e^x+c = \frac{e^x}{x+1}+c$$

از $f(0)=1$ نتیجه می‌شود که $c=0$، بنابراین $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

۱۱۲ـ گزینه «۳» ابتدا نشان می‌دهیم I همگرای مطلق است. در فاصله $[0,+\infty)$، داریم $\left|\frac{\sin x}{(1+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$ و چون $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ همگراست، پس I همگرای مطلق است.

حال ثابت می‌کنیم J همگراست. بدین منظور برای محاسبه J از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2} = 0 + I = I$$

پس J همگراست. ولی نشان می‌دهیم که $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ واگراست. بدین منظور توجه کنید که: $\left|\frac{\cos x}{1+x}\right| \geq \frac{\cos^2x}{1+x} = \frac{1-\cos 2x}{2(1+x)}$

و انتگرال

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \left|\frac{\cos 2x}{2(1+x)}dx\right.$$

واگراست (زیرا $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{2(1+x)}dx$ همگراست و $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ واگراست). پس $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ نیز واگراست

۱۱۳ـ گزینه «۱»

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx = \int_1^2 \frac{x+2-1}{\sqrt{x+2}}dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)dx = \left(\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

۱۱۴ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده، تبدیل لاپلاس تابع $\cos t$ می‌باشد.

۱۱۵ـ گزینه «۴»

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{u^2-u} = 2\int\frac{du}{u-1} = 2Ln|u-1|+c = 2Ln|\sqrt{x}-1|+c$$

۱۱۶ـ گزینه «۳»

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin tx}{x}dx \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \cos tx\,dx = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{\sin tx}{t}\Big|_0^t = \frac{2\sin t^2}{t}$$

۱۱۷ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x^2+2x-8} = \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$$

چون مخرج کسر عبارت انتگرال به ازای $x = 2$ صفر می‌شود و این ریشه در فاصله $[0,4]$ قرار دارد بنابراین انتگرال داده شده ناسره می‌باشد و چون در همسایگی $x = 2$ داریم. $x^2+2x-8 = (x-2)(x+4) \sim 6(x-2)$

بنابراین در همسایگی $x = 2$ عبارت مقابل انتگرال معادل $\frac{1}{6(x-2)}$ می‌باشد و چون این انتگرال واگراست. پس انتگرال داده شده نیز واگراست.

۱۱۸ـ گزینه «۲»

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx)}{x}dx \Rightarrow f'(t) = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \cos x\,dx = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{1}{t}\sin(tx)\Big|_0^t = \frac{2\sin t^2}{t}$$

۱۱۹ـ گزینه «۲»

$$\int_0^\infty \frac{dx}{chx} = \int_0^\infty \frac{2dx}{e^x+e^{-x}} = 2\int_0^\infty \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1} = 2Arctge^x\Big|_0^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

۱۲۰ـ گزینه «۴»

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^{+\infty}\frac{2e^x}{(e^x)^2+1}dx = 2Arctge^x\Big]_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

۱۲۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$F(x) = x\int_4^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}} \Rightarrow F(2) = 0$$

$$F'(x) = \int_4^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}} + x \times \frac{2x}{\sqrt{x^6-7x^2}} \Rightarrow F'(2) = \frac{4}{3}$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه $x = 2$ به صورت روبرو در می‌آید:

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$

در محل تقاطع با محور y ها داریم $x = 0$، و در نتیجه $y = \frac{-8}{3}$.

۱۲۲ـ گزینه «۱» شیب منحنی همان مشتق منحنی می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{(1+x)(1+y)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y}}=\sqrt{1+x}\,dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق به دست می‌آید:

$$2\sqrt{1+y}=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

و چون منحنی از $(-1,-1)$ عبور می‌کند لذا $c=0$. پس معادله منحنی به شکل روبرو در می‌آید:

$$2\sqrt{y+1}=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

برای به دست آوردن محل تلاقی با محور y ها، x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x=0 \Rightarrow 2\sqrt{y+1}=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{-8}{9}$$

۱۲۳ـ گزینه «۳» چون $f(1)=0$، بنابراین:

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

۱۲۴ـ گزینه «۲»

$$I=\int\frac{\sin 2x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^3 x}dx=2\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin x=u \Rightarrow \cos x\,dx=du$$

$$I=2\int\frac{du}{u^2}=\frac{-2}{u}=-\frac{2}{\sin x} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin^3 x}=-\frac{2}{\sin x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-2-(-4)=2$$

۱۲۵ـ گزینه «۴»

$$\int[\operatorname{Arcsin}(2x)]\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\underbrace{\operatorname{Arcsin}2x}_{u}\underbrace{\left(\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}\right)}_{du}=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{4}u^2=\frac{1}{4}(\operatorname{Arcsin}2x)^2$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(\operatorname{Arcsin}2x)^2\right]_0^{\alpha}=\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\times(\operatorname{Arcsin}2\alpha)^2=\frac{1}{4}\times\left[\operatorname{Arcsin}\left(2\times\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$$

۱۲۶ـ گزینه «۱» با تغییر متغیر داریم:

$$u=1+\operatorname{Ln}x \Rightarrow \begin{cases}\frac{dx}{x}=du\ ,\ u-1=\operatorname{Ln}x\\ x=1\Rightarrow u=1+\operatorname{Ln}1=1\ ,\ x=e\Rightarrow u=2\end{cases}$$

$$I+\int_1^e\frac{\operatorname{Ln}x}{x(1+\operatorname{Ln}x)}dx=\int_1^2\frac{u-1}{u}(du)=\int_1^2\left(1-\frac{1}{u}\right)du=[u]_1^2-[\operatorname{Ln}u]_1^2=(2-1)-(\operatorname{Ln}2-\operatorname{Ln}1)=1-\operatorname{Ln}2$$

۱۲۷ـ گزینه «۴»

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^{\infty}\left(1-\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\right)dx=\left(x-\frac{1}{a}\operatorname{Ln}(1+e^{ax})\right)\Big]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{a}(ax-\operatorname{Ln}(1+e^{ax}))\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}\operatorname{Ln}\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{a}\operatorname{Ln}1-\frac{1}{a}\operatorname{Ln}\frac{1}{2}=\frac{1}{a}\operatorname{Ln}2$$

۱۲۸ـ گزینه «۲» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\cos(\operatorname{Ln}x)\Rightarrow du=\frac{-1}{x}\sin(\operatorname{Ln}x)\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$$

$$I=\int\cos(\operatorname{Ln}x)dx=x\cos(\operatorname{Ln}x)+\underbrace{\int\sin(\operatorname{Ln}x)dx}_{I'}$$

مجدداً برای محاسبه I' از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\sin(\operatorname{Ln}x)\Rightarrow du=\frac{1}{x}\cos(\operatorname{Ln}x)\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$$

$$I'=\int\sin(\operatorname{Ln}x)dx=x\sin(\operatorname{Ln}x)-\int\cos(\operatorname{Ln}x)dx=x\sin(\operatorname{Ln}x)-I$$

با جایگزینی مقدار به دست آمده برای I' در رابطه اولیه خواهیم داشت:

$$I=x\cos(\operatorname{Ln}x)+x\sin(\operatorname{Ln}x)-I \Rightarrow I=\frac{x}{2}(\sin(\operatorname{Ln}x)+\cos(\operatorname{Ln}x))$$

$$\Rightarrow \int_0^1\cos(\operatorname{Ln}x)dx=\frac{x}{2}(\sin(\operatorname{Ln}x)+\cos(\operatorname{Ln}x))\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}$$

۱۲۹ـ گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $u=e^x$، $dx=\frac{du}{u}$، خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{e^{2x}-4e^x+4}=\int\frac{du}{u(u^2-4u+4)}=\int\frac{du}{u(u-2)^2}$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{u(u-2)^2}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-2}+\frac{C}{(u-2)^2}$$

که از رابطه فوق $A=\frac{1}{4}$، $B=-\frac{1}{4}$ و $C=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

$$\int\frac{du}{u(u-2)^2}=\int\frac{\frac{1}{4}}{u}-\int\frac{\frac{1}{4}}{u-2}du+\int\frac{\frac{1}{2}}{(u-2)^2}du=\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|u|-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|u-2|-\frac{1}{2(u-2)}+c=\frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left|\frac{e^x}{e^x-2}\right|-\frac{1}{2(e^x-2)}+c$$

۱۳۰ـ گزینه «۱» از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\operatorname{Arctg}x\Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx\\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\int x^2\operatorname{Arctg}x\,dx=\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctg}x-\int\frac{x^3}{3(1+x^2)}dx=\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctg}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx=\frac{x^3}{x}\operatorname{Arctg}x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\operatorname{Ln}(1+x^2)+c$$

۱۳۱ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0$$

۱۳۲ـ گزینه «۲»

روش اول:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+h}e^{-t^2}dt-\int_1^x e^{-t^2}dt}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(x+h)^2}-0}{1}=e^{-x^2}$$

روش دوم: فرض کنید $F(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$، در این صورت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+h}e^{-t^2}dt-\int_1^x e^{-t^2}dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

حد اخیر همان $F'(x)$ می‌باشد.

$$F(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt \Rightarrow F'(x)=e^{-x^2}$$

۱۳۳ـ گزینه «۳»

$$x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{1+4y^2} \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{8y}{\underbrace{2\sqrt{1+4y^2}}_{2y'}}y'=4y \Rightarrow y''-4y=0$$

۱۳۴ـ گزینه «۴»

$$f(x)=\int_0^x (x-t)g(t)dt \Rightarrow f'(x)=(x-x)g(x)+\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)g(t)dt=\int_0^x g(t)dt$$

۱۳۵ـ گزینه «۳»

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-Ln(e^{-x}+1)\Big|_0^\infty=Ln2$$

۱۳۶ـ گزینه «۱»

$$u=tgx \Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x+y^2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tg^2x+y^2}=\frac{1}{y}Arctg(\frac{tgx}{2y})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2y}$$

۱۳۷ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=10^t$، $dx=10^t Ln10\,dt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت انتگرال به فرم زیر در می‌آید:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\log x}=\int_0^{\log_{10}^2} \frac{10^t Ln10\,dt}{t} \geq \int_0^{\log_{10}^2} \frac{dt}{t}=Lnt\Big|_0^{\log_{10}^2} \Rightarrow$$ واگرا

۱۳۸ـ گزینه «۴» مشتق تابع $y=g(x^2)$ برابر $y'=2xg'(x^2)$ می‌باشد، بنابراین:

$$y'=2xg'(x^2)=2x.x^3=2x^4 \xrightarrow{\text{انتگرال}} y=g(x^2)=\frac{2}{5}x^5+c$$

از $g(1)=1$ نتیجه می‌شود $C=\frac{3}{5}$. بنابراین $g(x^2)=\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{5}$. با قرار دادن $x=2$ نتیجه می‌شود $g(4)=\frac{67}{5}$.

۱۳۹ـ گزینه «۲»

$$f'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x 2(x-t)g(t)dt=\int_0^x (x-t)g(t)dt$$

$$f''(x)=\int_0^x g(t)dt \Rightarrow f''(1)=\int_0^1 g(t)dt=2$$

۱۴۰ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt}{x} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}}{1}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

۱۴۱ـ گزینه «۴»

$$f(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt \Rightarrow f'(x)=xf(x^2)\times 2x+\int_0^{x^2} f(t)dt$$

۱۴۲ـ گزینه «۴»

$$\int_0^1 x^2f'''(x)dx=(x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x))\Big|_0^1=f''(1)-2f'(1)+2f(1)-2f(0)=-15$$

مشتق	انتگرال
$\oplus\ x^2$	$f'''(x)$
$\ominus\ 2x$	$f''(x)$
$\oplus\ 2$	$f'(x)$
$\ominus\ 0$	$f(x)$

۱۴۳ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $x=u^2$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $dx=2udu$، بنابراین:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}=\int_2^3 \frac{2u^2du}{u-1}=\int_2^3 (2u+2+\frac{2}{u-1})du=u^2+2u+2Ln(u-1)\Big|_2^3=7+2Ln2$$

۱۴۴ـ گزینه «۴» از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

از ضرب کردن طرفین رابطه در $x(x^2+4)$ به دست می‌آید:

$$A(x^2+4)+x(Bx+C)=x+4 \Rightarrow A=1\ ,B=-1\ ,\ C=1$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x+1}{x^2+4}dx=Lnx-\frac{1}{2}Ln(x^2+4)+\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+C$$

۱۴۵ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $u=\sqrt{x+1}$، $x=u^2-1$ و $dx=2udu$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}dx=\int\frac{2u^2du}{2-u^2}du=\int\frac{(2u^2-4)+4}{2-u^2}du=\int(-2+\frac{4}{2-u^2})du$$

$$=\int-2du-4\int\frac{du}{u^2-2}=-2u-\frac{4}{2\sqrt{2}}Ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+c=-2\sqrt{1+x}+\sqrt{2}Ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right|+c$$

۱۴۶ـ گزینه «۴»

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{2}\ ,\ f(1)=0$$

بنابراین:

$$y=x^2f(x) \Rightarrow y'=2xf(x)+x^2f'(x) \Rightarrow y'(1)=2f(1)+f'(1)=\frac{-1}{2}$$

۱۴۷ـ گزینه «۳»

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

۱۴۸ـ گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=Lnx$، $du=\frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود.

$$f(x)=\int\frac{dx}{xLnx}=\int\frac{du}{u}=Lnu+c=Ln(Lnx)+c$$

بنابراین:

$$f(e^2)-f(e)=Ln(Lne^2)-Ln(Lne)=Ln2$$

۱۴۹ـ گزینه «۱»

$$I=\int_0^\infty (\frac{x^2}{1+x^4}-\frac{1}{1+x^4})dx=\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}-\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

برای محاسبه انتگرال دوم یعنی $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$، از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$، $dx=\frac{-1}{t^2}dt$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\int_\infty^0 \frac{\frac{-1}{t^2}dt}{1+(\frac{1}{t})^4}=\int_0^\infty \frac{t^2dt}{1+t^4}$$

با جایگزینی رابطه اخیر در I خواهیم داشت:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx-\int_0^\infty \frac{t^2dt}{1+t^4}=0$$

۱۵۰ـ گزینه «۴» انتگرال مورد نظر برابر $\Gamma(6)$ می‌باشد.

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x}dx=\Gamma(7)=6!=720$$

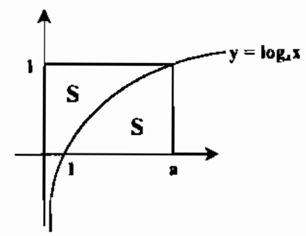
۱۵۱ـ گزینه «۳»

$$F'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}\ ,\ F'(x)=0\Rightarrow 2e^{-4x^2}=e^{-x^2}\Rightarrow e^{3x^2}=2\Rightarrow 3x^2=\mathrm{Ln}2\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{Ln}2}$$

۱۵۲ـ گزینه «۳»

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{Arcsin}\,x\Big|_{-1}^{1}=\pi$$

۱۵۳ـ گزینه «۱»



روش اول:

$$I=\int_1^a \log_a x dx+\int_1^a a^y dy=\frac{1}{\mathrm{Lna}}(x\mathrm{Ln}x-x)\Big|_1^a+\frac{1}{\mathrm{Lna}}a^y\Big|_0^1=a$$

روش دوم: انتگرالهای داده شده به ترتیب برابر S_1 و S_2 می‌باشند و چون $S_1+S_2=a$، پس $I=a$.

۱۵۴ـ گزینه «۲»

۱۵۵ـ گزینه «۳»

۱۵۶ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $x=\sin t$، $dx=\cos tdt$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^1\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}.\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 tdt$$

برای محاسبه انتگرال اخیر می‌توانیم از تابع بتا استفاده کنیم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 tdt=\frac{1}{2}\beta(3,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}=\frac{1}{2}.\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{4}{15}$$

۱۵۷ـ گزینه «۳» انتگرال داده شده در 0 ناسره می‌باشد. وقتی $x\to 0$ داریم $\sin^m x\sim x^m$، بنابراین انتگرال به صورت $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{n-m}}$ در می‌آید. و بنابراین برای همگرایی لازم است $n-m<1$ یا $n<m+1$.

۱۵۸ـ گزینه «۲»

$$f(x)=\int_2^{x^2}\frac{dx}{1+t^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+(x^2)^3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{9}$$

۱۵۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$f(x)=0\Rightarrow\int_1^{\mathrm{Ln}x}\sqrt{1+e^t}dt=0\Rightarrow \mathrm{Ln}x=1\Rightarrow x=e$$

$$f(x)=\int_1^{\mathrm{Ln}x}\sqrt{1+e^t}dt\Rightarrow f'(x)=\sqrt{1+e^{\mathrm{Ln}x}}\times\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1+x}}{x}\Rightarrow f'(e)=\frac{\sqrt{1+e}}{e}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\times x-\sqrt{1+x}}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-x-2}{2x^2\sqrt{1+x}}\Rightarrow f''(e)=\frac{-e-2}{2e^2\sqrt{1+e}}$$

$$(f^{-1})''(0)=-\frac{f''(e)}{(f'(e))^3}=\frac{e(e+2)}{2(1+e)^2}$$

۱۶۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{t^3}\sin tdt}{x^3}\overset{\mathrm{HOP}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^6}\sin x^2\times 2x}{3x^2}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^6}\times 2x^3}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}xe^{x^6}=0$$

۱۶۱ـ گزینه «۳» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$6x^2f(x^3+1)f'(x^3+1)=\frac{f(x^3+1)}{(x^3+2)^2}\times 3x^2\ \Rightarrow f'(x^3+1)=\frac{1}{2(x^3+2)^2}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه اخیر در $3x^2$ خواهیم داشت:

$$3x^2f'(x^3+1)=\frac{3x^2}{2(x^3+2)^2}\ \Rightarrow\int 3x^2f'(x^3+1)dx=\int\frac{3x^2}{2(x^3+2)^2}dx\ \Rightarrow f(x^3+1)=\frac{-1}{2(x^3+2)}+c$$

$$\Rightarrow f(x^3+1)=\frac{-1}{2((x^3+1)+1)}+c\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

روش دوم: در رابطه داده شده قرار می‌دهیم $u=x^3+1$، و سپس طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$f^2(u)=\int_0^u\frac{f(t)}{(t+1)^2}dt\ \Rightarrow 2f(u)f'(u)=\frac{f(u)}{(u+1)^2}dt\Rightarrow f'(u)=\frac{1}{2(u+1)^2}\ \Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

۱۶۲ـ گزینه «۲»

۱۶۳ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $u=y^3+3y+5$، $du=3(y^2+1)dy$ استفاده می‌کنیم:

$$\int_1^4\frac{(y^2+1)dy}{\sqrt{y^3+3y+5}}=\frac{1}{3}\int_9^{81}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}\sqrt{u}\Big|_9^{81}=4$$

۱۶۴ـ گزینه «۱»

$$\int_1^a\frac{\log_a x^2}{x}dx=\frac{2}{\mathrm{Lna}}\int_1^a\frac{\mathrm{Ln}x}{x}dx=\frac{2}{\mathrm{Lna}}\times(\mathrm{Ln}x)^2\Big|_1^a=2\mathrm{Lna}$$

۱۶۵ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با دو بار استفاده از روش جز به جز می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_1^e\cos(\mathrm{Ln}x)dx=\frac{x}{2}(\sin(\mathrm{Ln}x)+\cos(\mathrm{Ln}x))\Big|_1^e=\frac{e}{2}(\sin 1+\cos 1)-\frac{1}{2}$$

۱۶۶ـ گزینه «۴»

۱۶۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$x+6=u^2\ \Rightarrow dx=2udu$$

$$F(x)=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+6}}=\int\frac{2udu}{(u^2-5)u}=2\int\frac{du}{u^2-5}=\frac{1}{\sqrt5}\mathrm{Ln}\frac{u-\sqrt5}{u+\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\mathrm{Ln}\frac{x+6-\sqrt5}{x+6+\sqrt5}$$

$$F(30)-F(3)=\frac{1}{\sqrt5}\mathrm{Ln}\frac{36-\sqrt5}{36+\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\mathrm{Ln}\frac{9-\sqrt5}{9+\sqrt5}$$

۱۶۸ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_3^4\frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx=\mathrm{Ln}(x^2-3x+2)\Big|_3^4=\mathrm{Ln}6-\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}3$$

۱۶۹ـ گزینه «۴»

مشتق	انتگرال
$\oplus\ x^2$	$\cos x$
$\ominus\ 2x$	$\sin x$
$\oplus\ 2$	$-\cos x$
$\ominus\ 0$	$-\sin x$

$$\Rightarrow F(x)=\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$$

از $F(0)=0$، نتیجه می‌شود $c=0$. بنابراین $F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2$

۱۷۰ـ گزینه «۳»

۱۷۱ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx}=2x\sin x-\sin\sqrt{x}$$

۱۷۲ـ گزینه «۱»

$$f(x)=\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1+x}\Rightarrow Ax(1+x)+B(1+x)+Cx^2=1$$

از رابطه فوق $A=-1$ ، $B=1$ و $C=1$ به دست می‌آید. بنابراین :

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(-\mathrm{Ln}x-\frac{1}{x}+\mathrm{Ln}(1+x)\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\mathrm{Ln}3-\mathrm{Ln}4$$

۱۷۳ـ گزینه «۲»

$$u=xe^x\Rightarrow du=(e^x+xe^x)dx=(x+1)e^xdx$$

$$dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\Rightarrow v=\frac{-1}{x+1}$$

بنابراین:

$$f(x)=\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\frac{-xe^x}{x+1}+\int e^xdx=\frac{-xe^x}{x+1}+e^x+c=\frac{e^x}{x+1}+c$$

به ازای $c=-1$ نتیجه می‌شود $f(x)=\frac{e^x}{x+1}-1$، بنابراین $f(0)=0$.

۱۷۴ـ گزینه «۴»

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\int 6x\,dx=3x^2+c\Rightarrow y=\int(3x^2+c)dx=x^3+cx+d$$

چون طبق فرض منحنی فوق در $x=1$ بر خط $y=x-2$ مماس می‌باشد، بنابراین منحنی از نقطه $P(1,-1)$ عبور می‌کند و شیب آن در $x=1$ برابر شیب خط یعنی یک خواهد بود.

$$\begin{cases}1+c+d=-1\\3+c=1\Rightarrow c=-2\ ,\ d=0\end{cases}$$

۱۷۵ـ گزینه «۲»

$$\int_e^{e^3}\frac{dx}{x}=\mathrm{Ln}x\Big|_e^{e^3}=\mathrm{Ln}e^3-\mathrm{Ln}e=3-1=2$$

تست‌های تکمیلی فصل چهارم

۱ـ حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{Ln}\sin x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۴) $\frac{-(1+\sqrt{2})}{2}$

۲ـ حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ ۳) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ ۴) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

۳ـ حاصل $\int\frac{x}{\sqrt{x+5}}dx$ کدام است؟

۱) $c+\frac{2}{3}x\sqrt{x+5}$ ۲) $\frac{-20x}{3}\sqrt{x+5}+c$ ۳) $\frac{2x+20}{3}\sqrt{x+5}+c$ ۴) $\frac{2x-20}{3}\sqrt{x+5}+c$

۴ـ حاصل انتگرال گیری $I=\int\cos 4x\cos 7x\,dx$ کدام است؟

۱) $I=\frac{1}{6}(\sin 3x+\sin 11x)+c$
۲) $I=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+c$
۳) $I=\frac{1}{6}11x+\frac{1}{22}\sin 3x+c$
۴) $I=\frac{1}{22}(\sin 11x+\sin 3x)+c$

۵ـ حاصل انتگرال $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱

۶ـ حاصل $\int x^2e^xdx$ کدام است؟

۱) $e^x(x^2+2x-2)+c$ ۲) $e^x(x^2-2x+2)+c$ ۳) $e^x(x^2-2x-2)+c$ ۴) $e^x(x^2+2x+2)+c$

۷ـ حاصل $\int\frac{\sin(\mathrm{Ln}x)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $-\cos(\mathrm{Ln}x)+c$ ۲) $\sin(\mathrm{Ln}x)+c$ ۳) $\frac{1}{x}\cos(\mathrm{Ln}x)+c$ ۴) $-\frac{1}{x}\sin(\mathrm{Ln}x)+c$

۸ـ جواب انتگرال‌گیری $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ کدام است؟

۱) $-\mathrm{Arc}\sin\frac{x-2}{3}+c$ ۲) $\mathrm{Arc}\cos\frac{x+2}{3}+c$ ۳) $-\mathrm{Arc}\cos\frac{x-2}{3}+c$ ۴) $\mathrm{Arc}\sin\frac{x+2}{3}+c$

۹ـ حاصل انتگرال‌گیری $I=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ کدام است؟

۱) $I=\frac{1}{7}\cos^7 x+c$
۲) $I=\frac{1}{3}\sin^3 x+c$
۳) $I=\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+c$
۴) $I=\frac{1}{3}\tan^3 x+\sin^4 x+c$

۱۰ـ حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟

۱) $I=\mathrm{Arc}\sin(1-x)+c$ ۲) $I=\mathrm{Arc}\sin(x-1)+c$ ۳) $I=-\mathrm{Arc}\cos(1-x)+c$ ۴) $I=-\mathrm{Arc}\cos(x-1)+c$

۱۱ـ حاصل $\int_0^1 x\sinh x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $2e$ ۴) e^2

۱۲ـ حاصل $\int_0^1 Ln(x^2+1)dx$ کدام است؟

۱) $Ln2+2-\frac{\pi}{2}$ ۲) $Ln2-2+\frac{\pi}{2}$ ۳) $Ln2-2+\frac{\pi}{2}$ ۴) $Ln2+1-\frac{\pi}{2}$

۱۳ـ معادل کسر $y=\frac{2}{x(x+1)^2}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{2}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}$ ۲) $y=\frac{2}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$ ۳) $y=\frac{2}{x}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$ ۴) $y=\frac{2}{x}+\frac{2}{(x+1)^2}$

۱۴ـ حاصل انتگرال‌گیری $I=\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$ کدام است؟

۱) $I=\frac{1}{2}\text{Arc}\tan\frac{x-3}{2}+C$ ۲) $I=2\text{Arc}\tan(2x-6)+C$

۳) $I=\frac{1}{2}Ln\frac{x-3}{2}+C$ ۴) $I=\frac{1}{4}Ln(x-3+\sqrt{(x-3)^2+4})+C$

۱۵ـ حاصل انتگرال گیری $I=\int\tanh^2 x dx$ کدام است؟

۱) $I=x-\tanh x+c$ ۲) $I=\tanh x-x+c$ ۳) $I=\tanh x+x^2+c$ ۴) $I=\tanh x-x^2+c$

۱۶ـ حاصل انتگرال‌گیری $I=\int x2^{-x}dx$ کدام است؟

۱) $I=-\frac{xLn2+1}{2^{-x}Ln^2 2}+c$ ۲) $I=\frac{Ln2+1}{2^x Ln^2 2}+c$ ۳) $I=(x-2^{-x})Ln2+c$ ۴) $I=\frac{x^2 2^{-x}}{Ln2}+c$

۱۷ـ حاصل انتگرال گیری $I=\int_0^1\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ کدام است؟

۱) $\text{Arc}\tan e-\frac{\pi}{4}$ ۲) $\text{Arc}\tan e+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\text{Arc}\sin e-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{e}{1+e^2}+c$

۱۸ـ حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $-cotgx-\sec x+c$ ۲) $\tan x-\csc x+c$ ۳) $tgx+cotgx+c$ ۴) $tgx-cotgx+c$

۱۹ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۰ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۲۱ـ حاصل $\int x\sqrt{x-5}dx$ کدام است؟

۱) $I=30(x-5)^3+10(x-5)^5$ ۲) $I=\frac{2x}{2\sqrt{x-5}}$

۳) $I=\frac{10(x-5)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2(x-5)^{\frac{5}{2}}}{5}+c$ ۴) $I=\frac{3}{10}(x-5)^{\frac{2}{3}}-(x-5)^{\frac{5}{2}}+c$

۲۲ـ حاصل $I=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(1-e^{\pi})$ ۲) $\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$ ۳) $2(e^{2\pi}+1)$ ۴) $2(e^{2\pi}-1)$

۲۳ـ حاصل $I=\int_0^6(x-\lfloor x\rfloor)dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴ـ حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $I=Ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+c$ ۲) $I=-\frac{\cos x\sin^2 x}{2}+c$ ۳) $I=-Lntgx+c$ ۴) $I=-\frac{1}{\cos x}+c$

۲۵ـ حاصل انتگرال‌گیری $I=\int\cosh^2(8x+5)dx$ کدام است؟

۱) $I=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sinh(8x+10)+c$ ۲) $I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sinh(8x+10)+c$

۳) $I=\frac{x}{2}-\frac{1}{32}\sinh(16x+10)+c$ ۴) $I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{32}\sinh(16x+10)+c$

۲۶ـ حاصل $\int\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}dx$ برابر کدام است؟

۱) $x+\frac{x}{x-1}+c$ ۲) $x-\frac{2}{x-1}+c$ ۳) $x+\frac{2}{x-1}+c$ ۴) $x-\frac{x}{x-1}+c$

۲۷ـ حاصل $\int^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$ برابر کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲۸ـ حاصل $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x-5}$ کدام است؟

۱) $Ln(e^x-5)+e^x+c$ ۲) $2Ln(e^x-5)+e^x+c$ ۳) $5Ln(e^x-5)+e^x+c$ ۴) $\frac{1}{2}Ln(e^x-5)+e^x+c$

۲۹ـ اگر $F(x)=\int_2^x\frac{\sin t}{1+2t}dt$ باشد آنگاه $F'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1+\pi}$ ۲) $\frac{1+\pi}{2}$ ۳) $1+\frac{\pi}{2}$ ۴) $1+\pi$

۳۰ـ اگر $\int 2f'(ax-b)\,dx=f(ax+3)+c$ باشد مقدار $(a-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۵ ۴) ۵-

۳۱ـ حاصل $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(Lnx)^5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4Ln^4 2}$ ۲) $\frac{4}{Ln^4 2}$ ۳) $4Ln^4 2$ ۴) $\frac{1}{4}Ln^4 2$

۳۲ـ اگر $\int f(x)dx=\sqrt{x}+c$ آنگاه $\int\frac{1}{f(x)}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}}+c$ ۲) $\frac{x}{2\sqrt{x}}+c$ ۳) $\frac{1}{3x\sqrt{x}}+c$ ۴) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}+c$

۳۳ـ مقدار $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}Ln(\frac{1+x}{1-x})tg^4 x dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۴ـ حاصل $\int\frac{\cos x-\sin x}{2+\sin 2x}dx$ کدام است ؟

۱) $Arctg(\sin x-\cos x)+c$ ۲) $Arctg(\sin x+\cos x)+c$ ۳) $\frac{1}{\sin x+\cos x}+c$ ۴) $\frac{1}{\sin x-\cos x}+c$

۳۵ـ حاصل $I = \int^{\pi} |\cos x|\,dx$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۳۶ـ حاصل $I = \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ کدام است؟

۱) $\arctan x + c$ ۲) $\arctan(x+2)+c$ ۳) $\arctan(x+1)+c$ ۴) $\frac{1}{2}\arctan(x+1)+c$

۳۷ـ حاصل $I = \int 3^x e^x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3^x e^x}{Ln3}$ ۲) $\frac{3^x e^x}{Ln3+1}$ ۳) $\frac{c^x+1}{Ln3+1}$ ۴) $\frac{3^x+e^x}{Ln3}$

۳۸ـ حاصل $I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $Ln(\sin^2 x)+c$ ۲) $Ln(1+\sin^2 x)+c$ ۳) $\sin x Lnx + c$ ۴) $\cos Ln(1+\sin x)+c$

۳۹ـ حاصل $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $-(\frac{3x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\cot x+e)$ ۲) $\cot x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{3x}{2} + c$

۳) $\frac{\sin 2x}{4} - \cot x + c$ ۴) $\frac{\sin 2x}{4} + \cot x + \frac{3x}{2} + c$

۴۰ـ حاصل $I = \int \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $3\tan x + 2\cot x + c$ ۲) $2\tan x + 3\cot x + c$ ۳) $3\tan x + \cot x + c$ ۴) $\frac{\tan x + 3\cot x}{2x}+c$

۴۱ـ حاصل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\arcsin(\frac{3x}{2})}{3}+c$ ۲) $\frac{\arcsin 3x}{3}+c$ ۳) $\frac{1}{2}\arcsin 3x$ ۴) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3x}{2}$

۴۲ـ حاصل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ کدام است؟

۱) $\arcsin\frac{x+3}{3}+c$ ۲) $\arcsin\frac{x+3}{2}+c$ ۳) $\arcsin\frac{x+2}{3}+c$ ۴) $\arcsin\frac{x+2}{2}+c$

۴۳ـ حاصل $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{Ln5}5^{-x}+c$ ۲) $-\frac{2}{Ln5}5^{-x}+\frac{1}{5Ln2}2^{-x}+c$

۳) $\frac{1}{5Ln2}2^{-x}+c$ ۴) هیچکدام

۴۴ـ حاصل $I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^2}+c$ ۲) $-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{2}{2}}}{3a^2x^2}+c$ ۳) $\frac{a^2-x^2}{3a^2x^2}+c$ ۴) $-\frac{a^2-x^2}{3a^2x^2}$

۴۵ـ حاصل $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+Lnx}}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{(1+Lnx)^4}+c$ ۲) $0/25\sqrt[3]{(1+Lnx)^4}+c$ ۳) $0/5\sqrt[3]{(1+Lnx)^4}+c$ ۴) $0/75\sqrt[3]{(1+Lnx)^4}+c$

۴۶ـ حاصل $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) π

۴۷ـ حاصل $I = \int^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ کدام است؟

۱) $200\sqrt{2}$ ۲) 200 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $100\sqrt{2}$

۴۸ـ کدامیک از روابط زیر صحیح نیست؟

۱) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ ۲) $\int_{-a}^{a} \sin x f(\cos x)dx = 0$

۳) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -2$ ۴) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

۴۹ـ حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $\pi+2$ ۲) $\pi-2$ ۳) $2-\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}-1$

۵۰ـ حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$ کدام است؟

۱) $Ln3$ ۲) $\frac{1}{2}Ln3$ ۳) $\frac{1}{4}Ln3$ ۴) $\frac{1}{8}Ln3$

۵۱ـ کدامیک از روابط زیر صحیح نیست؟

۱) $\int_{-5}^{5}\frac{x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = 0$ ۲) $\int_{-a}^{a}\cos x f(x^2)dx = 2\int_0^a \cos x f(x^2)dx$

۳) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8 \sin^9 x\,dx = 0$ ۴) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\sin x}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin x}dx$

۵۲ـ طول نقطه ماکزیمم تابع با ضابطه $F(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)dt$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۵۳ـ مجموع طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع با ضابطه $F(x) = \int^{x^2}\frac{t^2-5t+4}{2+e^t}dx$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

۵۴ـ برای تابع ضمنی $\int^y e^t dt + \int^x \sin t\,dt = 0$ ، $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $-e^{-y}\sin x$ ۲) $e^y \sin x$ ۳) $e^{-y}\sin x$ ۴) $e^{-y}\cos x$

۵۵ـ حاصل $I = \int^1 \frac{x^3 dx}{1+x^8}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{16}$

۵۶ـ اگر $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ و $f(0) = \frac{2}{3}$، آنگاه $f(2)$ کدام است؟

۱) 3 ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) 2 ۴) 0

۵۷ـ اگر $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+1}} = A(x^4+1)^k + c$ ، آنگاه A کدام است ؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵۸ـ حاصل $\int (tg^2x + \cot g^2x)dx$ کدام است ؟

۱) $tgx - \cot gx - 2x + c$ ۲) $tgx + \cot gx + 2x + c$ ۳) $tgx - \cot gx - 2x + c$ ۴) $tgx + \cot gx - 2x + c$

۵۹ـ حاصل $I = \int |x|dx$ کدام است؟

۱) $x|x| + c$ ۲) $\frac{x|x|}{2} + c$ ۳) $\frac{|x|}{2x} + c$ ۴) $\frac{x^2}{2} + c$

۶۰ـ مقدار $I = \int_{-2}^{4} (x - \lfloor x \rfloor)dx$ کدام است ؟

۱) 3 ۲) 6 ۳) 2 ۴) $\frac{3}{2}$

۶۱ـ فرض کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,4)$ عبور می‌کند، مقدار $I = \int_1^3 f'(x)dx$ کدام است ؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 1 ۴) -1

۶۲ـ مقدار $I = \int_{-3}^{3} (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor)dx$ کدام است ؟ ($\lfloor \ \rfloor$، نماد جزء صحیح است)

۱) 0 ۲) 6 ۳) -6 ۴) 1

۶۳ـ اگر $F(x) = \int_{x^3}^{1383} \frac{dt}{t}$ ، آنگاه $F''(x)$ کدام است ؟

۱) $\frac{3}{x^2}$ ۲) $-\frac{3}{x}$ ۳) $\frac{1383}{x^2}$ ۴) $-\frac{1383}{x}$

۶۴ـ حاصل $\int^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2 - \sqrt{12}x + 6}} dx$ کدام است ؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 2 ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۵ـ حاصل انتگرال $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 3

۶۶ـ حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) 0 ۳) ∞ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۶۷ـ مجموع طولهای نقاط اکسترمم و عطف تابع $y = \int^x (t-1)(t-2)^2 dt$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) 0 ۴) $\frac{19}{3}$

۶۸ـ حاصل $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin nx\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{n}$ ۲) $\frac{3}{n}$ ۳) 0 ۴) $\frac{4}{n}$

۶۹ـ حاصل $I = \int Sin10x Sin15x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{Sin25x}{50} - \frac{Sin5x}{10} + c$ ۲) $\frac{Sin5x}{10} + \frac{Sin25x}{50} + c$ ۳) $-\frac{Sin25x}{50} - \frac{Sin5x}{10} + c$ ۴) $\frac{Sin5x}{10} - \frac{Sin25x}{50} + c$

۷۰ـ حاصل $I = \int Cosx Cos2x Cos5x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{32}Sin8x + \frac{1}{8}Sin2x + \frac{1}{16}Sin4x + \frac{1}{24}Sin6x + c$ ۲) $\frac{1}{32}Sin8x + \frac{1}{16}Sin4x + \frac{1}{24}Sin6x + c$

۳) $\frac{1}{32}Sin8x + \frac{1}{24}Sin6x + \frac{1}{8}Sin2x + c$ ۴) هیچکدام

۷۱ـ حاصل $I = \int tg^7 x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{tg^6x}{6} - \frac{tg^4x}{4} + \frac{tg^2x}{2} + c$ ۲) $\frac{tg^6x}{6} - \frac{1}{4}tg^4x + \frac{1}{2}tg^2x - Ln|Secx| + c$

۳) $\frac{tg^6x}{6} - \frac{tg^4x}{4} + Ln|Secx| + c$ ۴) $\frac{tg^6x}{6} + \frac{tg^4x}{4} + \frac{1}{2}tg^2x + c$

۷۲ـ حاصل $I = \int Cotg^6 x dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}Cotg^5x + \frac{1}{3}Cotg^3x - x + c$ ۲) $\frac{Cotg^5x}{5} + \frac{Cotg^3x}{3} + \frac{Cotgx}{3} - x + c$

۳) $\frac{Cotg^3x}{3} - Cotgx - \frac{Cotg^5x}{5} - x + c$ ۴) $\frac{\cot g^3x}{3} + Cotgx - \frac{Cotg^5x}{5} + c$

۷۳ـ حاصل $I = \int Cos(Lnx)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{2}[Cos(Lnx) + Sin(Lnx)] + c$ ۲) $\frac{x}{2}[Sinx + Cos(Lnx)] + c$

۳) $\frac{x}{2}[Sin(Lnx) + Cosx] + c$ ۴) $x[Cos(Lnx) + Sin(Lnx)] + c$

۷۴ـ حاصل $I = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{xLn^3x}$ کدام است ؟

۱) انتگرال واگراست ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۷۵ـ حاصل $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ کدام است ؟

۱) $Arctg\frac{1}{2}$ ۲) انتگرال واگراست ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۶ـ حاصل $I = \int^{\infty} x \sin x\, dx$ کدام است ؟

۱) انتگرال واگراست ۲) 1 ۳) -1 ۴) 0

۷۷ـ حاصل $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{Lnx}}$ کدام است ؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 1 ۳) $e+1$ ۴) انتگرال واگراست

۷۸ـ حاصل $\int \frac{xdx}{Sin^2x}$ کدام است؟

۱) $-x\cot gx + Ln|\sin x|$ ۲) $-xCotgx + Sinx$ ۳) $-xCotgx - Ln|Sinx|$ ۴) $-xCotgx + Ln|Cosx|$

۷۹ـ حاصل $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+c$ ۲) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c$ ۳) $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+c$ ۴) $\frac{\sqrt{x+1}}{1-x}+c$

۸۰ـ حاصل $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$ برابر است با:

۱) $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$ ۲) $\frac{1-x}{2\sqrt{2x+3}}$ ۳) $\frac{x-1}{2\sqrt{2x+3}}$ ۴) $x\sqrt{2x+3}$

۸۱ـ حاصل $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx$ برابر است با:

۱) $Ln|Sinx+Cosx|$ ۲) $Ln|Sinx-Cosx|$ ۳) $-Ln|Cosx-Sinx|$ ۴) $-Ln|Sinx+Cosx|$

۸۲ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Lntgx\,dx$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) ۰ ۴) ∞

۸۳ـ مقدار $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $Ln\frac{b}{a}$ ۳) $Ln\frac{a}{b}$ ۴) e^{ab}

۸۴ـ بر بازه $[-1,1]$ همواره $f(-x)=-f(x)$ ، حاصل $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $f(1)$ ۴) $2f(1)$

۸۵ـ حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sin^4x}{Sin^4x+Cos^4x}dx$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۶ـ مقدار $\int_{-1}^{1}[x+\frac{1}{2}]dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۰

۸۷ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2Sinx]dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۸ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 Ln\sqrt{1+x^2}\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}Ln2$ ۲) $\frac{1}{2}Ln2+\frac{\pi}{4}-1$ ۳) $Ln2+\frac{\pi}{4}-1$ ۴) $\frac{1}{2}Ln2+\frac{\pi}{4}$

۸۹ـ اگر $x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{2+3t^2}}$ ، مقدار $\frac{1}{y}\times\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۹۰ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{3}{4}} 2\sqrt{1+t^2}\,dt$ کدام است؟

۱) $Ln4-\frac{15}{16}$ ۲) $Ln4-\frac{15}{32}$ ۳) $Ln2+\frac{15}{32}$ ۴) $Ln2+\frac{15}{16}$

۹۱ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{16}$ ۲) $\frac{5\pi}{16}$ ۳) $\frac{3\pi}{32}$ ۴) $\frac{5\pi}{32}$

۹۲ـ حاصل $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$ کدام است؟

۱) $Ln\sqrt{2}$ ۲) $Ln2$ ۳) $1-Ln2$ ۴) $1-Ln\sqrt{2}$

۹۳ـ g تابعی پیوسته و $\int_0^1 g(x)dx=0$ و $f(x)=\int_0^x (x-1)^n g(t)dt$ باشد، مقدار $f^{(n)}(1)$ کدام است؟

۱) $n!$ ۲) $-n!$ ۳) $-(n-1)!$ ۴) ۰

۹۴ـ کدامیک از گزینه‌های زیر در رابطه با انتگرال $I=\int_1^{\infty}\frac{Lnx}{(1+x)^2}dx$ صحیح می‌باشد؟

۱) واگرا است.

۲) همگراست با مقدار همگرایی یک

۳) همگراست با مقدار همگرایی $\frac{1}{2}$

۴) همگراست با مقدار همگرایی $Ln2$

۹۵ـ اگر $y=\int_1^x (e^{tLnt}+e^t)\,dt$ ، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشند؟

۱) $y''+y'=x^xLnx$ ۲) $y''-y'=x^xLnx$ ۳) $y''+y'=e^x$ ۴) $y''-y'=x^x$

شرافت به خرد و ادب است نه به ثروت و مال.
هرگز راستی و درستی خود را با پول ، قدرت یا شهرت عوض نکن. **«حضرت علی (ع)»**

مدرسان شریف

فصل پنجم

« کاربرد انتگرال »

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین

در بعضی مسائل لازم است که حد مجموعی را که تعداد جملات آن بطور نامتناهی افزایش می‌یابند را حساب کنیم برای این منظور می‌توان از انتگرال معین استفاده کرد، توجه شود که باید بتوان آن مجموع را به مجموع انتگرال تبدیل کرد.

توجه :

اگر تابع f بر بازه $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

تذکر ۱: رابطه $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ نیز نمایش دیگری از فرمول فوق می‌باشد.

مثال ۱: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\dots+\frac{n}{2n^2})$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l}\frac{n}{n^2+1}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}) \Rightarrow i=1\\ \frac{n}{n^2+4}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}) \Rightarrow i=2\\ \frac{n}{n^2+9}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{9}{n^2}}=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+(\frac{3}{n})^2}) \Rightarrow i=3\end{array}\right\} \Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\right]$$

با توجه به اینکه عبارت داخل پرانتز (در صورت سؤال) به فرم $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} f(\frac{i}{n})$ که $f(\frac{i}{n})=\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$ نوشته شد لذا می‌توان با توجه به تعریف فوق حد را محاسبه کرد :

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\mathrm{Arc\,tg}x]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\sqrt{\frac{n}{n+9}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}]$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۰

پاسخ : گزینه «۱» عبارت داخل کروشه را بصورت روبرو می‌نویسیم:

$$B=[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\dots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}]$$

لذا $f(\frac{i}{n})=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3i}{n}}}$ که $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+3x}}$ را نتیجه می‌دهد لذا داریم :

$$A=3\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1+3x}}dx=3\int_0^1(1+3x)^{-\frac{1}{2}}dx=3[\frac{2}{3}\sqrt{1+3x}]_0^1=3(\frac{4}{3}-\frac{2}{3})=2$$

مثال ۳: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\dots+\frac{\cos(n-1)\pi}{2n})$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴»

$$A=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\dots+\frac{\cos(n-1)\pi}{2n}]$$

$$[\cos\frac{0\times\pi}{n}+\cos\frac{1\times\pi}{2n}+\cos\frac{2\times\pi}{2n}+\cos\frac{3\times\pi}{2n}+\dots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\cos\frac{i\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2}(\frac{i}{n})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x}\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)dx=\frac{\pi}{2}[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x]_0^1=1$$

مثال ۴: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$ کدام است ؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n^4}}+\dots+\sqrt[3]{\frac{n}{n^4}})\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\sqrt[3]{\frac{3}{n}}+\dots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})$$

$$f(\frac{i}{n})=\sqrt[3]{\frac{i}{n}}\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow A=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}]_0^1=\frac{3}{4}$$

مثال ۵: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}]$ کدام است ؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$A=\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\dots+\frac{n}{(2n)^2}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(n+1)^2}{n^2}}+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(n+2)^2}{n^2}}+\dots+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(2n)^2}{n^2}}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{(\frac{2n}{n})^2}]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow A=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=[-\frac{1}{x+1}]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

مثال ۶: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}$ برابر کدام است؟

۱) $Ln3-1$ ۲) $Ln4-1$ ۳) $Ln3+1$ ۴) $Ln4+1$

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1 Ln(1+x)dx$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم، در این صورت: $A=[(1+x)Ln(1+x)-x]\Big|_0^1=Ln4-1$

محاسبه مقادیر متوسط توابع

اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه عددحقیقی c وجود دارد بطوریکه: $\int_a^b f(x).dx=f(c)(b-a)$ توجه شود که c عدد یکتائی نمی‌باشد.

مثال ۷: عددحقیقی c در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال $I=\int_1^5\frac{x^2-1}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(c)=\frac{\int_1^5(1-\frac{1}{x^2})dx}{5-1}=\frac{\left[x+\frac{1}{x}\right]_1^5}{4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}\Rightarrow f(c)=\frac{4}{5}\Rightarrow 1-\frac{1}{c^2}=\frac{4}{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

مثال ۸: مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ در فاصله $[0,2]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۸۳ ۲) ۰/۳۸۳ ۳) ۰/۱۸۳ ۴) ۰/۴۸۳

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(c)=\frac{1}{2-0}\int_0^2\frac{dx}{e^x+1}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را در } e^{-x}}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}\Rightarrow 1+e^{-x}=u$$

$$\Rightarrow -e^{-x}dx=du\rightarrow\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=\int\frac{-du}{u}=-Ln|u|=Ln|\frac{1}{u}|=Ln\frac{1}{e^{-x}+1}\Rightarrow f(c)=\frac{1}{2}[Ln(\frac{1}{e^{-x}+1})]_0^2$$

$$f(c)=\frac{1}{2}Ln(\frac{1}{e^{-2}+1})-\frac{1}{2}Ln(\frac{1}{2})=0/283$$

مثال ۹: مقدار متوسط تابع $f(x)=3^x-2x+3$ در فاصله $[0,2]$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{Ln3}$ ۲) $1+\frac{8}{Ln3}$ ۳) $\frac{4}{Ln3}+1$ ۴) $\frac{8}{Ln3}+3$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(c)=\frac{1}{2-0}\int_0^2(3^x-2x+3)dx=\frac{1}{2}[\frac{3^x}{Ln3}-x^2+3x]_0^2=\frac{1}{2}[\frac{8}{Ln3}+2]$$

> **نکته ۱:** اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و M,m به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع در این بازه باشند، آنگاه خواهیم داشت: $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

مثال ۱۰: اگر $I=\int_1^2\frac{dx}{1+x^4}$ حدود I کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\le I\le 1$ ۲) $1\le I\le 2$ ۳) $0\le I\le\frac{1}{17}$ ۴) $\frac{1}{17}\le I\le\frac{1}{2}$

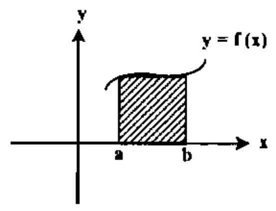
پاسخ: گزینه «۴»

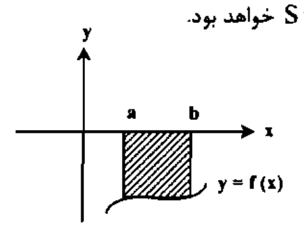
$$\frac{1}{17}\le\frac{1}{1+x^4}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{17}(2-1)\le I\le\frac{1}{2}(2-1)\Rightarrow\frac{1}{17}\le I\le\frac{1}{2}$$

سطح محصور:

❖ **تعریف ۱:** مساحت سطح محصور زیر نمودار تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ بصورت زیر بیان می‌شود: $S=\int_a^b|f(x)|dx$

اگر $f(x)\ge 0$، ($f(x)$ بالای محور xها قرار گرفته باشد.) $S=\int_a^b f(x)dx$ و اگر $f(x)<0$، ($f(x)$ پائین محور xها قرار گرفته باشد.) $S=-\int_a^b f(x)dx$ خواهد بود.





مثال ۱۱: مساحت محدود به سهمی $y=\frac{x^2}{2}$، خطهای $x=1$ و $x=3$ و محور طولها را محاسبه کنید؟

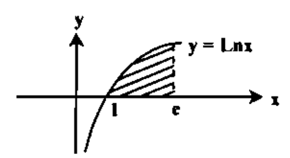
پاسخ: $S=\int_1^2(\frac{x^2}{2})dx=[\frac{x^3}{6}]_1^2=\frac{13}{3}$

تذکر ۲: اگر حدود سطح داده نشود، این حدود همان جواب‌های معادله $f(x)=0$ خواهند بود.

مثال ۱۲: مساحت محدود به منحنی $y=Lnx$ و محور x ها و خط $x=e$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۲»



$$Lnx=0\Rightarrow x=1\Rightarrow S=\int_1^e Lnx\,dx=[xLnx-x]_1^e=1$$

مثال ۱۳: مساحت سطح محصور بین منحنی $y=-x^2+4x-3$ و محور xها کدام است؟

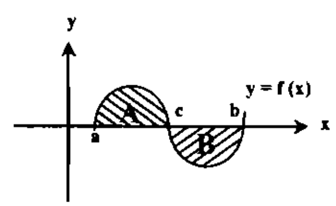
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y=0\Rightarrow -x^2+4x-3=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=3$$

$$S=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x]_1^3=\frac{4}{3}$$

تذکر ۳: هر گاه در محاسبه سطح محصور در فاصله $[a,b]$ منحنی محور xها را در نقطه‌ای مانند c (نقطه‌ای بین a و b می‌باشد) قطع کند، مساحت با استفاده از رابطه زیر بدست خواهد آمد.



$$S=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

با توجه به توضیحات فوق معادله $f(x)=0$ را حل کرده و اگر جواب بدست آمده در فاصله داده شده بود، انتگرال را به دو بخش تقسیم کرده و مساحت را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۴: سطح محصور بین منحنی $f(x)=x^3-1$ و خطوط $x=2, x=0$ و محور x ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x)=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x=1$$

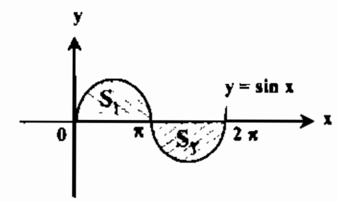
$x=1$ در بازه (۰ , ۲) قرار دارد پس سطوح محصور از دو ناحیه تشکیل می‌شود:

$$S=\left|\int_0^1 (x^3-1)dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3-1)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_1^2\right|=\left|(\frac{1}{4}-1)-0\right|+\left|(4-2)-(\frac{1}{4}-1)\right|=3/5$$

تذکر ۴: تابع با ضابطه $y=f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر انتگرال معین $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ محاسبه شود و مقدار سطح محصور بین منحنی و محور x ها در این بازه نیز حساب شود، خواهیم دید که مقدار انتگرال معین با سطح محصور آن تفاوت خواهد داشت و حالت تساوی فقط در صورتی برقرار است که در بازه داده شده علامت $f(x)$ تغییری نکند (یا بالای محور y ها واقع شده باشد، یا زیر محور y ها که در این حالت باید قدر مطلق مقدار را در نظر بگیریم.)

مثال ۱۵: سطح محصور بین منحنی $y = Sinx$ و محور x ها را در بازه $[0,2\pi]$ بدست آورده و آن را با مقدار انتگرال معین تابع $y = Sinx$ در این فاصله مقایسه کنید.

توضیح:

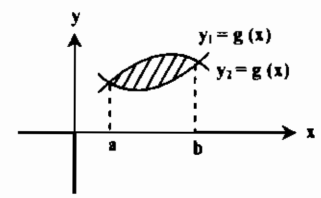


$I=\int_0^{2\pi} Sinx.dx=[-\cos x]_0^{2\pi}=-1+1=0 \Rightarrow$ مقدار انتگرال معین

$$S=\left|\int_0^{\pi} Sinx.dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi} Sinx.dx\right|=\left|[-\cos x]_0^{\pi}\right|+\left|[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$S=|2|+|-2|=4 \Rightarrow$ سطح محصور

نکته ۲: سطح محصور بین دو منحنی $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ از رابطه $S=\left|\int_a^b (y_1-y_2).dx\right|$ بدست خواهد آمد که a,b طول نقاط تلاقی دو منحنی $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ خواهند بود.



توضیح: برای بدست آوردن طول نقاط تلاقی دو منحنی باید ریشه‌های معادله $y_1-y_2=0$ را بدست آوریم.

مثال ۱۶: اندازه سطح محدود به دو منحنی $y=x^2-1$ و $y=x^2-x^3$ و محور yها کدام است ؟

۱) $\frac{3}{4}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\frac{1}{3}$　　۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱» حد پائین انتگرال $x=0$ می‌باشد(چون محور yها در صورت سؤال قید شده است .)

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x^2-x^3 \end{cases} \Rightarrow x^2-1-x^2+x^3=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$$

$$S=\left|\int_0^1 [(x^2-1)-(x^2-x^3)]dx\right|=\left|\int_0^1 (x^3-1)dx\right|=\left|[\frac{x^4}{4}-x]_0^1\right|=\frac{3}{4}$$

مثال ۱۷: مساحت بین منحنی‌های $y=16-x^2$ و $y=(x-4)^2$ و محور x ها کدام است ؟

۱) $\frac{32}{3}$　　۲) $\frac{64}{3}$　　۳)　　۴)

پاسخ : گزینه «۲»

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x^2-8x+16 \\ y_2&=16-x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2-8x+16+x^2-16=0 \Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

$$S=\left|\int_0^4 (y_1-y_2)dx\right|=\left|\int_0^4 (2x^2-8x)dx\right|=\left|[\frac{2x^3}{3}-4x^2]_0^4\right|=\frac{64}{3}$$

تذکر ۵: اگر مساحت محدود بین دو منحنی $y=f(x), y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ خواسته شود پس از حل معادله $f(x)-g(x)=0$ و بدست آوردن نقاط تلاقی منحنی بررسی می‌کنیم که آیا این نقاط در بازه $[a,b]$ هستند؟ در اینصورت اگر مثلاً نقطه‌ای مانند c که ریشه معادله می‌باشد در بازه $[a,b]$ بود آنگاه مساحت سطح محصور بین دو منحنی در بازه $[a,b]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$S=\left|\int_a^c [f(x)-g(x)]dx\right|+\left|\int_c^b [f(x)-g(x)]\,dx\right|$$

مثال ۱۸: مساحت ناحیه محدود بین منحنی‌های $f(x)=x^2+3x+5$, $g(x)=-x^2+5x+9$ و دو خط $x=-1$ و $x=4$ کدام است ؟

۱) $\frac{25}{3}$　　۲) $\frac{22}{3}$　　۳) $\frac{28}{3}$　　۴) $\frac{23}{3}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$f(x)-g(x)=0 \Rightarrow x^2+3x+5+x^2-5x-9=0 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x=-1, x=2$$

چون نقطه $x=2$ متعلق به بازه $[-1,4]$ می‌باشد لذا داریم :

$$S=\left|\int_{-1}^2 (2x^2-2x-4)\,dx\right|+\left|\int_2^4 (2x^2-2x-4)\,dx\right|=\frac{25}{3}$$

توجه:

اگر معادلات منحنی‌ها به فرم $x=f(y)$ بیان شود، تمامی فرمولهای قبل با شرط تعویض x و y با یکدیگر قابل استفاده می‌باشد.

مثال ۱۹: مساحت محدود بین منحنی $y^2=-x+1$ و خط $y=3$ و محور oy چقدر است ؟

۱) $\frac{17}{3}$　　۲) $\frac{19}{3}$　　۳) $\frac{22}{3}$　　۴) $\frac{20}{3}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$x=1-y^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$S=\int_1^3 x\,dy=\int_1^3 (1-y^2)dy=[\frac{-y^3}{3}+y]_1^3=\frac{20}{3}$$

مثال ۲۰: مساحت محدود به سهمی‌های $x=\frac{3}{4}y^2+1$ و $x=y^2$ کدام است ؟

۱) ۴　　۲) $\frac{4}{3}$　　۳) $\frac{8}{3}$　　۴) $\frac{16}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{aligned} x&=y^2 \\ x&=\frac{3}{4}y^2+1 \end{aligned} \Rightarrow y^2-\frac{3}{4}y^2-1=0 \Rightarrow \frac{1}{4}y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 2$$

$$S=\left|\int_{-2}^2 (x_1-x_2)\right|=\left|\int_{-2}^2 (\frac{1}{4}y^2-1)dx\right|=\left|[\frac{y^3}{12}-y]_{-2}^2\right|=\frac{8}{3}$$

نکته ۳: سطح محصور بین دو منحنی $y^2=ax$, $x^2=by$ از رابطه : $S=\frac{|ab|}{3}$ بدست می‌آید.

نکته ۴: سطح محصور بین دو منحنی : $y=x^n$, $y=\sqrt[n]{x}$ از رابطه زیر بدست می‌آید .

$$S=\begin{cases} \dfrac{2(n-1)}{n+1} & ; \text{ اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \dfrac{n-1}{n+1} & ; \text{ اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

مثال ۲۱: اگر مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y^2=ax$, $x^2=by$ برابر ۶ باشد آنگاه $|ab|$ کدام است ؟

۱) ۲۷　　۲) ۳　　۳) ۱۸　　۴) ۹

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته(۳) داریم :

$$S=\frac{|ab|}{3} \Rightarrow 6=\frac{|ab|}{3} \Rightarrow |ab|=18$$

مثال ۲۲: سطح محصور بین منحنی تابع $y=x^3$ و تابع معکوس آن کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» معکوس تابع $y=x^3$ تابع $y=\sqrt[3]{x}$ می باشد و لذا با توجه به نکته (۴) داریم : $S=\frac{2(3-1)}{3+1}=1$

نکته ۵ : مساحت محدود به منحنی پارامتری $y=y(t)$ و $x=x(t)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(xy'-yx')dt$$

محاسبه حجم

۱) حجم حاصل از دوران تابع $y=f(x)$ حول محور x ها در بازه $[a,b]$ بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\boxed{V_x=\pi.\int_a^b f^2(x)dx}$$

۲) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1=f(x)$ ، $y_2=g(x)$ و دو خط $x=a$ و $x=b$، حول محور x ها از رابطه

$$\boxed{V_x=\pi.\int_a^b(y_1^2-y_2^2)dx}$$

به دست خواهد آمد.

۳) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ و دو خط $x=a$ و $x=b$ (a و b هم‌علامت) حول محور y ها برابر است با $V=2\pi\int_0^b x|f(x)-g(x)|dx$. به این روش برای محاسبه حجم، **روش پوسته استوانه‌ای** گفته می‌شود.

مثال ۲۳: حجم حاصل از دوران منحنی $y=\sin x$، حول محور ox و در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ کدام است ؟

۱) π^2 ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۲۴: اندازه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ حول محور xها کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{2\pi}{15}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{matrix}y_1=x\\ y_2=x^2\end{matrix}\Rightarrow x^2=x\rightarrow x=0\,,\,x=1\quad,\quad V_x=\pi\int_0^1(y_1^2-y_2^2)dx\Rightarrow V_x=\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{2\pi}{15}$$

مثال ۲۵: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $xy=1$ ، $y=0$ ، $x=1$ ، $x=3$ حول محور xها کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) π ۴) $\frac{4\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲»

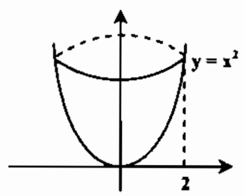
$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow V_x=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3=\frac{2\pi}{3}$$

$y=b$

تذکر ۶: حجم جسمی را که از دوران شکل محدود به منحنی $x=g(y)$، محور oy و دو خط $y=a$ و $y=b$ حول محور oy بدست می‌آید با توجه به فرمول روبرو به دست می‌آید :

$$\boxed{V_y=\pi\int_a^b x^2\,dy}$$

مثال ۲۶: حجم دوار در شکل مقابل کدام است؟



روش اول : حجم موردنظر از دوران $y=x^2$ در فاصله $0<x<2$ حول محور y ها حاصل شده است. بنابراین طبق روش پوسته استوانه‌ای:

$$U=2\pi\int_0^2 x|f(x)|dx=2\pi\int_0^2 x^3dx=2\pi\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2=8\pi$$

روش دوم: ابتدا از رابطه $y=x^2$ ، x را برحسب y به دست می‌آوریم. سپس به روش معمول حجم را محاسبه می‌کنیم.

$y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}\ ,\ 0<y<4$

بنابراین:

$$U=\pi\int_0^4(f(y))^2dy=\pi\int_0^4 y\,dy=\pi\times\frac{y^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$$

مثال ۲۷: ناحیه واقع‌بین یک قوس از منحنی $y=\sin x$ و محور yها و خط $y=1$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل کدام است ؟

۱) $\frac{\pi(\pi^2-4)}{4}$ ۲) $\frac{\pi(\pi^2-4)}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2-8}{8}$ ۴) $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: $y=\sin x\Rightarrow x=\arcsin y\Rightarrow x=0\rightarrow y=0$

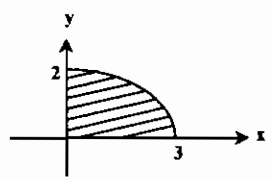
با فرض $\arcsin y=u$ خواهیم داشت : $y=0\Rightarrow u=0\ ,\ y=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$

$$V_y=\pi\int_0^1(\arcsin y)^2dy\Rightarrow V_y=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2\cos u\,du\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}V_y=\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$$

روش دوم: این بار برای محاسبه حجم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx=2\pi\left(\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$$

مثال ۲۸: در شکل زیر یک ربع بیضی به مرکز مبدأ مختصات مشخص شده است، حجم حاصل از دوران سطح محدود به نمودار بیضی و محورهای مختصات حول محور oy کدام است ؟



۱) 14π
۲) 12π
۳) 10π
۴) 8π

پاسخ : گزینه «۲» معادلهٔ بیضی فوق $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ می باشد لذا داریم :

$$V_y=\pi\int_0^2 x^2dy=\pi\int_0^2 9\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy=12\pi$$

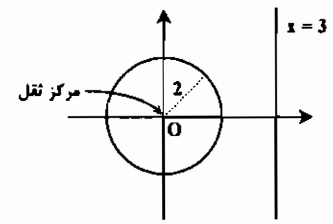
نکته ۶: حجم حاصل از دوران دایره : $x^2+y^2=R^2$ ، حول محور x ها از رابطه $V=\frac{4}{3}\pi.R^3$ بدست خواهد آمد.

قضایای پاپوس (گُلدین)

۱. مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محوری که آن را قطع نمی‌کند، برابر است با حاصل‌ضرب در ازای منحنی (طول قوس منحنی) در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (مرکز هندسی) منحنی.

۲. حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول محوری که ناحیه را قطع نمی‌کند، برابر است با حاصل‌ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (هندسی) ناحیه.

مثال ۲۹ : حجم چنبره حاصل از دوران دایره $x^2+y^2=4$ حول خط $x=3$ را بیابید.



پاسخ : فاصله مرکز ثقل دایره از محور دوران برابر ۲ است، بنابراین محیط دایره پیموده شده توسط مرکز ثقل برابر است با:

$$\text{محیط دایره} = P = 2\pi\times 3 = 6\pi$$

و مساحت ناحیه دوران یافته (مساحت دایره) برابر $\pi\times 2^2=4\pi$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیه دوم پاپوس:

$$\text{حجم} = 4\pi\times 6\pi = 24\pi^2$$

محاسبه طول قوس منحنی

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت برای محاسبه طول منحنی $y=f(x)$ در فاصله $x=a$ تا $x=b$ از فرمول روبرو استفاده می‌کنیم :

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

مثال ۳۰: طول قوس منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ از نقطه $x=0$ تا $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 0 ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=[\operatorname{Arcsin}x]_0^1=\operatorname{Arcsin}1-\operatorname{Arcsin}(0)=\frac{\pi}{2}$$

نکته ۷: درصورتی که $x=f(y)$ باشد آنگاه طول منحنی از رابطه $L=\int_a^b\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy$ بدست می‌آید.

مثال ۳۱: طول قسمتی از منحنی $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\operatorname{Ln}y}{2}$ را که بین دو نقطه به عرضهای $y=1$ و $y=2$ واقع، کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}+\frac{\operatorname{Ln}2}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}+\frac{\operatorname{Ln}2}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$x'_y=\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\Rightarrow\sqrt{1+(x'_y)^2}=\sqrt{1+(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y})^2}=\sqrt{(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y})^2}=\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\Rightarrow L=\int_1^2(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y})dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$$

نکته ۸: در صورتی که معادلات به صورت پارامتری بیان شود خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\Rightarrow L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

مثال ۳۲: طول یکی از قوسهای سیکلوئید به معادله پارامتری $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ از نقطه $t=0$ و $t=2\pi$ کدام است ؟

۱) 4π ۲) 8 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}+1}{2\pi}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}x'(t)=1-\cos t\\y'(t)=\sin t\end{cases}\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2t-2\cos t+\sin^2t}\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4\cos\pi+4\cos 0=4+4=8$$

مثال ۳۳: محیط آستروئید به معادله پارامتری $x=a\cos^3t,\ y=a\sin^3t$ کدام است؟

۱) 0 ۲) a ۳) $6a$ ۴) $8a$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{matrix}x'_t=-3a\cos^2t\sin t\\y'_t=3a\sin^2t\cos t\end{matrix}\Rightarrow\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{9a^2\sin^2t\cos^2t}=3a|\sin t\cos t|=\frac{3a}{2}|\sin 2t|$$

تابع $|\sin 2t|$ دارای دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ است لذا داریم :

$$L=\int_0^{\pi}\frac{3a}{2}|\sin 2t|dt\Rightarrow L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt=6a$$

نکته ۹: طول قوس در فضای سه بعدی از رابطه مقابل بدست می‌آید :

$$\boxed{L=\int\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt}$$

مثال ۳۴: طول قوس از خم فضائی به معادلات $x=\frac{2}{3}t^3-t,\ y=t^2-1$ و $z=t^2+4$ از نقطه نظیر $t=0$ تا $t=3$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$L=\int_0^3\sqrt{(2t^2-1)^2+(2t)^2+(2t)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{4t^4+4t^2+1}\,dt=\int_0^3\sqrt{(2t^2+1)^2}dt=\int_0^3(2t^2+1)dt=[\frac{2}{3}t^3+t]_0^3=21$$

محاسبه گشتاورهای استاتیک

الف) اگر ناحیه مسطح باشد : برای ناحیه مسطح محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور ox و خطوط $x=a$ و $x=b$ داریم :

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx \qquad \text{گشتاور نسبت به محور x ها}$$

$$M_y=\int_a^b xy\,dx \qquad \text{گشتاور نسبت به محور y ها}$$

ب) اگر منحنی مسطح باشد : برای منحنی مسطح گشتاور استاتیک از روابط زیر محاسبه می‌شود :

$$M_y=\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad \leftarrow \text{گشتاور نسبت به محور y ها}$$

$$M_x=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad \leftarrow \text{گشتاور نسبت به محور x ها}$$

تذکر ۷: اگر تابع نسبت به یکی از محورها متقارن باشد آنگاه گشتاور حول آن محور صفر خواهد بود.

مثال ۳۵: گشتاور استاتیک مثلث محدود به خطهای $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$ و $x=0$ و $y=0$ نسبت به محور ox کدام است؟

۱) $\frac{a^2b}{6}$ ۲) $\frac{ab^2}{3}$ ۳) $\frac{ab^2}{6}$ ۴) $\frac{a^2b}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» در اینجا ناحیه مسطح است و ضابطه تابع $y=b(1-\frac{x}{a})$ می‌باشد.

$$M_x=\frac{b^2}{2}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^2dx=\frac{ab^2}{6}$$

محاسبه مختصات مرکز ثقل یک ناحیه مسطح

با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز ثقل $M(x_c,y_c)$ یک ناحیه مسطح را محاسبه کرد :

$Y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{S}$	$X_c=\frac{M_y}{S}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{S}$

S : مساحت ناحیه مسطح می‌باشد.

مختصات مرکز ثقل یک منحنی مسطح

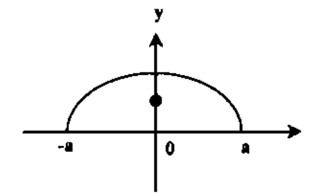
$$Y_c=\frac{M_x}{L}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}\qquad X_c=\frac{M_y}{L}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

L : طول قوسی منحنی در فاصله a و b می‌باشد.

مثال ۳۶: مرکز ثقل قوس نیم‌دایره $x^2+y^2=a^2$ $(y\ge 0)$ کدام است؟

۱) $(0,\frac{2}{\pi}a)$ ۲) $(0,\frac{3a}{\pi})$ ۳) $(0,\frac{\pi}{2}a)$ ۴) $(0,\frac{3\pi}{2}a)$

☑ پاسخ: گزینه «۱»



$$y=\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\Rightarrow\sqrt{1+(y')^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$M_x=\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-a}^{a}(\sqrt{a^2-x^2})(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}})dx=2a^2$$

$$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pi a\Rightarrow y_c=\frac{M_x}{L}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}$$

چون تابع نسبت به محور y ها متقارن است لذا $M_y=0$ و در نتیجه $x_c=0$ خواهد بود.

مثال ۳۷: عرض مرکز ثقل سطح محدود به $y=1-x^2$ و محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

☑ پاسخ: گزینه «۴»

$$M_x=\frac12\int_{-1}^{1}y^2dx=\frac12\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2dx=\frac12(x+\frac{x^5}{5}-\frac23x^3)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{15}$$

$$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac43\Rightarrow y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac43}=\frac25$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱ـ اگر $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ آنگاه یک کران برای I کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac13<I<\frac23$ ۲) $\frac23<I<\frac{\sqrt2}{2}$ ۳) $\sqrt2<I<\frac32$ ۴) $\frac49<I<\frac12$

۲ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $e-1$ ۲) $e+1$ ۳) $\frac{e-1}{2}$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

۳ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}(\frac1n+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-3})$ برابر کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac23\text{Ln}2$ ۲) $\frac32\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) $2\text{Ln}3$

۴ـ اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n}\text{Ln}(1+\frac{i}{n})$ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac1nS_n$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $-1+\text{Ln}2$ ۲) $-1+\text{Ln}4$ ۳) $1+\text{Ln}2$ ۴) $1+\text{Ln}4$

۵ـ اگر $F(\alpha)=\int_\alpha^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ آنگاه $\lim_{\alpha\to1^+}f(\alpha)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) تعریف نشده

۶ـ منحنی به معادله $y=\text{ch}x$ ؛ $0\le x\le1$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم مساحت سطح دوار کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $2\pi(e-1)$ ۲) $\pi(e-1)$ ۳) $2\pi(1-\frac1e)$ ۴) $\pi(1-\frac1e)$

۷ـ در سطح نیمدایره همگن به قطر $AB=6$ فاصله مرکز ثقل مساحت نیمدایره تا قطر AB کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

۸ـ طول منحنی زنجیری به معادله $y=\cosh x$ از نقطه $x=-1$ تا $x=1$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $e-\frac{1}{2e}$ ۲) $e-\frac1e$ ۳) $e+\frac{1}{2e}$ ۴) $e+\frac1e$

۹ـ $\bar{x}$ مؤلفه x مرکز ثقل ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=x^2$، $y=0$ و $x=1$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) 1 ۲) $\frac23$ ۳) $\frac34$ ۴) $\frac35$

۱۰ـ سطح حاصل از دوران منحنی $y=e^x$ $(0\le x\le1)$ حول محور x ها برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\pi\int_0^1e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ ۲) $2\pi\int_0^1e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ ۳) $\pi\int_0^1e^x\sqrt{1+e^{2x}}$ ۴) $2\pi\int_0^1e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

۱۱ـ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac14$ ۲) 1 ۳) $\frac12$ ۴) $\frac13$

۱۲ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) 1 ۲) $\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}3$ ۴) e

۱۳ـ حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{x\mathrm{Ln}x}}$ درفاصلهٔ $[e,e^2]$ حول محور x ها برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) π ۲) $\pi(\mathrm{Ln}2-1)$ ۳) $\pi\mathrm{Ln}2$ ۴) 2π

۱۴ـ طول قوس منحنی $x=\cos^3 t$ و $y=\sin^3 t$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{28}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۱۵ـ طول منحنی زنجیری $r(t)=t\vec{i}+\cosh t\vec{j}=(t,\cosh t)$ از نقطه $(0,1)$ تا نقطه $(x,\cosh x),\ x>0$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\cosh x$ ۲) $1-\sinh x$ ۳) $\sinh x$ ۴) $\sinh x-1$

۱۶ـ طول قوس منحنی $9x^2=4y^3$ را از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(3,2\sqrt{3})$ محاسبه کنید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) 5 ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) 4

۱۷ـ حد عبارت زیر را وقتی که $n\to\infty$ محاسبه کنید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

$$\frac{e^{1/n}+e^{2/n}+\dots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}}{n}$$

۱) e ۲) 1 ۳) $e-1$ ۴) $\frac{1}{e}$

۱۸ـ ناحیه بین نمودار $y=\mathrm{Ln}(\frac{1}{x})$، محور x ها، و محور y ها به دور محور x ها دوران کرده است. حجم جسمی را که تولید می‌گردد به دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) π

۱۹ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) e ۲) $e-1$ ۳) $e+1$ ۴) $2e$

۲۰ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Ln}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\mathrm{Ln}4-1$ ۲) $\mathrm{Ln}4+1$ ۳) $\mathrm{Ln}4-1$ ۴) $\mathrm{Ln}4+1$

۲۱ـ مقدار متوسط تابع $f(x)=(\sin^2 x)(\cos x)$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{4}{9\pi}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{9\pi}$ ۳) $\frac{4-\sqrt{2}}{9\pi}$ ۴) $\frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$

۲۲ـ طول نمودار تابع با ضابطه $y=\mathrm{Ln}(\frac{e^x-1}{e^x+1})$، $(2\le x\le 4)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\mathrm{Ln}(e^2+e)$ ۲) $\mathrm{Ln}(e^2-1)$ ۳) $\mathrm{Ln}(1+e^2)$ ۴) $\mathrm{Ln}(e^2+e^{-2})$

۲۳ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left|\sqrt[3]{\frac{n+1}{n^4}}+\sqrt[3]{\frac{n+2}{n^4}}+\dots+\sqrt[3]{\frac{n+n}{n^4}}\right|$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\sqrt[3]{4}-1$ ۴) $2\sqrt[3]{2}-1$

۲۴ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۲۵ـ مقدار میانگین تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی $[0,25]$ برابر است با: (مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3}{50}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{50}{3}$

۲۶ـ طول قوس منحنی به معادله زیر کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۲)

$$\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}\quad 0\le t\le 1$$

۱) $e\sqrt{2}$ ۲) $e-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}(e-1)$ ۴) $\sqrt{2}(e-2)$

۲۷ـ سطح محصور به وسیله $y^2=4x^2-x^4$ چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{32}{3}$

۲۸ـ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ و $x=\pi$ حول محور y ها کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{e}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

۲۹ـ ناحیه A محصور به منحنی $y=\sin x$ و $y=1$ و $x=0$ حول محور x ها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۳۰ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) ∞

۳۱ـ طول منحنی پارامتری c به معادلهٔ $x=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3t},\ y=\sqrt{2}\mathrm{Ln}t$ وقتی $1\le t\le 2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{31}{12}$ ۴) π

۳۲ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $x=y^2$ و $y=x^2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۳ـ مقدار انتگرال $\int^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\mathrm{Ln}3-\frac{1}{4}$ ۲) $\mathrm{Ln}2-\frac{3}{8}$ ۳) $\mathrm{Ln}3+\frac{1}{4}$ ۴) $\mathrm{Ln}2+\frac{3}{8}$

۳۴ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{15}}{n^{16}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۱۲۵ ۳) ۰/۰۶۲۵ ۴) ۰/۳۲۵

۳۵ـ سطح محصور بین منحنی $y=\sin x$ و محور x ها در فاصله $0\le x\le 2\pi$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) 0 ۲) 5 ۳) 4 ۴) 2

۳۶ـ اگر $g(b)=\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ آنگاه $\lim\limits_{b\to 1^-}g(b)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 1 ۴) 2

۳۷ـ شیب خط مماس بر یک منحنی در هر نقطه $M(x,y)$ از آن برابر با $\sqrt{1+x+y+xy}$ است، اگر این منحنی از نقطه $(-1,-1)$ بگذرد، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-8}{9}$ ۲) $\frac{-7}{9}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

۳۸ـ مساحت رویهٔ حاصل از دوران خط $\Delta:\begin{cases}x+y=1\\ 0\le x\le 1\end{cases}$ حول محور $x-4y=9$ ها برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $2\sqrt{\pi}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) $2\pi\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{2\pi}$

۳۹ـ مقدار متوسط تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ در بازهٔ $[1,4]$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $2(e^{-1}-e^{-2})$ ۲) $2(e^{2}-e^{1})$ ۳) $\frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-2})$ ۴) $\frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-4})$

۴۰ـ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $y=x^3$ $(x\ge 0)$، خط $y=1$ و محور y، حول محور y کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{3\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۱ـ طول کمانی از منحنی به معادلهٔ $y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}\,dt$ از $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۴۲ـ سطح محصور بین نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ و محور x ها کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2}-1$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi-2}{8}$ ۴) $\frac{\pi-1}{4}$

۴۳ـ خم(منحنی) بسته با معادله $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ حول محور x دوران کرده است مساحت رو یه (سطح) دوار حاصل چقدر است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{6\pi}{5}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{24\pi}{5}$ ۴) $\frac{12\pi}{5}$

۴۴ـ حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود زیر خم $y=\sqrt{\cos x}$ وقتی $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ حول محور x ها کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴۵ـ طول منحنی پارامتری C به معادله $x=\sin^2 t$ ، $y=\cos^2 t$ وقتی $0\le t\le\pi$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

۴۶ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ ۲) $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ ۳) $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ ۴) $\int_1^2\frac{1}{x}dx$

۴۷ـ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار توابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{1-x}$ و $y=\sqrt{1+x}$ و محور x ها کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$ ۲) $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ۳) $\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-3)$ ۴) $\frac{32}{3}(2\sqrt{2}-1)$

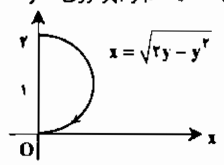
۴۸ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 0+\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{n}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) 2 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) حد ندارد.

۴۹ـ مختصات مرکز جرم ورقه محصور بین منحنی $2y^2=18-3x$ و محور y ها کدام است؟ مشروط بر آنکه چگالی سطحی در نقطه (x,y) برابر $\sqrt{6-x}$ کیلوگرم بر مترمربع باشد. (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $(\bar{x},\bar{y})=(2,2)$ ۲) $(\bar{x},\bar{y})=(0,2)$ ۳) $(\bar{x},\bar{y})=(2,0)$ ۴) $(\bar{x},\bar{y})=(1,1)$

۵۰ـ حجم حادث از دوران سطح هاشور خورده در شکل داده شده حول محور ox چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)



۱) $\frac{\pi^2}{2}$ ۲) π^2 ۳) $2\pi^2$ ۴) $\frac{2}{3}\pi^2$

۵۱ـ طول قوسی از منحنی به معادله $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) 3 ۲) 6 ۳) 8 ۴) 12

۵۲ـ طول منحنی به معادلهٔ پارامتری $0\le t\le 1$ $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t^2\\ y=t\cosh t-\sinh t\end{cases}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $e-1$ ۲) $1-\frac{1}{e}$ ۳) $e+1$ ۴) $1+\frac{1}{e}$

۵۳ـ ناحیه R واقع بین نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$ و خطوط $x=0$ ، $x=1$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل از دوران کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\pi \mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{\pi}{2}\mathrm{Ln}(e+1)$ ۳) $2\pi\mathrm{Ln}(e+1)$ ۴) $\pi\mathrm{Ln}(\frac{e+1}{2})$

۵۴ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n+i)^2}{n^3}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{19}{3}$ ۲) $\frac{17}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) 14

۵۵ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan^{-1}(\frac{2i-1}{2n})$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}-\mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$ ۳) ۴) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}-\mathrm{Ln}2$

۵۶ـ قرص دایره به مرکز $(b,0)$ و به شعاع a در صفحه xy $(0<a<b)$، حول محور y (محور عرضها) دوران کرده و یک چنبره به وجود آورده است. حجم جسم دوار کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $4\pi ba$ ۲) π^2a^2b ۳) $4\pi^2ba^2$ ۴) $(2\pi b)(\pi a^2)$

۵۷ـ مقدار $\lim_{n\to+\infty}\{\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\dots+\frac{n}{2n^2}\}$ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۵۸ـ طول منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\mathrm{Ln}x}{2}$ از نقطهٔ $x=1$ تا $x=2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3}{4}+\mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$ ۳) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$ ۴) $\frac{4}{3}+\mathrm{Ln}2$

۵۹ـ مساحت محدود به منحنی بسته $y^2=x(x-1)^2$ چقدر است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۶۰ـ مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y=2^x$ و $y=2^{-x}$ و خط $x=2$ کدام است؟ (Ln۲ = ۰/۶۹۳) (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۲۵

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱ـ گزینه «۲» ابتدا لازم است مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ را در فاصله $[0,1]$ به دست آوریم.

$$f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ \text{نقطه بحرانی} \Rightarrow f(\tfrac{1}{2})=\frac{2}{3}\ ,\ f(0)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین در فاصله $[0,1]$ داریم:

$$\frac{2}{3}\le f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_0^1\frac{2}{3}dx\le\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{2}dx \Rightarrow \frac{2}{3}<I<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ـ گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{e^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$$

۳ـ گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\dots+\frac{1}{4n-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+3\times\frac{1}{n}}+\dots+\frac{1}{1+3(\frac{n-1}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+3x}=\frac{1}{3}Ln(1+3x)\Big|_0^1=\frac{1}{3}Ln4=\frac{2Ln2}{3}$$

۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}S_n=\int_0^1 Ln(1+x)dx=(1+x)Ln(1+x)-x\Big|_0^1=2Ln2-1$$

۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=Arcsec\,x+c$. بنابراین:

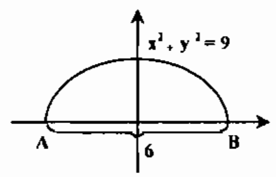
$$F(\alpha)=Arcsec2-\lim_{\alpha\to1^+}Arcsec\,\alpha=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

۶ـ گزینه «۳»

$$y=\cosh x \Rightarrow y'=\sinh x \Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sinh^2 x}=\cosh x$$

$$\text{مساحت}=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^1 x\cosh x dx=2\pi(x\sinh x-\cosh x)\Big]_0^1=2\pi(1-\frac{1}{e})$$

۷ـ گزینه «۴» چون نیم‌دایره نسبت به محور y ها متقارن است، لذا مرکز ثقل روی محور y ها قرار دارد.
پس کافی است عرض نقطه موردنظر را به دست آوریم.



$$\bar{y}=\frac{M_x}{\text{مساحت نیم‌دایره}}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx}{\frac{1}{2}\times9\pi}=\frac{36}{9\pi}=\frac{4}{\pi}$$

۸ـ گزینه «۲»

$$y'=\sinh x\to1+y'^2=1+\sinh^2 x=Cosh^2x$$

$$\Rightarrow L=\int_{-1}^{1}\sqrt{Cosh^2x}\,dx=\int_{-1}^{1}Coshxdx=Sinhx\Big|_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

۹ـ گزینه «۳»

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}=\frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2dx}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

۱۰ـ گزینه «۲»

$$S=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}dx$$

۱۱ـ گزینه «۱»

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

۱۲ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=Ln(1+x)\Big|_0^1=Ln2$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$U=\pi\int_e^{e^2}y^2dx=\pi\int_e^{e^2}\frac{dx}{xLnx}=\pi(Ln(Lnx))\Big|_e^{e^2}=\pi Ln2$$

۱۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases}x(t)=\cos^3 t \Rightarrow x'(t)=-3\cos^2 t\sin t\\ y(t)=\sin^3 t \Rightarrow y'(t)=3\sin^2 t\cos t\end{cases}\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=9\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt=\int_0^{\pi}|3\sin t\cos t|dt=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}|\sin2t|dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2tdt=6$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$L=\int_0^x\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^x\sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt=\int_0^x\cosh tdt=\sinh t\Big|_0^x=\sinh x$$

۱۶ـ گزینه «۳»

$$9x^2=4y^3 \Rightarrow x^2=\frac{4}{9}y^3 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\pm y^{\frac{1}{2}}$$

و چون طول قوس در فاصله $0<y<3$ خواسته شده $\frac{dx}{dy}=\sqrt{y}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy=\int_0^3\sqrt{1+y}dy=\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{14}{3}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

$$S=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 e^xdx=e^x\Big|_0^1=e-1$$

۱۸ـ گزینه «۳» تابع داده شده را می‌توان به صورت $y=-Lnx$ نوشت. تابع محور x ها را در $x=1$ قطع می‌کند. پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V=\pi\int_0^1(f(x))^2dx=\pi\int_0^1(Lnx)^2dx=\pi\Gamma(3)=\pi\times2!=2\pi$$

۱۹ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 e^xdx=e^x\Big|_0^1=e-1$$

۲۰ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}Ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(Ln(1+\frac{1}{n})+Ln(1+\frac{2}{n})+\dots+Ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1 Ln(1+x)dx=((1+x)Ln(1+x)-x)\Big|_0^1=2Ln2-1$$

۲۱ـ گزینه «۴»

$$\text{مقدار متوسط} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-(\frac{-\pi}{4})}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx = \frac{4}{3\pi}.\frac{\sin^3 x}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$$

۲۲ـ گزینه «۴»

$$y = Ln(\frac{e^x-1}{e^x+1}) \Rightarrow y' = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} \Rightarrow 1+y'^2 = 1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_2^4 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \int_2^4 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \int_2^4 \cot ghx dx$$

$$= Ln|\sinh x|\Big]_2^4 = Ln\sinh 4 - Ln\sinh 2 = Ln 2\cosh 2 = Ln(e^2+e^{-2})$$

۲۳ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}} = \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}dx = (1+x)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = 2\sqrt[3]{2}-1$$

۲۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}) = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2$$

۲۵ـ گزینه «۳»

$$\text{مقدار میانگین} = \frac{1}{25-0}\int_0^{25}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{25}.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^{25} = \frac{10}{3}$$

۲۶ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases} x'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t \\ y'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t \end{cases}$$

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2 = (e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2 = 2e^{2t}$$

بنابراین طول قوس منحنی برابر است با:

$$L = \int_0^1\sqrt{2e^{2t}}\,dt = \int_0^1\sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^1 = \sqrt{2}(e-1)$$

۲۷ـ گزینه «۴» محل تلاقی منحنی با محور x ها، نقاط ± 2 و $x=0$ می‌باشد. و با توجه به اینکه نمودار منحنی نسبت به محور x ها و y ها متقارن است، کافی است سطح محصور مابین $y=\sqrt{4x^2-x^4}$ و محور x ها را در فاصله $0 \le x \le 2$ به دست آورده و حاصل را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$S = 4\int_0^2\sqrt{4x^2-x^4}dx = 4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = \frac{-4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

۲۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه حجم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V = 2\pi\int_0^\pi xf(x)dx = 2\pi\int_0^\pi x(\frac{\sin x}{x})dx = 2\pi\int_0^\pi \sin x dx = 4\pi$$

۲۹ـ گزینه «۳»

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1^2-\sin^2 x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \pi(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

۳۰ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

۳۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$L = \int_1^2\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_1^2\sqrt{(\frac{2t}{3}-\frac{1}{2t^2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{t})^2}dt$$

۳۲ـ گزینه «۴» به وضوح محل تلاقی دو منحنی $x=0$ و $x=1$ می‌باشد. بنابراین:

$$S = \int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

۳۳ـ گزینه «۴»

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tgx\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos x\,dx$$

$$= -Ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin 2x dx = -Ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = Ln 2+\frac{3}{8}$$

۳۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{15}}{n^{16}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^{15} = \int_0^1 x^{15}dx = \frac{1}{16} = 0/0625$$

۳۵ـ گزینه «۳» منحنی $y=\sin x$، محور x ها را در $x=\pi$ قطع می‌کند، بنابراین:

$$S = \int_0^{2\pi}|\sin x|dx = \int_0^\pi \sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi}-\sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_\pi^{2\pi} = (1-(-1))+(1-(-1)) = 4$$

۳۶ـ گزینه «۲»

$$\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int_{-1}^1\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^1(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{\text{تابع زوج}}+\overbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}^{\text{تابع فرد}})dx = 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\text{Arcsin}\,x\Big]_0^1 = \pi$$

۳۷ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(x+1)(y+1)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \sqrt{x+1}dx \xrightarrow{\int} 2\sqrt{y+1} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$$

طبق فرض منحنی از نقطه $(-1,-1)$ عبور می‌کند، پس $c=0$. بنابراین معادله به صورت روبرو در می‌آید:

$$\sqrt{y+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3}$$

برای به دست آوردن محل تقاطع با محور y ها، قرار می‌دهیم $x=0$، در نتیجه:

$$\sqrt{y+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow y+1 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{-8}{9}$$

۳۸ـ گزینه «۲»

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow y'=-1$$

$$S = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^1\sqrt{2}x\,dx = \pi\sqrt{2}$$

۳۹ـ گزینه «۳» $\text{مقدار متوسط} = \frac{1}{4-1}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx = \frac{-2}{3}e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-2})$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰ـ گزینه «۱» برای محاسبه حجم از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$U = 2\pi\int_0^1 x(f(x)-g(x))dx = 2\pi\int_0^1 x(1-x^3)dx = 2\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۱ـ گزینه «۳»

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt \Rightarrow y' = \sqrt{\cos 2x}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x\,dx = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۲ـ گزینه «۳»

$$S = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $x = tgu$، $dx = \frac{du}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 u\,du}{(1+tg^2 u)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 u}{(\frac{1}{\cos^2 u})^2}.\frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u\,du = \frac{\pi-2}{8}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۳ـ گزینه «۴»

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow y' = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow 1+y'^2 = 1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi\int_{-1}^1 y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{-1}^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.|\frac{1}{x^{1/3}}|dx = 4\pi\int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{-12\pi}{5}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{12\pi}{5}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۴ـ گزینه «۴» $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x})^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \pi\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} y(t) = \sin^3 t \Rightarrow x'(t) = 2\sin t\cos t \\ y(t) = \cos^2 t \Rightarrow y'(t) = -2\sin t\cos t \end{cases} \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 8\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{8\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 2t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin 2t|dt = 2\sqrt{2}$$

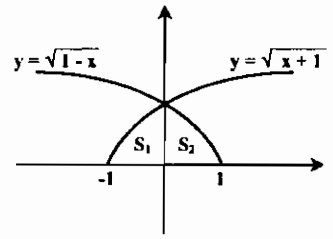
◆ ◆ ◆ ◆

۴۶ـ گزینه «۲» $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به شکل مساحت ناحیه موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1}dx + \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^0 + \frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

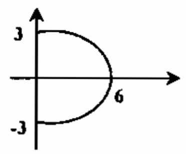


◆ ◆ ◆ ◆

۴۸ـ گزینه «۳» $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \int_0^1 \sin\pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۳»



شکل ورقه نسبت به محور x ها حالت متقارن دارد بنابراین مرکز جرم روی محور x ها قرار می‌گیرد. پس با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «۲»

روش اول: $x = \sqrt{2y-y^2} \Rightarrow y^2 - 2y + x^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1+\sqrt{1-x^2}\ ,\ y_2 = 1-\sqrt{1-x^2}$

توجه کنید که y_1 قسمت بالایی نیم‌دایره و y_2 قسمت پایینی نیم‌دایره را تشکیل می‌دهد. بنابراین حجم حاصل از دوران ناحیه محصور مابین y_1 و y_2 حول محور x ها از فرمول روبرو به دست می‌آید: $V = \pi\int_0^1 (y_1^2 - y_2^2)dx = \pi\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

انتگرال اخیر مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد، بنابراین برابر $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود و در نتیجه $V = \pi^2$.

روش دوم: از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. مساحت ناحیه مزبور برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. مرکز هندسی ناحیه روی خط $y = 1$ واقع است پس فاصله مرکز جسم تا محور دوران برابر ۱ می‌باشد. بنابراین: $\pi^2 = \frac{\pi}{2} \times 1 \times 2\pi$ = مساحت ناحیه × فاصله مرکز جسم تا محور دوران × 2π = حجم

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۲» منحنی داده شده را می‌توان به شکل پارامتری $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$، $0 \le t \le 2\pi$ نوشت. در این صورت:

$$x'(t) = 3\sin^2 t\cos t\ ,\ y'(t) = -3\cos^2 t\sin t \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 2t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}|\sin 2t|dt = 3\int_0^{\pi} |\sin 2t|dt = 6$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} x(t) = 1+\frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t\cosh t - \sinh t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = t \\ y'(t) = t\sinh t \end{cases} \Rightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = t^2 + t^2\sinh^2 t = t^2\cosh^2 t$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^1 t\cosh t\,dt = (t\sinh t - \cos t)\Big|_0^1 = \sinh 1 - \cosh 1 + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۴»
$$U=\pi\int_0^1 (f(x))^2dx=\pi\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\pi\int_0^1\frac{e^x dx}{e^x+1}=\pi Ln(e^x+1)\Big|_0^1=\pi Ln(\frac{e+1}{2})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۱»
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n+i)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}(2+\frac{i}{n})^2=\int_0^1(2+x)^2dx=\frac{(2+x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{19}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۵ـ گزینه «۲»
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n})=\int_0^1 Arctgx\,dx=(xArctgx-\frac{1}{2}Ln(1+x^2))\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۶ـ گزینه «۴» مساحت دایره به شعاع a برابر πa^2 می‌باشد. فاصله مرکز دوران یعنی مرکز دایره تا محور yها برابر b می‌باشد، پس طبق قضیه پاپوس داریم: $=2\pi b\times\pi a^2$ حجم

◆ ◆ ◆ ◆

۵۷ـ گزینه «۱»
$$\lim_{n\to+\infty}\{\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\{\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=Arctgx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

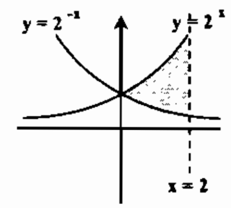
۵۸ـ گزینه «۳»
$$L=\int_1^2\sqrt{1+(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x})^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}}\,dx=\int_1^2\sqrt{(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})^2}\,dx=\int_1^2(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})dx=(\frac{x^2}{4}+\frac{Lnx}{2})]_1^2=\frac{3}{4}+\frac{Ln2}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹ـ گزینه «۳» از حل معادله $y=0$، نقاط ۱ و $x=0$ به دست می‌آیند. این نقاط، محل تلاقی منحنی با محور xها هستند. چون منحنی نسبت به محور xها متقارن است، کافی است مساحت محصور مابین $y=\sqrt{x(x-1)^2}$ و محور xها را در فاصله $0\le x\le 1$، به دست آوریم و حاصل را در ۲ ضرب کنیم. بنابراین:
$$S=2\int_0^1|x-1|\sqrt{x}dx=2\int_0^1(\sqrt{x}-x\sqrt{x})dx=2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_0^1=\frac{8}{15}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۰ـ گزینه «۳» با توجه به شکل، مساحت موردنظر برابر است با:

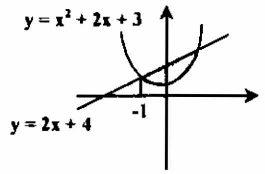


$$S=\int_0^2(2^x-2^{-x})dx=(\frac{2^x}{Ln2}+\frac{2^{-x}}{Ln2})\Big|_0^2=\frac{9}{4Ln2}\cong 3/25$$

◆ ◆ ◆ ◆

تست‌های تکمیلی فصل کاربرد انتگرال

۱ـ مساحت هاشور زده مقابل چقدر است؟



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲ـ حجم حادث از دوران $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ حول خط $x=y+2$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}\pi$ ۲) $\frac{16}{3}\pi$ ۳) $\frac{4}{3}\pi$ ۴) $\frac{32}{3}\pi$

۳ـ طول خم تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases}x=t^3+3t^2\\ y=t^3-3t^2\end{cases}$ وقتی $0\le t\le 3$ کدام است؟

۱) $13\sqrt{26}-8\sqrt{2}$ ۲) $13\sqrt{26}-4\sqrt{2}$ ۳) $13\sqrt{26}+8\sqrt{2}$ ۴) $13\sqrt{26}+4\sqrt{2}$

۴ـ حجم حاصل از دوران $y=\sqrt[4]{25-10x^2+x^4}$ در فاصله $|1,2|$ حول محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}\pi$ ۲) $\frac{8}{3}\pi$ ۳) 3 ۴) $\frac{10}{3}\pi$

۵ـ طول خم تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases}x=1-t\\ y=t^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ وقتی $0\le t\le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13}-4)$ ۲) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13}-8)$ ۳) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ ۴) $\frac{1}{18}(13\sqrt{13}-4)$

۶ـ حجم حادث ازدوران سطح محصوربین $y=\frac{1}{\cos x}$ وخطوط $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=-\frac{\pi}{4}$ حول محور x هاکدام‌است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) π ۴) 2π

۷ـ مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y=|x|+|x-1|$ و $y=x+1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

۸ـ سطحی که تابع $y=\sqrt{\sin x}$ در فاصله $\pi\le x\le 2\pi$ با محور x ها پدید می‌آورد، چند مترمربع است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{2\pi}$ ۴) $\frac{1}{\pi}$

۹ـ طول قوس منحنی نمودار $y=Ln(\cos x)$ از $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $Ln(\sqrt{2}+1)$ ۳) $Ln\frac{4}{\pi}$ ۴) $Ln(\sqrt{2}-1)$

۱۰ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\frac{\sin(n-1)\pi}{n}\right]$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۱ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n})$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $Ln2$ ۳) 3 ۴) $Ln3$

۱۲ـ مقدار متوسط تابع $\sin^2 x$ در فاصله $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۳ـ مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=0$ و $x=2$ و منحنیهای $y=2x-x^2$ و $y=2^x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{Ln2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{Ln2}-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{Ln2}+\frac{4}{3}$

۱۴ـ مساحت ناحیه محدود به سهمی‌های $x^2=4y$ و $y=\frac{8}{x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{6\pi-4}{2}$ ۲) $\frac{6\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{4}{3}$

۱۵ـ مساحت ناحیه محدود به خط $y=x+1$ و $y=\cos x$ و محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{3}{2}$

۱۶ـ سطح محصور بین دو منحنی $x^2=4y$, $y^2=4x$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۱۷ـ سطح محصور بین تابع $y=|\cos x|$ و محور xها از $x=0$ تا $x=\pi$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۸ـ سطح محصور بین منحنی $y=|x-2|+|x-1|$ و خط $y=x$ برابر است با :

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۹ـ طول منحنی $x=\mathrm{Ln}(\frac{1}{\sin y})$ از نقطه $y=\frac{\pi}{4}$ تا $y=\frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$ ۲) $\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{2}-1}{1+2\sqrt{2}}\right|$ ۳) $\mathrm{Ln}\left|\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right|$ ۴) $\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$

۲۰ـ مقدار حدودی I با توجه رابطه : $I=\int^{1}\sqrt{1+x^4}\,dx$ کدام است ؟

۱) $0<I<\sqrt{2}$ ۲) $1<I<2$ ۳) $1<I<\sqrt{2}$ ۴) $0<I<2$

۲۱ـ اگر $I_1=\int^{1}x^2\sin^2 x\,dx$ و $I_2=\int^{1}x\sin^2 x\,dx$ آنگاه کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $I_1=I_2$ ۲) $I_1>I_2$ ۳) $I_1<I_2$ ۴) هیچکدام

۲۲ـ مقدار متوسط تابع $f(x)=a+b\cos x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ کدام است؟

۱) a ۲) b ۳) $\frac{a+b}{2}$ ۴) $\frac{a-b}{2}$

۲۳ـ مقدار متوسط تابع $f(x)=\sin^4 x$ در بازه $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{4}$

۲۰ـ مساحت محدود به منحنی $r^2=a^2\cos 2\varphi$ کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{3}$ ۲) $\frac{a^2}{2}$ ۳) $\frac{a^2}{4}$ ۴) a^2

۲۱ـ طول منحنی $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\mathrm{Ln}\,y}{2}$ از $y=1$ تا $y=e$ کدام است؟

۱) e^2+1 ۲) $\frac{e^2+1}{2}$ ۳) $\frac{e^2+1}{3}$ ۴) $\frac{e^2+1}{4}$

۲۲ـ مختصات مرکز ثقل مثلث محدود به خطهای $x+y=a$, $x=0$, $y=0$ کدام است؟

۱) $(\frac{a}{3},0)$ ۲) $(0,\frac{a}{3})$ ۳) $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ ۴) (a,a)

۲۵ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی پارامتری $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$ کدام است؟

۱) πab ۲) $0/375\pi ab$ ۳) $0/5\pi ab$ ۴) $0/25\pi ab$

۲۶ـ مساحت محدود به سهمی $y=x^2-2x+2$ و خط مماس به آن در نقطه $M(3,5)$ و محور y ها کدام است؟

۱) 3 ۲) 6 ۳) 9 ۴) 12

۲۷ـ مساحت محدود به سهمی‌های $y=\frac{x^2}{9}$ و $y=4x^2$ و خط $y=2$ را حساب کنید؟

۱) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{20\sqrt{2}}{5}$ ۳) $20\sqrt{2}$ ۴) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

۲۸ـ مساحت محدود به دو شاخه منحنی $(y-x)^2=x^3$ و خط $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{5}$

۳۰ـ حاصل $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۱ـ حاصل $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{2}+2}{3}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ۴) $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$

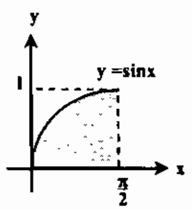
۳۳ـ حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y=\mathrm{tg}x$ ، محور xها و خط $x=\frac{\pi}{4}$ حول محور xها کدام است ؟

۱) $\pi(1-\frac{\pi}{2})$ ۲) $\pi(1-\frac{\pi}{4})$ ۳) $\pi(1+\frac{\pi}{4})$ ۴) $\pi(1+\frac{\pi}{2})$

۳۴ـ سطح محدود به منحنی $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ و محور xها و دو خط $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۳۵ـ حجم حاصل از دوران سطح هاشورزده زیر، حول محور xها کدام است ؟



۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۶ـ طول قوس منحنی $\begin{cases}x=2\sin t+\cos t\\ y=\sin t-2\cos t\end{cases}$ در فاصله $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ چقدر است؟

۱) π ۲) $\pi\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

۳۷ـ در کاسه‌ای به شکل نیمکره که شعاع آن ده سانتی‌متر است تا ارتفاع ۵ سانتی‌متر آب ریخته‌ایم. حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) $\frac{520\pi}{3}$ ۲) $\frac{575\pi}{3}$ ۳) $\frac{625\pi}{3}$ ۴) $\frac{675\pi}{3}$

۳۸ـ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار به معادله‌های $x=y^{\frac{1}{2}}$ و $x=\frac{y^2}{32}$ حول خط $y=4$ کدام است؟

۱) $\frac{206\pi}{25}$ ۲) $\frac{208\pi}{25}$ ۳) $\frac{205\pi}{15}$ ۴) $\frac{206\pi}{15}$

۳۹ـ حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ چقدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۴۰ـ مساحت محدود به حلقهٔ منحنی $y^2=(x-1)(x-2)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{7}{15}$ ۳) $\frac{11}{15}$ ۴) $\frac{14}{15}$

۴۱ـ مساحت واقع بین منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و خط $x+y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۴۲ـ مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho=1+\cos\varphi$ را که به وسیله دایره $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ قطع می‌شود کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ ۲) $\frac{2}{3}(\pi+\sqrt{3})$ ۳) $\frac{3}{4}(\pi-\sqrt{3})$ ۴) $\frac{3}{4}(\pi+\sqrt{3})$

۴۳ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $\rho=\cos^2\theta$ چقدر است؟

۱) $\frac{5\pi}{8}$ ۲) $\frac{5\pi}{16}$ ۳) $\frac{5\pi}{32}$ ۴) $\frac{5\pi}{64}$

۴۴ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ کدام است؟

۱) πa^2 ۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\pi a^2}{2}$

۴۵ـ سطح محصور مابین $y_1=2\sin x$ و $y_2=2\cos x$ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ چقدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}-2$ ۳) $2\sqrt{2}-2$ ۴) $4\sqrt{2}-4$

هر دردی را درمانی است، جز بداخلاقی که درمان‌پذیر نیست. **«حضرت علی (ع)»**
خطاکارترین کسان افرادی هستند که عیب دیگران را می‌بینند. **«بیکن»**

مدرسان شریف

فصل ششم

« دنباله و سری »

❖ **تعریف دنباله :** دنباله تابعی از n است که n فقط اعداد طبیعی را میتواند اختیار کند: $a_n=3n-1 \Rightarrow a_1=2\ ,\ a_2=5\ ,\dots$

کرانداری دنباله : وقتی حد دنباله ای زمانی که $n\to\infty$، برابر ∞ نشود آنگاه گوئیم دنباله کراندار است .

یکنوائی دنباله : دنباله ای که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، یکنوا نامیده می شود .

همگرائی دنباله : وقتی حد دنباله‌ای زمانی که $n\to\infty$، عدد مشخص ومعلوم باشد،آنگاه گوئیم دنباله به سمت آن عدد معلوم همگرا است.

واگرائی دنباله: چنانچه حد دنباله ای برابر ∞ شود ویا دنباله حد مشخص نداشته باشد، گوئیم، دنباله واگرا است .

تذکر ۱: هر دنباله همگرا ،کراندار نیز خواهد بود،اما دنباله واگرا ممکن است کراندار باشد.

تذکر ۲: یک دنباله ممکن است همگرا و کراندار باشد ولی یکنوا نباشد .

تذکر ۳: حد هر دنباله همگرا منحصر به فرد است .

مثال ۱: یکنوائی، کرانداری و همگرائی دنباله‌های زیر را بررسی کنید .

$1)\ a_n=(-1)^n \qquad 2)\ a_n=1+\frac{(-1)^n}{n} \qquad 3)\ a_n=\sin n \qquad 4)\ a_n=\cos\frac{n\pi}{2} \qquad 5)\ a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$6)\ a_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad 7)\ a_n=n\sin\frac{\pi}{n} \qquad 8)\ a_n=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+5} \qquad 9)\ a_n=(-1)^n\cos n\pi \qquad 10)\ a_n=\cos\frac{\pi}{n}$

$1)\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\pm\infty$ دنباله کراندار است و چون حد مشخصی ندارد و اگراست. دنباله مرتباً ۱+ و۱- می‌شود و نمی‌تواند یکنوا باشد.

$2)\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ دنباله همگرا و کراندار می‌باشد، اما دنباله یکنوا نمی‌باشد .

$3)\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\infty$ دنباله کراندار است و چون حد مشخصی ندارد لذا واگراست، چون مرتباً تغییر علامت داریم، دنباله یکنوا نیست.

$4)\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\infty$ دنباله کراندار و واگراست و چون مرتباً تغییر علامت داریم دنباله یکنوا نیست.
(دنباله تنهاسه مقدار ۱ و ۰ و۱- را میتواند داشته باشد)

$5)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ دنباله همگرا و کراندار است همچنین دنباله نزولی نیز می‌باشد .

$6)\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\infty \Rightarrow a_1=\frac{\sqrt{2}}{2},a_2=a_3=-\frac{\sqrt{2}}{2},a_4=a_5=\frac{\sqrt{2}}{2}$ دنباله کراندار ولی واگرا است، یکنوا نیز نمی‌باشد .

$7)\ \lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$ دنباله همگرا و کراندار است

$8)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+5}$ حد $\frac{1}{n+5}$ وقتی $n\to+\infty$ برابرصفر خواهد بود پس وقتی در حد جمله سینوسی ضرب شود حاصل صفر خواهد بود، پس دنباله به عدد صفر همگرا است و در نتیجه کراندار نیز خواهد بود.

می‌دانیم $\cos n\pi = (-1)^n$ لذا $a_n = (-1)^{2n} = 1$ خواهد بود، پس دنباله همگرا و کراندار می‌باشد. $9)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

و چون دنباله عدد ثابت است یکنوا نیز می‌باشد.

دنباله همگرا و کراندار می‌باشد ولی یکنوا نمی‌باشد. $10)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \cos 0 = 1$

$$\Rightarrow \cos\pi = -1\ ,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0\ ,\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ ,............\cos 0 = 1\ n \neq 0 \to n = 1,2,3.....$$

مثال ۲: بزرگترین جملهٔ دنباله $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 4000}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{40}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{30}$

پاسخ: گزینه «۴» بعبارتی ماکزیمم تابع $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 4000}$ مورد سؤال است:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 4000) - x^2(3x^2)}{(x^3 + 4000)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 8000x - x^4 = 0 \Rightarrow x(8000 - x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ x = 20 \Rightarrow f(20) = \dfrac{(20)^2}{(20)^3 + 4000} = \dfrac{1}{30} \end{cases}$$

مثال ۳: حد دنباله $a_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) وجود ندارد ۲) برابر یک است ۳) صفر ۴) نامشخص است

پاسخ: گزینه «۳» $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و چون عبارت ($\sin n + \cos n$) کراندار است پس حد کل عبارت برابر صفر خواهد بود.

تذکر ۴: مقدارعددی $\lim_{n\to\infty} a_n$، همان عدد همگرائی دنباله a_n می باشد.

نکته ۱:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

مثال ۴: دنباله $a_n = \dfrac{3n^n + n!}{3n^n + 4n!}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته (۱) داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3n^n}{3n^n} = 1$

مثال ۵: در دنباله $a_n = \dfrac{e^n}{3n^n}$ به سمت چه عددی همگرا است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته (۱) حد دنباله برابر صفر است.

نکته ۲: اگر $0 < a < 1$ باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ خواهد بود.

نکته ۳: وقتی $n \to \infty$ آنگاه برای محاسبه حدودی به فرم: $\lim_{n\to\infty}(1^k + 2^k + ... + n^k)$ می‌توان عبارت را هم ارز با $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$ قرار داد.

مثال ۶: حاصل $A = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 ... + (2n)^2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1^2 + 2^2 + ... + (2n)^2) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3}{3} \Rightarrow A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{8n^3}{3}}\right) = \frac{1}{8}$$

مثال ۷: حد دنباله $a_n = \dfrac{2^n + 5^{n-1}}{2^{n-1} + 5^n}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5}\right]}{5^n\left[\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{2}\right) + 1\right]} = \frac{1}{5}$$

مثال ۸: دنباله $a_n = n + 2 - \sqrt{n^2 - 6n + 11}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) واگراست ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲» $\lim_{n\to\infty} a_n \approx n + 2 - n + 3 = 5$

مثال ۹: در مورد دنباله $a_n = (n+4)\cos\dfrac{\pi}{n}$ کدام گزاره صحیح است؟

۱) صعودی، همگرا و کراندار است. ۲) نزولی، همگرا وکراندار است.

۳) نزولی، واگرا و کراندار است. ۴) صعودی، واگرا و بیکران است.

پاسخ: گزینه «۴» $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n+4)\cdot \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n} = (\infty)(1) = \infty$

با توجه به اینکه $(n+4)$ و $\cos\frac{\pi}{n}$ صعودی و مثبت هستند در نتیجه حاصل ضرب آنها نیز صعودی است.

مثال ۱۰: دنباله $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+5}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+5}(\sin n!) = 0 \times (-1 \leq \text{عدد} \leq 1) = 0$

مثال ۱۱: دنبالهٔ $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$ دارای کدامیک از خاصیتهای زیر است؟

۱) نه نزولی است و نه صعودی است ۲) نزولی است

۳) کراندار نیست ۴) کراندار است ولی همگرا نیست

پاسخ: گزینه «۳» مطابق با نکته متن درس $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \infty$ لذا دنباله کراندار نیست.

نکته ۴: اگر دو دنباله a_n و b_n همگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n . b_n\}$ و $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$ نیز همگرا می‌باشند.

نکته ۵: اگر دو دنباله a_n و b_n واگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n . b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$ ممکن است، همگرا باشند.

مثال ۱۲: دو دنباله $x_n = n$, $y_n = 1-n$ هر دو واگرا هستند اما دنباله: $x_n + y_n = 1$ ، همگرا به ۱ است و یا دو دنباله $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = (-1)^n$ هر دو واگرا هستند ولی دنباله $\frac{a_n}{b_n} = -1$ دنباله ثابت همگرا به ۱- می‌باشد.

نکته ۶: اگر دنباله a_n همگرا و b_n واگرا باشند آنگاه $\{a_n \pm b_n\}$ واگراست اما $(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$ $\{a_n . b_n\}$ ، $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا باشند.

مثال ۱۳: دنباله $x_n = \frac{1}{n}$ همگرا و دنباله $y_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ واگراست در حالیکه دنباله مجموع آنها $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \frac{n+n(-1)^n+2}{2n}$ ، واگرا و حاصلضرب آنها، $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}$ همگراست.

نکته ۷: با اضافه یا کم کردن تعداد محدودی جمله به یک دنباله همگرائی و یا واگرائی آن دنباله تغییری نمی کند .

همگرائی دنباله (تعریف)

وقتی می‌گوئیم دنباله به L همگراست که جملات نهائی در همسایگی L با شعاع کوچک ε واقع باشند:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in N, N \ge M \to |a_n - L| < \varepsilon$$

M : عدد بسیار بزرگی فرض شده است، ε شعاع همسایگی است.

مثال ۱۴: دنباله $\frac{(-1)^n}{n}$ بعد از جمله چندم در شعاع ۰/۰۱ همگرائی خود قرار می گیرد ؟

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{1}{100} \to \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \to n \ge 101$$

دنباله بعد از جمله ۱۰۱ام در همسایگی ۰/۰۱ برای $L = 0$ قرار می گیرد .

مثال ۱۵: کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن فاصله دنباله $\left\{\frac{n+2}{2n-3}\right\}$ از نقطه همگرائی کمتر از $\frac{1}{100}$ باشد کدام است؟

۱) ۱۷۷ ۲) ۲۶۵ ۳) ۲۷۶ ۴) ۲۶۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-3} = \frac{1}{2} \to \left|\frac{n+2}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\to \frac{7}{2(2n-3)} < \frac{1}{100} \to \frac{7}{2n-3} < \frac{1}{50} \to 2n-3 > 350 \to n > 176/5 \to n = 177$$

درجه یک دنباله

در بعضی دنباله ها، برای یافتن هر جمله باید جملات ماقبل آن را بدانیم ، اختلاف بزرگترین اندیس و کوچکترین اندیس را درجه آن دنباله نامند.

برای مثال درجه دنباله $a_{n+2} = \frac{1+n}{a_{n+1}}$ برابر ۱ است.

مثال ۱۶: دنباله‌ای با $t_1 = 2$ و $t_{n+1} = \frac{t_n+1}{t_n-1}$ تعریف می‌شود، این دنباله :

۱) به سمت ۱ همگراست . ۲) به سمت صفر همگراست . ۳) واگراست . ۴) به $1+\sqrt{2}$ همگراست .

پاسخ : گزینه «۳»

$t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$,..... → دنباله واگراست

$L = \frac{L+1}{L-1} \to L^2 - 2L - 1 = 0 \to L = +1 \pm \sqrt{2} \to$ غیر قابل قبول

سری: مجموع جملات نامتناهی یک دنباله را سری می گوئیم و با نماد $\sum$ نمایش می دهیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1) = 1+3+5....$$

همگرائی سری

برای همگرا بودن یک سری اولاً باید حد دنباله آن سری برابر صفر شود و سپس با توجه به نکاتی که گفته خواهد شد باید شرائط همگرائی آن سری را بررسی کنیم توجه شود که صفر شدن حد دنباله شرط لازم برای همگرائی سری می باشد و اگر حد دنباله یک سری صفر نشد ، میتوان قطعاً اظهار نظر کرد که آن سری واگراست .

۱ـ سری P :

نکته ۸: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ شرط لازم همگرائی را دارد و با توجه به مقدار P ، واگرائی و همگرائی آن مشخص خواهد شد:

$$\begin{cases} P > 1 \to \text{همگراست} \\ P \le 1 \to \text{واگراست} \end{cases}$$

تذکر ۵: اگر $P = 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را سری همساز یا هارمونیک می‌نامند .

نکته ۹: اگر دو سری در جملاتشان تقریباً با یکدیگر برابر باشد ،میتوان در مورد همگرائی و واگرائی آنها نیز نظر داد که مانند یکدیگر خواهند بود.

مثال ۱۷: واگرائی و همگرائی سری های زیر را بررسی کنید .

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+n} = -1 \neq 0 \to$ سری واگراست

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{نکته ۸}}$ (سری همساز) واگراست

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{\text{نکته ۸}}$ همگراست

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{\text{نکته ۸}}$ واگراست

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \xrightarrow{\text{معادل سری همساز}}$ واگراست

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{\text{نکته ۸}}$ همگراست

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \to$ این سری با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ قابل مقایسه هست پس سری واگراست

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Rightarrow$ این سری شرط لازم را دارد و همگرائی آن باید بررسی شود که همگرا خواهد بود.

مثال ۱۸: اگر مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر با عدد e باشد حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-5}{3a_n^2+3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3e}$ ۳) $\frac{-5}{3}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به اینکه سری $\sum a_n$ همگرا می‌باشد لذا باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-5}{3a_n^2+3} = \frac{0-5}{0+3} = -\frac{5}{3}$$

۲- سری هندسی : در یک تصاعد هندسی اگر جمله اول a و q قدر نسبت تصاعد باشد در صورتی که $|q| < 1$ باشد، سری همگراست و حد مجموع جملات با استفاده از فرمول $S = \frac{a}{1-q}$ محاسبه خواهد شد.

مثال ۱۹: عدد همگرائی سری $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ کدام است ؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$a = \frac{4}{9} \ , \ q = \frac{2}{3} \Rightarrow S = \frac{\frac{4}{9}}{1\cdot}$$

مثال ۲۰: حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{6}{5}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$a=1, q=-\frac{1}{5} \Rightarrow S=\frac{1}{1-(-\frac{1}{5})}=\frac{5}{6}$$

مثال ۲۱: یکی از مقادیر x از معادله $1+\cos x+\cos^2 x+...=2$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{5\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$a=1\ ,\ q=\cos x \Rightarrow S=\frac{1}{1-\cos x} \to \frac{1}{1-\cos x}=2 \Rightarrow 2\cos x=1 \to \cos x=\frac{1}{2} \to x=\frac{\pi}{3}$$

مثال ۲۲: مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k-2^k}{10^k}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\frac{5}{10})^k-(\frac{2}{10})^k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\frac{1}{2})^k-(\frac{1}{5})^k\right]=A-B$$

$$A=S_1=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1\quad,\quad B=S_2=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\quad,\quad \Rightarrow S=A-B=\frac{3}{4}$$

سری تلسکوپی

۳- سری‌هائی به فرم $\sum_{k=1}^{n}[(f_k)-(f_{k+1})]$ ⇐ (سری تلسکوپی) :

سریهائی که به شکل فوق باشند، معمولاً سریهائی همگرا هستند، البته باید توجه کرد که بعضی از سریها شکل ظاهری فوق را دارند ولی واگرا هستند. طریقه محاسبه آنها به شکل زیر است که جمله اول پرانتز اول و جمله آخر پرانتز دوم را فقط در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{k=1}^{n}[(f_k)-(f_{k+1})]=f_1-f_{n+1}$$

مثال ۲۳: مجموع سری $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{1}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{4n-1}_{f_k}}-\frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{4n+3}_{f_{k+1}}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4\times1-1}-\frac{1}{4\times3+3}\right]=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{15})=\frac{1}{4}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$$

مثال ۲۴: مجموع سری $\sum_{k=10}^{\infty}\frac{5}{k(k+1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{11}$ ۲) $\frac{5}{22}$ ۳) $\frac{9}{22}$ ۴) $\frac{5}{10}$

پاسخ : گزینه «۴» توجه شود در این مثال جمله اول به ازای $k=10$ بدست می‌آید :

$$5\sum_{k=10}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow 5(\frac{1}{10}-\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k+1}))=\frac{5}{10}$$

توضیح: توجه شود جمله دوم به دلیل اینکه $n\to\infty$ باید با استفاده از محاسبه حدی به دست آید.

مثال ۲۵: همگرائی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k+1}{k+2}$ کدام است ؟

۱) ۰ ۲) واگراست ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

سری شرط لازم همگرائی را دارد : $\lim_{k\to\infty}\log\frac{k+1}{k+2}=\log(\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2})=\log 1=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k+1}{k+2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\log(k+1)-\lim_{k\to\infty}\log(k+2)\right]=\log 2-\log\infty=-\infty$$

سری واگراست چون مجموع برابر $-\infty$ شده است.

مثال ۲۶: حاصل سری $S=\sum_{n=3}^{\infty}(\sqrt[n]{27}-\sqrt[n+1]{27})$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۲» سری تلسکوپی است لذا داریم : $S=\sqrt[3]{27}-\lim_{n\to\infty}(27)^{\frac{1}{n+1}}=3-1=2$

مثال ۲۷: همگرائی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$ را بررسی کنید.

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) واگراست

پاسخ : گزینه «۲»

$$(2k+1)=(k+1)^2-k^2=(k+1)^2+1-(k^2+1)\Rightarrow\frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}=\frac{(k+1)^2+1-(k^2+1)}{(k^2+1)[(k+1)^2+1]}=\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}$$

$$S_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}(f_k-f_{k+1})=\frac{1}{2}-\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{(k+1)^2+1})=\frac{1}{2}$$

نکته ۱۰: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\times...(k+n)}=\frac{1}{nn!}$

مثال ۲۸: حاصل سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته فوق در این تست $n=2$ می‌باشد لذا داریم : $S=\frac{1}{2\times2!}=\frac{1}{4}$

مثال ۲۹: حاصل $S=\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{60}$

پاسخ : گزینه «۴» به فرمول زیر که حالت کلی‌تر نکته ۱۰ می‌باشد، توجه کنید:

$$S=\sum_{k=P}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+n)}=\frac{(P-1)!}{n(n+P-1)!}$$

در این تست $P=5$ و $n=2$ می‌باشد، لذا داریم:

$$S=\frac{(5-1)!}{2(2+5-1)!}=\frac{4!}{2\times6!}=\frac{4!}{2\times4!\times5\times6}=\frac{1}{60}$$

سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله‌ای

در بعضی مواقع سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله است که در این صورت ضریب $(-1)^k$ باید وجود داشته باشد و قاعده به صورت زیر بیان گردد:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(f_k+f_{k+1})=(-1)^1 f_1+(-1)^k f_{n+1} \\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(f_k+f_{k+1})=(-1)^1 f_1+\lim_{k\to\infty}(-1)^k f_{k+1} \end{cases}$$

مثال ۳۰: فرض کنید $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ باشد، در این صورت S کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=(-1)^{1+1}\times\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}=1$$

تذکر ۶: اگر اختلاف اندیس‌ها بیشتر از یک باشد، باید از یک تا شماره اختلاف اندیس‌ها جملات f_k را با هم جمع کنیم و عدد اختلاف اندیس در جمله آخر ضرب شود، برای مثال داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(f_k-f_{k+3})=(f_1+f_2+f_3)-3\times f_{n+3}$$

مثال ۳۱: حاصل $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+2k}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left[\left(\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{1}{k+2}\right)\right]}_{\text{اختلاف اندیس‌ها ۲ است}}$$

اختلاف اندیس‌ها برابر ۲ است، لذا دو جمله اول پرانتز اول را باید بنویسیم.

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-2\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{2}$$

۴- بااستفاده از رابطه : $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ میتوان بعضی همگرائیها را حساب کرد .

مثال ۳۲: سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ به چه عددی همگرا است؟

☑ **پاسخ :** این سری بسط e^x است که به جای x عدد ۳ جایگزین شده است پس مجموع فوق برابر e^3 خواهد شد.

نکته ۱۱: اگر $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ دو سری همگرا و c عدد ثابتی باشد آنگاه سریهای $\sum_{k=1}^{\infty}ca_k$، $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-b_k)$ نیز همگرا هستند.

نکته ۱۲: مجموع یک سری واگرا با یک سری همگرا قطعاً واگراست.

نکته ۱۳: حاصلضرب یک سری واگرا و یک سری همگرا ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

نکته ۱۴: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}Ka_n$ نیز واگراست. $(k\neq 0)$

نکته ۱۵: در مورد جمع و تفریق دو سری واگرا نمی‌توان هیچ اظهارنظری کرد یعنی ممکن است واگرا یا همگرا باشند .

بررسی همگرائی سریها با استفاده از آزمون

۱) آزمون مقایسه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و $a_n\le b_n$ باشد آنگاه :

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ یعنی سری بزرگتر همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (یعنی سری کوچکتر) نیز همگرا خواهد بود.

ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (یعنی سری کوچکتر) واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (یعنی سری بزرگتر) نیز واگرا خواهد بود.

مثال ۳۳: همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+5}$ را بررسی کنید؟

☑ **پاسخ :** چون سری $\frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی و همگرا می‌باشد و با توجه به اینکه $\frac{1}{3^n}>\frac{1}{3^n+5}$ سری $\frac{1}{3^n+5}$ نیز همگرا می‌باشد .

مثال ۳۴: همگرائی یا واگرائی سری‌های $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ را بررسی کنید .

☑ **پاسخ :** با توجه به اینکه به ازای هر $n\ge 2$ داریم : $\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n}$ و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی همگرا است لذا با توجه به آزمون فوق سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ نیز همگراست .

حال سری دوم را بررسی می‌کنیم، با توجه به اینکه $n\ge 2$ می‌باشد، لذا $n>Lnn$ می‌باشد و می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ که یک سری هارمونیک است واگراست، لذا سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ نیز واگراست.

۲) آزمون خارج قسمت (مقایسه حدی) :

الف) هرگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C>0$ باشد آنگاه سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ از نظر وضعیت همگرائی مانند هم هستند، یعنی یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

ج) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگرا خواهد بود.

مثال ۳۵: همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$ را بررسی کنید.

☑ **پاسخ :** اگر فرض کنیم : $a_n=\frac{1}{3^n-n}$, $b_n=\frac{1}{3^n}$ باشد با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1>0$ و در نظر گرفتن توضیحات بند «الف» آزمون فوق می‌توان نتیجه گرفت a_n و b_n هم‌رفتار هستند و چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ یک سری همگراست لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$ نیز همگرا خواهد بود.

۳) آزمون دالامبر: سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ ، داریم :

الف) اگر $L<1$ باشد سری همگرا است.

ب) اگر $L>1$ باشد، سری واگرا است.

ج) اگر $L=1$ باشد از این آزمون نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

مثال ۳۶: همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!}$ را بررسی کنید.

پاسخ : با توجه به بند «الف» آزمون فوق داریم :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}.3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n.3^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$ سری همگرا می‌باشد

مثال ۳۷: همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ را بررسی کنید.

پاسخ :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^n}{(2n-1)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n} = \frac{1}{2} < 1$$: سری همگراست

۴) آزمون کوشی :

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری مثبت باشد و فرض کنیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ ، آنگاه:

الف ـ اگر $L < 1$ باشد، سری همگراست.

ب ـ اگر $L > 1$ باشد، سری واگراست.

ج ـ اگر $L = 1$ باشد از این آزمون نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

توضیح: بیشتر تستهائی که مطرح می‌شود در غالب دو آزمون فوق (دالامبر و کوشی) می باشد و معمولاً زمانی از دو آزمون فوق استفاده می‌کنیم که جملاتی نظیر n^a , a^n , $n!$, n^n در عبارت وجود داشته باشند و توجه داشته باشیم برای مسائلی که درآنها چندجمله‌ای و یا تابع Ln وجود دارد استفاده از دو آزمون فوق نتیجه‌ای را برای ما مشخص نخواهد ساخت .

مثال ۳۸: همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ :
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n+1})\times n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$: سری همگراست

مثال ۳۹: همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2n}}{3^{2n}}$ را بررسی کنید.

پاسخ : سری واگراست :
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n e^{2n}}{3^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(e^2)^n}{(9)^n}} = \frac{e^2}{9} > 1$$

۵ـ آزمون انتگرال: فرض کنیم تابع $f(x)$ به ازای $x \ge 1$ پیوسته مثبت و اکیداً نزولی باشد. در اینصورت برای تعیین واگرائی و یا همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}f(x)$ باید واگرائی و یا همگرائی انتگرال $\int_1^{\infty}f(x)dx$ را تعیین نمود.

مثال ۴۰: همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ : سری همگراست :
$$\int_1^{\infty}xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_1^a(-2xe^{-x^2}dx) = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\frac{-1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}$$

مثال ۴۱: همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Arctg}n}{1+n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ : سری همگراست :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctg}x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a\frac{\mathrm{Arctg}x}{1+x^2}dx\right) \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{Arctg}a)^2 - \frac{\pi^2}{32}\right] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32} < 1$$

نکته ۱۶: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ موجود باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف) اگر $P > 1$ سری همگراست.

ب) اگر $0 < p \le 1$ سری واگراست.

محاسبه فاصله همگرائی و شعاع همگرائی

برای تعیین **شعاع همگرائی** از یکی از دو فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{R} \qquad \text{و} \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{R}}$$

فاصله همگرائی : برای بدست آوردن فاصله همگرائی باید قدرمطلق عبارت شامل x را بدون در نظر گرفتن توان، کوچکتر یا مساوی شعاع همگرائی قرار دهیم و تغییرات x را بدست آوریم :

مثال ۴۲: شعاع و فاصله همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{n^2}$ کدام است؟

۱) $1 \le x \le 2$, $R = 1$ ۲) $\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$, $R = 2$ ۳) $2 \le x \le 4$, $R = 1$ ۴) $1 \le x \le 5$, $R = 2$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\begin{cases}\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} \\ u_n = \frac{1}{n^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1} \Rightarrow |2x-3| \le 1 \Rightarrow -1 \le 2x-3 \le 1 \Rightarrow \boxed{1 \le x \le 2}$$

توجه شود که در نقاط مرزی $x = 1$, $x = 2$ سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ می‌باشد و هر دو سری فوق همگرا هستند. (در بعضی مواقع نقاط مرزی باعث واگرائی سری می‌شوند لذا باید نقاط روی مرز را با احتیاط بعنوان بازه همگرائی لحاظ کرد)

نکته ۱۷: اگر شعاع همگرائی یک سری برابر ∞ شود آنگاه به ازای تمامی مقادیر x آن سری همگرا خواهد بود .

مثال ۴۳: به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **همگراست ؟**

۱) $-\infty < x < \infty$ ۲) $x > 0$ ۳) $x > 1$ ۴) $1 < x < 3$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\times\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n+1)(2n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2+2n} = 0$$

$$\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R \to \infty \Rightarrow \boxed{-\infty < x < \infty}$$

مثال ۴۴: فاصله همگرائی متغیر x و همچنین شعاع همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ کدام است؟

۱) $0 < x \le 2$, $R = 1$ ۲) $-1 < x < 3$, $R = 2$ ۳) $-1 \le x \le 3$, $R = 2$ ۴) $0 < x < 2$, $R = 1$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(3n-1)}{2^{n+1}(3n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$$

$$|x-1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 3}$$

توضیح: به ازای $x = 3$ و $x = -1$ سری به فرم $\sum\frac{(-1)^n 2^n}{2^n(3n-1)}$, $\sum\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n(3n-1)}$ تبدیل خواهد شد و هر دو سری فوق واگرا هستند لذا نقاط روی مرز نمی‌تواند بعنوان نقاط همگرائی محسوب شود .

مثال ۴۵: سری $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$ به ازای چه مقادیری از x همگراست ؟

۱) $-a < x < a$ ۲) $x < a$ ۳) $x = a$ ۴) $x > a$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)n}{n!} = \infty$$

$$\frac{1}{R} = \infty \Rightarrow R = 0 \to |x-a| \le 0 \Rightarrow \boxed{x=a}$$

توجه شود که تنها در حالت تساوی سری همگراست به ازای مقادیر $x < a$ نامساوی برقرار نیست.(عبارت قدرمطلق منفی نمی‌تواند باشد)

سری متناوب و همگرایی مشروط و مطلق

تعریف سری متناوب: سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ را که در آن $a_n > 0$ می‌باشد، را سری متناوب می‌نامیم.

آزمون لایب نیتز: یک سری متناوب وقتی همگرا است که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $|a_{n+1}| < |a_n|$ ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال ۴۶: همگرائی و یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n^n}$ را بررسی کنید؟

پاسخ : $a_n = \frac{3^n}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \xrightarrow{a_n \text{ نزولی است}}$ سری همگراست

تعریف همگرائی مطلق: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد، همگرای مطلق می‌نامیم.

مثال ۴۷: شرایط همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ : سری قدر مطلق را بررسی می‌کنیم $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{(n-1)}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و با توجه این که سری‌هائی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ در صورتی که $p > 1$ باشد همگرا هستند پس $\sum\frac{1}{n^2}$ همگرا می‌باشد لذا خود سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ همگرا می باشد. و در نتیجه سری همگرائی مطلق دارد.

تعریف همگرائی مشروط: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا، اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مشروط می‌نامیم.

مثال ۴۸: شرائط همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$ را بررسی کنید.

پاسخ : سری متناوب است و باید شرائط همگرائی آن را با توجه به آزمون لایب نیتز بررسی کنیم :

$$\begin{cases}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} < \dfrac{\ln n}{n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \qquad (n>1)\\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\end{cases}$$

هر دو شرط آزمون لایب نیتز برقرار است پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$ همگرا می‌باشد. حال شرائط همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right|$ را بررسی کنیم.

چون تابع $\frac{\ln x}{x}$ به ازای $x \ge e$ پیوسته، مثبت و اکیداً نزولی است پس می‌توانیم از آزمون انتگرال شرایط همگرائی را بررسی کنیم.

$$\int_e^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \left[\lim_{M\to\infty}\frac{\ln^2 x}{2}\right]_e^M = \lim_{M\to\infty}\frac{\ln^2 M}{2} - \frac{1}{2} = \infty \Rightarrow$$ سری قدرمطلق واگراست

پس سری همگرائی مشروط دارد .

بسط تیلور و مک‌لورن

بسطهای تیلور و مک‌لورن : اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و در این فاصله مشتقات پیوسته تا مرتبه nام داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه $(n+1)$ام در فاصله (a,b) وجود داشته باشد آنگاه به ازای هر x متعلق به بازه $[a,b]$ دستور زیر برقرار است :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

که R_n باقیمانده نامیده می‌شود و اگر به ازای هر x متعلق به بازه $[a,b]$، $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت :

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

اگر در دستور فوق $a = 0$ قرار دهیم، آنرا دستور مک‌لورن می‌نامند .

بسط مک‌لورن تابع $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \ldots$$

بسط مک‌لورن توابع معروف به شرح زیر است :

1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-\infty < x < \infty)$

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-\infty < x < \infty)$

3) $\mathrm{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots (|x| < \frac{\pi}{2})$

4) $\mathrm{Arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (-1 \le x \le 1)$

5) $\mathrm{ArcSin}x = x + \frac{x^3}{2\times 3} + \frac{3x^5}{2\times 4\times 5} + \frac{1\times 3\times 5x^7}{2\times 4\times 6\times 7} + \cdots (-1 \le x \le 1)$

6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1 < x \le 1)$

7) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots x \in R$

8) $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots -1 < x < 1$

9) $\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots x \in R$

10) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots x \in R$

مثال ۴۹: اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ را با استفاده از دستور تیلور برحسب توانهای نزولی $(x-1)$ بنویسیم ضریب $(x-1)^4$ کدام است ؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۴» جمله پنجم بسط تیلور حول نقطه $x = 1$ را می‌نویسیم : جمله چهارم $= \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2 \to f^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x + 6$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 120x - 48 \to f^{(4)}(1) = 72 \to (x-1)^4 \text{ ضریب } = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{72}{1\times 2\times 3\times 4} = 3$$

مثال ۵۰: ضریب چهارمین جمله بسط تابع $f(x)=Ln(1+2x)$ کدام است ؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) -4 ۴) 4

پاسخ : گزینه «۳»

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \Rightarrow Ln(1+2x)=(2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4} \Rightarrow \text{ضریب جمله چهارم}=-\frac{2^4}{4}=-4$$

مثال ۵۱: سه جمله اول بسط تیلور تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر حسب توانهای $(x-4)$ کدام است ؟

۱) $2+\frac{x-4}{16}-\frac{(x-4)^2}{32}$ ۲) $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{16}$ ۳) $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}$ ۴) $2+\frac{x-4}{3}-\frac{(x-4)^2}{16}$

پاسخ : گزینه «۳» در واقع بسط تیلور تابع در نقطه $x=4$ مورد سؤال است :

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \rightarrow f(4)=\sqrt{4}=2 \rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\ ,\ f''(4)=-\frac{1}{32}$$

$$f(x)=f(4)+f'(4)\frac{(x-4)}{1!}+f''(4)\frac{(x-4)^2}{2!}+\dots \Rightarrow f(x)=2+\frac{(x-4)}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\dots$$

مثال ۵۲: در بسط تابع $f(x)=\frac{Ln(1+x)}{x}$ برای $|x|<1$ برحسب قوای x ، ضریب x^3 کدام است ؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $Ln(1+x)$ داریم :

$$\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots \Rightarrow x^3\ \text{ضریب}=-\frac{1}{4}$$

مثال ۵۳: بسط مک‌لورن تابع $f(x)=xe^x$ کدام است؟

۱) $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^n}{n!}+\dots$ ۲) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n!}$

۳) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$ ۴) $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^{n+1}}{n!}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $y=e^x$ داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \Rightarrow x.e^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\dots$$

مثال ۵۴: ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $f(x)=\int^x e^{-t^2}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{-1}{6}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x (1-t^2+\frac{t^4}{2}-\cdots)dt=(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}-\cdots)\Big|_0^x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\cdots$$

بنابراین ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{3}$ می‌باشد.

مثال ۵۵: اگر $f(x)=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\cdots$ ، آنگاه $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) π ۲) $\pi+1$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۴» بسط داده شده مربوط به تابع $f(x)=x\sin x$ می‌باشد، بنابراین: $f'(x)=\sin x+x\cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=1$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم

۱ـ اگر $\varepsilon(x)$ با رابطه $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ تعریف شده باشد، کدامیک از روابط زیر برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$ ۲) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$

۳) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$ ۴) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$

۲ـ حاصل سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۳ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}x^{2n}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

۴ـ سری تیلور تابع $Ln(1+x^2)$ کدامیک از عبارات زیر است ؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) $x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\dots$ ۲) $x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}-\frac{x^8}{4!}$

۳) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\dots$ ۴) $x-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\dots$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\{\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶ـ بازهٔ همگرایی سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)x^k}{k!}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-3,3)$ ۳) $(-3,\infty)$ ۴) $(-\infty,\infty)$

۷ـ کدام گزینه در مورد سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-5)(Lnn)^2}$ صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) واگراست ۲) همگرا و حد آن $\frac{1}{Ln2}$ است. ۳) همگرا و حد آن $\frac{1}{5}$ است. ۴) همگرا و حد آن ۰ است.

۸ـ اگر شعاع همگرایی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ برابر ۴ باشد، بازهٔ همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-4,4)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-16,16)$

۹ـ اگر $S_n=-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\dots+\frac{(-1)^n n}{2n-1}$ ، دنباله $\{S_n\}$ چگونه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) صعودی و کراندار ۲) نزولی و کراندار ۳) همگرا ۴) فقط کراندار

۱۰ـ به ازای کدام مقادیر p سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{3p+3}$ همگرا است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $P<-\frac{3}{4}$ ۲) $P<-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}<P<-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}<P<-\frac{4}{3}$

۱۱ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$ چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\sqrt{e}$

۱۲ـ مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{25}{48}$ ۴) $\frac{27}{48}$

۱۳ـ سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) همگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ همگرا ۴) واگرا ـ واگرا

۱۴ـ در سری مک لورن تابع $f(x) = x.Ln(1+x^2)$ ضریب x^7 کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵ـ فاصله همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $(0,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,e)$ ۴) $(-e,e)$

۱۶ـ به ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ همگرا است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $0 \le x < 2$ ۲) $0 < x \le 2$ ۳) $1 < x < 3$ ۴) $1 \le x < 3$

۱۷ـ سری $\sum_{k}\frac{\log(k+1)-\log k}{\tan^{-1}(\frac{2}{k})}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) همگرا به ۱ است. ۲) واگرا است. ۳) همگرا به ۲ است. ۴) همگرا به $\log 2$ است.

۱۸ـ اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ همگرای مطلق باشد در این صورت سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+1}{n})a_n$ .... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) همگرای مطلق است.
۲) همگرا است ولی ممکن است همگرای مطلق نباشد.
۳) ممکن است همگرا نباشد.
۴) همگرای مطلق نیست.

۱۹ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x+1)^n}{(n^2+1)3^n}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۲۰ـ حد دنبالهٔ $\{\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},...\}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۱ـ ضریب x^4 در بسط تیلور xe^{-x} حول نقطه صفر کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۲ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{(n+1)}}{3^n}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{11}{2}$

۲۳ـ جواب سری $\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{k(k+1)}$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۹۸۷ ۲) ۰/۹۹۹ ۳) ۱/۰۰۱ ۴) ۱/۱۱۱

۲۴ـ نمایش سری توانی $\frac{1}{(1-x)^2}$ وقتی که $|x|<1$ است کدام گزینه می‌باشد؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

۲۵ـ به ازای چه مقادیر p سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p})$ همگراست؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $p<1$ ۲) $p>1$ ۳) $p>2$ ۴) $p<2$

۲۶ـ اگر $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+k}$، $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $+\infty$

۲۷ـ مقدار سری $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۸ـ اگر $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+n)^2}$، مقدار $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) صفر

۲۹ـ اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ و $b_n = \text{Arcsin}\frac{1}{n}$ آنگاه: (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا هستند.
۲) $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا است.
۳) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا هستند.
۴) $\sum a_n$ واگرا و $\sum b_n$ همگرا است.

۳۰ـ بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(x-1)^n$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-3,1)$ ۴) $(-2,2)$

۳۱ـ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n(Ln n)^2}$ برابر است با: (مهندسی معدن، اکتشاف معدن و استخراج معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $[-1,3]$ ۲) $[1,3]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

۳۲ـ مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ با کدام گزینه برابر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $e-2$ ۲) $2e-3$ ۳) $e+1$ ۴) $2e+1$

۳۳ـ مقدار x را طوری پیدا کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ همگرا باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ ۲) $1\le x\le 3$ ۳) $-\frac{3}{2}<x\le\frac{3}{2}$ ۴) $1<x\le 3$

۳۴ـ اگر $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ واگرا باشد، آنگاه .... واگراست. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ ۲) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ ۳) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}na_n$

۳۵ـ ضریب جمله‌ای x^2 در بسط مک‌لورن تابع $y=\cos^2 2x$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۳۶ـ اگر $u_n=(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$ آنگاه از نظر همگرایی $s=\sum_{i=1}^{\infty}u_i$ و $t=\sum_{i=1}^{\infty}v_i$ چگونه‌اند؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) هر دو واگرا ۲) هر دو همگرا ۳) s همگرا و t واگرا ۴) s واگرا و t همگرا

۳۷ـ در مورد دنباله $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی با ضابطه $n>2$ ، $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$ ، $x_1=1$, $x_2=2$ کدام گزاره درست است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) به $\frac{3}{2}$ همگرا است. ۲) به $\frac{5}{3}$ همگرا است. ۳) به صفر همگرا است. ۴) واگرا است.

۳۸ـ مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۹ـ فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-2)^n$ کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $(1,3)$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[1,4)$ ۴) $[1,4]$

۴۰ـ اگر $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ ، $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) $\mathrm{Ln}2$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) موجود نیست.

۴۱ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(k+2)(k+3)}+(\frac{2}{3})^{k-1}]$:
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) به $\frac{3}{10}$ همگراست. ۲) به ۱۰ همگراست. ۳) به $\frac{10}{3}$ همگراست. ۴) واگراست.

۴۲ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ به ازای کدام مقادیر x همگراست؟
(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $x>-e$ ۲) $x<\sqrt{e}$ ۳) $|x|<e$ ۴) $|x|<\sqrt{e}$

۴۳ـ بازه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟
(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) $[2,5)$ ۲) $(1,5]$ ۳) $[1,5)$ ۴) $(2,5]$

۴۴ـ بسط تیلور e^x حول $x=a$ به کدام صورت است؟
(مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۲) $e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۳) $e^{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{na}(x-a)^n}{n!}$

۴۵ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست؟
(مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$

۴۶ـ بازهٔ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ کدام است؟
(مهندسی معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,0)$ ۴) $(-\infty,0]$

۴۷ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست؟
(مهندسی معدن، استخراج معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$

۴۸ـ ضریب x^6 در بسط مک‌لورن $\cos x$ برابر است با:
(مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{6!}$ ۲) $-\frac{1}{6!}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{6}$

۴۹ـ سری توانی $\sum_{1}^{\infty}n^2x^n$:
(مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) همگرا است به ازاء $|x|<1$ و واگراست به ازاء $|x|>1$
۲) همگرا است به ازاء $|x|>1$ و واگراست به ازاء $|x|<1$
۲) همگرا است به ازاء تمام x ها
۴) واگرا است به ازاء تمام x ها

۵۰ـ کدامیک از عبارات زیر در مورد دنباله $n=1,2,\ldots$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ درست است؟
(عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) همگرا، صعودی و از بالا کراندار است.
۲) همگرا، نزولی و از پایین کراندار است.
۳) واگرا می‌باشد.
۴) وابسته به مقدار a_1 گزینه‌های ۲ و ۳ می‌توانند درست باشند.

۵۱ـ ضریب x^3 در بسط مک‌لورن تابع $\mathrm{Ln}(1+\sin x)$ برابر است با:
(مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) 0 ۴) 1

۵۲ـ ضریب x^5 در بسط مک لورن $\mathrm{Ln}(1+x)$ کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{5!}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{5!}$

۵۳ـ دنباله‌های مثبت $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ، آنگاه:
(MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) همگرایی $\sum u_n$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد.
۲) همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum(u_n+v_n)$ را نتیجه می‌دهد.
۳) همگرایی $\sum\frac{u_n}{v_n}$ همگرایی $\sum v_n$ را نتیجه می‌دهد.
۴) همگرایی $\sum v_n$ همگرایی $\sum(u_n+v_n)$ را نتیجه می‌دهد.

۵۴ـ کدام سری واگراست؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}n}{2n^2-1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\{(1+\frac{1}{n^2})^n-1\}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Ln}n)(\mathrm{LnLn}n)^2}$

۵۵ـ فاصله همگرائی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n x^n}{n3^n}$ کدام است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ ۲) $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ۳) $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ۴) $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$

۵۶ـ ضریب جمله x^4 در بسط مک‌لورن $f(x)=\cos x$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{24}$ ۴)

۵۷ـ کدام گزاره درست است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}n}{n}=1$ ۲) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=1$ ۳) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=0$ ۴) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

۵۸ـ بسط مک لورن تابع $\mathrm{Ln}(1+x)$ کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\ldots\ ,\ |x|<1$
۲) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\ldots\ ,\ |x|<1$
۳) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ ,\ |x|<1$
۴) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ ,\ |x|<1$

۵۹ـ فرض کنید: $f(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2}+\dots$ سری مک‌لورن f باشد. به ازای چه مقادیری از a_1 و a_2 نقطه‌ی $x=0$ برای f یک نقطه ماکسیمم است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $a_2=-2\ ,\ a_1=1$ ۲) $a_2=0\ ,\ a_1=0$ ۳) $a_2=-2\ ,\ a_1=0$ ۴) $a_2=0\ ,\ a_1=-1$

۶۰ـ مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt[5]{n}\cos n}{3n^{\frac{6}{5}}}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۶۱ـ هرگاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ به عدد a همگرا باشد سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K_n+b)$ به ازای $b\neq 0$ و $b\in R$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) به عدد b همگراست. ۲) واگراست. ۳) ممکن است همگرا باشد. ۴) به عدد a + b همگراست.

۶۲ـ کدامیک از احکام زیر همواره صحیح است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) هر دنباله صعودی واگراست.
۲) دنباله‌ای که نه صعودی باشد و نه نزولی، واگراست.
۳) هر دنباله صعودی از بالای کراندار، همگراست.
۴) دنباله‌ای که صعودی و از پایین کراندار باشد همگراست.

۶۳ـ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-1+\dots$ دارای کدامیک از مشخصات است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) همگراست. ۲) واگراست. ۳) دارای حد صفر است. ۴) در شرایطی همگراست.

۶۴ـ کدام سری همگراست؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n$ ۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}$

۶۵ـ اگر $A=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kLnk}$ و $B=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kLn^2k}$ کدام مورد درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $A=B=+\infty$ ۲) $A=+\infty$ و $B<+\infty$ ۳) $A<+\infty$ و $B<+\infty$ ۴) $A<+\infty$ و $B=+\infty$

۶۶ـ فرض کنید، $x_1=1$ و $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ برای $n\geq 2$، کدام گزاره درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) دنباله $\{x_n\}$ همگرا است.
۲) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است ولی همگرا نیست.
۳) دنباله $\{x_n\}$ یکنوا است ولی کراندار نیست.
۴) دنباله $\{x_n\}$ واگراست.

۶۷ـ فاصله همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $(4,6)$ ۲) $[4,6]$ ۳) $(-\infty,4)\cup(6,\infty)$ ۴) $(-\infty,4]\cup(6,\infty)$

۶۸ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum\frac{2^n}{n^2}Z^n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۹ـ مقدار سری $0<x<1$، $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ۲) $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{x-x^2}{(1+x)^3}$ ۴) $\frac{1-x}{(1+x)^3}$

۷۰ـ اگر $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$، مقدار S کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۷۱ـ کدام گزاره در مورد دنبالهٔ $x_n=\frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n})$، صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) همگرا با حد صفر است. ۲) واگراست. ۳) همگرا با حد یک است. ۴) $\frac{x_n}{n}$ همگرا به یک است.

۷۲ـ ضریب جملهٔ x^4 در بسط مک‌لورن تابع با ضابطه $y=x\sin 2x$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۷۳ـ کدام گزاره درمورد سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ صحیح است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) همگراست. ۲) واگراست.
۳) همگرا و مجموع آن صفر است. ۴) همگرا و مجموع آن یک است.

۷۴ـ اگر $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ و $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2}$، آنگاه کدام گزاره درست است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) A واگرا ولی B همگراست. ۲) B همگرا ولی A واگراست.
۳) A و B هر دو همگرا هستند. ۴) B و A هر دو واگرا هستند.

۷۵ـ در مورد سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an}$ $(a>0)$ کدام گزینه درست است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) به ازای تمام مقادیر a همگراست. ۲) به ازای تمام مقادیر a واگراست.
۳) به ازای $a=2$ همگراست و به ازای $a\neq 2$ واگراست. ۴) به ازای $a=2$ واگراست و به ازای $a\neq 2$ همگراست.

۷۶ـ کدام سری همگراست؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2n}}$ ۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3+4n-7}$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

۷۷ـ به ازای $n\geq 2$ عبارت $T_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\dots(1-\frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{n-1}{2n}$ ۲) $\frac{2n}{n-1}$ ۳) $\frac{2n}{n+1}$ ۴) $\frac{n+1}{2n}$

۷۸ـ ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $\tan x$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷۹ـ مقدار سری $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۰ـ شعاع همگرایی سری توانی بصورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}z^n$ برابر چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) e^{-1} ۲) یک ۳) e ۴) صفر

۸۱ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{n})^{n^2}Z^{n^2}$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) e e^2 (۴) e^{-2}

۸۲ـ شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)}Z^n$ بر ست با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۸۳ـ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $(x+1)e^x$ ۲) $(x^2+1)e^x$ ۳) x^2e^x ۴) $(x^2+x)e^x$

۸۴ـ در بسط تابع $f(x)=\mathrm{Ln}(1-x^2)$ به صورت یک سری برحسب توانهای صعودی x جمله عمومی به کدام صورت است؟

(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-x^{2n}}{n}$ ۲) $\frac{-x^{2n}}{n!}$ ۳) $(-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ ۴) $(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$

۸۵ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x^n}{(\log x)^n} = 4$ باشد، x کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

۸۶ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^6}\sum_{p=1}^{n} P^5)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۸۷ـ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(n+1)4^n}(x-1)^{3n}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $(0,\frac{5}{3})$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

۸۸ـ بازهٔ همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{0\}$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

۸۹ـ سری مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$ به کدام صورت است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{2n-1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) x^{2n+1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{2n}$

۹۰ـ شعاع همگرایی $\sum_{n=1} \frac{n!}{n^n} x^n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) e^{-1} ۲) ۱ ۳) e ۴) $+\infty$

۹۱ـ اگر $f(x)=(x-\frac{\pi}{6})-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^3}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})^5}{4!}-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^7}{6!}+\dots$ ، $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$

۹۲ـ فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که سری تیلور آن همه جا به آن همگراست. اگر $f(0)=2$ ، $f'(0)=2$ و برای $n \geq 2$ داشته باشیم $f^{(n)}(0)=3$ آنگاه $f(x)$ توسط کدام ضابطه داده می‌شود. (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $3e^x+2x-1$ ۲) $3e^x-x-1$ ۳) $e^{3x}+2x+1$ ۴) $3e^x-x+1$

۹۳ـ فاصلهٔ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۲) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ۳) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۴) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

۹۴ـ سری $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\dots$ مفروض است رفتار این سری از نظر همگرائی یا واگرائی به کدام صورت است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) همگرا به یک عدد گویا ۲) همگرا به یک عدد گنگ ۳) واگرا ۴) واگرای نوسانی

۹۵ـ حد دنباله $a_n=\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n+1}+\dots+\frac{1}{n^2+2n}$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۹۶ـ دنباله $a_n=\sqrt[2n]{3^n+5^n+7^n+9^n}$ مفروض است، حد آن کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۹۷ـ مجموع سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ برابر با کدام عدد است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{5}{8}-\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{8}+\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{4}-\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{5}{4}+\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$

۹۸ـ سری مک‌لورن تابع با ضابطه $f(x)=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}{n!(2n)}x^{2n+1}$

۲) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\times4\times\dots\times2n}{n!(2n+2)}x^{2n+1}$

۳) $x+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}{(2n+1)2^n n!}x^{2n+1}$

۴) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\times4\times\dots\times2n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$

۹۹ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{(n^2+n)^{1/2}}+\frac{1}{(n^2+n+1)^{1/2}}+\dots+\frac{1}{(n^2+2n)^{1/2}}\}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۰ـ اگر A سری $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\dots$ و B سری $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ باشند کدام گزینه در مورد این دو سری صحیح است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) A همگرا و B واگرا است. ۲) A واگرا و B همگرا است. ۳) هر دو همگرا است. ۴) هر دو واگرا هستند.

۱۰۱ـ مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) xe^x ۲) $x(e^x+1)$ ۳) $(x-1)e^x$ ۴) $x(e^x-1)$

۱۰۲ـ ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $\frac{x+1}{x^2+1}$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۰۳ـ ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $(x^2+5)e^x$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $-\frac{11}{6}$

۱۰۴ـ مجموع عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۵ـ کدامیک از سری‌های زیر واگرا هستند؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$

۱۰۶ـ بازه همگرایی عبارت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۳)

۱) $|x|<1$ ۲) $-2<x<2$ ۳) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ۴) $x>0$

۱۰۷ـ ضریب x در بسط مک‌لورن تابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e}{2}$

۱۰۸ـ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) xe^x ۲) x^2e^x ۳) $(x+1)e^x$ ۴) $(x^2+x)e^x$

۱۰۹ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5^n}-2^{-n})$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۱۰ـ در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ فاصله همگرایی کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $-1 \le x \le +1$ ۲) $-\infty < x < +\infty$ ۳) $-1 \le x < 1$ ۴) $\frac{-1}{2} \le x < \frac{1}{2}$

۱۱۱ـ سری تیلور تابع $Ln(1+x^2)$ کدامیک از عبارات زیر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}-\frac{x^8}{4!}+\dots$ ۲) $x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\dots$

۳) $x^2-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\dots$ ۴) $x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\dots$

۱۱۲ـ در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(2+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ضریب x^4 کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

۱۱۳ـ بازه همگرایی سری زیر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \ , \ a>b>0$$

۱) $(-a,a)$ ۲) $[-a,a)$ ۳) $(-b,b)$ ۴) $[-b,b)$

۱۱۴ـ در سری $\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$، فاصله همگرایی کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ϕ ۲) R ۳) $(-e,e)$ ۴) $(-e,0)$

۱۱۵ـ در بسط تابع $f(x)=e^{\sin x}$ به صورت توان‌های صعودی x ضریب x^4 کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{8}$

۱۱۶ـ بازهٔ همگرایی سری $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=2}^{n} \frac{1}{(Lnn)^2}(x-1)^n$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $(0,2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $[-1,1]$

۱۱۷ـ حد دنباله $n \ge 2$ ، $a_1=\sqrt{2}$, $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) e ۲) 3 ۳) 2 ۴) ∞

۱۱۸ـ اگر $|b|<|a|<1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) $\frac{b-1}{a-1}$

۱۱۹ـ سری توانی $1-3x^2+5x^4-7x^6+\dots, |x|<\infty$ به کدام تابع همگراست؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ ۲) $\frac{1-x}{1+x^2}$ ۳) $\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}$ ۴) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

۱۲۰ـ کدام سری واگراست؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100)^n}{n!}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{seehn}$

۱۲۱ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۲۲ـ مقدار $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) ∞

۱۲۳ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n \times 3^n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) 3 ۲) 2 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۴ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(x+1)^{2n}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 5

۱۲۵ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم

۱ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها می‌توان حدس زد که بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\sqrt{1+x}\cos x$ خواسته شده است.

$$f(x)=\sqrt{1+x}\cos x \Rightarrow f(0)=1\,,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\cos x-\sqrt{1+x}\sin x \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}\cos x-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sin x-\sqrt{1+x}\cos x \Rightarrow f''(0)=\frac{-5}{4}$$

بنابراین:

$$\sqrt{1+x}\cos x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+x^2\varepsilon(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

۲ـ گزینه «۲» سری داده شده مجموع دو سری هندسی می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

۳ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}x^{2n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{9})^n$$

حال، با فرض $y=\frac{x^2}{9}$ سری فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}x^{2n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}y^n$$

$$R_y=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}=|y|<1 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3 \Rightarrow R_x=3$$

۴ـ گزینه «۱»

$$\mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \Rightarrow \mathrm{Ln}(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots$$

۵ـ گزینه «۴» مثال حل شده در متن کتاب

۶ـ گزینه «۴»

$$R=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)!}{k!}=\lim_{k\to+\infty}(k+1)=+\infty \Rightarrow |x|<+\infty \Rightarrow -\infty<x<+\infty$$

۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

وقتی $n\to\infty$، $\frac{1}{n(\mathrm{Lnn})^2}\sim\frac{n}{n^2(\mathrm{Lnn})^2}\sim\frac{n}{(n^2-5)(\mathrm{Lnn})^2}$ و چون سری $\sum\frac{1}{n(\mathrm{Lnn})^2}$ همگراست، پس سری موردنظر نیز همگراست. اما به نظر نمی‌رسد مقدار همگرایی این سری را بتوان محاسبه نمود، و در صورت امکان محاسبه نیز هیچکدام از مقادیر داده شده صحیح به نظر نمی‌رسند.

۸ـ گزینه «۴» بازهٔ همگرایی سری $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ و $\sum a_nx^n$ با هم برابر است زیرا سری $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ از انتگرال‌گیری سری $\sum a_nx^n$ حاصل شده است. بنابراین کافی است بازه همگرایی سری $\sum a_nx^n$ را بدست آوریم. فرض کنید $y=x^2$، در اینصورت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$$

طبق فرض سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$، وقتی $|x|<4$ و یا $x^2<16$ باشد همگراست، بنابراین سری $\sum a_ny^n$ وقتی $|y|<16$ باشد همگرا خواهد بود.

۹ـ گزینه «۴»

$$S_1=-1\,,\ S_2=-\frac{1}{3}\,,\ S_3=-\frac{14}{15}\,,\ \cdots$$

با توجه به چند جمله اول دنباله ملاحظه می‌شود که دنباله صعودی یا نزولی نمی‌باشد، ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که به‌طور کلی $-1\le S_n\le 0$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۱۰ـ گزینه «۲» سری داده شده به فرم یک p ـ سری می‌باشد و برای همگرایی لازم است:

$$3p+3<-1 \Rightarrow 3p<-4 \Rightarrow p<-\frac{4}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۲»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{e} \Rightarrow R=e$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\frac{1}{4}}{n}-\frac{\frac{1}{4}}{n+4})=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{n})-(\frac{1}{n+4})]$$

اختلاف اندیس‌ها ۴ است، لذا چهار جمله اول پرانتز اول را می‌نویسیم.

$$\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-4\times\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+4})]=\frac{1}{4}\times\frac{25}{12}=\frac{35}{48}$$

۱۳ـ گزینه «۱»

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\qquad,\qquad S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

با مقایسه سریهای فوق با P سری واضح است که S_1 همگرا و S_2 واگراست.

۱۴ـ گزینه «۳»

$$\mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\mathrm{Ln}(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots \Rightarrow x\mathrm{Ln}(1+x^2)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\frac{x^9}{4}+\ldots$$

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}}=\frac{1}{e} \Rightarrow R=e$$

$$|x|<e \Rightarrow -e<x<e$$

۱۶ـ گزینه «۲»

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$$

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

سری مزبور به ازای $x=0$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ تبدیل می‌شود، که واگراست و به ازای $x=2$ به سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تبدیل می‌شود که همگراست.

۱۷ـ گزینه «۲»

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\log(k+1)-\log k}{\mathrm{Arctg}(\frac{2}{k})}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\mathrm{Arctg}\frac{2}{k}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k\mathrm{Ln}10}}{\frac{2}{k}}=\frac{1}{2\mathrm{Ln}10}$$

بنابراین سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد

۱۸ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})=1$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی دو سری $\sum a_n$ و $\sum(\frac{n+1}{n})a_n$ رفتار یکسانی دارند و چون طبق فرض سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است، پس سری $\sum(\frac{n+1}{n})a_n$ نیز همگرای مطلق است.

۱۹ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $y=2x+1$، و شعاع همگرایی سری حاصل را R_y فرض می‌کنیم. در این سری $a_n=\frac{1}{(n^2+1)3^n}$. بنابراین:

$$R_y=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{((n+1)^2+1)3^{n+1}}{(n^2+1)3^n}|=3$$

پس برای به دست آوردن شعاع همگرایی سری اصلی به جای y، مقدار آن یعنی $2x+1$ را قرار می‌دهیم:

$$|y|<3\Rightarrow|2x+1|<3\Rightarrow|x+\frac{1}{2}|<\frac{3}{2}\Rightarrow R_x=\frac{3}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۳» جملات دنباله داده شده را می‌توان به صورت بازگشتی $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ و $a_1=\sqrt{2}$ تعریف کرد. اگر حد جمله عمومی دنباله را L فرض کنیم، در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2a_n}\Rightarrow L=\sqrt{2L}\Rightarrow L=2$$

۲۱ـ گزینه «۲» بسط e^{-x} حول نقطه صفر به صورت روبرو است:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$xe^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\cdots\Rightarrow \text{ضریب } x^4=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

۲۲ـ گزینه «۳»

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{(n+1)}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{3})^n+2(\frac{2}{3})^n]$$

با دقت ملاحظه می‌گردد که دو سری هندسی داریم:

$$S=S_1+S_2=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+2\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$$

۲۳ـ گزینه «۲» ملاحظه می‌گردد که یک سری تلسکوپی داریم:

$$\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{999}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{1}-\frac{1}{999+1}=1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}=0/999$$

۲۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم سری توانی $\frac{1}{1-x}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

۲۵ـ گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{p}{2}}}$$

پس سری داده شده هم‌ارزی یک سری p است و برای همگرایی باید $\frac{p}{2}>1$ یا $p>2$ باشد.

۲۶ـ گزینه «۳» نخست توجه کنید که به ازای هر $1\le k\le n$ داریم:

$$\frac{2n}{n^2+n}\le\frac{2n}{n^2+k}<\frac{2n}{n^2}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2}$$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2 \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty}S_n=2$.

۲۷ـ گزینه «۲» سری داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{n}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{n}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})=\frac{1}{1!}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$$

۲۸ـ گزینه «۴» واضح است که:

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}\ ,\ 0<\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{n^2}\ ,\ \ldots,0<\frac{1}{(n+n)^2}<\frac{1}{n^2}\Rightarrow0<a_n<n\times\frac{1}{n^2}\Rightarrow0<a_n<\frac{1}{n}$$

حد دنباله‌های $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{0\}$ هر دو برابر صفر است، پس $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

۲۹ـ گزینه «۲» واضح است که $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ و چون سری $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست، بنابراین سری $\sum a_n$ نیز طبق آزمون مقایسه همگراست. چون $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{Arcsin}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$، پس طبق آزمون مقایسه حدی واگرایی سری $\sum\frac{1}{n}$، واگرایی سری $\sum b_n$ را نتیجه می‌دهد.

۳۰ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n}=2$$

$$|x-1|<2\Rightarrow-2<x-1<2\Rightarrow-1<x<3$$

۳۱ـ گزینه «۲»

$$R=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to+\infty}|\frac{\frac{1}{n(\ln n)^2}}{\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}}|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(\ln(n+1))^2}{n(\ln n)^2}=1\Rightarrow|x-2|<1\Rightarrow-1<x-2<1\Rightarrow1<x<3$$

۳۲ـ گزینه «۲»

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-1=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-3=2e-3$$

۳۳ـ گزینه «۳»

$$R=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n3^n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}\times 2^n}{n3^n\times 2^{n+1}}=\frac{3}{2}$$

بنابراین سری در فاصله $\frac{-3}{2}<x<\frac{3}{2}$ همگراست. در نقطه $x=\frac{3}{2}$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ در می‌آید که همگراست ولی به ازای $x=\frac{-3}{2}$ سری به صورت $\sum\frac{-1}{n}$ در می‌آید که مضرب همساز می‌باشد و واگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۴ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که به ازای هر $n\in N$ داریم: $na_n\ge a_n$ و چون سری $\sum a_n$ واگراست، پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum na_n$ واگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۵ـ گزینه «۱» نخست توجه کنید که:

$$y=\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$$

برای نوشتن بسط مک‌لورن $\cos 4x$، کافی است در بسط $\cos x$، به جای x، $4x$ قرار دهیم. بنابراین:

$$y=\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\cdots\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶ـ گزینه «۱» سری t با توجه به P سری، چون $P=1$ می‌باشد واگراست. برای سری دوم ابتدا شرط لازم را بررسی می‌کنیم:

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \mathrm{Ln}y=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \mathrm{Ln}y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}y=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\frac{1}{n}}{n}\xrightarrow{HOP}\mathrm{Ln}y=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow \mathrm{Ln}y=0\Rightarrow y=e^0=1$$

ملاحظه می‌گردد که حد دنباله صفر نیست و چون سری شرط لازم همگرائی را ندارد، لذا سری واگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷ـ گزینه «۲» معادله مشخصه رابطه بازگشتی داده شده به صورت روبرو است: $r^2=\frac{1}{2}(r+1)\Rightarrow 2r^2-r-1=0\Rightarrow r_1=1\ ,\ r_2=\frac{-1}{2}$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $x_n=a_1r_1^n+a_2r_2^n=a_1+a_2\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

چون طبق فرض $x_1=1$ و $x_2=2$، پس:

$$\begin{cases}a_1-\frac{1}{2}a_2=1\\ a_1+\frac{1}{4}a_2=2\end{cases}\Rightarrow a_1=\frac{5}{3}\ ,\ a_2=\frac{4}{3}$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به صورت روبرو نوشت: $x_n=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{5}{3}$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^ne^{-2}}{(n-2)!}=4e^{-2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}=4e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=4e^{-2}\times e^2=4$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۹ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow|x-2|<1\Rightarrow 1<x<3$$

در $x=1$ سری به صورت $\sum n(-1)^n$ در می‌آید که واگراست و در $x=3$ به صورت $\sum n$ در می‌آید که واگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰ـ گزینه «۳» بسط مک لورن تابع $y=\mathrm{Arctg}x$ به صورت روبرو است: $\mathrm{Arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$

اگر در بسط فوق به جای x مقدار یک را قرار دهیم به دست می‌آید: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\mathrm{Arctg}1=\frac{\pi}{4}$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۱ـ گزینه «۳»

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)}_{\text{سری تلسکوپی}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}_{\text{سری هندسی}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{10}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۲ـ گزینه «۴» از آزمون ریشه nام استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x^2}{e}<1\Rightarrow|x|<\sqrt{e}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۳ـ گزینه «۳»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n}=2$$

$$|x-3|<2\Rightarrow -2<x-3<2\Rightarrow 1<x<5$$

همچنین به ازای $x=5$ سری واگرا و به ازای $x=2$ سری همگراست. پس $(1,5]$ بازهٔ همگرایی می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۴ـ گزینه «۳»

$$f(x)=e^x\Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(n)}(a)=e^a\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵ـ گزینه «۳» فرض کنید $a_n=\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$، چون $a_{n+1}<a_n$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، بنابراین طبق آزمون لایب نیتس سری متناوب $\sum(-1)^n\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$ همگرا می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶ـ گزینه «۱» برای اینکه سری داده شده همگرا باشد، طبق آزمون نسبت لازم است:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x}$$

پس برای همگرایی کافی است $e^{-x}<1$ باشد، و بنابراین $x>0$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۷ـ گزینه «۳» فرض کنید $a_n=\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$، چون $a_{n+1}<a_n$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، بنابراین طبق آزمون لایب نیتز سری متناوب $\sum(-1)^n\frac{\mathrm{Ln}n}{n}$ همگرا می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۸ـ گزینه «۲» بسط مک‌لورن $\cos x$ به صورت روبرو است: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=1\Rightarrow|x|<R\Rightarrow|x|=1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اگر $a_1<2$، دنباله حاصل صعودی و از بالا کراندار است و اگر $a_1>2$، آنگاه دنباله حاصل نزولی و از پایین کراندار خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم بسط $Ln(1+u)$ به شکل روبرو است:

$$Ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\dots$$

حال به جای u، $\sin x$ قرار می‌دهیم:

$$Ln(1+\sin x)=\sin x-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}-\dots$$

در بسط فوق، در جمله اول ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{6}$، در جمله دوم ضریب x^3 صفر، و در جمله سوم ضریب x^3 برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد، در تمام جملات بعدی نیز ضریب x^3 برابر صفر است. بنابراین:

$$x^3 \text{ ضریب } =\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

۵۲ـ گزینه «۳»

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

۵۳ـ گزینه «۲» و «۴» صحیح است! از رابطه $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$ به ازای $n=1,2,\dots,k-1$ به دست می‌آید:

$$\frac{u_2}{u_1}\le\frac{v_2}{v_1}\ ,\ \frac{u_3}{u_2}\le\frac{v_3}{v_2}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{u_k}{u_{k-1}}\le\frac{v_k}{v_{k-1}}$$

با ضرب کردن روابط فوق در یکدیگر، خواهیم داشت $\frac{u_k}{u_1}\le\frac{v_k}{v_1}$ و یا $u_k\le\frac{u_1}{v_1}.v_k$. بنابراین طبق آزمون مقایسه همگرایی $\sum v_n$، همگرایی $\sum u_n$ را نتیجه می‌دهد و بنابراین همگرایی $\sum(u_n+v_n)$ نتیجه می‌شود.

۵۴ـ گزینه «۳» وقتی $n\to+\infty$ داریم:

$$(1+\frac{1}{n^2})^n-1\sim 1+n(\frac{1}{n^2})-1=\frac{1}{n}$$

و چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست. پس سری $\sum\{(1+\frac{1}{n^2})^n-1\}$ نیز واگرا می‌باشد.

۵۵ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n3^n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}\times 2^n}{n3^n\times 2^{n+1}}=\frac{3}{2}$$

$$|x|<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{-3}{2}<x<\frac{3}{2}$$

در نقطه مرزی $x=\frac{3}{2}$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ در می‌آید که همگراست، و در نقطه مرزی $x=\frac{-3}{2}$ به صورت $\sum\frac{-1}{n}$ در می‌آید که واگراست.

۵۶ـ گزینه «۳»

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\Rightarrow x^4 \text{ ضریب } =\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

۵۷ـ گزینه «۴» علت اشتباه بودن سه گزینه دیگر را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱) : $A=\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$

گزینه ۲) : $A=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{1}=e^{+\infty}=+\infty$

گزینه ۳) : $A=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1$

۵۸ـ گزینه «۴»

۵۹ـ گزینه «۳» بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ به صورت روبرو است:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+\dots$$

چون $x=0$ قرار است یک نقطه ماکزیمم برای تابع باشد لذا باید $f'(0)=0$ و $f''(0)<0$ باشد پس باید $a_1=0$ و $a_2<0$ باشد.

۶۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n+\sqrt[6]{n}\cos n}{3n^{\frac{6}{5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2n}{3n^{\frac{6}{5}}}=0$$

توجه شود که در صورت کسر چون $n\to\infty$ لذا از جمله دوم در مقابل $2n$ صرف‌نظر کردیم و در قسمت دوم چون توان n مخرج بیشتر از توان n صورت بود، حاصل حد برابر صفر شد.

۶۱ـ گزینه «۲»

روش اول: سری واگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n+b=\sum_{n=1}^{\infty}k_n+\sum_{n=1}^{\infty}b=a+\sum_{n=1}^{\infty}b=a+\infty=\infty$$

روش دوم: طبق فرض سری $\sum k_n$ همگراست، پس $\lim_{n\to\infty}k_n=0$. ولی سری $\sum(k_n+b)$ شرط لازم برای همگرایی را ندارد:

$$\lim_{n\to\infty}(k_n+b)=\lim_{n\to\infty}k_n+\lim_{n\to\infty}b=0+b=b$$

و چون $b\neq 0$ پس سری $\sum(k_n+b)$ واگراست.

۶۲ـ گزینه «۳»

۶۳ـ گزینه «۲» سری داده شده شرط لازم برای همگرایی را ندارد، بنابراین واگراست.

۶۴ـ گزینه «۴» فرض کنید $a_n=\frac{n+1}{n^2}$، در این صورت واضح است که $a_{n+1}<a_n$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، بنابراین طبق آزمون لایب‌نیتز سری داده شده همگراست.

۶۵ـ گزینه «۲»

۶۶ـ گزینه «۱»

۶۷ـ گزینه «۲»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$$

$$|x-5|<1\Rightarrow 4<x<6$$

سری در هر دو سر بازه یعنی ۴ و ۶ نیز همگراست، پس بازه همگرایی $[4,6]$ می‌باشد.

۶۸ـ گزینه «۴»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

۶۹ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

با مشتق‌گیری از رابطه اخیر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۰ـ گزینه «۲» می‌دانیم، اگر $a_n \to 0$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + a_{n+1}) = -a_1$ بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -(-1) = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱ـ گزینه «۳» قرار می‌دهیم $a_n = \sqrt[n]{n}$ بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

بنابراین x_n میانگین حسابی a_n می‌باشد و چون $a_n \to 1$ پس $x_n \to 1$.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۲ـ گزینه «۲» در بسط مک‌لورن تابع $\operatorname{Sin} x$، به جای x، $2x$ قرار می‌دهیم. در اینصورت داریم:

$$\operatorname{Sin} 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \cdots \Rightarrow x \operatorname{Sin} 2x = 2x^2 - \frac{8x^4}{6} + \cdots$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳ـ گزینه «۲» چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$، بنابراین واگرایی سری $\sum \frac{1}{n}$، واگرایی سری داده شده را نتیجه می‌دهد. (آزمون مقایسه حدی در سریها).

◆ ◆ ◆ ◆

۷۴ـ گزینه «۳» چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\operatorname{Cos}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$، پس همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^2}$، همگرایی سری $\sum (1-\operatorname{Cos}\frac{1}{n})$ را نتیجه می‌دهد. (طبق آزمون مقایسه حدی).

واضح است که $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} < \frac{\sqrt{n}-1}{n^2}$، پس طبق آزمون مقایسه، همگرایی $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$، همگرایی سری B را نتیجه می‌دهد.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۵ـ «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n + 1}{\underbrace{\sqrt{n^4 + 2n + 1}}_{\sim n^2} + \underbrace{\sqrt{n^4 + an}}_{\sim n^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n}{2n^2} = \frac{2-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، سری همساز می‌باشد و واگراست پس فقط به ازای $a = 2$ سری موردنظر همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۶ـ گزینه «۲» واضح است که $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n}}$، و چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n}}$ نیز همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۷ـ گزینه «۴»

$$T_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{n}) = (\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\ldots.\frac{n-1}{n}) \times (\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\ldots.\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۸ـ گزینه «۲» $\operatorname{tg} x$ تابعی فرد است، بنابراین ضریب x^4 در بسط مک‌لورن آن برابر صفر خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۹ـ گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+(n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = -\frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^{\infty}}{\infty} = +1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۰ـ گزینه «۳»

$$\frac{1}{R} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۱ـ گزینه «۴» از آزمون ریشه nام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(1+\frac{2}{n})^{n^2} z^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} ((1+\frac{2}{n})^n |z|)^n = \lim_{n\to\infty} (|z| e^2)^n$$

هرگاه حاصل حد فوق کوچکتر از ۱ باشد سری همگراست، و برای اینکه حاصل حد کوچکتر از ۱ باشد باید $|z| e^2 < 1$ و بنابراین $|z| < \frac{1}{e^2}$ پس شعاع همگرایی $\frac{1}{e^2}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲ـ گزینه «۳»

روش اول:

$$R = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2n)!(n+1)^2 \times (n!)^2}{(n!)^2(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

روش دوم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\frac{n}{e})^{2n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{n}{e})} = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۳ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} + xe^x = x^2 e^x + xe^x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۴ـ گزینه «۱» می‌دانیم جمله عمومی بسط مک‌لورن $\operatorname{Ln}(1+u)$ به صورت زیر است:

$$\operatorname{Ln}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}$$

با قرار دادن $-x^2$ به جای u خواهیم داشت:

$$\operatorname{Ln}(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{2n}}{n}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۵ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x^n}{(\log x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log x}{(\log x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\log x)^{n-1}}$$

با فرض $\frac{1}{\log x}=t$، مجموع فوق به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ در می‌آید. برای محاسبه این مجموع به ترتیب زیر عمل می‌کنیم، می‌دانیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n=\frac{1}{1-t}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}=\frac{1}{(1-t)^2}\Rightarrow\frac{1}{(1-t)^2}=4\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

بنابراین $\frac{1}{2}=\frac{1}{\log x}$ و از آنجا $\log x=2$، و در نتیجه $x=100$.

۸۶ـ گزینه «۱» هرگاه $n\to\infty$ داریم: $1^5+2^5+3^5+\dots+n^5\sim\frac{n^6}{6}$، پس:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^6}\sum_{p=1}^{n} p^5\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^6}.\frac{n^6}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

۸۷ـ گزینه «۴» برای تعیین بازه همگرایی از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{2n}}{(n+1)4^n}(x-1)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{4\sqrt[n]{n+1}}(x-1)^2=\frac{9}{4}(x-1)^2$$

برای اینکه سری همگرا باشد، لازم است $\frac{9}{4}(x-1)^2<1$ باشد که از آن نتیجه می‌شود $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$

۸۸ـ گزینه «۴»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\infty$$

پس بازه همگرایی $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد.

۸۹ـ گزینه «۳» بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+x}$ به صورت روبرو می‌باشد:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}\xrightarrow{\text{به جای } x \text{، } x^2 \text{ قرار می‌دهیم}}\frac{-1}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین}\times x}\frac{x}{(1+x^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+1}$$

۹۰ـ گزینه «۳» با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

۹۱ـ گزینه «۳» با جایگزینی $x-\frac{\pi}{6}$، به جای x در بسط $\cos x$، خواهیم داشت:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=1-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})^4}{4!}-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^6}{6!}+\dots$$

با ضرب کردن طرفین رابطه فوق در $x-\frac{\pi}{6}$ به دست می‌آید:

$$(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=(x-\frac{\pi}{6})-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^3}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})^5}{4!}-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^7}{6!}+\dots$$

پس:

$$f(\frac{\pi}{3})=(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

۹۲ـ گزینه «۲»

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots=2+2x+3(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots)=3(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})-1-x=3e^x-1-x$$

۹۳ـ گزینه «۳» از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(\sin x)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\sin x}{n+1}\right|=|\sin x|$$

برای اینکه سری همگرا باشد، لازم است $|\sin x|<1$ و بنابراین $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ باشد و در نقطه مرزی $x=\frac{\pi}{2}$ سری به $\sum\frac{1}{n}$ تبدیل می‌شود که واگراست و در نقطه مرزی $x=\frac{-\pi}{2}$ سری به $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ تبدیل می‌شود که همگراست.

۹۴ـ گزینه «۳»

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\dots=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots)$$

سری $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$، سری همساز است که واگرا به $+\infty$ می‌باشد و سری $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ سری هندسی است که همگرا به $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ می‌باشد. بنابراین سری موردنظر واگرا به $+\infty$ می باشد.

۹۵ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{n^2+2n}\le\frac{1}{n^2+n+k}\le\frac{1}{n^2+n}$$

بنابراین:

$$\frac{n}{n^2+2n}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2+n+k}\le\frac{n}{n^2+n}$$

و چون $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2n}=0$، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

۹۶ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{3^n+5^n+7^n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{9^n}=3$$

۹۷ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که بسط مک‌لورن $\ln(1+x)$ به صورت زیر است:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

با جایگزینی $x=\frac{-1}{2}$ در رابطه فوق به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\frac{-1}{2})^n}{n}=\ln(1-\frac{1}{2})\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n2^n}=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{8}-\ln\frac{1}{2}=\frac{-5}{8}-\ln\frac{1}{2}$$

۹۸ـ گزینه «۳» تابع داده شده همان تابع $\operatorname{Arcsinh} x$ می‌باشد.

۹۹ـ گزینه «۳» واضح است که هر یک از جملات مجموع فوق بین $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ قرار دارند. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

حد چپ و حد راست در عبارت فوق برابر $\underline{\underline{1}}$ می‌باشد، پس طبق قضیه ساندویچ حد خواسته شده نیز برابر $\underline{\underline{1}}$ می‌باشد.

۱۰۰ـ گزینه «۳» قدر مطلق جملات هر دو سری نزولی می‌باشد و حد جملات عمومی آنها نیز برابر صفر است، پس هر دو سری طبق آزمون لایب نیتز همگرا هستند.

۱۰۱ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=x(e^x-1)$$

۱۰۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+x}$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+x^3+\ldots\xrightarrow{\text{به جای } x \text{، } x^2 \text{ قرار می‌دهیم}}\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \times(x+1)}\frac{x+1}{1+x^2}=(x+1)(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)$$

و جمله x^3، فقط از ضرب x در $-x^2$ ایجاد می‌شود، پس ضریب آن برابر ۱- خواهد بود.

۱۰۳ـ گزینه «۳»

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$(x^2+5)e^x=x^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)+5\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$$

$$\text{ضریب } x^3 = 1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

۱۰۴ـ گزینه «۱» سری داده شده، سری تلسکوپی می‌باشد، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\times1-3}-\frac{1}{4\times\infty+1}\right)=\frac{1}{2}$$

۱۰۵ـ گزینه «۲» درمورد سری $\sum(-1)^n\frac{3^n}{n^2}$ داریم: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n^2}=\infty$، بنابراین سری مزبور شرط لازم برای همگرایی را ندارد. پس واگراست.

۱۰۶ـ گزینه «۲»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\times2^{n+1}}{(n+1)^2\times2^n}=2$$

$$|x|<2 \Rightarrow \underbrace{-2<x<2}_{\text{بازه همگرایی}}$$

۱۰۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع داده شده در $x=0$ تعریف نشده و بنابراین بسط مک‌لورن ندارد.

۱۰۸ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n+1}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}+xe^x=x^2e^x+xe^x=(x^2+x)e^x$$

۱۰۹ـ گزینه «۲»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}-2^{-n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{-3}{4}$$

۱۱۰ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=1$$

پس سری در فاصله $-1<x<1$ همگراست. در نقاط مرزی ۱- و ۱ سری به ترتیب به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ و $\sum\frac{1}{n^2}$ در می‌آید که هر دو سری همگرا هستند.

۱۱۱ـ گزینه «۲» کافی است در بسط $\text{Ln}x$، به جای x، x^2 قرار دهیم.

۱۱۲ـ گزینه «۴»

$$f'(x)=5x(2+x^2)^{\frac{3}{2}}\ ,\ f''(x)=5(2+x^2)^{\frac{3}{2}}+15x^2(2+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'''(x)=45x(2+x^2)^{\frac{1}{2}}+15x^3(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f^{(4)}(x)=45(2+x^2)^{\frac{1}{2}}+90x^2(2+x^2)^{\frac{-1}{2}}-15x^4(2+x^2)^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow f^{(4)}(0)=45\sqrt{2}$$

$$\text{ضریب } x^4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{45\sqrt{2}}{24}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

۱۱۳ـ گزینه «۱»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+b^n}}{\frac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$$

$$|x|<a \Rightarrow -a<x<a$$

به ازای $x=a$ و $x=-a$ سری به ترتیب به صورت $\sum\frac{a^n}{a^n+b^n}$ و $\sum\frac{(-a)^n}{a^n+b^n}$ در می‌آید که هر دو سری واگرا می‌باشند، زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارند.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=1\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{(-a)^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\text{حد موجود نیست}$$

۱۱۴ـ گزینه «۳»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{e^n}}=\frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e\Rightarrow \text{فاصله همگرایی}=(-e,e)$$

(در محاسبات فوق از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ استفاده کرده‌ایم.)

۱۱۵ـ گزینه «۲» سری مک‌لورن $\sin x$ را به جای $\sin x$ قرار می‌دهیم و چون می‌خواهیم ضریب x^4 را محاسبه کنیم. بنابراین کافی است بسط $\sin x$ را تا x^3 بنویسیم.

$$e^{\sin x}\sim e^{x-\frac{x^3}{6}}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3!}+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^4}{4!}+\ldots$$

ضریب x^4 در جملات $(x-\frac{x^3}{6})$ و $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3!}$ برابر صفر است (زیرا هر دو جمله فقط شامل توانهای فرد می‌باشند. ضریب x^4 در جملـه سـوم یعنی $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2!}$ برابر $\frac{-1}{6}$ و در جمله پنجم یعنی $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^4}{4!}$ برابر $\frac{1}{24}$ می‌باشد.) بنابراین: ضریب $x^4 = \frac{-1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{-1}{8}$

۱۱۶ـ گزینه «۳»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(\mathrm{Ln}(n+1))^2}}{\frac{1}{(\mathrm{Ln}\,n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{Ln}\,n)^2}{(\mathrm{Ln}(n+1))^2}=1$$

$$|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2$$

در نقطه مرزی $x=0$، سری به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{(\mathrm{Ln}\,n)^2}$ در می‌آید که همگراست و در $x=2$، سری به صورت $\sum\frac{1}{(\mathrm{Ln}\,n)^2}$ در می‌آید که واگراست.

۱۱۷ـ گزینه «۳» وقتی $n\to\infty$ آنگاه مقدار a_n و a_{n-1} تقریباً با هم برابر است. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ در نظر گرفته شود داریم:

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}} \Rightarrow L=\sqrt{2+L} \Rightarrow L^2=2+L \Rightarrow (L+1)(L-2)=0 \Rightarrow L=2$$

۱۱۸ـ گزینه «۴» در صورت و مخرج کسر یک سری هندسی با جملات نامحدود داریم:

$$S=\frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}=\frac{b-1}{a-1}$$

۱۱۹ـ گزینه «۴» تابع مورد‌نظر را که سری به آن همگراست $f(x)$ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$\int f(x)dx=x-x^3+x^5-x^7+\dots=x(1-x^2+x^4-x^6+\dots)=\frac{x}{1+x^2}$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه $\int f(x)dx=\frac{x}{1+x^2}$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{1\times(1+x^2)-2x\times x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

۱۲۰ـ گزینه «۱»

$$\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=\sum\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگراست. لذا با استفاده از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$$

با توجه به آزمون مقایسه حدی هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$ باشد. اگر سری b_n واگرا باشد آنگاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگرا خواهد بود.

۱۲۱ـ گزینه «۱» به نکته روبرو توجه کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\times\dots(n+k)}=\frac{1}{k\,k!}$$

در این تست $k=2$ می‌باشد لذا $S=\frac{1}{2\times2!}=\frac{1}{4}$ می‌باشد.

۱۲۲ـ گزینه «۲»

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+1)^2-j^2}{j^2(j+1)^2}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(j+1)^2}\right)=1$$

۱۲۳ـ گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n\times3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

۱۲۴ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $y=(x+1)^2$. در این صورت سری به صورت $\sum\frac{n}{5^n}y^n$ در می‌آید.

$$R_y=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{5^n}}{\frac{n+1}{5^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n}=5$$

پس شعاع همگرایی سری اولیه برابر $R_x=\sqrt{R_y}=\sqrt{5}$ می‌باشد.

۱۲۵ـ گزینه «۴» سری تلسکوپی می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

تست‌های تکمیلی فصل ششم

۱ـ رابطهٔ صحیح کدام است؟

۱) $\sum_{i=p}^{n}(k+x_i)=(n-p)k+\sum_{i=p}^{n}x_i$
۲) $\sum_{i=p}^{n}(k+x_i)=(n-p+1)k+\sum_{i=p}^{n}x_i$
۳) $\sum_{i=p}^{n}(k+x_i)=(n-p-1)k+\sum_{i=p}^{n}kx_i$
۴) $\sum_{i=p}^{n}(k+x_i)=(n-p)k+\sum_{i=p}^{n}kx_i$

۲ـ کدامیک از سری‌های زیر همگراست؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

۳ـ سری $\sum\frac{n+1}{n^{\alpha}}$ در صورتی همگراست که:

۱) $\alpha\le 2$ ۲) $\alpha\ge 2$ ۳) $\alpha<2$ ۴) $\alpha>2$

۴ـ فاصله همگرایی سری $S=1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\dots+\frac{(x-1)^n}{n^2}$ کدام است؟

۱) $-1\le x\le 1$ ۲) $x>2$ ۳) $0\le x\le 2$ ۴) $-2\le x\le 2$

۵ـ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ همگرا است. ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است. ۳) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,\mathrm{Ln}(n)}$ واگرا است. ۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{Ln}(n)}{n}$ واگرا است.

۶ـ حد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

۷ـ شعاع همگرایی سری $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2\times 2}+\frac{x^3}{2^3\times 3}+\dots$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

۸ـ سومین جمله بسط تیلور برای $f(x)=\cos 2x$ برحسب توان‌های $x-\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $2(x-\frac{\pi}{2})^2$ ۳) $-2(x-\frac{\pi}{2})^2$ ۴) $\frac{4(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}$

۹ـ ضریب x^4 در بسط سری تیلور تابع $y=e^{-x^2}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰ـ تابع $f(n)=\frac{10n^2}{n^2+14}$ مفروض است. عبارت صحیح درمورد این تابع کدام است؟

۱) تابع دارای کران بالای صفر دارد.
۲) تابع دارای کران بالای $\frac{5}{7}$ دارد.
۳) تابع کران‌دار نیست.
۴) تابع دارای کران بالای ۱۰ دارد.

۱۱ـ بزرگترین جملهٔ دنباله $a_n=\frac{n^2}{n^3+4000}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{40}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{30}$

۱۲ـ اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) عددی مخالف صفر ۳) هر عدد حقیقی ۴) یک

۱۳ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۴ـ کدام حکم همواره درست می‌باشد؟

۱) دنباله واگرا نامحدود می‌باشد.
۲) هر دنباله‌ای همگرا می‌باشد.
۳) دنباله‌ای که کراندار باشد همگراست.
۴) هر دنبالهٔ صعودی و کراندار، همگرا می‌باشد.

۱۵ـ کدامیک از دنباله‌های زیر صعودی است؟

۱) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{n^2}{2n}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}$

۱۶ـ شعاع همگرایی سری $S=1+x+2x^2+6x^2+\dots$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) ۴

۱۷ـ کدام دنباله واگرا است؟

۱) $\{\sqrt[n]{n}\}$ ۲) $\{\sqrt{n}-2\}$ ۳) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ۴) $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

۱۸ـ دنباله $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+5}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

۱۹ـ دنباله $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$ دارای کدامیک از خاصیتهای زیر است؟

۱) نه نزولی است و نه صعودی است
۲) نزولی است
۳) کراندار نیست
۴) کراندار است ولی همگرا نیست

۲۰ـ کدامیک از سری‌های زیر همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{3^n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$ ۴) هر سه مورد

۲۱ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{5^n}\right)$ ... است.

۱) همگرا به $\frac{8}{15}$ ۲) همگرا به ۱ ۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

۲۲ـ سری $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n+1]{8}-\sqrt[n]{8}\right)$ ... است.

۱) واگرا ۲) همگرا به ۱- ۳) همگرا به ۲- ۴) همگرا به صفر

۲۳ـ اگر مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ برابر با عدد e باشد حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-5}{3a_n^2+3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3e}$ ۳) $\frac{-5}{3}$ ۴) صفر

۲۴ـ کدامیک از دنباله‌های زیر واگرا است؟

۱) $\left\{\ln\frac{1}{n-1}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n}}\right\}$ ۳) $\left\{\sin\frac{\pi}{n+1}\right\}$ ۴) $\left\{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}\right\}$

۲۵ـ کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست ؟

۱) $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\}$ ۲) $\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$ ۳) $\{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}\}$ ۴) $\{1+(-1)^n\}$

۲۶ـ دنباله $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\dots$ همگرا به کدام عدد است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۲

۲۷ـ دنباله $\{(-1)^n\cos n\pi\}$:

۱) همگرا به ۱ است ۲) همگرا به صفر است ۳) واگراست ۴) همگرا به ۲ است .

۲۸ـ دنباله $\{\frac{4^n-3^n}{4^n}\}$ به کدام عدد همگراست ؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۹ـ اگر دنباله‌های $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ واگرا باشند، در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است ؟

۱) دنباله $\{a_n b_n\}$ همگراست. ۲) دنباله $\{a_n b_n\}$ واگراست. ۳) دنباله $\{a_n+b_n\}$ واگراست. ۴) هیچکدام

۳۰ـ دنباله $\{\frac{n+\cos n}{3n}\}$ به کدام عدد همگراست ؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) واگراست

۳۱ـ کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست ؟

۱) $n\sqrt[5]{n}$ ۲) $\{n\cos^2\frac{\pi}{n}\}$ ۳) $\{(-1)^n\frac{n+2}{n+3}\}$ ۴) $\frac{5^n}{n!}$

۳۲ـ کدامیک از دنباله‌های زیر نزولی است ؟

۱) $\{\sqrt{n}\}$ ۲) $\{1-\frac{1}{n}\}$ ۳) $\frac{4n+1}{3n+1}$ ۴) $\{1-\frac{1}{2^n}\}$

۳۳ـ دنباله $\frac{n}{\pi}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ به کدام عدد همگراست ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{\pi}$

۳۴ـ دنباله $\{\frac{\cos n+\sqrt{2}\,n^2}{n^2+100}\}$ به کدام عدد همگراست ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{100}$

۳۵ـ دنباله $\{\frac{15^n+(-15)^n}{4^{2n}}\}$ به کدام عدد همگرا است ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{4}{15}$

۳۶ـ در مورد دنباله $\{\frac{9^n+(-9)^n}{9^n}\}$ کدام گزاره صحیح است ؟

۱) همگرا به صفر است ۲) همگرا به ۲ است ۳) واگراست ۴) همگرا به $\frac{1}{9}$ است .

۳۷ـ کدامیک از دنباله‌های زیرکراندار نیست ؟

۱) $x_n=\frac{5n^2}{n^2+3}$ ۲) $x_n=(-1)^n\frac{2n}{n+3}\cos n$ ۳) $x_n=n\cos\pi n$ ۴) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{5}$

۳۸ـ در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ کدام گزاره صحیح است ؟

۱) سری همگرائی مشروط دارد ۲) سری همگرائی مطلق دارد ۳) سری واگراست ۴) هیچکدام

۳۹ـ به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n.2^n}$ همگراست ؟

۱) $-3<x<1$ ۲) $-2<x<1$ ۳) $x<1$ ۴) $-3<x\le 1$

۴۰ـ اگر $x>0$ باشد آنگاه حاصل $S=\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\cdots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\cdots$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۴۱ـ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) سری واگراست ۴) ۰

۴۲ـ کدامیک از سریهای زیر واگراست ؟

۱) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^3-2}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

۴۳ـ کدامیک از سریهای زیر واگراست ؟

۱) $\sum\frac{Lnn}{2n^3-1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^2+3}$

۴۴ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست ؟

۱) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$

۴۵ـ کدامیک از سریهای زیر واگراست ؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4e^{-n^2}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n}{n.5^n})$

۴۶ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست ؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin^2\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(Lnn)^2}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-Lnn}{n^2+10n^3}}$ ۴) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Lnn}{n}$

۴۷ـ سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^q}$ (q عدد ثابت است) در چه صورت همگراست ؟

۱) $q<1$ ۲) $q=1$ ۳) $q>1$ ۴) $\frac{1}{2}<q<1$

۴۸ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{3n-1}$ ....

۱) همگرائی مطلق دارد. ۲) واگراست. ۳) همگرائی مشروط دارد. ۴) حاصل سری برابر $\frac{1}{3}$ است.

۴۹ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست ؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}$ ۲) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)\sqrt[n]{n}}{Lnn}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$

۵۰ـ سری $\operatorname{Ln}\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}\frac{2}{3}+\operatorname{Ln}\frac{3}{4}+\dots$ به کدام عدد همگراست ؟

۱) $\operatorname{Ln}2$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) سری واگراست

۵۱ـ نمایش تابع $f(x)=\operatorname{Ln}x$ بر حسب قوای نزولی $x-1$ کدام است ؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n-1}}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n}}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n}$

۵۲ـ بسط تابع $f(x)=\cos x$ بر حسب توانهای $x-\frac{\pi}{2}$ کدام است ؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n-1)!}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n)!}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$

۵۳ـ کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است ؟

۱) مجموع دو سری همگرا ممکن است واگرا باشد .

۲) مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا ممکن است همگرا باشد .

۳) مجموع دو سری واگرا ممکن است همگرا باشد .

۴) هر دنباله کراندار و همگرا، یکنوا می باشد .

۵۴ـ ضریب x^2 در بسط مکلورن تابع $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$ کدام است ؟

۱) $-\frac{4}{81}$ ۲) $\frac{4}{27}$ ۳) $-\frac{8}{81}$ ۴) $-\frac{4}{27}$

۵۵ـ سری مکلورن تابع $y=\operatorname{Ln}\frac{1+x}{1-x}$ وقتی $-1<x<1$ کدام است؟

۱) $-2(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\dots)$ ۲) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ ۳) $-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$ ۴) $2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots)$

۵۶ـ مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{2}{3})^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۷ـ ضریب x^2 در بسط مک‌لورن $e^{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{e}{2}$ ۲) $-\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{e}{6}$ ۴) $-\frac{e}{6}$

۵۸ـ ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $\operatorname{Ln}\cos x$ چقدر است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{-1}{12}$

۵۹ـ ضریب x^2 در بسط مک‌لورن $\frac{x}{e^x-1}$ چقدر است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{-1}{12}$

۶۰ـ حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ برابر است با:

۱) $\operatorname{Ln}(1+x^2)$ ۲) $\cos 2x$ ۳) $\sin 2x$ ۴) $\cos x$

خودپرستی آفت دوستی و باعث تباهی فرد است. «حضرت علی (ع)»

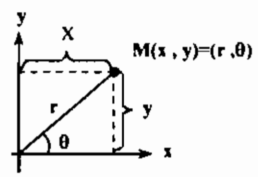
آنان که نمی‌توانند خود را اداره کنند ، ناچار از اطاعت دیگرانند. «هوگو»

فصل هفتم

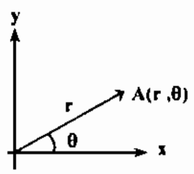
« دستگاه مختصات قطبی »

معرفی دستگاه مختصات قطبی

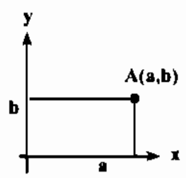
در بعضی مواقع به جای استفاده از دستگاه مختصات قائم که در آن هر نقطه یک طول و یک عرض مشخص دارد از دستگاه مختصات قطبی کـه در آن یک نقطه دارای یک فاصله از مبدأ و یک زاویه جهت‌دار است، استفاده می‌شود برای مثال اگر در دستگاه مختصات قائم نقطه $A(a,b)$ (شکل ۱) را در نظر بگیریم، مختصات آن در دستگاه مختصات قطبی به صورت نمایش داده شده در (شکل ۲) می‌باشد .



(نمایش نقطه M در یک دستگاه با دو نوع مختصات)



شکل(۲)



شکل(۱)

تبدیل دستگاه مختصات قائم به قطبی و بالعکس

تبدیل مختصات قطبی به قائم: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ و رابطه تبدیل مختصات قائم به قطبی: $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}\end{cases}$

مثال ۱: صورت قطبی معادله $x^2+y^2=9$ را بدست آورید.

پاسخ : $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=9\Rightarrow\rho^2=9$

مثال ۲: صورت قائم معادله $\rho^2=4\rho\sin\theta+5$ را بدست آورید.

پاسخ : با جایگزینی $\rho^2=x^2+y^2$ و $\rho\sin\theta=y$ ، بدست می‌آید:

$$x^2+y^2=4y+5\Rightarrow x^2+y^2-4y=5\Rightarrow x^2+(y-2)^2=9$$

مثال ۳: نمودار معادله قطبی $r=\frac{6}{\sqrt{9-5\sin^2\theta}}$ در دستگاه مختصات کارتزین(قائم) به چه شکل خواهد شد؟

۱) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ۲) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ۳) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۲»

$$r=\frac{6}{\sqrt{9-5\sin^2\theta}}\Rightarrow r^2=\frac{36}{9-5\sin^2\theta}\Rightarrow 9r^2-5r^2\sin^2\theta=36$$

$$\Rightarrow 9(x^2+y^2)-5y^2=36\Rightarrow 9x^2+4y^2=36\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\quad\Rightarrow$$ معادله یک بیضی می‌باشد.

تذکر ۱: هرگاه در مختصات قطبی نقطه P به صورت (r,θ) باشد که r منفی است، این نقطه معادل نقطه $(-r,\pi+\theta)$ می‌باشد.

مثال ۴: مختصات نقطه $P(-2,\frac{\pi}{6})$ را در مختصات دکارتی بنویسید.

پاسخ: نقطه داده شده معادل نقطه $(2,\frac{7\pi}{6})$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\cos\frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ y = r\sin\theta = 2\sin\frac{7\pi}{6} = -1 \end{cases} \Rightarrow P(-\sqrt{3},-1)$$

تذکر ۲: فاصله دو نقطه $P(r,\theta)$ و $Q(r',\theta')$ از فرمول روبرو به دست می‌آید: $d=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}$

تذکر ۳: مساحت مثلث ABC که سه رأس آن $A(r,\theta)$، $B(r',\theta')$ و $C(r'',\theta'')$ باشد برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}[rr'\sin(\theta'-\theta)+r'r''\sin(\theta''-\theta')+r''r\sin(\theta-\theta'')]$$

معادله نیم‌خط، خط، دایره و مقاطع مخروطی در مختصات قطبی

۱) معادله خط $ax+by=c$ در مختصات قطبی به صورت $r=\frac{c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$ می‌باشد.

تذکر ۴: به طور کلی معادله هر خط در مختصات قطبی را می‌توان به صورت $r\cos(\theta-\theta_0)=a$ نشان داد که در آن a فاصله خط از مبدأ مختصات و θ_0 زاویه خط با محور xها می‌باشد.

۲) معادله دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن a باشد، در مختصات قطبی به صورت $r=a$ می‌باشد. به طور کلی معادله دایره‌ای که مرکز آن (x_0,y_0) و شعاع آن a باشد، در مختصات قطبی به صورت $r^2-2x_0r\cos(\theta-y_0)+x_0^2-a^2=0$ می‌باشد.

۳) معادله نیم‌خطی که از مبدأ مختصات عبور کند و با محور xها زاویه θ_0 بسازد، در مختصات قطبی به صورت $\theta=\theta_0$ می‌باشد.

۴) معادله قطبی $r=\frac{a}{1\pm e\cos\theta}$، مقاطع مخروطی افقی را نمایش می‌دهد.

اگر $e>1$، معادله هذلولی با خروج از مرکز e خواهد بود.

اگر $e=1$، معادله سهمی خواهد بود.

اگر $e<1$، معادله بیضی با خروج از مرکز e خواهد بود.

۵) معادله قطبی $r=\frac{a}{1\pm e\sin\theta}$ مقاطع مخروطی قائم را نشان می‌دهد. (این مقاطع مخروطی از دوران مقاطع مخروطی $r=\frac{a}{1\pm e\cos\theta}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ حاصل می‌شوند)

مثال ۵: نمودار قطبی $r=\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta$ عبارت است از:

۱) هذلولی افقی ۲) هذلولی قائم ۳) سهمی افقی ۴) سهمی قائم

پاسخ: گزینه «۴»

$$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\Rightarrow r^2\cos^2\theta=r\sin\theta\Rightarrow x^2=y$$ سهمی قائم

مثال ۶: نمودار $r^2=\csc 2\theta$ نمایش کدام منحنی است؟

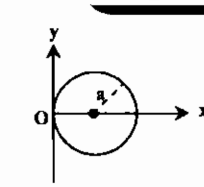
۱) دایره ۲) هذلولی قائم ۳) هذلولی افقی ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۴»

$$r^2=\frac{1}{\sin 2\theta}\Rightarrow 2(r\sin\theta)(r\cos\theta)=1\Rightarrow 2xy=1$$

نمودار چند تابع قطبی

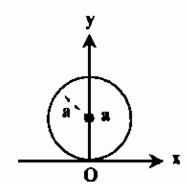
۱.



$r=2a\cos\theta$

(دایره افقی به مرکز $(a,0)$) و شعاع a

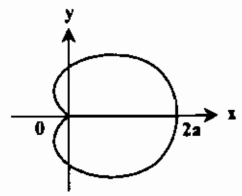
۲.



$r=2a\sin\theta$

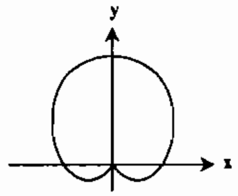
(دایره قائم به مرکز $(0,a)$) و شعاع a

۳.



$r=a(1+\cos\theta)$

(کاردیوئید افقی یا دلوار افقی)

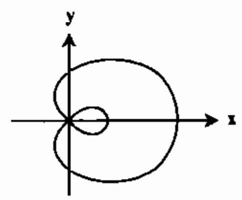


$r=a(1+\sin\theta)$

(کاردیوئید قائم یا دلوار قائم)

نمودار $r=a(1-\cos\theta)$ و $r=a(1-\sin\theta)$ از دوران منحنی‌های فوق به اندازه π به دست می‌آید.

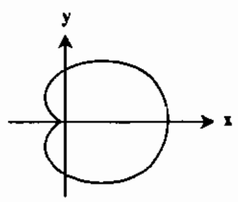
۴. اگر $a>b$



$r=b+a\cos\theta$

(لیماسیون افقی)

اگر $a<b$



$r=b+a\cos\theta$

(لیماسیون افقی)

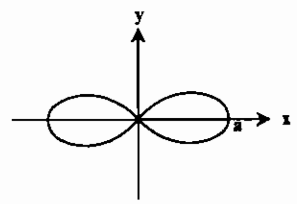
تذکر ۵: اگر در منحنی $r=b+a\cos\theta$، $a=b$ آنگاه منحنی یک کاردیوئید (دلوار) خواهد بود.

تذکر ۶: اگر در منحنی $r=b+a\cos\theta$، $a=2b$ منحنی را تریسکتریکس (تثلیث‌گر) می‌گویند.

تذکر ۷: منحنی $r=b-a\cos\theta$ از دوران $r=b+a\cos\theta$ به اندازه π حاصل می‌شود.

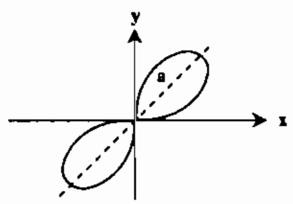
تذکر ۸: منحنی‌های $r=b\pm a\sin\theta$ لیماسیون قائم می‌باشند.

۵.



$r^2=a^2\cos 2\theta$

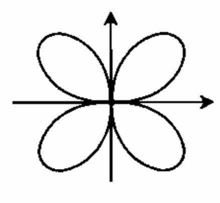
(پروانه یا لمینسکات افقی و یا رزبرگ)



$r^2=a^2\sin 2\theta$

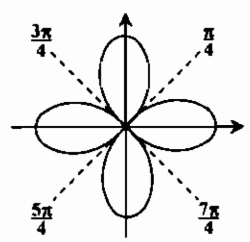
(لمینسکات)

۶.



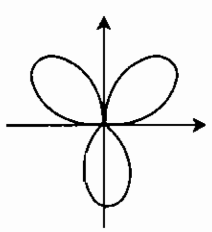
$r=a\sin 2\theta$

(رز ۴ برگ)



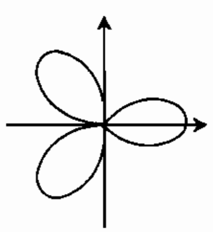
$r=a\cos 2\theta$

(رز ۴ برگ)



$r=a\sin 3\theta$

(رز ۳ برگ)

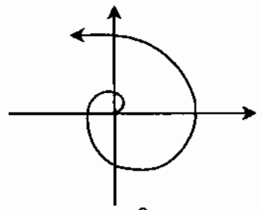


$r=a\cos 3\theta$

(رز ۳ برگ)

تذکر ۹: به طور کلی $r=a\sin(n\theta)$ و $r=a\cos(n\theta)$، رز m برگ می‌باشد که اگر n فرد باشد $m=n$ و اگر n زوج باشد $m=2n$.

۷.



$r=a\theta$

(مارپیچ ارشمیدسی)

نکته ۱: اگر با تبدیل θ به $-\theta$ یا تبدیل همزمان r به $-r$ و θ به $\pi-\theta$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور xها متقارن است.

نکته ۲: اگر با تبدیل θ به $\pi-\theta$ یا تبدیل همزمان r به $-r$ و θ به $-\theta$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور yها متقارن است.

نکته ۳: اگر با تبدیل θ به $\pi+\theta$ یا r به $-r$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به مبدأ متقارن است.

نکته ۴: برای دوران یک منحنی به اندازه α در مختصات قطبی، کافی است در معادله آن به جای θ، قرار دهید $\theta-\alpha$.

مثال ۷: معادله دوران یافته منحنی $r^2=\cos 4\theta$ به اندازه $\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $r^2=-\cos 4\theta$ ۲) $r^2=\cos(4\theta+\frac{\pi}{8})$ ۳) $r^2=\cos(4\theta-\frac{\pi}{8})$ ۴) $r^2=\sin 4\theta$

پاسخ: گزینه «۴» کافی است در معادله داده شده به جای θ، $\theta-\frac{\pi}{8}$ قرار دهیم:

$$r^2=\cos(4(\theta-\frac{\pi}{8}))\Rightarrow r^2=\cos(4\theta-\frac{\pi}{2})\Rightarrow r^2=\sin 4\theta$$

شیب یا ضریب زاویه خط مماس در منحنی قطبی

منحنی قطبی $r=f(\theta)$ را می‌توان به صورت پارامتری $\begin{cases}x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta\\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ برحسب پارامتر θ نوشت.

بنابراین شیب خط مماس را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

مثال ۸: معادله خط مماس بر لیماسون $r=2+\cos\theta$ را در $\theta=\frac{\pi}{2}$ بنویسید.

پاسخ:

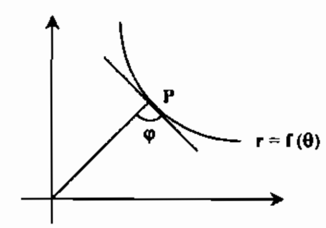
$$\begin{cases}x=r\cos\theta=2\cos\theta+\cos^2\theta\\ y=r\sin\theta=2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos\theta+\cos 2\theta}{-2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta}$$

به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$، $m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$، $x=0$ و $y=2$، بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو است: $y-2=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow 2y-x=4$

زاویه بین شعاع حامل و خط مماس

در هر نقطه دلخواه مانند P روی منحنی $r=f(\theta)$، زاویه بین شعاع حامل و خط مماس را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$tg\varphi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

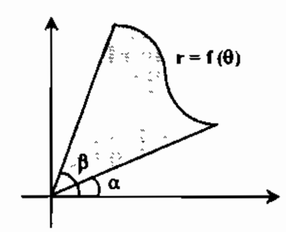


نکته ۵: اگر $f'(\theta)=0$، آنگاه $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

مساحت محصور و طول قوس در مختصات قطبی

مساحت محصور مابین منحنی $r=f(\theta)$ و شعاع‌های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta$$



مثال ۹: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع قطبی $r=\cos 3\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» منحنی داده شده رز ۳ برگ می‌باشد، بنابراین برای محاسبه مساحت کل کافی است مساحت یک برگ را محاسبه کرده و در ۳ ضرب کنیم.

$$r=0\Rightarrow\cos 3\theta=0\Rightarrow 3\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}$$

$$S=3\times\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 3\theta)^2 d\theta=\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

نکته ۶: سطح محصور مابین دو منحنی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ و شعاع‌های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ از فرمول زیر به دست می‌آید: (با فرض $f(\theta)\ge g(\theta)$)

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f^2(\theta)-g^2(\theta))d\theta$$

مثال ۱۰: مساحت محدود به ناحیه داخل $r=2\cos\theta$ و خارج نمودار $r=\sqrt{2}$، چند واحد مربع است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم: $2\cos\theta=\sqrt{2}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{4}$

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}((2\cos\theta)^2-(\sqrt{2})^2)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2\theta-2)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta=1$$

نکته ۷: طول منحنی نمودار $r=f(\theta)$ از $\theta=\alpha$ تا $\theta=\beta$ از فرمول روبرو به دست می‌آید: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\,d\theta$

مثال ۱۱: طول منحنی قطبی $r=\theta^2$ را در فاصله $0\le\theta\le\sqrt{5}$ بیابید.

پاسخ:

$$L=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{(\theta^2)^2+(2\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{\theta^4+4\theta^2}\,d\theta=\int_0^{\sqrt{5}}\theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta=\frac{1}{3}(\theta^2+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{5}}=\frac{19}{3}$$

حجم و مساحت حاصل از دوران نمودار قطبی

اگر منحنی $r=r(\theta)$، $a<\theta<b$، حول محور xها (قطبی) دوران داده شود، مساحت حاصل از دوران از فرمول زیر به دست می‌آید: (مشابه مختصات دکارتی)

$$S=2\pi\int y\,ds$$ (که در آن $y=r\sin\theta$, $ds=\sqrt{r^2+r'^2}$)

مثال ۱۲: مساحت سطحی را که از دوران لمینسکات $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$ حول محور قطبی حاصل می‌شود بیابید.

پاسخ: اولاً توجه کنید که باید $\cos 2\theta\ge 0$ باشد، بنابراین $\frac{-\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ (شاخه سمت راست) و یا $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$ (شاخه سمت چپ)، از طرفی داریم:

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\sqrt{a^2\cos 2\theta+(\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}})^2}\,d\theta=\frac{a\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$y=r\sin\theta=a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$$

با توجه به تقارن شکل نسبت به محور xها مساحت حاصل از دوران لمینسکات برا[illegible]ت با:

$$S=2\times 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\,ds=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta=$$

نکته ۸: حجم حاصل از دوران منحنی قطبی [illegible] حول محور قطبی در فاصله [illegible] α [illegible] $\le\pi$ [illegible] زیر به دست می‌آید:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱ـ مساحت محدود به ناحیه داخل نمودار قطبی تابع $r = 2\cos\theta$ و خارج ناحیه نمودار قطبی تابع $r = \sqrt{2}$ چند واحد مربع است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) π　۲) $\frac{\pi}{2}$　۳) $\frac{3\pi}{4}$　۴) $\frac{5\pi}{4}$

۲ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی به معادله $r^2 = 2\cos 2\theta$ حول محور oy کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $3\pi\sqrt{2}$　۲) $3\pi\sqrt{3}$　۳) $4\pi\sqrt{2}$　۴) $4\pi\sqrt{3}$

۳ـ خم $r = \sin 2\theta$ در مبدأ به کدام خط مماس است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\theta = \frac{\pi}{3}$　۲) $\theta = \frac{2\pi}{3}$　۳) $\theta = \frac{\pi}{2}$　۴) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۴ـ مساحت محصور با منحنی $r = 2(1+\cos\theta)$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) 3π　۲) 2π　۳) 6π　۴) π

۵ـ طول قوس منحنی $r = 2(1+\cos\theta)$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) ۸　۲) ۱۶　۳) ۳۲　۴) ۴

۶ـ سطح محصور منحنی $r = \sqrt{\theta}$ در ناحیهٔ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (r شعاع و θ زاویه با قسمت مثبت محور x ها است) برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{64}$　۲) $\frac{\pi^2}{32}$　۳) $\frac{\pi^2}{64}$　۴) $\frac{\pi}{32}$

۷ـ اگر $0 < \theta < \pi$، طول قوس سیکلوئید به معادلهٔ $\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ بین مبدأ و نقطه (x, y) کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) axy　۲) $\sqrt{8ay}$　۳) $a\theta$　۴) $8ay$

۸ـ طول منحنی نمایش $\rho = \sin^3\frac{\theta}{3}$ چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2\pi}{3}$　۲) $\frac{3\pi}{4}$　۳) $\frac{4\pi}{3}$　۴) $\frac{3\pi}{2}$

۹ـ مساحت مشترک بین دایره‌های $r = 2a\cos\theta$ ، $r = 2a\sin\theta$ را بیابید. (ریاضی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$　۲) $\frac{a^2\pi}{3}$　۳) $\frac{a^2}{3}(\pi - 1)$　۴) $\frac{a^2}{3}(\pi - 2)$

۱۰ـ سطح محصور مابین دو منحنی به معادلات $\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ r = 2a\sin\theta \end{cases}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$　۲) $(\pi - 1)a^2$　۳) $(\frac{\pi}{2} + 1)a^2$　۴) $(\pi + 2)a^2$

۱۱ـ مساحت محصور با معادله قطبی $r = 2 + 2\cos\theta$ برابر است با: (مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۱)

۱) 4π　۲) 3π　۳) 2π　۴) 6π

۱۲ـ خطوط مماس بر $r^2 = 4\sin 2\theta$ در مبدا کدام‌اند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$　۲) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$　۳) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$　۴) $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

۱۳ـ مساحت ناحیه واقع در داخل دایره ۲ = r و در خارج دلنمای $r = 2(1+\cos\theta)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\pi - 1$　۲) $4 - \frac{\pi}{2}$　۳) $8 - \pi$　۴) $4 - \frac{\pi}{4}$

۱۴ـ مساحت داخل دلنمای $r = a(1-\cos\theta)$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$　۲) $3\pi a^2$　۳) $\frac{3\pi a^2}{4}$　۴) $\frac{3\pi a^2}{2}$

۱۵ـ خط مماس بر نمودار تابع قطبی $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$ در مبدأ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\theta = 0$　۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$　۳) $\theta = \frac{\pi}{2}$　۴) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

۱۶ـ معادلهٔ یک منحنی در مختصات قطبی به صورت $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$ است. طول این منحنی از $\theta = 1$ تا $\theta = 2$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sqrt{3}(e - \sqrt{e})$　۲) $\sqrt{5}(e - \sqrt{e})$　۳) $\sqrt{5}(e^2 - \sqrt{e})$　۴) $\sqrt{3}(e^2 - \sqrt{e})$

۱۷ـ منحنی قطبی $r = 1 + \cos\theta$ را در نظر بگیرید. محیط این منحنی قطبی برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴　۲) ۶　۳) ۸　۴) ۱۳

۱۸ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی به معادله $r^2 = 2\cos 2\theta$ حول محور oy کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $3\pi\sqrt{2}$　۲) $4\pi\sqrt{2}$　۳) $4\pi\sqrt{3}$　۴) $4\pi\sqrt{3}$

۱۹ـ مساحت مشترک دایره $r = 3\cos\theta$ و کاردیوئید $r = 1 + \cos\theta$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\pi}{2}$　۲) $\frac{3\pi}{4}$　۳) $\frac{5\pi}{4}$　۴) π

۲۰ـ طول قوس منحنی $r = 3(1+\cos\theta)$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۴)

۱) ۲۴　۲) ۸　۳) ۳۲　۴) ۱۸

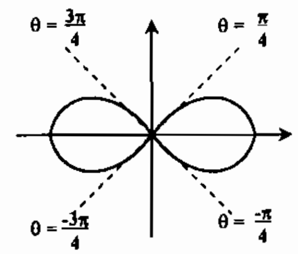
پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱ـ **هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.** ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم. نقاط برخورد ریشه‌های معادله $2\cos\theta=\sqrt{2}$ می‌باشد، یعنی $\frac{-\pi}{4}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$ بنابراین:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}((2\cos\theta)^2-(\sqrt{2})^2)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2\theta-2)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta d\theta=\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ **گزینه «۳»** منحنی قطبی داده شده یک لمینسکات می‌باشد (شکل زیر)



$$r=0\Rightarrow 2\cos 2\theta=0\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{4}\ ,\ \pm\frac{3\pi}{4}$$

با توجه به اینکه نمودار نسبت به محور y ها متقارن است، لذا دوران قسمت سمت راست محور y ها که به ازای $\frac{-\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ ایجاد می‌شود، کل سطح را ایجاد می‌کند.

$$r^2=2\cos 2\theta\Rightarrow 2rr'=-4\sin 2\theta\Rightarrow r'^2=\frac{4\sin^2 2\theta}{r^2}=\frac{4\sin^2 2\theta}{2\cos 2\theta}$$

بنابراین:

$$r^2+r'^2=2\cos 2\theta+\frac{4\sin^2 2\theta}{2\cos 2\theta}=\frac{4}{2\cos 2\theta}=\frac{4}{r^2}$$

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\times\frac{2}{r}d\theta=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=4\pi\sqrt{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ **گزینه «۳»**

$$r=0\Rightarrow\sin 2\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ **گزینه «۳»**

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f(\theta))^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+2\cos\theta)d\theta=2(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+2\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=6\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ **گزینه «۲»**

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1+\cos\theta)^2+4\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{8+8\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=4\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta=4(\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta)=16$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ **گزینه «۳»**

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta=\frac{1}{4}\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{64}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ **گزینه «۲»** در مبدأ $\theta=0$، اگر θ را در نقطه (x,y)، θ_0 فرض کنیم، در این صورت:

$$L=\int_0^{\theta_0}\sqrt{x'^2+y'^2}d\theta=\int_0^{\theta_0}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\theta_0}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{\theta_0}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=4a\sin\frac{\theta_0}{2}=4a\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}}=4a\sqrt{\frac{y}{2a}}=\sqrt{8ay}$$

◆ ◆ ◆ ◆

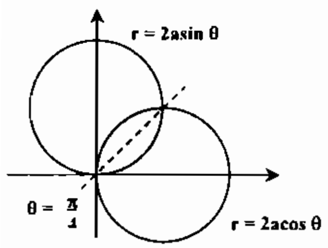
۸ـ **گزینه «۴»**

$$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta=\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{3\pi}(1-\cos\frac{2\theta}{3})d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ **گزینه «۱»**

◆ ◆ ◆ ◆



۱۰ـ **گزینه «۱»** معادلات داده شده، دو دایره مطابق شکل می‌باشند. چون شعاع $\theta=\theta_0$ از مبدأ وارد و از یکی از دوایر خارج می‌شود و محل تقاطع دو منحنی خط $\theta=\frac{\pi}{4}$ می‌باشد و شکل هاشور خورده نسبت به این خط متقارن است، بنابراین مساحت یک قسمت را محاسبه کرده و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$S=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2a\cos\theta)^2d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=4a^2(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4})=a^2(\frac{\pi}{2}-1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ **گزینه «۴»**

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)^2d\theta=2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta=6\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ **گزینه «۴»**

$$r=0\Rightarrow 4\sin 2\theta=0\Rightarrow 2\theta=k\pi\Rightarrow\theta=\frac{k\pi}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ **گزینه «۳»** نقاط برخورد دو منحنی از حل معادله $2(1+\cos\theta)=2$ به دست می‌آید، که ریشه‌های معادله برابر $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ خواهد بود.

بنابراین سطح محصور برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(2^2-2^2(1+\cos\theta)^2)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-8\cos\theta-4\cos^2\theta)d\theta=(-4\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta-\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=8-\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ **گزینه «۴»**

$$r=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}a^2(\frac{3}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}-2\cos\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-2\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\times 3\pi=\frac{3\pi a^2}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ **گزینه «۴»** برای به دست آوردن خط مماس در مبدأ کافی است معادله $r=0$ را حل کنیم.

$$2\cos\theta+2\sin\theta=0\Rightarrow tg\theta=-1\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ـ **گزینه «۲»**

$$L=\int_1^2\sqrt{(e^{\frac{\theta}{2}})^2+(\frac{1}{2}e^{\frac{\theta}{2}})^2}\,d\theta=\int_1^2\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\frac{\theta}{2}}d\theta=\sqrt{5}\,e^{\frac{\theta}{2}}\Big|_1^2=\sqrt{5}(e-\sqrt{e})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ **گزینه «۳»**

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}|2\cos\frac{\theta}{2}|d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸ـ گزینه «۲» $r=0 \Rightarrow 2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}\ ,\ \pm\frac{3\pi}{4}$

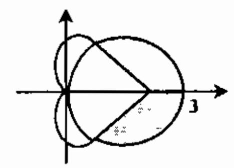
چون منحنی نسبت به محور y ها تقارن دارد، پس کافی است فاصله $\frac{-\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیریم.

$$r^2 = 2\cos 2\theta \Rightarrow 2rr' = -4\sin 2\theta \Rightarrow r'^2 = \frac{4\sin^2 2\theta}{r^2} = \frac{4\sin^2 2\theta}{2\cos 2\theta} = \frac{2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$r^2 + r'^2 = 2\cos 2\theta + \frac{2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2}{\cos 2\theta} = \frac{4}{r^2}$$

$$S = 2\pi\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = 2\pi\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{\frac{4}{r^2}}.d\theta = 2\pi\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos\theta d\theta = 4\pi\sqrt{2}$$

۱۹ـ گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:



$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

با توجه به شکل مقابل مساحت محدود بین دو منحنی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (9\cos^2\theta - (1+\cos\theta)^2)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 + 4\cos 2\theta - 2\cos\theta)d\theta = (3\theta + 2\sin 2\theta - 2\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi$$

با توجه به شکل فوق برای محاسبه مساحت مشترک بین دو منحنی کافی است مساحت کل دایره را از مساحت به دست آمده در فوق کم کنیم. دایره $r = 3\cos\theta$، دایره‌ای به شعاع $\frac{3}{2}$ می‌باشد، بنابراین مساحت دایره برابر $\frac{9\pi}{4}$ خواهد بود و در نتیجه مساحت مشترک موردنظر برابر $\frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}$ خواهد بود.

۲۰ـ گزینه «۱» $r^2 + r'^2 = 9(1+\cos\theta)^2 + 9(-\sin\theta)^2 = 18(1+\cos\theta) = 36\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 6\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 12\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 24$$

تست‌های تکمیلی فصل هفتم

۱ـ اگر $M(2,\frac{\pi}{3})$ در مختصات قطبی باشد، مختصات کارتزین نقطه M کدام است ؟

۱) $(1,\sqrt{2})$ ۲) $(1,\sqrt{3})$ ۳) $(\sqrt{2},1)$ ۴) $(\sqrt{3},1)$

۲ـ معادله نیمساز ربع دوم در مختصات قطبی کدام است ؟

۱) $\theta = -1$ ۲) $\theta = 1$ ۳) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ۴) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

۳ـ صورت قطبی $\rho = 2\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$ منحنی نمایش کدام است ؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) سهمی

۴ـ معادله در دستگاه قطبی به صورت $\rho^2(1+\cos^2\theta) = 10$ بیان می‌شود. این معادله در دستگاه دکارتی چگونه بیان خواهد شد؟

۱) $x^2 + y^2 = 10$ ۲) $x^2 + 2y^2 = 10$ ۳) $y^2 + 2x^2 = 10$ ۴) $x^2 - 2y^2 = 10$

۵ـ صورت قطبی $(y-1)^2 + x^2 = 1$ کدام است؟

۱) $\rho = 2\cos\alpha$ ۲) $\rho = 2\cos 2\alpha$ ۳) $\rho = 2\sin\alpha$ ۴) $\rho = 2\sin 2\alpha$

۶ـ نمودار تابع قطبی $r = \cos\theta$ کدام است؟

۱) بیضی ۲) خط ۳) دایره ۴) سهمی

۷ـ زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر $r = \frac{1}{\theta + \cos\theta}$ در $\theta = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۸ـ منحنی $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ عبارت است از یک:

۱) لمینسکات ۲) دایره ۳) دلنما ۴) خم ارشمیدس

۹ـ مساحت داخل دلنمای $r = a(1-\cos\theta)$ برابر است با:

۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$ ۲) $3\pi a^2$ ۳) $\frac{3\pi a^2}{4}$ ۴) $\frac{3\pi a^2}{2}$

۱۰ـ مساحت ناحیه مشترک بین دلوارهای $r = a(1+\cos\theta)$ و $r = a(1-\cos\theta)$ برابر است با:

۱) $\frac{a^2}{4}(\frac{3\pi}{4} - 4)$ ۲) $a^2(\frac{3\pi}{4} - 4)$ ۳) $\frac{a^2}{4}(\frac{3\pi}{2} - 4)$ ۴) $a^2(3\pi - 8)$

۱۱ـ انتگرال $\int^{\pi} d\theta$ در مختصات قطبی معرف ....

۱) مساحت یک نیم‌دایره با شعاع یک است. ۲) مساحت یک دایره با شعاع $\sqrt{2}$ است.

۳) مساحت یک دایره با قطر ۲ است. ۴) مساحت یک نیم‌دایره به شعاع $\sqrt{2}$ است.

۱۲ـ مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1 + \cos\theta$ که به وسیله $\rho = \sqrt{3}\sin\theta$ قطع می‌شود، چقدر است؟

۱) $\pi - \sqrt{3}$ ۲) $\frac{2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ ۳) $\frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})$ ۴) $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})$

۱۳ـ مقدار مساحت حلقهٔ منحنی $x^3 + y^3 = 3axy$ چقدر است؟

۱) $3a^2$ ۲) $\frac{3}{2}a^2$ ۳) $\frac{a^2}{3}$ ۴) $\frac{a^2}{2}$

۱۴ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$، کدام است؟

۱) πa^2 ۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) $\sqrt{8}\pi a^2$ ۴) $4\pi a^2$

۱۵ـ طول قوس منحنی $\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ برابر است با:

۱) πa ۲) $\frac{3\pi a}{2}$ ۳) $\frac{\pi a}{2}$ ۴) $\frac{\pi a}{3}$

۱۶ـ طول قسمتی از خط $\rho = a\sec(\theta-\frac{\pi}{3})$ که بین $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$ واقع است، چقدر می‌باشد؟

۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$

۱۷ـ طول قوس منحنی $\theta = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ از $r = 2$ تا $r = 4$، برابر:

۱) $1+\frac{\ln 2}{2}$ ۲) $3-\frac{\ln 2}{2}$ ۳) $1-\frac{\ln 2}{2}$ ۴) $3+\frac{\ln 2}{2}$

۱۸ـ معادلهٔ $r^2 = \frac{1}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}$ عبارت است از:

۱) بیضی افقی ۲) بیضی قائم ۳) هذلولی افقی ۴) سهمی

۱۹ـ نمودار معادلات $r = 2\sin 2\theta$ و $r = 2\cos 2\theta$ به ترتیب چند برگ دارند؟

۱) ۲ برگ ـ ۴ برگ ۲) ۴ برگ ـ ۲ برگ ۳) ۲ برگ ـ ۲ برگ ۴) ۴ برگ ـ ۴ برگ

۲۰ـ معادله دایره به مرکز $(0,a)$ و به شعاع a کدام است؟

۱) $r = a$ ۲) $r = a\sin\theta$ ۳) $r = a\cos\theta$ ۴) $r = 2a\sin\theta$

از دست دادن فرصت غصه می‌آورد. **«حضرت علی (ع)»**

مرد بزرگ دیر وعده می‌دهد اما زود انجام می‌دهد. **«کنفوسیوس»**

فصل هشتم

« اعداد مختلط »

اعداد مختلط

❖ **تعریف ۱:** هر عدد مختلط به فرم $z = x + iy$ نمایش داده می‌شود که x و y دو عدد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ و لذا $i^2 = -1$ می‌باشد که از این رابطه در ضرب، تقسیم و روابط محاسباتی اعداد مختلط زیاد استفاده می‌شود.

این شکل را شکل دکارتی عدد مختلط می‌گویند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامیم و می‌نویسیم:

$x = \mathrm{Re}\,z \ ,\ \ y = \mathrm{Im}\,z$

❖ **تعریف ۲:** مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\bar{z} = x - iy$

برای مثال، مزدوج $z = 5 + 2i$ برابر $\bar{z} = 5 - 2i$ خواهد بود.

❖ **تعریف ۳:** قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت مقابل تعریف می‌شود: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

برای مثال، قدر مطلق عدد مختلط $z = 1 + i\sqrt{3}$ برابر $|z| = 2$ می‌باشد.

تذکر ۱: قدر مطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و نامنفی است.

اعمال حسابی در اعداد مختلط

جمع: مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را بطور معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار -1 را قرار دهیم.

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ۲) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ۳) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ ۴) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

۵) $z\bar{z} = |z|^2$ ۶) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ ۷) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ۸) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

۹) $\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ۱۰) $\mathrm{Im}\,z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

مثال ۱: حاصل $A = (1+2i)(i+2)$ برابر است با:

۱) $5i$ ۲) $-5i$ ۳) 5 ۴) 5

☑ **پاسخ :** $A = (1+2i)(2+i) = 2 + i + 4i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$

تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال ۲: حاصل $A=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ کدام است؟

۱) i ۲) $-i$ ۳) ۴ ۴) −۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i^2}{3+1}=\frac{4i}{4}=i$$

مثال ۳: حاصل $A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

۱) $\frac{i}{10}$ ۲) $-\frac{i}{10}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}=\frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)}=\frac{1}{(1+3i)(3+i)}\Rightarrow A=\frac{1}{3+i+9i+3i^2}=\frac{1}{10i}=\frac{1}{10i}\times\frac{-10i}{-10i}=\frac{-10i}{100}=\frac{-i}{10}$$

مثال ۴: در معادله مختلط $3x+2iy-ix+5y=7+5i$، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

۱) $x=-1, y=2$ ۲) $x=1, y=-2$ ۳) $x=0, y=-2$ ۴) $x=1, y=0$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم:

$$(3x+5y)+(2y-x)i=7+5i$$

برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases}3x+5y=7\\2y-x=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+5y=7\\6y-3x=15\end{cases}\Rightarrow 11y=22\Rightarrow y=2\ ,\ x=-1$$

مثال ۵: مقدار $\frac{i^{36}-i^{37}}{i^{124}-i^{13}+i^5}$ برابر کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $1+i$ ۳) $i-1$ ۴) $-i-1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $i^2=-1$، بنابراین:

$$\frac{i^{36}-i^{37}}{i^{124}-i^{13}+i^5}=\frac{(i^2)^{18}-(i^2)^{13}i}{(i^2)^{62}-(i^2)^6+(i^2)^2i}=\frac{(-1)^{18}-(-1)^{13}i}{(-1)^{62}-(-1)^6+(-1)^2i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z=x+iy$ را می‌توان به شکل روبرو نوشت: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

نوع نمایش فوق را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. در رابطه فوق r و θ از فرمولهای زیر بدست می‌آیند:

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ tg\theta=\frac{y}{x}}$$

θ را آرگومان یا آوند عدد مختلط z می‌گویند و r را قدر مطلق یامدول عدد مختلط z می‌گویند.

تذکر ۲: در تعیین مقدار θ از رابطه $tg\theta=\frac{y}{x}$ استفاده می‌شود باید دقت کنید که نقطه (x , y) در کدام ناحیه مختصات قرار دارد و با توجه به آن θ را تعیین کنید، مثلاً اگر نقطه (x , y) در ناحیه دوم مختصات قرار داشته باشد، باید θ نیز در ناحیه دوم مثلثاتی انتخاب شود.

تذکر ۳: همواره مقادیری از θ که بین صفر و 2π هستند قابل قبول هستند.

مثال ۶: شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

الف) $z=1+i\Rightarrow r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ ,tg\theta=\frac{1}{1}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$

ب) $z=1-\sqrt{3}i\Rightarrow r=\sqrt{1+3}=2\ ,\ tg\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$

θ می‌تواند دو مقدار $\frac{5\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ باشد ولی مقدار $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $(1,-\sqrt{3})$ در ناحیه چهارم است و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه چهارم باشد.

$$\boxed{\Rightarrow z=2\cos[(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})]}$$

ج) $z=-1-i\Rightarrow r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ ,\ tg\theta=\frac{-1}{-1}=1$

θ می‌تواند $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4}$ باشد. ولی فقط $\frac{5\pi}{4}$ قابل قبول است زیرا نقطه $(-1,-1)$ در ناحیه سوم قرار دارد و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه سوم باشد.

$$\Rightarrow\boxed{z=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})}$$

د) $z=5i\Rightarrow r=\sqrt{0+25}=5\ ,\ tg\theta=\frac{5}{0}=+\infty\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{z=5(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}$

خ) $z=-2i\Rightarrow r=\sqrt{0+4}=2\ ,\ tg\theta=\frac{-2}{0}=-\infty\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\boxed{z=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})}$

شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ را می‌توان به فرم $z=re^{i\theta}$ نوشت که به آن فرم نمایی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z=re^{i\theta}$ را به شکل $z=r\measuredangle\theta$ نیز می‌توان نمایش داد.

مثال ۷: عدد مختلط $z=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

پاسخ: $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1+\sqrt{3}i$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم قطبی یا نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ آنگاه خواهیم داشت:

۱) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ و ۲) $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

مثال ۸: اگر $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$، مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

۱) $-i$ ۲) −۱ ۳) ۱ ۴) i

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. $z_1=e^{\frac{\pi}{5}i}$, $z_2=e^{-\frac{\pi}{5}i}$ داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2}=\frac{(e^{\frac{\pi}{5}i})^4}{e^{-\frac{\pi}{5}i}}=e^{\frac{4\pi}{5}i}\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

توان یک عدد مختلط:

برای به توان رساندن یک عدد مختلط بهتر است ابتدا آنرا به شکل قطبی یا نمایی بنویسیم و سپس آنرا به توان برسانیم. فرض کنید $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ باشد،در اینصورت: $z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{i(n\theta)}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

فرمول فوق فرمول موآور نام دارد که درآن n عددی طبیعی است.

مثال ۹: مقدار $(1+i)^{10}$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$، بنابراین: $(1+i)^{10}=(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{10}=2^5e^{\frac{10\pi}{4}i}=32(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=32i$

مثال ۱۰: حاصل $(۲+۲\sqrt{۳}i)^۵$ کدام است؟

۱) $۱۰۲۴\angle ۶۰$ ۲) $۱۰۲۴\angle ۳۰۰$ ۳) $۲۵۶\sqrt{۲}\angle ۳۰$ ۴) $۲۵۶\sqrt{۲}\angle ۶۰$

پاسخ: می‌دانیم $۲+۲\sqrt{۳}i=۴e^{\frac{\pi}{۳}i}$، بنابراین:

$$(۲+۲\sqrt{۳}i)^۵=(۴e^{\frac{\pi}{۳}i})^۵=۴^۵(\cos\frac{۵\pi}{۳}+i\sin\frac{۵\pi}{۳})=۱۰۲۴\angle ۳۰۰$$

نکته ۱: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه همواره داریم:

$$۱)\ (1+i)^n=۲^{\frac{n}{۲}}[\cos(\frac{n\pi}{۴})+i\sin(\frac{n\pi}{۴})] \quad , \quad ۲)\ (\sqrt{۳}-i)^n=۲^n[\cos(\frac{n\pi}{۶})-i\sin(\frac{n\pi}{۶})]$$

مثال ۱۱: حاصل $z=(1+i)^{۲۰۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۲۰۰}$ ۲) $۲^{۱۰۰}$ ۳) $۲^{۵۰}$ ۴) $۲^{۵۰}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق $n=۲۰۰$ و لذا $z=۲^{\frac{۲۰۰}{۲}}=۲^{۱۰۰}$ می‌باشد.

ریشه یک عدد مختلط:

برای محاسبه ریشه یک عدد مختلط، ابتدا آنرا به فرم نمایی یا قطبی می‌نویسیم در اینصورت $\sqrt[n]{z}$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta+۲k\pi}{n})}=\sqrt[n]{r}[\cos(\frac{۲k\pi+\theta}{n})+i\sin(\frac{\theta+۲k\pi}{n})],k=۰,۱,\dots\dots,n-۱}$$

نتیجه می‌شود $\sqrt[n]{z}$ دارای n جواب است که به ازای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.

مثال ۱۲: ریشه‌های سوم عدد مختلط $z=۸i$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $z=۸i=۸e^{\frac{\pi}{۲}i}$، بنابراین:

$$\sqrt[۳]{z}=\sqrt[۳]{۸}e^{i(\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۳})}=\sqrt[۳]{۸}[\cos(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۳})+i\sin(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۳})]$$

$$\begin{cases} k=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{z}=۲(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶})=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{i}{۲})=\sqrt{۳}+i \\ k=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{z}=۲(\cos\frac{۵\pi}{۶}+i\sin\frac{۵\pi}{۶})=۲(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}+\frac{i}{۲})=-\sqrt{۳}+i \\ k=۲\Rightarrow\sqrt[۳]{z}=۲(\cos\frac{۳\pi}{۲}+i\sin\frac{۳\pi}{۲})=۲(۰-۱)=-۲i \end{cases}$$

مثال ۱۳: حاصل $z=\sqrt{1+\sqrt{۳}i}$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}i$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i$ ۴) $\sqrt{۳}+i$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $۱+\sqrt{۳}i=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$، بنابراین:

$$z=\sqrt{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}=\sqrt{۲}e^{(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})}=\sqrt{۲}[\cos(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})+i\sin(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲})]$$

$$k=۰\Rightarrow z=\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{i}{۲})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{i\sqrt{۲}}{۲}$$

لگاریتم یک عدد مختلط:

برای محاسبه لگاریتم یک عدد مختلط ابتدا آنرا به فرم نمائی می‌نویسیم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\ln z=\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta}$$

مثال ۱۴: حاصل عبارت $z=\ln(۴+۴\sqrt{۳}i)$ کدام است؟

۱) $\ln ۲+\pi i$ ۲) $۲\ln ۲\frac{\pi}{۶}i$ ۳) $\ln ۲+\frac{\pi}{۴}i$ ۴) $۳\ln ۲+\frac{\pi}{۳}i$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $۴+۴\sqrt{۳}i=۸e^{\frac{\pi}{۳}i}$، بنابراین:

$$z=\ln(۸e^{\frac{\pi}{۳}i})=\ln ۸+\frac{\pi}{۳}i=۳\ln ۲+\frac{\pi}{۳}i$$

ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط:

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $z_۱=x_۱+iy_۱$, $z_۲=x_۲+iy_۲$ مفروضند. ضرب داخلی $z_۱,z_۲$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲=x_۱x_۲+y_۱y_۲}$$

و ضرب خارجی $z_۱,z_۲$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z_۱\times z_۲=x_۱y_۲-y_۱x_۲}$$

زاویه بین دو عدد (بردار) مختلط:

زاویه بین دو عدد مختلط $z_۱,z_۲$ را می‌توان از یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود:

$۱)\cos\theta=\frac{z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲}{\lvert z_۱\rvert\lvert z_۲\rvert}$	$۲)\sin\theta=\frac{z_۱\times z_۲}{\lvert z_۱\rvert\lvert z_۲\rvert}$

مثال ۱۵: اگر $z_۱=۳-۴i$, $z_۲=۳i-۴$ آنگاه حاصل $A=\frac{z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲}{z_۱\times z_۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۷}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲=(۳)(-۴)+(-۴)(۳)=-۲۴ \\ z_۱\times z_۲=(۳)(۳)-(-۴)(-۴)=-۷ \end{cases}\Rightarrow A=\frac{z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲}{z_۱\times z_۲}=\frac{۲۴}{۷}$$

مثال ۱۶: اگر $z_۱=۳-۴i$, $z_۲=۳i-۴$ آنگاه زاویه بین دو بردار $z_۱$ و $z_۲$ کدام است؟

۱) $\arccos ۰/۹۶$ ۲) $\arccos ۰/۶۹$ ۳) $\arcsin ۰/۹۶$ ۴) $\arcsin ۰/۶۹$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\cos\theta=\frac{z_۱\,\mathrm{o}\,z_۲}{\lvert z_۱\rvert\lvert z_۲\rvert}=\frac{-۲۴}{\lvert ۳-۴i\rvert\lvert -۴+۳i\rvert}=\frac{-۲۴}{۵\times ۵}=-۰/۹۶$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

۱ـ مقدار $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۳) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۴) $+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

۲ـ اگر $a(\cos x+i\sin x)=1-i$ ، x کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۳ـ اگر $z=\frac{1-i}{1+i}$، حاصل $ze^{i\frac{\pi}{2}}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) -1 ۲) $-1+i$ ۳) $1-i$ ۴) 1

۴ـ یک از کعب‌های عدد $z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ۴) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

۵ـ عبارت $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ با کدام گزینه برابر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۲) $-2-\sqrt{3}i$ ۳) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۴) $2+\sqrt{3}i$

۶ـ چنانچه $z=x+iy$ باشد، آنگاه $|z-2|=3$: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) یک خط است. ۲) یک دایره است. ۳) یک بیضی است. ۴) دو خط است.

۷ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ۲) $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$ ۳) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ۴) $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$

۸ـ سه ریشه معادله $x^3-2x-4=0$ عبارتند از: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $-2,-1+i,-1-i$ ۲) $2,1+i,1-i$ ۳) $2,-1+i,-1-i$ ۴) $-2,1+i,1-i$

۹ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $\frac{5}{2+i}=\frac{2z}{i}-\frac{2z}{1+i}$ باشد، آنگاه z برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}(1-3i)$ ۲) $\frac{1}{2}(1+3i)$ ۳) $\frac{1}{2}(-1-3i)$ ۴) $\frac{1}{2}(-1+3i)$

۱۰ـ مقدار $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$ ۲) $2^{19}(1-i\sqrt{3})$ ۳) $-2^{20}(1+i\sqrt{3})$ ۴) $2^{20}(1-i\sqrt{3})$

۱۱ـ دو عدد a و b ثابت و مختلط‌اند. اگر $z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}=b\bar{b}$ آنگاه مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ متناظر z کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) دایره ۲) نیمدایره ۳) نقطه ثابت ۴) خط راست

۱۲ـ مقدار $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۳) $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{3}$

۱۳ـ مکان هندسی نقطه M متناظر با عدد مختلط z که در رابطه $z^3+2z^2-3z=(\bar{z})^3+2(\bar{z})^2-3(\bar{z})$ صدق کند، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) هذلولی متساوی‌الساقین

۱۴ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آنگاه معادله $|z-i|=2$: (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) یک بیضی است. ۲) یک نقطه است. ۳) یک دایره است. ۴) یک خط است.

۱۵ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $z=6e^{\frac{\pi i}{2}}$ باشد، آنگاه $|e^{iz}|$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) 6 ۲) $e^{-2\sqrt{2}}$ ۳) 1 ۴) $e^{-\sqrt{6}}$

۱۶ـ معادله $|z-1|+|z+1|=4$ نمایش دهنده چه شکلی در صفحه مختلط است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) خط ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) مجموعه تهی

۱۷ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ باشد آنگاه: (برق ـ آزاد ۸۴)

۱) $z^3=-i$ ۲) $z^3=1$ ۳) $z^3=i$ ۴) $z^3=-1$

۱۸ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد آنگاه یک حل معادلهٔ $(5+z)^5-(5-z)^5=0$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۴)

۱) $5i\tan\frac{\pi}{10}$ ۲) $10i\tan\frac{\pi}{5}$ ۳) $5i\tan\frac{\pi}{5}$ ۴) $10\tan\frac{\pi}{10}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

۱ـ گزینه «۳»

۲ـ گزینه «۴» ابتدا $z=1-i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم. بنابراین:

$$1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=a(\cos x+i\sin x)\Rightarrow a=\sqrt{2}\ ,\ x=\frac{7\pi}{4}$$

۳ـ گزینه «۴»

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i\Rightarrow ze^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1-i}{1+i}\times i=\frac{i-i^2}{1+i}=\frac{i+1}{1+i}=1$$

۴ـ گزینه «۲»

$$z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}=\frac{1+i}{1+i+1+i^2-2i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+i^2+2i}{+2}=i\ \Rightarrow z=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})+i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})]\xrightarrow{k=0}\sqrt[3]{z}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

۵ـ گزینه «۱»

$$(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}=(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}})^{10}=(2e^{\frac{2\pi}{3}i})^{10}=e^{\frac{20\pi}{3}i}=e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۶ـ گزینه «۲» به طور کلی $|z-z_0|=r$، معادله یک دایره به مرکز z_0 و شعاع r است.

۷ـ گزینه «۱»

$$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\frac{i-1-i+1+i}{1+i}=\frac{i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

۸ـ گزینه «۳» واضح است که یکی از ریشه‌های معادله برابر ۲ می‌باشد و همچنین مجموع ریشه‌ها برابر صفر است پس فقط گزینه ۳ می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۹ـ گزینه «۱»

$$\frac{2z}{1+i}-\frac{2z}{i}=2z(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{i})=\frac{2z}{1-i}=\frac{5}{2+i}\xrightarrow{z=x+iy}2(x+iy)(2+i)=5(1-i)\Rightarrow\begin{cases}4x-2y=5\\2x+4y=-5\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{-3}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۱»

$$(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{40}=(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}})=(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i})^{40}=2^{20}e^{\frac{70\pi}{3}i}=2^{20}e^{\frac{4\pi}{3}i}=2^{20}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=2^{20}(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2^{19}(1+i\sqrt{3})$$

۱۱ـ گزینه «۱»

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=b\bar{b}\Rightarrow(z-a)\overline{(z-a)}=b\bar{b}\Rightarrow|z-a|^2=b^2$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}=(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}})^{10}=(e^{\frac{2\pi}{3}i})^{10}=e^{\frac{20\pi}{3}i}=e^{(6\pi+\frac{2\pi}{3})i}=e^{\frac{2\pi}{3}i}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$z=x+iy\Rightarrow z^2=x^2-y^2+2xyi\Rightarrow z^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$$

$$z=x+iy\Rightarrow\bar{z}^2=x^2-y^2-2xyi\Rightarrow\bar{z}^3=x^3-3xy^2+(y^3-3x^2y)i$$

با جایگزینی در رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i+2(x^2-y^2+2xyi)-3(x+iy)$$

$$=x^3-3xy^2+(y^3-3x^2y)i+2(x^2-y^2-2xyi)-3(x-iy)$$

$$\Rightarrow(3x^2y-y^3+4xy-3y)i=(y^3-3x^2y-4xy+3y)i\Rightarrow y^3-3x^2y-4xy+3y=0$$

$$\Rightarrow y(y^2-3x^2-4x+3)=0\Rightarrow y=0 \text{ یا } y^2-3x^2-4x+3=0$$

مکان هندسی موردنظر محور x ها یا یک هذلولی می‌باشد (هذلولی مربوطه متساوی‌الساقین نمی‌باشد زیرا قدرمطلق ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر نیست.)

۱۴ـ گزینه «۳» به طور کلی $|z-z_0|=r$، معادله دایره می‌باشد.

۱۵ـ گزینه «۲»

۱۶ـ گزینه «۲» شکل داده شده مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت ۱و۱- برابر مقدار ثابت ۴ می‌باشد، که همان بیضی می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۳»

$$z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}\Rightarrow z^3=e^{\frac{5\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

۱۸ـ گزینه «۳»

$$(5+z)^5-(5-z)^5=0\Rightarrow(5+z)^5=(5-z)^5\Rightarrow(\frac{5+z}{5-z})^5=1$$

$$\Rightarrow\frac{5+z}{5-z}=\sqrt[5]{1}=e^{\frac{2k\pi}{5}i}\Rightarrow 5+z=5e^{\frac{2k\pi}{5}i}-ze^{\frac{2k\pi}{5}i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{5(e^{\frac{2k\pi}{5}i}-1)}{e^{\frac{2k\pi}{5}i}+1}=\frac{5(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}-1)}{\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}+1}=\frac{10\sin\frac{k\pi}{5}(i\cos\frac{k\pi}{5}-\sin\frac{k\pi}{5})}{2\cos\frac{k\pi}{5}(\cos\frac{k\pi}{5}+i\sin\frac{k\pi}{5})}=5i\,tg\frac{k\pi}{5}$$

تست‌های تکمیلی فصل هشتم

۱ـ زاویه بین دو بردار $Z_1=10+10\sqrt{3}i$ و $Z_2=5\sqrt{3}+i5$ چند درجه است؟

۱) 60° ۲) 30° ۳) 90° ۴) صفر

۲ـ اگر $z_1=1-i$ و $z_2=2-4i$ باشد، آنگاه مقدار $A=\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳ـ مقدار عبارت مختلط $Z=(2\cos15+2i\sin15)^4$ کدام است؟

۱) $2+i\sqrt{3}$ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8+i8\sqrt{3}$ ۴) $8\sqrt{3}$

۴ـ نقطه $A(-2,0)$ در مختصات قطبی به کدام صورت است؟

۱) $(-2,\frac{\pi}{2})$ ۲) $(2,\frac{\pi}{2})$ ۳) $(-2,\pi)$ ۴) $(2,\pi)$

۵ـ تابع مختلط $Z=800+600i$ مفروض است، ریشه سوم این تابع کدام است؟

۱) $10\angle 53+2k\pi$ ۲) $100\sqrt{3}\angle 12/6+\frac{2}{3}k\pi$ ۳) $10\sqrt{3}\angle 53+2k\pi$ ۴) $10\angle 17/6+\frac{2}{3}k\pi$

۶ـ i^i برابر است با:

۱) $e^{-\pi}$ ۲) $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۳) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۴) 0

۷ـ منحنی تغییرات تابع $|z-i|=3$ کدام است؟

۱) خطی است که محورهای مختصات را در نقطه $M(3,-1)$ قطع کند.
۲) دایره‌ای به شعاع ۳.
۳) یک بیضی است.
۴) یک هذلولی است.

۸ـ در معادله مختلط $|z|-z=1+2i$ ، z کدام است؟

۱) $2i+\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}i-2$ ۳) $\frac{3}{2}-2i$ ۴) $2+\frac{3}{2}i$

۹ـ حاصل عدد مختلط $(\sqrt{3}+i)^3$ کدام است؟

۱) $8\sqrt{3}+8i$ ۲) $8+8i$ ۳) 8 ۴) $8i$

۱۰ـ دو نقطه $A\left|\begin{matrix}3\\ \frac{5\pi}{12}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}8\\ \frac{3\pi}{4}\end{matrix}\right.$ در مختصات قطبی مفروضند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶

۱۱ـ حاصل $A=\frac{20}{4+2i}+\frac{5+5i}{3-4i}$ کدام است؟

۱) $3+i$ ۲) $3-i$ ۳) $5+5i$ ۴) $5-5i$

۱۲ـ حاصل $A=\frac{3(i)^{30}-(i)^{19}}{2i-1}$ کدام است؟

۱) $5-i$ ۲) $5+i$ ۳) $1-i$ ۴) $1+i$

۱۳ـ اگر $z_2=3-2i$ و $z_1=i+2$ حاصل $A=\left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|^2$ باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۲

۱۴ـ معادله دایره‌ای به مرکز (۱ و ۲) و به شعاع ۴ کدام است؟

۱) $|z+2-i|=4$ ۲) $|z-2-i|=4$ ۳) $|z-2-i|=16$ ۴) $|z+2-i|=16$

۱۵ـ معادله منحنی $P=\frac{2\mathrm{tg}\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ در دستگاه دکارتی کدام است؟

۱) $y^2+xy+2x=0$ ۲) $y=\frac{x^2}{x-2}$ ۳) $y=\frac{x^2}{2-x}$ ۴) $y^2=2x+xy$

۱۶ـ معادله $\left|\frac{z-2}{z+2}\right|=3$ نمودار کدامیک از اشکال زیر است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) پاره خط

۱۷ـ یکی از ریشه‌های معادله $z^2(1-z^2)=16$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i$ ۲) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۳) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ ۴) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

۱۸ـ اگر حاصل‌ضرب دو عدد مختلط برابر صفر شود، آنگاه:

۱) هر دو آنها برابر صفرند. ۲) حداقل یکی از آنها برابر صفرند.
۳) قسمت حقیقی آنها قرینه یکدیگر است. ۴) قدر مطلق یکی از آنها برابر صفر است.

۱۹ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z+2i|+|z-2i|=6$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) پاره خط

۲۰ـ معادله $|z+3|+|z-3|=10$ در دستگاه مختصات دکارتی به کدام صورت است؟

۱) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ۲) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ۳) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ۴) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

۲۱ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\mathrm{Im}(z^2)=4$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) پاره‌خط

۲۲ـ یکی از ریشه‌های دوم $z=8+4\sqrt{5}i$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}-\sqrt{2}i$ ۲) $\sqrt{2}-\sqrt{10}i$ ۳) $\sqrt{10}+\sqrt{2}i$ ۴) $\sqrt{2}+\sqrt{10}i$

۲۳ـ یکی از ریشه‌های سوم $-11-2i$ کدام است؟

۱) $2-i$ ۲) $2+i$ ۳) $1-2i$ ۴) $1+2i$

۲۴ـ اگر $z=6e^{\frac{\pi i}{3}}$، مقدار $|e^{iz}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e^{-3\sqrt{3}}$ ۳) $e^{-2\sqrt{3}}$ ۴) $e^{-\sqrt{3}}$

۲۵ـ کدامیک از نامساویهای زیر همواره برقرار است؟

۱) $|x|+|y|\le\sqrt{2}|x+iy|$ ۲) $|x|+|y|\ge\sqrt{2}|x+iy|$ ۳) $|x|+|y|\le|x+iy|$ ۴) $||x|+|y||\ge|x+iy|$

۲۶ـ رابطه $|z+1|<|z-1|$ معادل کدامیک از روابط زیر است؟

۱) $\mathrm{Im}(z)<0$ ۲) $\mathrm{Im}(z)>0$ ۳) $\mathrm{Re}(z)<0$ ۴) $\mathrm{Re}(z)>0$

۲۷ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le1$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) درون یک دایره ۲) درون یک بیضی
۳) ناحیه اول و دوم مختصات به همراه محور x ها ۴) ناحیه اول و چهارم مختصات به همراه محور y ها

۲۸ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z-a||z+a|=a^2$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) لمینسکات ۴) دلوار

۲۹ـ فرض کنید $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$، در این صورت حاصل $z^4+\frac{1}{z^4}$ کدام است؟

۱) $\cos4\theta$ ۲) $2\cos4\theta$ ۳) $\cos^4\theta$ ۴) $2\cos^4\theta$

۳۰ـ حاصل $\left(\frac{1+i\mathrm{tg}\alpha}{1-i\mathrm{tg}\alpha}\right)^n$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1-i\mathrm{tg}n\alpha}{1+i\mathrm{tg}n\alpha}$ ۲) $\frac{1+i\mathrm{tg}n\alpha}{1-i\mathrm{tg}n\alpha}$ ۳) $i\mathrm{tg}n\alpha$ ۴) $1+i\mathrm{tg}2n\alpha$

مالی بهتر از عقل و عبادتی مانند تفکر نیست. «حضرت محمد (ص)»

کسی که دارای عزم راسخ است، جهان را مطابق میل خود عوض می‌کند. «گوته»

فصل نهم

« ضمیمه »

توان

❖ **تعریف ۱:** a به توان n را که به شکل a^n نمایش می‌دهند یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم ، اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم :

۱) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

۲) $a^n\times b^n=(ab)^n$

۳) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

۴) $(a^m)^n=a^{mn}$

۵) $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$

۶) $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$

تذکر ۱: هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد : $a^1=a$

تذکر ۲: هر عدد غیر صفر اگر به توان صفر برسد برابر یک می‌شود : $a^0=1$

رادیکالها

❖ **تعریف ۲:** عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام ، a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند .

قضایای رادیکالها:

۱) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ۲) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\quad(a>0)$ ۳) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}}=\sqrt[mnk]{a}$

تذکر ۳: اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد .

تذکر ۴: اگر فرجه رادیکال فرد باشد ، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد .

مثال : ۱) $\sqrt{36}=6$ ۲) $\sqrt[3]{-27}=-3$ ۳) $\sqrt{-16}\neq-4$

مثال ۱: حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt[6]{ab}}$ کدام است ؟

۱) $\sqrt[6]{ab^2}$ ۲) $\sqrt[6]{ab}$ ۳) $\sqrt[6]{a^2b}$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$A=\frac{\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[6]{ab}}=\frac{\sqrt[6]{a^2b^3}}{\sqrt[6]{ab}}=\sqrt[6]{\frac{a^2b^3}{ab}}=\sqrt[6]{ab^2}$$

توجه شود که در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه ها برابر نبودند لذا ک.م.م فرجه ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم .

مثال ۲: حاصل عبارت $A=2\sqrt[3]{54}+\sqrt{12}-\sqrt[3]{128}$ را بدست آورید .

☑ **پاسخ :**

$$A=2\sqrt[3]{27\times2}+\sqrt{3\times4}-\sqrt[3]{4^3\times2}=6\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}$$

مثال ۳ : حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ کدام است ؟ $(x>0)$

۱) ۱ ۲) $\sqrt[6]{x}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$ ۴) $\sqrt[6]{x^5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال های داخل را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها به یک رادیکال برسیم :

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2\times x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{x}{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a)=g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2=a^2-2a+1$ اتحاد می‌باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2=9$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a=\pm3$ برقرار می‌باشد، انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می‌دهد به شرح زیر می‌باشد :

۱) $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$

۲) $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm3a^2b+3b^2a$

۳) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۶) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

۷) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

۸) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

۹) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۰) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

مثال ۴ : اگر $x-\frac{1}{x}=-1$ باشد آنگاه حاصل $A=x^3-\frac{1}{x^3}$ کدام است ؟

۱) ‎-۴ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ‎-۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$A=x^3-\frac{1}{x^3}=\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}_{-1}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)}_{-1}=(-1)^3+3\times1\times(-1)=-4$$

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) اشاره کرد .

مثال ۵ : عبارات زیر را تجزیه کنید :

۱) $x^3-27=(x-3)(x^2+9+3x)$

۲) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۳) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

۴) $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

مثال ۶ : ساده شده عبارت $A=\frac{(x^4-2x^3+x-2)(x^2+3x+2)}{(x^2-4)(x^2-x+1)}$ کدام است ؟

۱) $(x+1)$ ۲) $(x+1)^2$ ۳) ۱ ۴) ‎-۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$A=\frac{[x^3(x-2)+(x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)}=(x+1)^2$$

گویا کردن مخرج کسرها:

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارات یکی از جمله های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در پرانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$ جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد.

۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}=\frac{\text{صورت}}{a-b}$ جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ می‌باشد.

۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳^۲}}{\sqrt[۳]{۳^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{۳}$

بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) چند عبارت:

برای بدست آوردن (ب . م . م) دو عبارت پس از تجزیه دو عبارت به حاصلضرب عوامل، حاصلضرب عوامل مشترک باکوچکترین توان را بعنوان (ب . م . م) انتخاب می‌کنیم و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (ک . م . م) تعیین می‌کنیم.

مثال ۷: (ب . م . م) و (ک . م . م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید:

پاسخ:

$۲۴=۳\times۸=۳\times۲^۳$, $۵۴=۲\times۲۷=۲\times۳^۳$

(ب . م . م) برابر $۶=۲\times۳$ و (ک . م . م) برابر $۲۱۶=۳^۳\times۲^۳$ می‌باشد.

مثال ۸: (ک . م . م) دو عبارت $A=(x^۳-۱)$, $B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$ را بدست آورید.

پاسخ:

$A=x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)$, $B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$

ک . م . م $=(x-۱)^۲(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)$

مجموعه‌ها

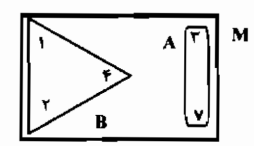
❖ **تعریف ۳:** مجموعه، عبارت است از یک گروه از اشیاء یا عناصر که کاملاً مشخص باشند، به عبارت دیگر مجموعه، دسته‌ای از اشیاء یا حروف یا اعداد و یا ... می‌باشد که در خاصیتی مشترک هستند، مانند مجموعهٔ انسانهای روی کره زمین، مجموعهٔ اعداد فرد و یا مجموعهٔ دانشجویان رشته برق. برای نشان دادن تعلق یک عضو به یک مجموعه، از علامت $\in$ استفاده می‌کنیم و اگر عنصر متعلق به مجموعه نباشد از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم.

مجموعهٔ مرجع (جهانی):

مجموعه‌ای است مشتمل بر تمام عناصر که برخی از این عناصر در موضوعی خاص، مورد نظر می‌باشند. این مجموعه را با M نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر نمودار ون زیر را در نظر بگیریم، این نمودار، یک مجموعه مرجع یا جهانی نسبت به مجموعه‌های A و B تلقی می‌شود چون تمام عناصر مجموعه‌های A و B که در زیر نشان داده شده‌اند، در این مجموعه وجود دارند.

$A=\{۳,۷\}$

$B=\{۱,۲,۴\}$



«نمودار ون»

مجموعهٔ تهی:

مجموعه‌ای است که فاقد عضو بوده و آنرا با علامت ϕ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر مجموعهٔ جهانی $M=\{۱,۲,۳,.....,۱۴\}$ را در نظر بگیریم و بخواهیم مجموعهٔ $A=\{x \mid x>۱۵\}$ را مطابق با مجموعهٔ جهانی M نشان دهیم، مجموعهٔ A یک مجموعهٔ تهی را تشکیل خواهد داد چون اعضای مجموعهٔ A در M موجود نمی‌باشد. پس A فاقد عضو بوده و آنرا بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$A=\{\ \}$ یا $A=\phi$

زیر مجموعه‌های یک مجموعه:

اگر مجموعه‌ای بنام A را داشته باشیم، به هر مجموعه‌ای که کلیهٔ اعضای آن در مجموعهٔ A موجود باشد یک زیر مجموعه از مجموعهٔ A می‌گوییم، بعنوان مثال اگر داشته باشیم: $A=\{۱۰,۲۰,۳۰,۴۰,....\}$, $B=\{۲۰,۴۰,۶۰,۸۰\}$

به مجموعهٔ B، یک زیر مجموعه A گفته می‌شود، چون تمام اعضای مجموعهٔ B در مجموعه A وجود دارند.

زیر مجموعه بودن یا نبودن را به ترتیب با علامتهای $\subset$ (زیرمجموعه‌ای است از) و $\not\subset$ (زیرمجموعه‌ای نیست از) نشان می‌دهند.

نکته۱: هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش محسوب می‌شود. $(A\subset A)$

نکته۲: مجموعهٔ تهی، زیر مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها می‌باشد. $(\phi\subset A)$

نکته۳: تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه، ۲^n می‌باشد که در آن، n تعداد عضوهای مجموعه می‌باشد، مثلاً اگر مجموعه‌ای ۴ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۴=۱۶$ می‌باشد.

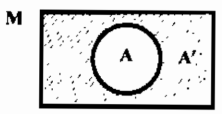
نکته۴: تعداد زیرمجموعه‌های محض هر مجموعه $۲^n-۱$ می‌باشد که در آن، خود مجموعه از تعداد زیرمجموعه‌ها کم می‌شود. مثلاً اگر مجموعه‌ای ۳ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه $۲^۳-۱=۷$ می‌باشد.

نکته۵: اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ باشد می‌توان نتیجه گرفت که $A\subset C$ ، یعنی: $(A\subset B\ ,\ B\subset C)\Rightarrow A\subset C$

متمم یک مجموعه:

متمم مجموعه‌ای مثل A، عبارت است از کلیهٔ اعضای متعلق به مجموعهٔ مرجع به غیر از اعضای متعلق به مجموعهٔ A، متمم A با A' نشان داده می‌شود. بعنوان مثال متمم مجموعهٔ A در نمودار «ون» زیر با هاشور مشخص شده است:

$A'=\{x \mid x\in M, x\notin A\}$



خواص مجموعه‌های متمم:

۱) $A=B\Leftrightarrow A'=B'$ ۲) $(A')'=A$ ۳) $\phi'=M$ ۴) $M'=\phi$ ۵) $A\subset B\Leftrightarrow B'\subset A'$

مجموعه‌های هم‌ارز، مساوی و جدا از هم:

اگر تعداد اعضاء دو مجموعه با هم برابر باشند، دو مجموعه را هم‌ارز یا متناظر می‌نامیم و اگر دو مجموعهٔ هم‌ارز اعضایشان نسبت به هم، یک به یک برابر باشند دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و اگر دو مجموعه هیچ عضو مشترک نداشته باشند آنها را جدا از هم می‌نامیم. بعنوان مثال اگر مجموعه‌های زیر را داشته باشیم:

$A=\{۲,۳,۱۰\}$, $B=\{۱۴,۱۶,۲۱\}$, $C=\{۲,۳,۱۰\}$

هر سه مجموعهٔ فوق، نسبت به یکدیگر هم ارز یا متناظر هستند زیرا تعداد اعضایشان با هم برابر است و دو مجموعهٔ A و C که هم‌ارزند، دو مجموعهٔ مساوی محسوب می‌شوند زیرا اعضایشان نسبت به هم، یک‌به‌یک برابرند ولی دو مجموعهٔ A و B و یا دو مجموعهٔ B و C نسبت به یکدیگر دو مجموعهٔ جدا از هم هستند چون هیچ عضو مشترکی با هم ندارند.

اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه A و B که به فرم $A\bigcup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که عناصر آن یا عضوی از A باشند یا عضوی از B و بعبارت دیگر: $A\bigcup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$

مثال ۹: اجتماع دو مجموعه $A=\{\{a\},\{\phi\}\}$ و $B=\{\{a\}\}$ چند عضو دارد؟

پاسخ: $A\bigcup B$ دارای دو عضو می باشد

$A\bigcup B=\{\{a\},\{\phi\}\}$

خواص اجتماع دو مجموعه:

۱) $A\subset B\Leftrightarrow A\bigcup B=B$ ۲) $A\bigcup A=A$ ۳) $A\bigcup M=M$

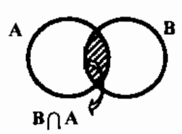
۴) $A\bigcup A'=M$ ۵) $A\bigcup\phi=A$ ۶) $A\bigcup(A\bigcap B)=A$ (قانون جذب)

۷) $A\subset(A\bigcup B)$ ۸) $B\subset(A\bigcup B)$

اشتراک دو مجموعه:

اشتراک دو مجموعه، عبارت است از مجموعه‌ای که شامل عناصر مشترک دو مجموعه باشد و آنرا با علامت $\bigcap$ نشان می‌دهند طبق تعریف ریاضی اشتراک دو مجموعه، داریم:

$A\bigcap B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\in B\}$



خواص اشتراک دو مجموعه:

۱) $A\subset B\Leftrightarrow A\bigcap B=A$

۲) $A\bigcap A=A$

۳) $A\bigcap M=A$

۴) $A\bigcap A'=\phi$

۵) $A\bigcap\phi=\phi$

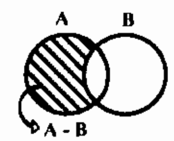
۶) $A\bigcap(A\bigcup B)=A$ (قانون جذب)

۷) $A\bigcap(A\bigcup B\bigcup C)=A$ (قانون جذب)

۸) $(A\bigcap B)\subset A,(A\bigcap B)\subset B$

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل دو مجموعه، عبارت است از مجموعهٔ عناصری که در مجموعهٔ اول بوده ولی در مجموعه دوم نباشند به عبارت دیگر A-B یعنی عناصری از مجموعهٔ A که در مجموعهٔ B وجود نداشته باشند وطبق تعریف‌ریاضی تفاضل دو مجموعه، داریم:



$$A - B = \{x | x \in A , x \notin B\}$$

خواص تفاضل دو مجموعه:

۱) $A - B = A \cap B'$ ۲) $A - M = \phi$ ۳) $M - A = A'$ ۴) $A - \phi = A$

۵) $A - A = \phi$ ۶) $A - A' = A$ ۷) $(A - B) \subset A \ , (B - A) \subset B$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه:

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند حاصلضرب دکارتی $A \times B$ بصورت $A \times B = \{(x, y) | x \in A , y \in B\}$ تعریف می‌شود:

به عبارت دیگر، طبق تعریف حاصلضرب دکارتی دو مجموعه عبارتست از مجموعه‌ای که مشتمل بر xهایی از مجموعه A (مجموعهٔ اول) و yهایی از مجموعه B (مجموعهٔ دوم) باشد که اینها تشکیل یک زوج مرتب می‌دهند که عضو اول آن (x) را مختص اول و عضو دوم آن (y) را مختص دوم زوج مرتب می‌گویند. همچنین حاصلضرب دکارتی $B \times A$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B \times A = \{(x , y) | x \in B \ , y \in A\}$$

مثال ۱۰ : اگر داشته باشیم $A = \{a , b , c\}$ و $B = \{۲ , ۴\}$ ، مطلوبست محاسبهٔ $B \times A$ و $A \times B$.

☑ پاسخ :

$$\left.\begin{array}{l} A \times B = \{(a ,۲) , (a ,۴) , (b,۲),(b,۴) (c,۲), (c,۴)\} \\ B \times A = \{(۲,a), (۲,b), (۲,c), (۴,a), (۴,b), (۴,c)\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

تذکر ۵: ملاحظه می‌شود که در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ می‌باشد .

خواص مجموعه‌ها:

الف) خاصیت جابجایی $A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad , \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ج) خاصیت پخشی (توزیعی) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

د) قوانین دمورگان : ۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال ۱۱: اگر $A \subset B$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟ (کامپیوتر ـ آزاد ۷۶)

۱) $B' \subset A$ ۲) $A \cap B = \phi$ ۳) $B' \subset A'$ ۴) $B \cap A' = \phi$

☑ **پاسخ :**گزینه «۳ » (طبق خاصیت ۵ مجموعه‌های متمم)

مثال ۱۲: اگر $A \cap B = A - B$ باشد، آنگاه A برابر کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) B ۲) B' ۳) M ۴) ϕ

☑ **پاسخ :**گزینه «۴»

$$A \cap B = A \cap B' \to A = \phi$$

مثال ۱۳: اگر $A \subset B$ باشد، مجموعه $(A - B)' \cap A$ برابر است با : (حسابداری ـ آزاد ۸۱)

۱) A ۲) B' ۳) $A \cap B$ ۴) ϕ

☑ **پاسخ :**گزینه «۱» اگر $A \subset B$ آنگاه $A - B = \phi$ می‌باشد، لذا داریم : $(A - B)' \cap A = (\phi)' \cap A = M \cap A = A$

مثال ۱۴: اگر $A \subset B$ باشد ، مجموعهٔ $(A - B)' \cap B$ برابر است با :

۱) A ۲) B ۳) M ۴) ϕ

☑ **پاسخ :**گزینه «۲»

$$A \subset B \Rightarrow A - B = \phi \Rightarrow (\phi)' \cap B = M \cap B = B$$

مجموعه‌های عددی:

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی: اعداد ...،۴، ۳، ۲، ۱ را اعداد طبیعی می‌نامند بنابراین اعداد طبیعی که با N نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$N = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی، خود نیز شامل زیر مجموعه‌هایی بنامهای مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج (E) و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد (O) می‌باشد. مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، از ضرب اعداد طبیعی در عدد ۲ بدست می‌آید، بنابراین عبارت خواهد بود از:

$$E = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰ , ...\} = \{ x | x = ۲k , k \in N\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد نیز بصورت مقابل تعریف می‌گردد : $O = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹...\} = \{ x | x = ۲k - ۱ , k \in N\}$

ب) مجموعهٔ اعداد حسابی:مجموعهٔ اعداد حسابی با افزودن عدد صفر به مجموعهٔ اعداد طبیعی بدست می‌آید که عبارتست از:

$$I = \{۰ ,۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$$

ج) مجموعهٔ اعداد صحیح: مجموعهٔ اعداد صحیح که دربرگیرندهٔ اعداد صحیح منفی و اعداد حسابی می‌باشد، عبارتست از:

$$Z = \{..., -۳ , -۲, -۱, ۰ , ۱, ۲ , ۳ , ...\}$$

همچنین مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و فرد بصورت زیر بیان می‌گردد.

مجموعهٔ اعداد صحیح زوج $= \{..., -۶ , -۴ , -۲ , ۰ , ۲ , ۴ , ۶ , ...\} = \{x | x = ۲k , k \in Z\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح فرد $= \{..., -۵ , -۳ , -۱ , ۱ , ۳ , ۵ , ...\} = \{x | x = ۲k + ۱ , k \in Z\}$

د) مجموعهٔ اعداد گویا:اگر a و b اعدادی صحیح باشند بطوریکه $b \neq ۰$ باشد، مجموعهٔ اعدادی را که از طریق $\frac{a}{b}$ بدست می‌آیند مجموعه اعداد گویا می‌نامند، یعنی:

$$Q = \left\{\frac{a}{b} | a \in Z , b \in Z , b \neq ۰\right\}$$

بعنوان مثال، این مجموعه علاوه بر اعداد طبیعی و صحیح، اعدادی مثل ۳/۵، $-\frac{۱}{۶}$ و .... را نیز شامل می‌شود.

هـ) مجموعهٔ اعداد حقیقی :مجموعهٔ اعداد حقیقی که با R نمایش داده می‌شود، در برگیرندهٔ کلیهٔ اعداد معرفی شده فوق و همچنین اعضای مجموعهٔ R-Q که مجموعه این اعداد را مجموعهٔ اعداد گنگ یا اصم می‌نامند، می‌باشد. بنابراین مجموعهٔ اعداد حقیقی عبارت خواهد بود از مجموعهٔ اعداد گویا و گنگ (اصم): {مجموعهٔاعداد گویا و گنگ (اصم)}=R و داریم : $N \subset I \subset Z \subset Q \subset R$

فاصله:

اگر بخواهیم زیر مجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی را بصورت فاصله نشان دهیم، از علائم باز که با ( ) یا] [مشخص می‌شوند و یا از علائم بسته که با [ ] نمایش داده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

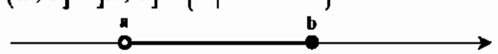
نمونهٔ ۱) فاصلهٔ (a, b) به صورت مقابل نیز تعریف می‌شود :

$$(a , b) =]a , b[= \{x | a < x < b\}$$

که در روی محور اعداد، بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

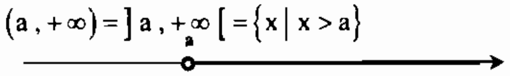
نمونهٔ ۲) فاصلهٔ [a , b) بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$(a , b] =]a , b] = \{x | a < x \leq b\}$$



نمونهٔ ۳) فاصلهٔ باز از a تا ∞+ بصورت $(a , +\infty)$ نشان داده می‌شود که عبارتست از:

$$(a , +\infty) =] a , +\infty [= \{x | x > a\}$$



مثال ۱۵: مجموعه‌های زیر را با نماد فاصله بیان کنید.

الف) $\{x | -۲ \leq x \leq ۵ , x \in R\}$ ب) $\{x | ۳ \leq x < ۱۰ , x \in R\}$

ج) $\{x | x \geq -۳ , x \in R\}$ د) $\{x | x < ۲ , x \in R\}$

☑ پاسخ :

الف) $[-۲, ۵]$ ب) $[۳,۱۰)$ یا $[۳,۱۰[$

ج) $[-۳ , +\infty)$ د) $(-\infty , ۲)$ یا $]-\infty , ۲[$

« معادلات و نامعادلات »

معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax+b=0$ با شرط $a\neq 0$ است که در این حالت $x=-\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A=ax+b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است، مشخص است که علامت عبارت $A=ax+b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax+b=0$ موافق علامت ضریب x (a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

نکته ۶: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۶: عبارتهای $A=3x+6$ و $B=4-2x$ را تعیین علامت کنید.

$1)\ A=3x+6 \Rightarrow 3x+6=0 \Rightarrow x=-\frac{6}{3}=-2 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$A=3x+6$		$-$	0	$+$	

$2)\ B=4-2x \Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$B=4-2x$		$+$	0	$-$	

مثال ۱۷: عبارت $A=\frac{x^2-5x+6}{(x-1)^2(x+4)}$ را تعیین علامت کنید.

توجه شود که در این مثال چون $(x-1)^2$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تأثیری در علامت A ندارد.

X	$-\infty$ تا -4	-4 تا 2	2 تا 3	3 تا $+\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
A	$-$	$+$	$-$	$+$

لازم به توضیح است که نقاط $x=1$ و $x=-4$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بعنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

نتیجه: اگر $x>3$ یا $-4<x<2$ آنگاه $A>0$ خواهد بود.

اگر $x<-4$ یا $2<x<3$ آنگاه $A<0$ خواهد بود.

نکته ۷: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف (در مثال قبل $(x-1)^2$) صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax+b>0 \\ \text{یا} \\ ax+b\geq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax+b<0 \\ \text{یا} \\ ax+b\leq 0 \end{cases}$$

مثال ۱۸: نامعادله $-\frac{3}{2}x-1<\frac{1}{2}x+4$ را حل کنید.

پاسخ: $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x>-5 \to 2x>-5 \xrightarrow{\div 2} x>-\frac{5}{2}$

نکته ۸: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^2+bx+c=0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a\neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta=b^2-4ac$ بیان می‌شود و داریم:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

۲) اگر $\Delta<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۳) اگر $\Delta=0$ معادله ریشه مضاعف دارد: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

نکته ۹: اگر در معادله درجه دوم $a+b+c=0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\frac{c}{a})$ است.

نکته ۱۰: اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (۱-) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته ۱۱: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta=a^2$ خواهد بود.

نکته ۱۲: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(K+1)^2}{K}$

معادله $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۱۳: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^2+bx+a=0$ است.

نکته ۱۴: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2-bx+c=0$ است.

نکته ۱۵: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2+bnx+cn^2=0$ است.

نکته ۱۶: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$ است.

مثال ۱۹: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2-3x-1=0$ است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $x^2-5x-4=0$ ۲) $x^2-6x-4=0$ ۳) $x^2+6x-4=0$ ۴) $x^2-5x+4=0$

پاسخ: گزینه «۲» باتوجه به نکته ۱۵، در این مثال $n=2$ می‌باشد.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است: اگر x' و x'' دو ریشه معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S=x'+x''$ و $P=x'.x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2-sx+p=0$ بیان می‌شود.

مثال ۲۰: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

$$\begin{cases} S=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+p=0 \to x^2-2x-1=0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} S=x'+x''=-\frac{b}{a} \to \text{حاصل جمع دو ریشه} \\ p=x'.x''=\frac{c}{a} \to \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A=|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \to \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} \quad \begin{cases} x'^2+x''^2=S^2-2p \\ x'^3+x''^3=S^3-3Sp \\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+2\sqrt{p}} \\ |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\sqrt{S-2\sqrt{p}} \end{cases}$$

تعیین علامت عبارت $A=ax^2+bx+c$:

اگر x_1 و x_2 دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه:

X	$-\infty$ تا x_1	x_1 تا x_2	x_2 تا $+\infty$
A	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نکته ۱۷: شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که : $a > 0 , \Delta < 0$

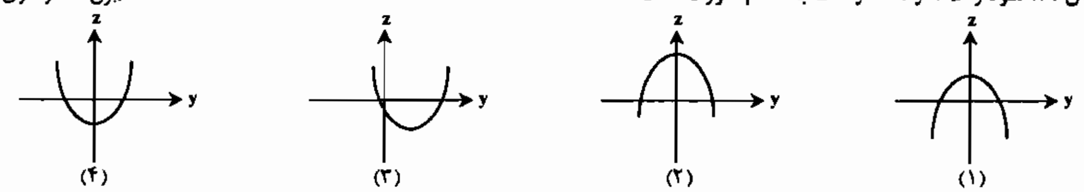
نکته ۱۸: شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که : $a < 0 , \Delta < 0$

تابع با ضابطهٔ $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید ، داریم :

نکته ۱۹: اگر $a > 0$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a < 0$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

نکته ۲۰: مختصات نقطه مینیمم یا ماگزیمم $M(-\frac{b}{2a} , -\frac{\Delta}{4a})$ می‌باشد.

مثال ۲۱: نمودار $z = y^2 - 6y + 5$ به کدام صورت است؟ (برق – سراسری ۷۵)



پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب y^2 مثبت است لذا نمودار تابع‌دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

نکته ۲۱ : خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن تابع $y = ax^2 + bx + c$ است.

تذکر ۶: در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال ۲۲ : در تابع $y = x^2 - kx + 2$ ، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد ، مقدار k کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

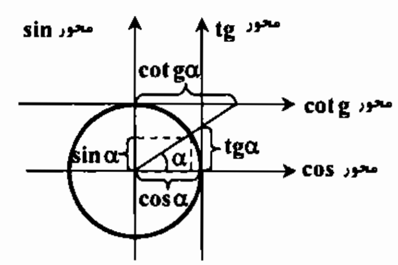
۱) ۴-　۲) ۲　۳) ۲-　۴) ۴

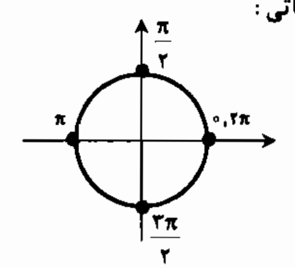
پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به نکته ۲۰، طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت :

$$x = \frac{k}{2} = -2 \rightarrow k = -4$$

« مثلثات »

نسبت‌های مثلثاتی :





علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی در جدول زیر آمده است :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin x	+	+	-	-
Cos x	+	-	-	+
tg x	+	-	+	-
cot x	+	-	+	-

تذکر ۷: توجه شود که فقط کافی است علامتهای Sin و Cos در چهار ربع حفظ شود ، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت sin و cos در هم بدست خواهند آمد.

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot x	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

تذکر ۸: واحدهای استفاده شده در جدول فوق برحسب رادیان (R) می‌باشد درصورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.

نسبت‌های $\pi \pm \alpha$ ، $2n\pi \pm \alpha$ ، $(\frac{2n+1}{2})\pi \pm \alpha$:

الف) کمان $(-\alpha)$:

۱) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$　۲) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$　۳) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$　۴) $\cot(-\alpha) = -\cot g\alpha$

ب) کمان $(\pi - \alpha)$:

۱) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$　۲) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$　۳) $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$　۴) $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

ج) کمان $(\pi + \alpha)$:

۱) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$　۲) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$　۳) $tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$　۴) $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

د) کمان $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$　۲) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$　۳) $tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$　۴) $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = tg\alpha$

س) کمان $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$　۲) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$　۳) $tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$　۴) $\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -tg\alpha$

ش) کمان $(2\pi - \alpha)$:

۱) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$　۲) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$　۳) $tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha$　۴) $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

ن) کمان $(2\pi + \alpha)$:

۱) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$　۲) $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$　۳) $tg(2\pi + \alpha) = tg\alpha$　۴) $\cot(2\pi + \alpha) = \cot\alpha$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت‌تر توجه فرمایید.

نکته ۲۲: برای tg و cotg مضارب فرد و زوج π حذف می‌شوند.(بعبارت دیگر tang و cotg عبارت بعد از مضارب فرد یا زوج π محاسبه می‌شود و برای sin و cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد π را حذف می‌کنیم .

نکته ۲۳: برای sin و cos مضارب زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر sin و cos عبارت بعد از مضارب زوج π محاسبه می‌شود.)

نکته ۲۴: در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامت نسبت مثلثاتی آن کمان را مشخص می‌کنیم ، در صورت وجود مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، sin را به cos و tg را به cotg و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

مثال ۲۳: مقادیر $tg(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, $\sin(\pi + \alpha)$, $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ را تعیین کنید. (α زاویه‌ای حاده می‌باشد)

پاسخ :

۳) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \xrightarrow{\text{نکته ۲۳}} -\sin\alpha$	۲) $\sin(\pi + \alpha) \xrightarrow{\text{نکته ۲۲}} -\sin\alpha$	۱) $tg(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \xrightarrow{\text{نکته ۲۳}} -\cot g\alpha$

مثال ۲۴: اگر $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد آنگاه $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟ (معماری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[\text{و } \cos\alpha \text{ در این ناحیه منفی است}]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع دوم است}} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اما با توجه به نکته ۲۳ داریم:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اتحادهای مهم مثلثاتی:

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ۲) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ۴) $tg\alpha.\cot g\alpha = 1 \ , \ (\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

۵) $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, (\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2})$ ۶) $1+\cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, (\alpha \neq n\pi)$

۷) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$ ۸) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$

۹) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \ , \ \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \ , \ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۱۰) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$

۱۱) $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ ۱۲) $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ ۱۳) $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۴) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ ۱۵) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

مثال ۲۵: حاصل عبارت $A = \sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$A = \frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x \xrightarrow{x=7/5^\circ} A = \frac{1}{4}\times\sin(4\times 7/5^\circ) = \frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8}$$

مثال ۲۶: اگر $tgx + \cot gx = 3$ باشد حاصل $A = tg^3x + \cot^3 x$ کدام است؟ (عمران و معدن ـ آزاد ۷۶)

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» بر طبق اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ داریم:

$$tg^3x + \cot g^3x = (\underbrace{tgx+\cot gx}_{3})^3 - \underbrace{3tgx\cot gx}_{1}(\underbrace{tgx+\cot gx}_{3}) = 3^3 - 3\times 1\times 3 = 18$$

مثال ۲۷: اگر $\sin\alpha = \frac{a^4+1}{2a^2}$ باشد $\cos 2\alpha$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۷۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴»

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2(\frac{a^4+1}{2a^2})^2 = 1-2(\frac{a^8+2a^4+1}{4a^4}) = 1-\frac{a^8+2a^4+1}{2a^4} = \frac{2a^4-a^8-2a^4-1}{2a^4} = -\frac{a^8+1}{2a^4}$$

$$-1 \le \sin\alpha \le 1 \Rightarrow \frac{a^4+1}{2a^2} \le 1 \Rightarrow a^4+1 \le 2a^2 \Rightarrow (a^2-1)^2 \le 0 \Rightarrow a^2 = \pm 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = -1$$

نکته ۲۵: اگر $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ باشد آنگاه $(1+tg\alpha)(1+tg\beta) = 2$.

مثال ۲۸: حاصل $(1+tg 33^\circ)(1+tg 12^\circ)$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» (باتوجه به نکته ۲۴) $12^\circ + 33^\circ = 45^\circ \rightarrow (1+tg 12^\circ)(1+tg 33^\circ) = 2$

فرمول‌های نسبتهای مثلثاتی کمانهای مجموع و تفاضل:

۱) $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ ۲) $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۳) $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ ۴) $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

فرمول‌های تبدیل مجموع و تفاضل نسبتهای مثلثاتی به حاصل ضرب نسبتها:

۱) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ۲) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۳) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ۴) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

فرمول‌های تبدیل حاصلضرب نسبتهای مثلثاتی به حاصل‌جمع نسبتها:

۱) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ ۲) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

۳) $\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

مثال ۲۹: حاصل عبارت $A = \frac{\cos 3\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $tg\alpha$ ۲) $\cot g\alpha$ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینه «۳»

$$A = \frac{\cos 3\alpha - \frac{1}{2}[\cos 3\alpha - \cos\alpha]}{\sin 3\alpha - \frac{1}{2}[\sin 3\alpha + \sin\alpha]}\times tg\alpha = \frac{\frac{1}{2}\cos 3\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin 3\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}\times tg\alpha = \frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha}\times tg\alpha$$

$$= \frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha\times tg\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times tg\alpha = \cot g\alpha\times tg\alpha = 1$$

مثال ۳۰: حاصل $A = \cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}\cos 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\sin 2x$

پاسخ: گزینه «۳»

$$A = \frac{1}{2}\left[\cos[(x+\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})] + \cos[(x+\frac{\pi}{6})+(x-\frac{\pi}{6})]\right] - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi}{6}) + \cos 2x] - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos 2x$$

تذکر ۹: توجه شود که اکثر تستهای مثلثاتی را می‌توان با عددگذاری حل کرد. برای مثال اگر در صورت سؤال $x = 0$ قرار دهیم آنگاه $A = \cos\frac{\pi}{6}.\cos(-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}$ که برابر عدد $\frac{1}{2}$ است حاصل می‌شود لذا به ازای $x = 0$ هر گزینه‌ای که حاصلش $\frac{1}{2}$ شد جواب صحیح خواهد بود که تنها گزینه «۳» این شرائط را دارد.

«فرمولهای فرعی»

۱) $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$ ۲) $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$

۳) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ ۴) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

۵) $\cot g\alpha - tg\alpha = 2\cot g 2\alpha$ ۶) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$ ۷) $tg\alpha + \cot g\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

مثال ۳۱: حاصل $A = \frac{1-tg20^\circ}{1+tg20^\circ} + \frac{1-tg25^\circ}{1+tg25^\circ}$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ آزاد ۷۶)

۱) $tg20^\circ + tg25^\circ$ ۲) $tg20^\circ - tg25^\circ$ ۳) $\frac{1-tg45^\circ}{1+tg45^\circ}$ ۴) $\frac{1-tg20^\circ}{1+tg25^\circ}$

☑ پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به فرمولهای ۱ و ۲ (فرعی) ملاحظه می‌شود که در این تست $\alpha = 25$ و $\beta = 20$ پس داریم :

$$A = tg(45-25) + tg(45-20) = tg25 + tg20$$

مثال ۳۲: اگر $A - B = \frac{\pi}{4}$ آنگاه $\cos B - \sin B$ برابر کدام است؟ (کامپیوتر ـ آزاد ۷۵)

۱) $2\sqrt{2}\sin A$ ۲) $\sqrt{2}\sin A$ ۳) $2\sqrt{2}\cos A$ ۴) $\sqrt{2}\cos A$

☑ پاسخ : گزینه «۴» طبق فرمولهای ذکر شده داریم :

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha) \Rightarrow \cos B - \sin B = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-B) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-A) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}-A) = \sqrt{2}\cos A$$

مثال ۳۳: حاصل $A = tg20(1+\cos 40)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 20$ ۲) $\sin 40$ ۳) $\cos 20$ ۴) $\cos 40$

☑ پاسخ : گزینه «۲»

$$A = \frac{\sin 20}{\cos 20} \times 2\cos^2 20 = 2\sin 20 \cos 20 = \sin 40$$

چند فرمول فرعی در مورد حاصلضرب عبارات مثلثاتی :

۱) $\sin\alpha\sin(60-\alpha)\sin(60+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

۲) $\cos\alpha\cos(60-\alpha)\cos(60+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

۳) $tg\alpha\, tg(60-\alpha)\, tg(60+\alpha) = tg 3\alpha$

۴) $\sin\frac{\pi}{2k+1} \times \sin\frac{2\pi}{2k+1} \times \cdots \times \sin\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}$

۵) $\cos\frac{\pi}{2k+1} \times \cos\frac{2\pi}{2k+1} \times \cdots \times \cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$

۶) $tg\frac{\pi}{2k+1} \times tg\frac{2\pi}{2k+1} \times \cdots \times tg\frac{k\pi}{2k+1} = \sqrt{2k+1}$

مثال ۳۴: حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A = 8(\cos 80)(\cos 40)(\cos 20) \xrightarrow[\text{فرمول (۲)}]{\alpha=20} A = 8 \times \frac{1}{4} \times \cos 60 = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$B = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \xrightarrow[\text{فرمول (۵)}]{k=3} B = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$C = \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9} \xrightarrow[\text{فرمول (۴)}]{k=4} C = \frac{\sqrt{2\times 4+1}}{2^4} = \frac{\sqrt{9}}{16} = \frac{3}{16}$$

مفهوم Arc :

معکوس توابع مثلثاتی را با نماد Arc نمایش می‌دهیم. $y = \sin x \to x = Arc\sin y$

منظور از $Arc\cos\frac{1}{2}$ این است که کسینوس چه زاویه‌ای برابر $\frac{1}{2}$ است (زاویه اصلی) ، واضح است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ جواب است.

مثال ۳۵: مقدار عددی $A = Sin\left[Arc\cos(-\frac{2}{3})\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) -1 ۴) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

☑ پاسخ : گزینه «۱»

$$Arc\cos(-\frac{2}{3}) = \alpha \to \cos\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow A = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

توضیح: چون α در ربع دوم قرار دارد $\sin\alpha$ مثبت در نظر گرفته می‌شود.

معادلات مثلثاتی:

فرض می‌کنیم (α) زاویه‌ای معلوم و کمان x زاویه مجهول باشد در حل معادلات پس از انجام عملیات باید آنها را به یکی از فرمهای استاندارد زیر دربیاوریم.

۱) $\sin x = \sin\alpha \to \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

۲) $\cos x = \cos\alpha \to x = 2k\pi \pm \alpha$

۳) $\begin{cases} tgx = tg\alpha \\ \cot gx = \cot g\alpha \end{cases} \to x = k\pi + \alpha$

مثال ۳۶: معادله $\sin x\cos x = \frac{1}{2}$ را حل کنید و جوابهای آن در فاصله $[0,\pi]$ را بدست آورید.

☑ پاسخ :

$$2\sin x\cos x = 1 \to \sin 2x = \sin\frac{\pi}{2} \to 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in z) \xrightarrow[k=0]{\text{جوابهای بین } 0 \text{ و } \pi} x = \frac{\pi}{4}$$

حالتهای خاص معادلات مثلثاتی:

$$\begin{cases} tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cot x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} , \quad \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} , \quad \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توضیح: در کلیه عبارات فوق $k \in z$ می‌باشد .

مثال ۳۷: معادله $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ را حل کنید.

☑ پاسخ : مجموع ضرائب (با فرض cos x بعنوان مجهول) صفر است، یک ریشه یک و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{2}{1} = 2 \to \text{غ.ق} \end{cases}$$

« لگاریتم »

❖ تعریف ۴: به ازای هر دو عدد مثبت N و a داریم : $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$

عدد مثبت a $(a \neq 1)$ را مبنای لگاریتم می‌نامیم ، که اگر مبنا در لگاریتم ۱۰ باشد ، معمولاً آنرا نمی‌نویسیم.

خواص و قضایای لگاریتم :

۱) $\log_a a = 1$ ۲) $\log_a 1 = 0$

۳) $a^{\log_a M} = M$ ۴) $\log_a M.N = \log_a|M| + \log_a|N|$

۵) اگر n زوج باشد N باقدرمطلق‌بیان می‌شود. $\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m}\log_a N \to$ ۶) $\log_a\frac{M}{N} = \log_a|M| - \log_a|N|$

۷) $\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$ ۸) $\log_b a.\log_c b = \log_c a$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر $(e \approx 2/7)$ باشد آنرا به شکل Ln نمایش می‌دهیم. $\log_e x = Lnx$

تعریف کلگاریتم یک عدد :

کلگاریتم عدد مثبت b را با نماد cologb نمایش می‌دهیم یعنی منفی لگاریتم b. $\boxed{co\log_a^b = -\log_a^b}$

مثال ۳۸: مقدار $A = \frac{1}{\log_3 216} + \frac{1}{\log_2 216}$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ آزاد ۷۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

☑ پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به خاصـ ـی لگاریتم داریم: $A = \log_{216} 3 + \log_{216} 2 = \log_{216} 6 = \log_{6}$

مثال ۳۹: معادله $\log x^2 + \log(-x) = 3$ چ یشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ پاسخ : گزینه «۲» باتوجه به فرمول ۵ داریم :

$2\log|x| + \log(-x) = 3$ —

$g(-x) = 3 \to 3\log(-x) = 3 \Rightarrow \log(-x) = 1 \Rightarrow x = -10$

مثال ۴۰: تعداد ریشه‌های معادله $3^{3x}+5\times 3^{2x}+6\times 3^{x}=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱»

$$3^x=A\rightarrow A^3+5A^2+6A=0\rightarrow A(A^2+5A+6)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}A=0\\A^2+5A+6=0\end{cases}\rightarrow A=-3\,,A=-2\,,A=0\Rightarrow\begin{cases}3^x=A,A=0\Rightarrow 3^x=0 & \text{غیرممکن}\\3^x=A\,,\ A=-2\Rightarrow 3^x=-2 & \text{غیرممکن}\\3^x=A\,,\ A=-3\Rightarrow 3^x=-3 & \text{غیرممکن}\end{cases}$$

معادلات لگاریتمی:

برای حل این معادلات باید معادله را به فرم کلی $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ تبدیل کرد و از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت $f(x)=g(x)$ که یک معاله ساده قابل حل خواهد بود.

مثال ۴۱: ریشه معادله $\dfrac{7}{\log\frac{x}{10}}=(\log x)^2+\log x+1$ کدام است؟

۱) $x=2$ ۲) $x=8$ ۳) $x=100$ ۴) $x=1000$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\log^2 x+\log x+1=\frac{7}{\log x-1}\Rightarrow \log^3 x-\log^2 x+\log^2 x-\log x+\log x-1=7$$

$$\Rightarrow \log^3 x=8\Rightarrow \log x=2\Rightarrow x=10^2=100$$

نکته ۲۶: بطور کلی جواب معادلات بفرم $\log_a\log_b\log_c\log_d x=A$ که A عدد ثابت است. بصورت $x=d^{c^{b^{a^A}}}$ می‌باشد.

مثال ۴۲: اگر $\log_{12}3=a$ باشد آنگاه $\log_3 8$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}(a-1)$ ۲) $\frac{3}{2}(\frac{1}{a}-1)$ ۳) $3(\frac{1}{a}-1)$ ۴) $3(a-1)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\log_{12}3=a\Rightarrow\log_3 12=\frac{1}{a}\Rightarrow\log_3 2^2\times 3=\frac{1}{a}\Rightarrow 2\log_3 2+\log_3 3=\frac{1}{a}\Rightarrow 2\log_3 2=\frac{1}{a}-1\Rightarrow\log_3 2=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}-1)$$

$$\log_3^8=\log_3^{2^3}=3\log_3^2=3\times\frac{1}{2}(\frac{1}{a}-1)=\frac{3}{2}(\frac{1}{a}-1)$$

مثال ۴۳: اگر $\log 2=a$ باشد مقدار عبارت $A=\log 0/25\times\log\frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

۱) $-2a$ ۲) $-a^2$ ۳) $\frac{a}{2}$ ۴) a^2

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{cases}\log 0/25=\log\frac{1}{4}=\log 2^{-2}=-2\log 2=-2a\\\log\frac{\sqrt{2}}{2}=\log(2^{\frac{1}{2}}\times 2^{-1})=\log 2^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log 2=-\frac{1}{2}a\end{cases}\Rightarrow A=(-2a)\times(-\frac{1}{2}a)=a^2$$

مثال ۴۴: حاصل $A=\log_8\frac{\sqrt{2}}{4}\times\log_{2\sqrt{2}}64$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}\log_8\frac{\sqrt{2}}{4}=\log_{2^3}(2^{+\frac{1}{2}}\times 2^{-2})=\log_{2^3}2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{3}\log_2 2=-\frac{1}{2}\\\log_{2\sqrt{2}}64=\log_{2^{\frac{3}{2}}}2^6=\dfrac{6}{\frac{3}{2}}\log_2 2=\frac{12}{3}\times 1=4\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\times 4=-2$$

« تصاعد »

تصاعد عددی : عدد ثابت a_1 و عدد ثابت $d\neq 0$ و دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن a_1 و جمله‌های بعدی هر یک با اضافه کردن مقدار ثابت d به جمله ماقبل بدست آید،چنین دنباله‌ای راتصاعدعددی‌یا حسابی می‌نامیم.

a_n جمله n ام ، d قدر نسبت ، n تعداد جملات $\qquad a_n=a_1+(n-1)d$

نکته ۲۷: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آنست که: $2b=a+c$ باشد .

نکته ۲۸: مجموع n جمله اول یک تصاعد حسابی : $S_n=\frac{n}{2}\left[a_1+a_n\right]$. $S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$

نکته ۲۹: رابطه بین جمله nام و mام یک تصاعد عددی به شکل $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ می‌باشد.

مثال ۴۵: در یک تصاعد حسابی $a_3=6$ و $a_7=134$ می‌باشد ، جمله اول و قدر نسبت این تصاعد به ترتیب کدام است؟

۱) ۵۸- و ۳۲ ۲) ۹- و ۱۶ ۳) ۹۰- و ۶۴ ۴) ۸۴- و ۶۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$d=\frac{134-6}{7-3}=\frac{128}{4}=32\rightarrow a_3=a_1+2d\Rightarrow 6=a_1+2\times 32\rightarrow a_1=-58$$

تصاعد هندسی : عدد ثابت $t_1\neq 0$ و عدد ثابت q ($q\neq 0$ و ± 1) را در نظر بگیرید ، دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن t_1 و جمله‌های بعدی آن از ضرب q در جمله ماقبل بدست آید ، چنین دنباله‌ای را یک تصاعد هندسی می‌نامیم.

جمله n ام یک تصاعد هندسی از رابطه $t_n=t_1q^{n-1}$ محاسبه می‌شود.

نکته ۳۰: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند آنست که $b^2=ac$ باشد .

نکته ۳۱: مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی : $S_n=t_1(\frac{1-q^n}{1-q})$

نکته ۳۲: رابطه بین جمله n ام و m ام یک تصاعد هندسی :

۱) اگر $n-m$ زوج باشد آنگاه $q=\pm\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد. ۲) اگر $n-m$ فرد باشد آنگاه $q=\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می باشد.

مثال ۴۶: در یک تصاعد هندسی $t_5=162$ و $t_8=4374$ مقدار t_3 برابر است با :

۱) ۲۷ ۲) ۸۱ ۳) ۱۸ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases}q=\sqrt[8-5]{\frac{4374}{162}}=\sqrt[3]{27}=3\\t_5=t_1q^4\Rightarrow 162=t_1\times 81\rightarrow t_1=2\rightarrow t_3=18\end{cases}$$

حد مجموع جملات در یک تصاعد هندسی با جملات نامحدود :

اگر در یک تصاعد هندسی با تعداد جملات نامحدود قدرمطلق قدر نسبت کوچکتر از ۱ باشد ($|q|<1$) آنگاه حد مجموع جمله‌ها یعنی S برابر است با : $S=\dfrac{t_1}{1-q}$

نکات مهم معادله خط

❖ **تعریف ۵:** اگر $a,b,c\neq 0$ و $ax+by+c=0$ آنگاه شیب خط برابر می‌باشد.

نکته ۳۳: کلیه خطوطی که به صورت $y=a\ \ (a\in R)$ باشند شیب صفر است

نکته ۳۴: کلیه خطوطی که به صور $x=a\ \ (a\in R)$ باشند شیب است.

نکته ۳۵: کلیه خطوطی که به صور $ay=bx$ باشند شیب خطشان

نکته ۳۶: معادله خطی که از نقطه $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ با شیب m می‌گذرد عبارت $\boxed{y-y_A=m(x-x_A)}$

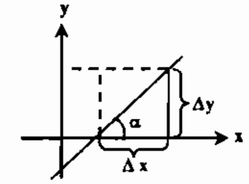
مثال ۴۷: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد و شیبش برابر (۲-) باشد .

$$y-y_A=m(x-x_A)\to y-۲=-۲(x-۱)\to y=-۲x+۴$$

نکته ۳۷: شیب خطی که از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ می‌گذرد برابر است با:

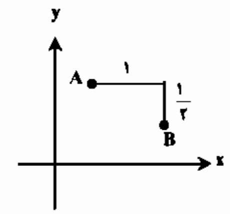
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

نکته ۳۸: شیب یک خط همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد یا بعبارت دیگر می‌توان شیب را نسبت تغییرات y به تغییرات x بیان کرد.



$$m=tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال ۴۸: در شکل زیر ضریب زاویه خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد کدام است؟ (برق – سراسری ۷۵)



۱) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$m=tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

توجه شود که خط گذرنده از دو نقطه A و B دارای شیب منفی می‌باشد.

نکته ۳۹: معادله خطی که از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ می‌گذرد برابر است با:

$$y-y_A=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)$$

نکته ۴۰: برای آن که دو خط موازی باشند باید شیبهای آن دو خط با هم برابر باشند.

نکته ۴۱: برای آنکه دو خط بر هم عمود باشند باید حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط برابر (۱-) باشد.

نکته ۴۲: برای آنکه دو خط به معادلات $a'x+b'y+c'=۰, ax+by+c=۰$ بر هم منطبق باشند باید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

نکته ۴۳: برای تعیین زاویه بین دو خط از فرمول $tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}$ استفاده می‌کنیم.

برای تعیین مختصات محل برخورد دو خط کافی است معادله دو خط را در یک دستگاه حل نماییم.

مثال ۴۹: مختصات محل تلاقی دو خط به معادله $۲x-y=۱$ و $۳x+y=۴$ را به دست آورید؟

$$\begin{cases}۳x+y=۴\\۲x-y=۱\end{cases}\Rightarrow ۵x=۵\to x=۱\xrightarrow{۲x-y=۱}A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.\Rightarrow \text{مختصات محل تلاقی}$$

نکته ۴۴: شرط آنکه سه نقطه $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}\right.$ بر روی یک خط راست واقع باشند آن است که $m_{AB}=m_{AC}$ به عبارت دیگر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$.

مثال ۵۰: به ازای چه مقداری از a سه نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۲a-۱\\۶\end{matrix}\right.$ بر روی یک استقامت واقع می‌باشند.

$$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow\frac{۵-۲}{۳-۱}=\frac{۶-۲}{۲a-۱-۱}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۴}{۲a-۲}\Rightarrow ۳a-۳=۴\to a=\frac{۷}{۳}$$

نکته ۴۵: فاصله نقطه $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ از خط D به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته ۴۶: فاصله دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فاکتوریل

فاکتوریل عددی مانند n را به فرم !n نمایش می‌دهند، !n یعنی حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n .

$$n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$$

تذکر ۱۰: !n را می‌توان به فرم $n\times(n-۱)!$ نیز نوشت .

تذکر ۱۱: طبق قرارداد $۰!=۱$ می‌باشد .

تذکر ۱۲: روابط $\binom{n}{۰}=۱,\binom{n}{n}=۱,\binom{n}{۱}=n$ همواره برقرار هستند.

مفهوم ترکیب :

هر گاه در انتخاب k عنصر از n عنصر، ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب k از n تعریف می‌شود و آن را با نمادهای C_n^k یا $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهیم و با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد :

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

مثال ۵۱: حاصل عبارت $A=\frac{\binom{۵}{۳}\times n!}{\binom{۶}{۳}\times(n-۲)!}$ کدام است ؟

۱) $۲(n-۲)$ ۲) $n(n-۱)$ ۳) $\frac{n(n-۲)}{۲}$ ۴) $\frac{n(n-۱)}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{(۵-۳)!\times۳!}=\frac{۴!\times۵}{۲!\times۳!}=\frac{۳!\times۴\times۵}{۳!\times۱\times۲}=۱۰$$

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!\times۳!}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=\frac{۳!\times۴\times۵\times۶}{۳!\times۱\times۲\times۳}=۲۰$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱۰\times(n-۲)!\times(n-۱)\times n}{۲۰\times(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال ۵۲: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو باشد، آنگاه تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی آن کدام است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ : گزینه «۱» چون ترتیب انتخاب مهم نیست لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم :

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!(۲!)}=\frac{۳!\times۴\times۵}{۳!\times۱\times۲}=۱۰$$

بسط دوجمله‌ای نیوتن

بسط $(a+b)^n$ به بسط دوجمله‌ای معروف است که فرمول بسط به صورت زیرمی‌باشد :

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+...+\binom{n}{n}b^n$$

خواص بسط دوجمله‌ای نیوتن :

۱) جمله $(k+۱)$ام از فرمول $T_{k+۱}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ بدست می‌آید .

۲) تعداد جملات در بسط فوق $(n+۱)$ است .

۳) در بسط فوق مجموع ضرائب ۲^n می‌باشد. به طور کلی در بسط $[f(x)]^n$ برای محاسبه مجموع ضرائب باید $x=۱$ قرار داده و مقدار عددی را بدست آوریم .

مثال ۵۳: مجموع جبری ضرائب بسط عبارت $(۲x^۲+x-۲)^{۹۹}+(۲x^۳+x^۲-x-۱)^۶+۳$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۴»

$$[۲\times(۱)^۲+۱-۲]^{۹۹}+[۲(۱)^۳+(۱)^۲-۱-۱]^۶+۳=۱+۱+۳=۵$$

تذکر ۱۳: در بسط $(a-b)^n$ مجموع ضرائب صفر و جمله $(k+1)$ام از رابطه $T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ بدست می‌آید.

مثال ۵۴: ضریب x^{-17} در بسط عبارت $(x^4-\frac{1}{x^3})^{15}$ کدام است ؟

۱) ۱۳۸۳   ۲) ۱۳۶۵-   ۳) ۱۳۸۳-   ۴) ۱۳۶۵

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا فرمول جمله $(k+1)$ را می‌نویسیم :

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}(\frac{1}{x^3})^k=(-1)^k\binom{15}{k}x^{(60-4k)}.x^{-3k}=(-1)^k\binom{15}{k}x^{60-7k}\Rightarrow 60-7k=-17\Rightarrow \boxed{k=11}$$

$$\Rightarrow T_{12}=(-1)^{11}\binom{15}{11}x^{-17}=(-1)\times\frac{15!}{(15-11)!\times 11!}x^{-17}=-\frac{15!}{4!\times 11!}x^{-17}=(-\frac{11!\times 12\times 13\times 14\times 15}{4!\times 11!})x^{-17}=-1365x^{-17}$$

مثال ۵۵: در بسط $(a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^2}})^{10}$ جمله مستقل از a جمله چندم است ؟ (سیالات – آزاد ۸۱)

۱) ۷   ۲) ۸   ۳) ۳   ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۲»

$$T_{k+1}=\binom{10}{k}(a^{\frac{2}{3}})^{10-k}(a^{-\frac{2}{7}})^k=\binom{10}{k}a^{\frac{2}{3}(10-k)-\frac{2}{7}k}$$

باید توان a صفر شود تا جمله مستقل از a باشد لذا داریم :

$$\frac{2}{3}(10-k)-\frac{2}{7}k=0\Rightarrow k=7\Rightarrow k+1=8\Rightarrow$$ (جمله هشتم)

مثال ۵۶: بسط $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b})^{13}$ چند جمله گویا دارد ؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}a^{\frac{13-k}{3}}.b^{\frac{k}{5}}$$

اگر $k=0,5,10$ آنگاه بسط نسبت به b گویا است، فقط اگر $k=10$ باشد، آنگاه بسط نسبت به a نیز گویا خواهد بود .

توضیح: منظور از گویا بودن صحیح بودن توانهای a و b می باشد .

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

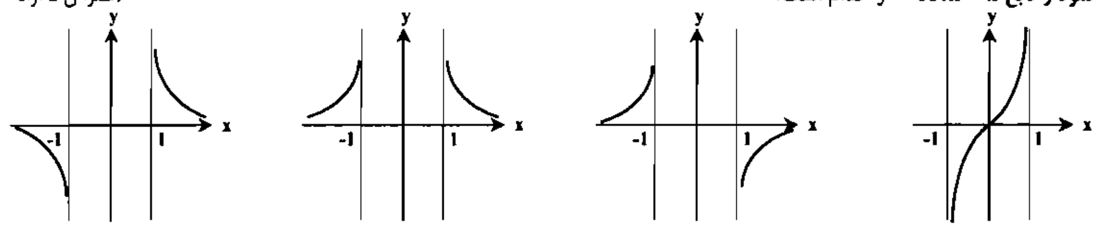
۱ـ در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ دایره‌ای که بر سه ضلع مماس است را محاط می‌کنیم. مجدداً در سه گوشه مثلث سه دایره را طوری محاط می‌کنیم که بر دو ضلع و دایره اول مماس باشد. مجدداً در سه گوشه باقیمانده مثلث اینکار را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم. مساحت اشغال شده به وسیله دایره‌های محاطی کلاً چه مقدار است ؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۷۸)

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{11\pi}{8}$ ۴) $\frac{6\pi}{5}$

۲ـ اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A\cap B)\cup(A-B)$ کدام مجموعه است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) A ۲) A^c ۳) B ۴) B^c

۳ـ نمودار تابع $y=\coth^{-1}x$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۰)



(۴)   (۳)   (۲)   (۱)

۴ـ مقدار $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)$ برابر است: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

۵ـ اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۶ عضو و $A\cap B$ دو عضو داشته باشد، $A\times B$ چند عضو با مؤلفه‌های نابرابر دارد؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲۴   ۲) ۲۶   ۳) ۲۸   ۴) ۳۰

۶ـ مجموعه x هایی که نامساوی $8>\frac{3}{7x-1}>4$ صدق می‌کند، کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\{x:\frac{11}{56}<x<\frac{1}{4}\}$ ۲) $\{x:\frac{11}{56}<x<\frac{7}{8}\}$ ۳) $\{x:\frac{1}{4}<x<\frac{24}{7}\}$ ۴) $\{x:\frac{11}{56}<x<\frac{24}{7}\}$

۷ـ مجموع جواب‌های نامعادله‌های $2>\frac{4}{3x-2}>1$ کدام بازه است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\left(\frac{5}{6},1\right]$ ۲) $\left[\frac{5}{6},1\right)$ ۳) $\left(\frac{5}{6},1\right)$ ۴) $\left[\frac{5}{6},1\right]$

۸ـ مجموع اعضاء دو مجموعه A و B برابر ۸ است. تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A، ۴ برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه B است. تعداد اعضاء مجموعه A کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۱۸

۹ـ دایره‌ای بر دو خط $3x+4y-1=0$ و $3x+4y+9=0$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 4π

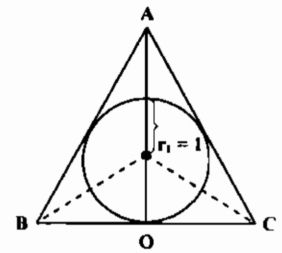
۱۰ـ در عبارت $(x-\frac{1}{x}+2)^5$، جمله فاقد x چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۶۸-   ۲) ۶۰-   ۳) ۳۲   ۴) ۴۸

۱۱ـ ضابطهٔ تابع $y=\coth^{-1}x$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $y=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x-1}{x+1}$ ۲) $y=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x+1}{x-1}$ ۳) $y=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ۴) $y=\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم



۱ـ گزینه «۲»

$(OA)^2=(AC)^2-(OC)^2=(2\sqrt{3})^2-(2\frac{\sqrt{3}}{2})^2=9 \Rightarrow OA=3$

$S_1=\pi r_1^2=\pi\times(1)^2=\pi\times 1$

شعاع دایره‌های بعدی $\frac{1}{3}$ شعاع دایره اول $r_2=\frac{1}{3}r_1$ است: $S_2=3\times\pi\times(r_2)^2=3\times\pi\times(\frac{1}{3})^2=\frac{\pi}{3}$

شعاع دایره بعدی نیز $\frac{1}{3}$ شعاع دایره دوم است: $r_3=\frac{1}{3}r_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}r_1=\frac{1}{9}r_1$

بنابراین مجموع مساحتها یک سری هندسی به صورت روبرو خواهد بود: $S=\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}+\ldots=\frac{\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\pi}{2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۱» $(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap M=A$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۴»

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۳» $\sin^{-1}x=\alpha\ ,\ \cos^{-1}x=\beta \Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta=x \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۳» تعداد عضوهای $A\times B$ برابر $n_A\times n_B$ می‌باشد، لذا $n_{A\times B}=5\times 6=30$ می‌باشد. اما از آنجائی که $A\cap B$ دارای دو عضو می‌باشد لذا دو عضو مشترک در مجموعه $A\times B$ داریم لذا تعداد عضوهای غیر تکراری مجموعه $A\times B$، ۲۸ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{7x-1}>4 \Rightarrow 28x-4<3 \Rightarrow x<\frac{1}{4}\\ \frac{3}{7x-1}<8 \Rightarrow 56x-8<3 \Rightarrow x>\frac{11}{56}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{56}<x<\frac{1}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{3x-2}>1 \Rightarrow 3x-2<4 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow x<2\\ \frac{4}{3x-2}<2 \Rightarrow \frac{2}{3x-2}<1 \Rightarrow 3x-2>2 \Rightarrow x>\frac{4}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}<x<2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases}n(A)+n(B)=8\\ 2^{n(A)}=4\times 2^{n(B)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n(A)+n(B)=8\\ 2^{n(A)}=2^{2+n(B)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n(A)+n(B)=8\\ n(A)=n(B)+2\end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول فوق بدست می‌آید : $n(B)=3\ ,\ n(A)=5$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۱» دو خط داده شده موازی می‌باشند و فاصله آنها برابر است با: $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|9-(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

پس قطر دایره موردنظر برابر و بنابراین شعاع آن برابر یک می‌باشد. $S=\pi r^2=\pi\times 1^2=\pi$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۱» جمله عمومی بسط فوق به صورت $\sum\frac{5!}{a!b!c!}x^a(\frac{-1}{x})^b 2^c$ می‌باشد که در آن $a+b+c=5$ زمانی جمله فاقد x داریم که $a=b$ باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}a=b=0\ ,\ c=5 \Rightarrow \text{مقدار جمله فاقد x}=32\\ a=b=1\ ,\ c=3 \Rightarrow \text{مقدار جمله فاقد x}=-160\\ a=b=2\ ,\ c=1 \Rightarrow \text{مقدار جمله فاقد}=60\end{array}\right\} \Rightarrow \text{کل مقدار جملات فاقد x}=-68$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۲»

◆ ◆ ◆ ◆

آزمون (۱)

تعداد سئوالات: ۱۵ | **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** | **سطح آزمون: C**

۱ـ تمام برد تابع $y=\frac{1}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-\frac{1}{4}]$ ۲) $(-\infty,\frac{-1}{4}]\cup(0,+\infty)$ ۳) $(-\frac{1}{4},+\infty)$ ۴) $(-\infty,\infty)$

۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{10-x^2}}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5-x^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۳ـ مشتق تابع $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ ۲) $\frac{\sqrt{\cos\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}.\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ ۳) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$ ۴) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

۴ـ هرگاه $y=x|x|$، در این صورت y' کدام است؟

۱) $2|x|$ ۲) $|x|$ ۳) $\frac{2|x|}{x}$ ۴) $\frac{|x|}{x}$

۵ـ فرض کنید $\begin{cases}x=a(\theta+\sin\theta)\\ y=a(1+\cos\theta)\end{cases}$، در این صورت $\frac{d^2y}{dx^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{a}{y^2}$ ۲) $-\frac{a}{y^3}$ ۳) $\frac{-a}{y^2}$ ۴) $\frac{a}{y^3}$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ln}x}{\cot gx}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ∞

۷ـ مقدار تقریبی $\sqrt[5]{33}$ چقدر است؟

۱) $2\frac{1}{40}$ ۲) $\frac{1}{80}$ ۳) $\frac{1}{40}$ ۴) $2\frac{1}{80}$

۸ـ معادله خط مماس بر منحنی $xy=1$ در نقطه $(3,\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) $-x+9y-6=0$ ۲) $x+9y-6=0$ ۳) $-x-9y-6=0$ ۴) $x-9y+6=0$

۹ـ تحت مماس بر منحنی $y=be^{\frac{x}{a}}$ چقدر است؟

۱) $2|a|$ ۲) $a|a|$ ۳) $\frac{|a|}{2}$ ۴) $|a|$

۱۰ـ حاصل $\int\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $tgx+\frac{1}{\cos x}+c$ ۲) $tgx+\cos ecx+c$ ۳) $tgx+2\cot gx+c$ ۴) $tgx+2\sec x+c$

۱۱ـ حاصل $\int\frac{dt}{\sin^2(\frac{\pi}{4}-t)}$ چقدر است؟

۱) $\cot g(\frac{\pi}{4}-t)+c$ ۲) $tg(\frac{\pi}{2}-t)$ ۳) $tg(\frac{\pi}{2}-2t)$ ۴) $\cot g(\frac{\pi}{4}+t)+c$

۱۲ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{9+16\cos^2 x}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{30}$ ۳) $\frac{\pi}{20}$ ۴) $\frac{\pi}{10}$

۱۳ـ مختصات قطبی نقطه $A(1,-\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $A(2,\frac{\pi}{3})$ ۲) $A(2,\frac{4\pi}{3})$ ۳) $A(2,\frac{5\pi}{3})$ ۴) $A(2,\frac{2\pi}{3})$

۱۴ـ دوره تناوب تابع $y=\log\cos 2x$ برابر است با:

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۵ـ دنباله $a_n=\frac{\log(n^5+1)}{\log(n^2+1)}$، دنباله‌ای است ....

۱) نزولی و همگرا ۲) نزولی و واگرا ۳) صعودی و همگرا ۴) صعودی و واگرا

آزمون (۲)

تعداد سئوالات: ۱۵ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: C**

۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[\frac{8x-3}{2x-1}-\frac{4x^2+1}{4x^2-1}]$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $-\frac{7}{4}$

۲ـ فرض کنید $y=\ln(\frac{1+tgx}{1-tgx})$، در این صورت y' کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cos 2x}$ ۲) $\frac{2}{\cos 2x}$ ۳) $-\frac{2}{\cos 2x}$ ۴) $-\frac{1}{\cos 2x}$

۳ـ اگر $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-2\sqrt{x-2\sqrt{\dots}}}}$، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{1+y}$ ۲) $\frac{2}{1+y}$ ۳) $\frac{1}{2(1+y)}$ ۴) $1+\frac{y+1}{x-2}$

۴ـ مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ متر، وقتی طول اضلاع آن با سرعت ۳ متر در ثانیه افزایش می‌یابد، با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱) $15\sqrt{3}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $10\sqrt{3}$

۵ـ معادله خط مماس بر منحنی $x^2+4y^2-4x=0$ در نقطه $(4,0)$ کدام است؟

۱) $y=2$ ۲) $x=2$ ۳) $x=4$ ۴) $y=4$

۶ـ تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ در فاصله $0<x<\frac{\pi}{2}$، .... است.

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) نه صعودی و نه نزولی ۴) در فاصله $0<x<\frac{\pi}{4}$ صعودی

۷ـ حاصل $\int\frac{dx}{tgx+\cot gx}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ۲) $\frac{\cos 2x}{2}+c$ ۳) $\frac{-1}{2}\cos 2x+c$ ۴) $+\frac{\cos 2x}{2}+c$

۸ـ مساحت ناحیهٔ $\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le |x|\}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۹ـ مختصات قطبی قرینه نقطه $M(r,\theta)$ نسبت به قطب کدام است؟

۱) $(r,\pi-\theta)$ ۲) $(-r,\theta+\pi)$ ۳) $M(r,\theta-\pi)$ ۴) $M(r,\theta+\pi)$

۱۰ـ دامنه تعریف تابع $y=\sqrt{\frac{x}{2-x}}+\sqrt{\sin x}$ کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[0,\frac{3}{2})$ ۴) $R-\{1,2\}$

۱۱ـ مشتق مرتبه nام $\begin{cases}x=\ln t\\ y=1/t\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{(-1)^{2n}}{t}$ ۲) $\frac{(-1)^n}{t}$ ۳) $\frac{(-1)^n}{t^2}$ ۴) $\frac{(-1)^{2n}}{t^2}$

۱۲ـ حاصل $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{(5x\sqrt[3]{x}+3)^{\frac{3}{2}}}{5}+c$ ۲) $\frac{1}{10}(5x\sqrt[3]{x}+3)^{\frac{3}{2}}+c$ ۳) $\frac{(5x\sqrt[3]{x}+3)^{\frac{3}{2}}}{4}+c$ ۴) $\frac{2(5x\sqrt[3]{x}+3)^{\frac{3}{2}}}{5}+c$

۱۳ـ یکی از ریشه‌های دوم عدد $z=-15-8i$ کدام است؟

۱) $1+4i$ ۲) $-1-4i$ ۳) $2+4i$ ۴) $1-4i$

۱۴ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵ـ مقدار $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\mathrm{Ln}2x}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) e

آزمون (۴)

تعداد سئوالات: ۱۵	مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه	سطح آزمون: B

۱ـ تمام برد تابع $y=\log(1+\sin\sec^{-1}\sin x)$ کدام است؟

۱) $R-\{0\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) R^-

۲ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x-\cos(\mathrm{Arc}\sin x)}{1-\mathrm{tg}(\mathrm{Arc}\sin x)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۳) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

۳ـ فرض کنید $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$، آنگاه $\frac{dx}{dy}$ برابر است با:

۱) $\frac{x}{y}$ ۲) $\frac{y}{x}$ ۳) $-\frac{x}{y}$ ۴) $-\frac{y}{x}$

۴ـ اگر $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$، آنگاه مقدار عبارت $C_0+2C_1+3C_2+\ldots+(n+1)C_n$ چقدر است؟

۱) $(n+2)2^{n-1}$ ۲) $(n+1)2^{n+2}$ ۳) $(n+2)2^{n+1}$ ۴) $(n+1)2^{n-1}$

۵ـ فرض کنید $y=\sin(\sin x)$، در این صورت $y''+y'\mathrm{tg}x$ کدام است؟

۱) $2y\cos^2 x$ ۲) $-2y\cos^2 x$ ۳) $y\cos^2 x$ ۴) $-y\cos^2 x$

۶ـ مقدار حد $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}2x}-\frac{2x}{2x-1}\right)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ مقدار تقریبی $(1/999)^6$ کدام است؟

۱) ۶۲/۵ ۲) ۶۴/۸۰۸ ۳) ۶۲/۸۰۸ ۴) ۶۳/۸۰۸

۸ـ معادله خط مماس بر منحنی $x=\sqrt{t}$ و $y=t-\frac{1}{\sqrt{t}}$ در $t=4$ کدام است؟

۱) $-17x-4y+20=0$ ۲) $-17x+4y-20=0$ ۳) $17x-4y-20=0$ ۴) $17x+4y+20=0$

۹ـ کدامیک از روابط زیر در فاصله $0<x<\frac{\pi}{2}$ برقرار است؟

۱) $\sin x+\cos x<2x$ ۲) $\sin x+\mathrm{tg}x>2x$ ۳) $\sin x+\mathrm{tg}x<2x$ ۴) $\sin x+\cos x>2x$

۱۰ـ حاصل $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{tg}x-\sec x-x+c$ ۲) $x+\sec x-\mathrm{tg}x+c$ ۳) $x+\mathrm{tg}x+c$ ۴) $\mathrm{tg}x-x+\sec(x)+c$

۱۱ـ حاصل $\int e^x(1+\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^2x)dx$ کدام است؟

۱) $-e^x+e^x\mathrm{tg}x$ ۲) $e^x\mathrm{tg}x+c$ ۳) $xe^x+\mathrm{tg}x$ ۴) $e^x-e^x\mathrm{tg}x+c$

۱۲ـ حاصل $\int\frac{dx}{x(x^4-1)}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\frac{x^4-1}{x^4}+c$ ۲) $\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\frac{x^4-1}{x^3}+c$ ۳) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{x^4-1}{x^4}+c$ ۴) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{x^4-1}{x^3}+c$

۱۳ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۱۴ـ مساحت درون بیضی $x^2+4y^2-6x+8y+9=0$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 4π

۱۵ـ حاصل $\int_{-2}^{2}|x^2|dx$ چقدر است؟

۱) $10-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ ۲) $10-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ ۳) $10-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ ۴) $10+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

آزمون (۴)

تعداد سئوالات: ۱۵	مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه	سطح آزمون: B

۱ـ مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{(a^{2x}-1)(a^x-1)}{x\,tgx}$ برابر است با:

۱) Lna ۲) $\frac{1}{2}Ln^2a$ ۳) $2Ln^2a$ ۴) $2Lna+1$

۲ـ حاصل $\lim_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{\frac{3}{x^2}}$ برابر است با:

۱) e^{-3} ۲) $-e$ ۳) e ۴) e^{-1}

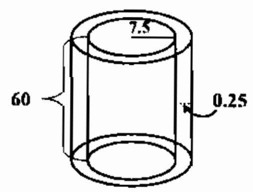
۳ـ فرض کنید $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$، در این صورت $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{1+x^2}$ ۲) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ ۳) $\frac{1}{(1+x)^2}$ ۴) $-\frac{1}{1+x^2}$

۴ـ مقدار حد $\lim_{x\to 0^+}\log_{tgx} tg2x$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{22}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۵ـ با توجه به شکل مقابل و مقادیر داده شده، مقدار تقریبی حجم محصور مابین دو استوانه چقدر است؟



۱) $375\pi cm^3$
۲) $225\pi cm^3$
۳) $500\pi cm^3$
۴) $112/5\pi cm^3$

۶ـ تابع $y=x(x+1)(x+2)$ در کدامیک از موارد زیر نزولی است؟

۱) $|x+1|<\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲) $|x+\frac{1}{\sqrt{3}}|<1$ ۳) $|x+\frac{2}{\sqrt{3}}|<1$ ۴) $|x+1|<\frac{1}{\sqrt{3}}$

۷ـ حاصل $\int\frac{1-tgx}{1+tgx}dx$ برابر است با:

۱) $Ln|\cos(\frac{\pi}{4}+x)|+c$ ۲) $Ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)+c$ ۳) $Ln|\sin(\frac{\pi}{4}-x)|+c$ ۴) $Ln|\cos(\frac{\pi}{4}-x)|+c$

۸ـ حاصل $\int sec^6 x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}tg^5x+\frac{1}{2}tgx+tgx+c$ ۲) $tgx+\frac{1}{5}tg^5x+\frac{2}{3}tg^3x+c$
۳) $\frac{1}{5}tg^5x+\frac{2}{3}tgx^3+2tgx+c$ ۴) $tg^5x+\frac{3}{2}tg^3x+c$

۹ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{tgx}}{1+\sqrt{tgx}}dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۰ـ حاصل $\int_{-1}^{2} |(x-1)(x-2)|\,dx$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

۱۱ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{(n^3+k^3)}$ چقدر است؟

۱) $Ln2$ ۲) $\frac{2}{3}Ln2$ ۳) $\frac{1}{3}Ln2$ ۴) $\frac{1}{2}Ln2$

۱۲ـ مقدار مساحت محصور درون منحنی $ay^2 = x^2(a-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{15}a^2$ ۲) $\frac{16}{15}a^2$ ۳) $\frac{2}{15}a^2$ ۴) $\frac{8}{15}a^2$

۱۳ـ نقطه‌ای روی مسیر $y = x(8-x)$ طوری حرکت می‌کند که طولش با زمان طبق قانون $x = t\sqrt{t}$ تغییر می‌کند، میزان تغییر عرض در نقطه (۷ و ۱) چقدر است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۱۸ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۴ـ مساحت داخل دلنمای $r = a(1-\cos\theta)$ برابر است با:

۱) $\frac{2\pi a^2}{3}$ ۲) $3\pi a^2$ ۳) $\frac{3\pi a^2}{4}$ ۴) $\frac{3\pi a^2}{2}$

۱۵ـ در مورد سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}tg\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ کدام گزاره صحیح است ؟

۱) سری همگرائی مشروط دارد ۲) سری همگرائی مطلق دارد ۳) سری واگراست ۴) هیچکدام

آزمون (۵)

تعداد سئوالات: ۱۵ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: B**

۱ـ تمام برد تابع $y = \dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{3},3]$ ۲) $[\frac{1}{3},3)$ ۳) $[\frac{1}{3},3]$ ۴) $(\frac{1}{4},3)$

۲ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{cosec}x-1}{\cot^2 gx}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ∞

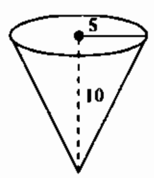
۳ـ مشتق تابع $y = Arctg(\dfrac{2+3tgx}{3-2tgx})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3tgx}{1+tg^2x}$ ۲) ۳ ۳) $\dfrac{3}{1+(3-2tgx)^2}$ ۴) ۱

۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2Ln(1+\frac{1}{x}))$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱- ۴) $-\frac{1}{2}$

۵ـ مخروطی به شکل مقابل در نظر بگیرید، که آب با سرعت ۴ متر مکعب در ثانیه به آن وارد می‌شود. سرعت بالا آمدن آب در لحظه‌ای که ارتفاع آب ۶ متر می‌باشد چقدر است؟



۱) $\frac{4}{9\pi}$ ۲) $\frac{9}{2\pi}$ ۳) $\frac{9\pi}{4}$ ۴) $\frac{2}{9\pi}$

۶ـ معادله خط مماس بر بیضی $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ در نقطه (x_1,y_1) واقع بر بیضی کدام است؟

۱) $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ ۲) $\dfrac{xx_1}{a}-\dfrac{yy_1}{b}=1$ ۳) $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ ۴) $\dfrac{xx_1}{a}+\dfrac{yy_1}{b}=1$

۷ـ حاصل $\int\dfrac{Lnx}{(1+Lnx)^2}dx$ برابر است با:

۱) $\dfrac{2x}{1+Lnx}+c$ ۲) $\dfrac{2x}{1-Lnx}$ ۳) $\dfrac{x}{1+Lnx}+c$ ۴) $\dfrac{x}{1-Lnx}+c$

۸ـ حاصل انتگرال $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}Ln|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}|+c$ ۲) $\frac{1}{2}Ln|\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}|+c$ ۳) $Ln|\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ۴) $Ln|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}|+c$

۹ـ حاصل $\int_a^b\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}dx$ چقدر است؟

۱) $(b+a)\frac{\pi}{2}$ ۲) $(b+a)\pi$ ۳) 1π ۴) $(\frac{b-a}{2})\pi$

۱۰ـ مقدار $\int_{1}^{e}\frac{e^x(1+x\ln x)}{x}dx$ چقدر است؟

۱) e^e-1 ۲) e^e+1 ۳) e^e+e ۴) e^e

۱۱ـ منحنی $y=x^2e^{-x}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۲ـ مختصات مرکز ثقل ربع دایره $x^2+y^2\le r^2$ واقع در ناحیه اول مختصات کدام است؟

۱) $(\frac{2r}{3\pi},\frac{2r}{3\pi})$ ۲) $(\frac{4r}{3\pi},\frac{4r}{3\pi})$ ۳) $(\frac{2r}{\pi},\frac{2r}{\pi})$ ۴) $(\frac{3r}{4\pi},\frac{3r}{4\pi})$

۱۳ـ حد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

۱۴ـ اگر دنباله‌های $\{a_n\},\{b_n\}$ واگرا باشند، در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) دنباله $\{a_n b_n\}$ همگراست. ۲) دنباله $\{a_n b_n\}$ واگراست. ۳) دنباله $\{a_n+b_n\}$ واگراست. ۴) هیچکدام

۱۵ـ طول منحنی نمایش $\rho=\sin^3\frac{\theta}{3}$ چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

آزمون (۶)

تعداد سؤالات: ۱۵ | **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** | **سطح آزمون: B**

۱ـ حاصل $\lim_{x\to1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{(\text{Arccos}\,x)^2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ـ اگر $e^x+e^y=e^{x+y}$، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $\frac{e^y(1-e^y)}{e^x(e^x-1)}$ ۲) $\frac{e^x(1+e^y)}{e^y(e^x+1)}$ ۳) $\frac{e^x(1-e^y)}{e^y(e^x-1)}$ ۴) $\frac{e^y(1+e^y)}{e^x(e^x+1)}$

۳ـ اگر $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$، آنگاه $(1+x^2)y''+xy'$ برابر است با:

۱) my ۲) mxy ۳) m^2y ۴) $\frac{m^2y}{x}$

۴ـ به ازای چه مقادیر a و b رابطهٔ $\lim_{x\to0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$ برقرار است؟

۱) $a=\frac{3}{2}, b=\frac{-5}{2}$ ۲) $a=\frac{-3}{2}, b=\frac{-5}{2}$ ۳) $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}$ ۴) $a=\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}$

۵ـ مقدار تقریبی $f(x)=\frac{1}{x^4}$ وقتی $x=2/04$ برابر است با:

۱) ۰/۰۵۳۵ ۲) ۰/۰۵۶۵ ۳) ۰/۰۵۴۵ ۴) ۰/۰۵۷۵

۶ـ تحت مماس بر منحنی $\begin{cases}x=a(\theta+\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ در $\theta=\frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

۱) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

۷ـ حاصل $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}})+c$ ۲) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c$

۳) $(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x-1)^{\frac{3}{2}}+c$ ۴) $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{1}{2}}+c$

۸ـ حاصل $\int\cos\sqrt{x}\,dx$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{x}(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+c$ ۲) $\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+c$

۳) $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+c$ ۴) $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}+c$

۹ـ مقدار $\int^{\pi}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۰ـ مقدار $\int^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\sqrt[4]{\sin x}\,dx$ چقدر ،ست

۱) $\frac{16}{65}$ ۲) $\frac{64}{65}$ ۶۵ ۴) $\frac{24}{65}$

۱۱ـ حاصل انتگرال $\int^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}\cot g x\,dx$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) π ۳) 1 ۴) انتگرال واگراست

۱۲ـ مساحت درون ناحیه $\{(x,y) \mid |x| \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$ برابر است با:

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۳ـ حاصل $\int \frac{x^2dx}{x^6+2x^3+3}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\frac{x^3+1}{\sqrt{2}})+c$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\frac{x^3+1}{\sqrt{2}})+c$ ۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\frac{x^3+1}{\sqrt{2}})+c$ ۴) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}\frac{x^3+1}{\sqrt{2}}+c$

۱۴ـ معادلهٔ یک منحنی در مختصات قطبی به صورت $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$ است. طول این منحنی از $\theta = 1$ تا $\theta = 2$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}(e-\sqrt{e})$ ۲) $\sqrt{5}(e-\sqrt{e})$ ۳) $\sqrt{5}(e^2-\sqrt{e})$ ۴) $\sqrt{3}(e^2-\sqrt{e})$

۱۵ـ اگر $f(x) = (x-\frac{\pi}{6}) - \frac{(x-\frac{\pi}{6})^3}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})^5}{4!} - \frac{(x-\frac{\pi}{6})^7}{6!} + \dots$، $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$

آزمون (۷)

تعداد سئوالات: ۱۵   **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه**   **سطح آزمون: B**

۱ـ تمام برد تابع $y = \log_2(\sqrt{4-x}+\sqrt{x-6})$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{2},1)$ ۲) $(\frac{1}{2},1]$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $[\frac{1}{2},1]$

۲ـ اگر $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} = a(x-y)$، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$ ۲) $-\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ ۴) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$

۳ـ اگر $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$، آنگاه مقدار عبارت $C_1 + 2^2C_2 + 3^2C_3 + n^2C_n$ برابر است با:

۱) صفر   ۲) $(n+1)2^{n-2}$ ۳) $(n^2+1)2^{n-2}$ ۴) $(n+1)2^{n-2}$

۴ـ $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\mathrm{Ln}(1-x)}}$ برابر است با:

۱) e ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $e+1$ ۴) e^{-1}

۵ـ مردی با ۶ فوت قد، با سرعت ۳ فوت در ثانیه از یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۲۴ فوت دور می‌شود. با چه سرعتی انتهای سایه او حرکت می‌کند.

۱) 2 ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) $2\sqrt{2}$

۶ـ مساحت مثلثی که اضلاع آن محور x ها و خطوط مماس و قائم بر منحنی $y(2a-x) = x^2$ در نقطه (a,a) می‌باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{3}{5}a^2$ ۲) $\frac{13}{5}a^2$ ۳) $\frac{5a^2}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}a^2$

۷ـ حاصل $\int \frac{\cot g t.dt}{\sqrt{4\sin^2 t-1}}$ برابر است با:

۱) $\sec^{-1}|2\cos t|+c$ ۲) $\sec^{-1}|2\sin t|+c$ ۳) $\sec^{-1}|\sin t|+c$ ۴) $\sec^{-1}|\cos t|+c$

۸ـ مقدار $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) $2\mathrm{Arctg}(1+\sqrt{x})+c$ ۲) $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}+c$ ۳) $2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{x})+c$ ۴) $\mathrm{Arctg}(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}+c$

۹ـ مقدار $\int^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^3x}{1+\cos 2x}dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۰ـ مقدار انتگرال $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\mathrm{Ln}x|\,dx$ چقدر است؟

۱) $2(1+e^{-1})$ ۲) $\frac{(e-1)}{2}$ ۳) $\frac{1+e^{-1}}{2}$ ۴) $2(1-e^{-1})$

۱۱ـ نمودار معادله $25x^2+10xy+y^2-1=0$، نمایشگر کدامیک از منحنی‌های زیر است؟

۱) سهمی   ۲) بیضی   ۳) هذلولی   ۴) دو خط

۱۲ـ فرض کنید $y = \mathrm{Log}_{x^2} 2$، در این صورت y' کدام است؟

۱) $\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$ ۲) $\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$ ۳) $\frac{-\ln 2}{2x\ln^2 x}$ ۴) $-\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$

۱۳ـ کدامیک از انتگرالهای زیر واگراست؟

۱) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{10}}$ ۲) $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ ۳) $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{Arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ۴) $\int_1^\infty (1-\cos\frac{1}{x})dx$

۱۴ـ مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ برابر با کدام عدد است؟

۱) $-\frac{5}{8}-\ln\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{8}+\ln\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{4}-\ln\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{5}{4}+\ln\frac{1}{2}$

۱۵ـ به ازای $n \ge 2$ عبارت $T_n = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\ldots(1-\frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟

۱) $\frac{n-1}{2n}$ ۲) $\frac{2n}{n-1}$ ۳) $\frac{2n}{n+1}$ ۴) $\frac{n+1}{2n}$

آزمون (۸)

تعداد سئوالات: ۱۵ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: B**

۱ـ مشتق تابع $y = \mathrm{Arctg}(\frac{3x-x^3}{1-3x^2})$ برابر است با:

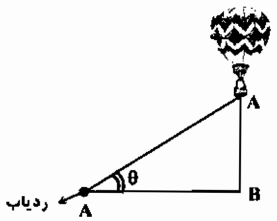
۱) $\frac{6}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1}{1+x^2}$ ۳) $\frac{9}{1+x^2}$ ۴) $\frac{3}{1+x^2}$

۲ـ حاصل $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $e+1$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

۳ـ یک بالن با سرعت ۱۴۰ متر در دقیقه از زمین دور می‌شود. با توجه به شکل مقابل یک ردیاب حرکت بالن را دنبال می‌کند. سرعت تغییر زاویه θ وقتی بالن در ارتفاع ۵۰۰ متری می‌باشد چند رادیان است؟

۱) ۰/۱۴
۲) ۰/۲۸
۳) ۰/۰۷
۴) ۰/۲۱



۴ـ معادله خط قائم بر منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ با محور xها زاویه θ می‌سازد، معادله خط قائم کدام است؟

۱) $y\cos\theta = a\cos 2\theta$ ۲) $y\cos\theta + x\sin\theta = a\cos 2\theta$
۳) $y\cos\theta - x\sin\theta = a\cos 2\theta$ ۴) $x\sin\theta = a\cos 2\theta$

۵ـ حاصل $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ برابر است با:

۱) $\mathrm{tg}x - \sec x - x + c$ ۲) $x + \mathrm{tg}x + c$ ۳) $\mathrm{tg}x - x + \sec(x) + c$ ۴) $-\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+c$

۶ـ حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x})+c$ ۲) $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x})+c$ ۳) $\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}+c$ ۴) $-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x})+c$

۷ـ مقدار انتگرال $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Arctg}(x-\frac{1}{x})$ ۲) $\mathrm{Arccotg}(x+\frac{1}{x})$ ۳) $\mathrm{Arccotg}(x-\frac{1}{x})$ ۴) $\mathrm{Arctg}(x+\frac{1}{x})+c$

۸ـ حاصل $\int_a^b\frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx$ کدام است؟

۱) $b-a$ ۲) $2(b-a)$ ۳) $\frac{b-a}{2}$ ۴) هیچکدام

۹ـ مقدار حد $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2})$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰ـ مقدار $\int^{1}|x^2+x|dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ۳) $3+\sqrt{5}$ ۴) $3-\sqrt{5}$

۱۱ـ معادله مجموعه نقاطی که حاصل‌ضرب فواصلشان تا نقاط $A(a,0)$ و $B(-a,0)$ برابر a^2 باشد کدام است؟

۱) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ ۲) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

۳) $(x^2+y^2)^2=3a^2(x^2-y^2)$ ۴) $(x^2+y^2)^2=2a(x^2-y^2)$

۱۲ـ مجموع حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{1}{x+2^{1/(x-2)}}$ وقتی $x\to 2$ چقدر می‌شود؟

۱) ∞ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۳ـ هرگاه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$، در این صورت $a+b+c$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) 4 ۳) -3 ۴) 5

۱۴ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z+2i|+|z-2i|=6$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) پاره خط

۱۵ـ مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ برابر است با:

۱) $(x+1)e^x$ ۲) $(x^2+1)e^x$ ۳) x^2e^x ۴) $(x^2+x)e^x$

آزمون (۹)

تعداد سؤالات: ۲۰	مدت زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه	سطح آزمون: A

۱ـ تمام برد تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ کدام است؟

۱) $R-\{-1,\frac{1}{5}\}$ ۲) $R-\{\frac{1}{5},1,-1\}$ ۳) R ۴) $R-\{1,\frac{1}{5}\}$

۲ـ حاصل $\int(\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot gx})dx$ کدام است؟

۱) $\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$ ۲) $\sin^{-1}(\sin x+\cos x)+c$

۳) $\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x+\cos x)+c$ ۴) $\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$

۳ـ حاصل $\int\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$ برابر است با:

۱) $Ln|tg(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2})|+c$ ۲) $Ln|tg(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})|+c$ ۳) $\frac{1}{2}Ln|tg(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})|+c$ ۴) $\frac{1}{2}Ln|tg(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2})|+c$

۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+2m}+\cdots+\frac{1}{n+nm})$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{m}Ln(1+m)$ ۲) $\frac{Ln(1+m)}{2m}$ ۳) $Ln(1+m)$ ۴) $Ln(1+\frac{1}{m})$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-\cos\alpha)^{\csc^2\alpha}$ برابر است با:

۱) e^{-1} ۲) $\sqrt{e}$ ۳) e ۴) $2\sqrt{e}$

۶ـ مقدار $\int^{1}\frac{x^2+2}{x^4+4}dx$ چقدر است؟

۱) $Ln2$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}Arctg2$ ۴) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}Arctg2$

۷ـ کدامیک از انتگرالهای زیر واگراست؟

۱) $\int_0^1\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ۲) $\int_0^1\frac{Ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}dx$ ۳) $\int_0^1\frac{dx}{x-tgx}$ ۴) $\int_0^1\frac{dx}{1-e^{\sqrt[3]{x}}}dx$

۸ـ حاصل $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}$:

۱) $\log 8$ ۲) $-1+\log\frac{2}{3}$ ۳) واگرا ۴) $\log\frac{2}{3}$

۹ـ در تابع $y=|x(x+1)(x+2)...(x+10)|+|x+8||x+9|$ جمع مشتق چپ و راست در $x=-10$ چقدر است؟

۱) $2\times 9!$ ۲) صفر ۳) -3 ۴) -6

۱۰ـ محیط آستروئید به معادله پارامتری $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ کدام است؟

۱) 0 ۲) a ۳) $6a$ ۴) $8a$

۱۱ـ کدامیک از سریهای زیر همگراست ؟

۱) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ ۲) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{7^{k+9}}{2^{3k}}$ ۳) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k+3}}{8k}$ ۴) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{3k}$

۱۲ـ حاصل عبارت $\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{(Lnx)^2}\right)$ چقدر است؟

۱) $\frac{e(e-2)}{2}$ ۲) $\frac{e(e+2)}{2}$ ۳) $e(e-2)$ ۴) $e(e+2)$

۱۳ـ حاصل $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$ چقدر است؟

۱) $2\pi-1$ ۲) π ۳) 2π ۴) $1+\frac{\pi}{2}$

۱۴ـ مساحت درون بیضی $3x^2-10xy+10y^2=2$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt5}{5}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt5}{10}$ ۳) $\pi\sqrt5$ ۴) $\frac{2\pi\sqrt5}{5}$

۱۵ـ با فرض $x>0$، مشتق تابع $y=Ln\left(\frac1x+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ برابر است با:

۱) $-x\sqrt{1+x^2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ ۳) $x\sqrt{1+x^2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$

۱۶ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\,dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{32}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۷ـ مقدار $\int_\pi^{2\pi}[\sqrt2\cos x]dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) $\frac{-\pi}{2}$

۱۸ـ طول قوس منحنی نمودار $y=Ln(\cos x)$ از $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $Ln(\sqrt2+1)$ ۳) $Ln\frac{4}{\pi}$ ۴) $Ln(\sqrt2-1)$

۱۹ـ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt n}$ همگرا است. ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است.

۳) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,Ln(n)}$ واگرا است. ۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{Ln(n)}{n}$ واگرا است.

۲۰ـ اگر $x>0$ باشد آنگاه حاصل $S=\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\dots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\cdots$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

آزمون (۱۰)

تعداد سؤالات: ۲۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ حد تابع $f(x)=\sqrt x(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4})$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) $\frac12$ ۲) $-\frac12$ ۳) ۱ ۴) ۱-

۲ـ تابع $y=\begin{cases}[2x] & |x|<2\\ x+1 & |x|\geq 2\end{cases}$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۴

۳ـ یکی از جواب‌های معادله $z^4-z^3+z^2-z+1=0$ به کدام صورت است ؟

۱) $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}$ ۴) $\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$

۴ـ حاصل $S=\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac14$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{60}$

۵ـ حاصل انتگرال $\int\frac{x+\cos x}{1-\sin x}$ برابر است با:

۱) $x\sec x+tgx+c$ ۲) $x\sec x-tgx+c$ ۳) $x(\sec x+tgx)+c$ ۴) $x(\sec x-tgx)+c$

۶ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ چقدر است؟

۱) $1+Ln2$ ۲) $2-2Ln2$ ۳) $1+2Ln2$ ۴) $2-Ln2$

۷ـ اگر $a_n=\frac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x)=b+[2x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگرا است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) نشدنی

۸ـ حاصل $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ برابر:

۱) $Ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+c$ ۲) $Ln\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}+c$ ۳) $Ln(\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1})+c$ ۴) $\frac12 Ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+c$

۹ـ حاصل $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰ـ مقدار $\int_0^{n^2}[\sqrt x]dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{n(n+1)(4n+1)}{6}$ ۲) $\frac{n(n-1)(4n-1)}{6}$ ۳) $\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ ۴) $\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$

۱۱ـ مقدار $\lim_{t\to\infty}(\sin\sqrt t-\sin\sqrt{t+1})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac12$ ۴) $\frac14$

۱۲ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$ چقدر است؟

۱) $2(p-q)$ ۲) $p-q$ ۳) $(p-q)^2$ ۴) $\frac{p-q}{2}$

۱۳ـ حاصل $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}$ برابر است با:

۱) $\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+c$ ۲) $\frac{6x^2-4x+1}{6(x-1)^4}+c$ ۳) $-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+c$ ۴) $-\frac{6x^2-4x+1}{3(x-1)^4}+c$

۱۴ـ حاصل $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$ کدام است؟

۱) $\text{Arcsin}\frac{x+1}{3}+c$ ۲) $2\text{Arcsin}\frac{x+1}{3}+c$ ۳) $\text{Arcsin}\frac{x+1}{6}+c$ ۴) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}(\frac{x+1}{3})+c$

۱۵ـ حاصل $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2+\text{tg}\frac{x}{2}}$ ۲) $\frac{-1}{1+\text{tg}\frac{x}{2}}$ ۳) $\frac{-2}{2+\text{tg}\frac{x}{2}}$ ۴) $\frac{-1}{2+\text{tg}\frac{x}{2}}$

۱۶ـ مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho=1+\cos\varphi$ را که به وسیله دایره $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ قطع می‌شود کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ ۲) $\frac{2}{3}(\pi+\sqrt{3})$ ۳) $\frac{3}{4}(\pi-\sqrt{3})$ ۴) $\frac{3}{4}(\pi+\sqrt{3})$

۱۷ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ کدام است؟

۱) πa^2 ۲) $\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\pi a^2}{2}$

۱۸ـ ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $\text{Ln}\cos x$ چقدر است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{-1}{12}$

۱۹ـ طول قسمتی از خط $\rho=a\sec(\theta-\frac{\pi}{3})$ که بین $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ واقع است، چقدر می‌باشد؟

۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$

۲۰ـ مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z-a||z+a|=a^2$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) لمینسکات ۴) دلوار

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»

آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»

آزمون (۴)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»

آزمون (۵)

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۴»

آزمون (۶)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۳»

آزمون (۷)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»

آزمون (۸)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»

آزمون (۹)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»

آزمون (۱۰)

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»

تست‌های سراسری ۱۳۸۵

عمران

۱ـ مقدار انتگرال $\int^{2}[t^2]dt$ که در آن $[t^2]$ جزء صحیح t^2 می‌باشد برابر با چیست؟

۱) $5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۲) $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۳) $5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۴) $4-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

۲ـ بازه همگرائی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟

۱) $[-5,-1)$ ۲) $(-5,-1)$ ۳) $[-5,-1]$ ۴) $(-5,-1]$

۳ـ اگر $n\ge 1$، $a>0$، $I_n=\int^{a}(a^2-x^2)^n dx$ رابطه بین I_n و I_{n-1} چیست؟

۱) $I_n=\frac{a^2n}{2n+1}I_{n-1}$ ۲) $I_n=\frac{2a^2}{n+2}I_{n-1}$ ۳) $I_n=\frac{2a^2n}{n+2}I_{n-1}$ ۴) $I_n=\frac{2a^2n}{2n+1}I_{n-1}$

۴ـ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به خطوط $x=3$، $y=0$ و سهمی $y=x^2$ حول محور y ها برابر با چیست؟

۱) 9π ۲) $\frac{27\pi}{2}$ ۳) $\frac{54\pi}{4}$ ۴) $\frac{81\pi}{2}$

عمران ـ نقشه‌برداری

۵ـ بازه همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(2x)^{2n}$ کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۳) $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ ۴) $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

۶ـ اگر $\int^{x^2}f(t)dt=x^2(1+x)$، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

مکانیک

۷ـ تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد کدامیک از انتگرال‌های زیر واگراست؟

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}\qquad x>0$$

۱) $\int_0^{\infty}f(x)dx$ ۲) $\int_0^{1}f^2(x)dx$ ۳) $\int_0^{\infty}f^2(x)dx$ ۴) $\int_0^{\infty}\sqrt{x}f^2(x)dx$

۸ـ مطلوبست تقریب درجه دوم تابع $f(x)=Ln(\sec x+\tan x)$ در نزدیکی نقطه $x=0$.

۱) x ۲) $-x+\frac{1}{2}x^2$ ۳) $x-\frac{1}{2}x^2$ ۴) $x+\frac{1}{2}x^2$

۹ـ مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$.

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) e

۱۰ـ منحنی $y=e^{-kx}\sin x$، $x\ge 0$ در بالای محور x و زیر آن متوالیاً (از مبدأ به سمت راست) زنجیره‌ای از ناحیه‌های دنبال هم را تولید می‌کند که با رفتن به سمت راست، مساحت آنها کاهش می‌یابد هرگاه $k>0$ (ثابت). نسبت مساحت دانه $(n+1)$ام به دانه nام چیست؟

۱) e^{-1} ۲) $e^{-\pi}$ ۳) $e^{-n\pi}$ ۴) $e^{-k\pi}$

۱۱ـ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{4}{e}$

۱۲ـ بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ عبارتست از:

۱) $(-\sqrt{e},\sqrt{e})$ ۲) $(-e,e)$ ۳) $[-e,e]$ ۴) $[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

۱۳ـ مقدار مشتق انتگرال مقابل را حساب کنید. $\frac{d}{dt}\int_0^{t}e^{(t-\tau)^2}d\tau$

۱) ۱ ۲) e^{t^2} ۳) $e^{t^2}-1$ ۴) $e^{(t-\tau)^2}$

آمار

۱۴ـ اگر $f(x)=[\cosh x]-[\sinh x]$، مقدار $\lim_{x\to 0^+}f(x)-\lim_{x\to 0^-}f(x)$ کدام است؟ ([ ] جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

۱۵ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}Ln(e^n+2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۱۶ـ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{Ln|x|}$ بر R از نظر پیوستگی کدام است؟

۱) در یک نقطه ناپیوسته ۲) در دو نقطه ناپیوسته ۳) در سه نقطه ناپیوسته ۴) همواره پیوسته است.

۱۷ـ طول منحنی تابع با ضابطهٔ $y=x^{\frac{3}{2}}$ از نقطه $x=0$ تا نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ ۲) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-2)$ ۳) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-8)$ ۴) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-2)$

۱۸ـ حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$ کدام است؟

۱) $\pi-1$ ۲) $\pi-2$ ۳) $2\pi-1$ ۴) $2\pi-2$

۱۹ـ مساحت محصور به منحنی $y^2=x(x-1)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{16}{15}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{15}{8}$

۲۰ـ مساحت ناحیهٔ محدود به دایرهٔ به معادله $x^2+y^2=1$ و بیضی به معادلهٔ $x^2+2y^2=1$ کدام است؟

۱) $\pi(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۲) $\pi(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۳) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۴) $\pi(\sqrt{2}+1)$

۲۱ـ اگر r شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}x^n$، S شعاع همگرایی سری $\sum\frac{3^n}{n!}(x-1)^n$ و t شعاع همگرایی سری $\sum n!x^n$ باشد.

گزینه صحیح کدام است؟

۱) $t<r<s$ ۲) $t<s<r$ ۳) $s<r<t$ ۴) $r<s<t$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی

۲۲ـ مشتق هزارم تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $999!$ ۳) $1000!$ ۴) $1001!$

۲۳ـ هرگاه $19 \le x^2 \le 5$، مقدار $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x^2} f(t)dt$ به ازای $x=4$ کدام است؟

۱) $f(4)$ ۲) $2f(8)$ ۳) $8f(2)$ ۴) $8f(16)$

۲۴ـ $\frac{d^4}{dx^4}\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 6π ۳) $\frac{6\pi}{5}$ ۴) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$

۲۵ـ در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ میانگین کدام تابع بزرگتر است؟

۱) $f_1(x)=\sin x$ ۲) $f_2(x)=\sin^2 x+x$ ۳) $f_3(x)=\cos^2 x$ ۴) $f_4(x)=2x+1$

۲۶ـ مقدار $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۷ـ فرض کنید $n \ge 2$ و $a_n=\frac{1}{n}\int^{n} e^x dx$، کدام گزاره درست است؟

۱) a_n صعودی است. ۲) a_n همگراست. ۳) a_n نزولی است. ۴) a_n نوسانی است.

۲۸ـ مقدار انتگرال $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۲۹ـ مقدار انتگرال $\int^{1} x^y \mathrm{Ln}x\,dx$ به ازای $y>1$ کدام است؟

۱) $\log_5 e$ ۲) $\frac{1}{y+1}$ ۳) $-\frac{1}{(y+1)^2}$ ۴) $-\infty$

۳۰ـ انتگرال معین $\int_{1}^{e}\log_5 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\log_5 e$ ۲) $\mathrm{Ln}e-\mathrm{Ln}5$ ۳) $\log_e 5-\log_5 e$ ۴) $\log_5 e(e-1)$

۳۱ـ انتگرال $I=\int^{1}\log(1+x)dx$ و دنباله $a_n=\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\ldots(2n)]^{\frac{1}{n}}$ چه رابطه‌ای دارند؟

۱) $I>\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ۲) $I=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

۳) $I<\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ۴) I یک عدد اما $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ بینهایت است.

۳۲ـ کدام انتگرال واگراست؟

۱) $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ۲) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ ۳) $\int_0^{1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}$ ۴) $\int_0^{1}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$

۳۳ـ به ازای $x=\frac{2}{3}$ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۳۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ کدام است؟

۱) یک ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۳۵ـ کدام سری همگراست؟

۱) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log n$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ ۳) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ۴) $2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$

۳۶ـ فرض کنید S و S_n به ترتیب مجموع و مجموع جزئی nام سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ هستند و $\varepsilon=\frac{1}{2^{10}}$ به ازای چه مقادیری از n، $|S_n-S|<\frac{1}{2^{10}}$ برقرار است؟

۱) $n>10$ ۲) $n>5$ ۳) $n>3$ ۴) $n>128$

۳۷ـ با فرض $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ مجموع سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{18}$ ۴) $\frac{\pi^2}{24}$

۳۸ـ فرض کنید برای سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\le r<1$ کدام گزاره صحیح است؟

۱) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ از جمله‌ای به بعد نوسانی است. ۲) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ از جمله‌ای به بعد نزولی است.

۳) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ نزولی و واگراست. ۴) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ صعودی و بی‌کران است.

۳۹ـ بازهٔ همگرایی کدام سری شامل بازه‌های همگرایی سه سری دیگر است؟

۱) $f_3(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ ۲) $f_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ ۳) $f_4(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$ ۴) $f_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

ریاضی

۴۰ـ تابع $f(x)=x+\sin x$ مجانب ندارد زیرا:

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ نامتناهی است. ۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ موجود نمی‌باشد.

۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)$ موجود نمی‌باشد. ۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)+x)$ موجود نمی‌باشد.

۴۱ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x\cos x}{1-\sin x}dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}2-\frac{1}{2}$ ۲) $\mathrm{Ln}3-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}2-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}3-1)$

۴۲ـ فرض کنید $f(x)=\int_{1}^{x^2}\frac{1}{t}dt$ و $g(x)=2\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt$ رابطه بین $f(x)$ و $g(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)=g(x)$ ۲) $g(x)=2f(x)$ ۳) $f(x)=$ ۴) $f(x)=(g(x))^2$

۴۳ـ تابع $f(x)=x\ \ +ax^3+bx^2+cx+d$ دارای دو نقطه عطف ا

۱) $3a^2\ge 8b$ ۲) $3a\ \ 8'$ ۳) $8b$ ۴) $3a^2<8b$

۴۴ـ کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{Ln}n}{\sqrt{n}}$ درست است؟

۱) سری همگرا است. ۲) سری واگرا است. ۳) سری ۴) سری همگرای مشروط است.

۴۵ـ مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) صفر ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۴۶ـ فرض کنید برای هر a و $b\in R$ داریم: $f(a+b)=f(a)f(b)$، $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود باشد. در این صورت برای هر $x\neq 0$:

۱) $f'(x)=f(0)f(x)$ ۲) $f'(x)=f'(0)f(x)$ ۳) $f'(x)=f(0)f(x)$ ۴) $f'(x)$ وجود ندارد.

۴۷ـ کدام گزاره درست است؟

۱) حد $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\cos x}}{x}$ برابر صفر است.

۲) توابع f و $f.g$ در a حد دارند در این صورت تابع g نیز در a حد دارد.

۳) اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $a\le f(x)\le b$ آنگاه یک c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که: $f(c)=c$.

۴) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim_{x\to L}g(x)=M$ باشد آنگاه $\lim_{x\to a}g(f(x))=M$

۴۸ـ اگر $\int\sin(\mathrm{Ln}x)dx=\frac{1}{2}x\sin(\mathrm{Ln}x)+f(x)+c$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}x\cos(\mathrm{Ln}x)$ ۲) $\frac{1}{2}x\cos(\mathrm{Ln}x)$ ۳) $\frac{1}{2}x\mathrm{Ln}(\cos x)$ ۴) $\frac{1}{2}x\mathrm{Ln}(\cos x)$

۴۹ـ مشتق تابع $f(x)=\sin x^x$ برای $x>0$ کدام گزینه است؟

۱) $x^x\cos x^x$ ۲) $x^x\mathrm{Ln}x\cos x^x$ ۳) $\cos x^x\mathrm{Ln}x$ ۴) $x^x(1+\mathrm{Ln}x)\cos x^x$

۵۰ـ بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ کدام گزینه است؟

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ۳) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ ۴) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

۵۱ـ اگر $\lim_{x\to 0}f(x)=3$، آنگاه $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xf(x)}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ∞

۵۲ـ فرض کنید برای اعداد حقیقی C_0 و C_1 و C_n داریم: $C_0+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n=0$ در این صورت:

۱) معادله $C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n=0$ یک ریشه حقیقی در بازهٔ $[0,1]$ دارد.

۲) به ازای هر x، $C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0$

۳) معادله $C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0$ ریشه حقیقی ندارد.

۴) به ازای هر x، $C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n\neq 0$

۵۳ـ مساحت بزرگترین مستطیلی که می‌تواند در یک ناحیه‌ی محدود به $y=3-x^2$ و محور x ها محاط شود کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) ۴

۵۴ـ مساحت ناحیه درون منحنی $r=2\cos\theta$ و خارج $r=1$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ ۳) $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}+\pi$

۵۵ـ مقدار $\int_0^1\frac{dx}{x^a+1}$، $(a>0)$ برابر است با:

۱) $1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{3a+1}+\cdots$

۲) $1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3a+1}+\cdots$

۳) $1-\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{2a^2+1}+\frac{1}{3a^2+1}+\cdots$

۴) $1-\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{2a^2+1}-\frac{1}{3a^2+1}+\cdots$

۵۶ـ حجم حاصل از دوران ناحیه‌ای واقع در ناحیهٔ اول صفحه مختصات و بالای سهمی به معادله $y=x^2$ و زیر سهمی به معادله $y=2-x^2$ حول محور y ها کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{5\pi}{2}$

۵۷ـ حاصل جمع عبارت $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$ برابر است؟

۱) $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ ۲) $\int_1^2\frac{dx}{x}$ ۳) $\int_1^2\frac{dx}{x^2}$ ۴) $\int_2^3\frac{dx}{x^2}$

۵۸ـ کدام گزینه در مورد انتگرال نامتعارف (غیرعادی) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ صحیح می‌باشد؟

۱) واگراست. ۲) همگراست. ۳) همگرا به یک است. ۴) همگرا به ۲ است.

MBA

۵۹ـ برد تابع $f(x)=\sqrt{\log(2x-x^2)}$، کدام بازه است؟

۱) $[0,0]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[1,1]$

۶۰ـ در بسط عبارت $(x-\frac{2}{x}+\sqrt{2})^7$ به صورت توان‌های صعودی، ضریب x^5، چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

۶۱ـ در منحنی به معادله $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=9xy$، بیشترین مقدار x، کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۶۲ـ اگر $(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5=-(\sin\theta+i\cos\theta)^6$، آنگاه θ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{8}$ ۳) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$ ۴) $\frac{(2k+1)\pi}{8}$

۶۳ـ حد دنباله $\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{2^n}$، کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۶۴ـ اگر $x>0$ و $f(x)=\sin^{-1}(2x^2-1)-2\sin^{-1}x$ باشد، آنگاه $f(x)+f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-3\pi}{2}$ ۲) $\frac{-\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

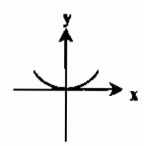
۶۵ـ مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط $z=\cosh(2+it);t\in R$ کدام است؟

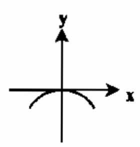
۱) دایره ۲) هذلولی ۳) بیضی ۴) سهمی

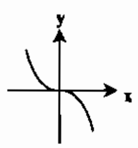
۶۶ـ اگر $x=y^3+y$، آنگاه نسبت تغییر y به تغییر x^2+x در لحظه $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{20}$

۶۷ـ نمودار تابع $f(x)=\mathrm{tg}x+\sin x-2x$، در همسایگی مبدأ مختصات است؟


(۱)


(۲)


(۴)

۶۸ـ حاصل $\int_0^{\infty} x^5 e^{-x}dx$ ، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۶۹ـ حاصل $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ ،کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۰ـ مساحت ناحیه محدود به دو منحنی قطبی $r = 1+\sin\theta$ و $r = \sin\theta$ ، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4}$

۷۱ـ مختصات نقطه عطف منحنی به معادله $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ در صفحه xoy ، کدام است؟

۱) $(0,0)$ ۲) $(4,0)$ ۳) $(1,3)$ ۴) فاقد نقطه عطف

۷۲ـ اگر $f(x) = \int_2^x \sqrt{t^2+5}\,dt$ باشد، خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x = 2$ نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۳) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳ـ سری $\cdots + \frac{6}{4^p} + \frac{5}{3^p} + \frac{4}{2^p} + \frac{3}{1}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر P همگراست؟

۱) $p \geq 1$ ۲) $p > 1$ ۳) $p > 2$ ۴) $p \geq 2$

مهندسی هسته‌ای

۷۴ـ انتگرال $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ تقریباً به کدام جواب نزدیک‌تر است: (راهنمایی: بسط مالکورن e^{-x} را نوشته و جایگذاری نمائید.)

۱) ۰/۵۵ ۲) ۰/۷۹ ۳) ۱ ۴) ۱/۷۹

۷۵ـ به ازای بازه‌های مختلف $[a,b]$ ماکزیمم مقدار $\int_a^b (4x-x^2)dx$ را تعیین کنید؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{32}{3}$ ۳) $\frac{64}{3}$ ۴) ∞

۷۶ـ فرض کنیم z_1 و z_2 دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|z_1 + \bar{z}_2|} = 1$ در این صورت:

۱) $Re(z_1z_2) = 0$ ۲) $Re(z_1z_2) < 0$ ۳) $Im(z_1z_2) = 0$ ۴) $Re(z_1z_2) > 0$

۷۷ـ اگر $I_{m,n} = \int x^m (Lnx)^n dx$ ، آنگاه می‌توان نشان داد که $I_{m,n} = aI_{m,n-1}$ مقدار a کدام است؟ $(m,n \in N)$

۱) $a = -\frac{n}{m}$ ۲) $a = \frac{-m}{n}$ ۳) $a = \frac{n}{m+1}$ ۴) $a = \frac{-n}{m+1}$

۷۸ـ مساحت درون حلقه کوچکتر محصور شده توسط خم $r = 1-\sqrt{2}\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۲) $\frac{\pi - 1}{2}$ ۳) $\frac{\pi - 2}{2}$ ۴) $\frac{\pi - \sqrt{2}}{2}$

۷۹ـ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ، آنگاه $f'''(0)$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{20}$ ۴) -20

معماری کشتی

۸۰ـ معادله $x^3 - 3x + 1$ در فاصله $[0,2]$:

۱) هیچ ریشه‌ای ندارد. ۲) دارای دو ریشه است. ۳) بیش از دو ریشه دارد. ۴) دارای یک ریشه است.

۸۱ـ اگر $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ آنگاه:

۱) $f(x)$ در ۰ دارای مشتق مرتبه‌ی دوم نیست.

۲) $f(x)$ در ۰ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر است.

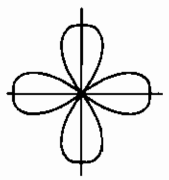
۳) $f(x)$ در ۰ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و دارای بسط تیلور است.

۴) $f(x)$ در ۰ همواره به صورت یک فنر است.

۸۲ـ شعاع قاعده بزرگترین مخروطی که در کره‌ای به شعاع واحد محاط گردیده، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۸۳ـ شکل مقابل مربوط به کدام منحنی است؟



۱) $r = \cos 2\theta$

۲) $r = 1 - \tan^2\theta$

۳) $r^2 = a^2 \sin\theta$

۴) $r = a(1 - 2\sin 3\theta)$

۸۴ـ اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد مشتق آن:

۱) همواره فرد است. ۲) همواره زوج است.

۳) اگر درجه‌ی $f(x)$ فرد باشد فرد است. ۴) اگر درجه‌ی $f(x)$ زوج باشد زوج است.

۸۵ـ ماکزیمم ارتفاع منحنی $y = 6\cos x - 8\sin x$ در بالای محور x ها برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

۸۶ـ معادله پارامتری مقابل معرف کدام منحنی در صفحه است؟ $\begin{cases} x = 1 + 2\cosh t \\ y = 3\sinh t \end{cases}$

۱) بیضی ۳) سهمی ۳) هذلولی ۴) شاخه راست یک هذلولی

۸۷ـ طول قسمتی از منحنی $\begin{cases} y = e^t \sin t \\ x = e^t \cos t \end{cases}$ بین دو نقطه $t = 0$ و $t = 4$ کدام است؟

۱) $e^4 - 1$ ۲) $2(e^4 - 1)$ ۳) $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ ۴) $\sqrt{2}(e^4 + 1)$

۸۸ـ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(Lnn)^2}$ برابر است با:

۱) $(-1,1]$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[-1,3]$ ۴) $[-1,1]$

۸۹ـ فاصله نزدیکترین نقطه از منحنی $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

معدن

۹۰ـ حاصل $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ برابر است با:

۱) e ۲) $2e$ ۳) e^2 ۴) $\frac{1}{2}e$

۹۱ـ تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4} & , x\neq 0\\ k & , x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار k در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۹۲ـ مشتق تابع $f(x)=x^{\sin x}+(\sin x)^x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۹۳ـ با فرض آنکه $(0\le x<\infty)$ و $f(x)=x^8+3x^4+2x^2+1$ مقدار $(f^{-1})'(7)$ را بیابید.

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) 24 ۴) 12

۹۴ـ حاصل $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}x}{x^2+1}dx$ کدامیک از عبارت داده شده است؟

۱) صفر ۲) یک

۳) بی‌نهایت ۴) همگراست ولی به طور دقیق نمی‌توان حد آن را تعیین کرد.

۹۵ـ هرگاه f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$، آنگاه مقدار $\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ برابر است با:

۱) $\alpha b-\beta a$ ۲) $b\beta-\alpha a$ ۳) $b\beta+\alpha a$ ۴) $ba-\alpha\beta$

۹۶ـ بازه (فاصله) همگرائی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n$ کدام است؟

۱) $[-1,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,1]$ ۴) $[-1,1]$

۹۷ـ چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آنگاه $\frac{1-i}{(1+i)^4}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ ۲) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ۳) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ۴) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

مهندسی نفت

۹۸ـ ضریب x^2 در بسط مک لورن $y=(e^x-1)\cos x$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۹۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3x)^{\tan 3x}$ برابر است با:

۱) e^{-1} ۲) e ۳) 0 ۴) 1

۱۰۰ـ تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x\sin x+\cos x=x^2$ برابر است با:

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

۱۰۱ـ فرض کنید C_1 نمودار $r=\sin 2\theta$ و C_2 نمودار $r=\cos 3\theta$ باشد. در این صورت کدام گزاره درست است؟

۱) C_1 چهار پر و C_2 سه پر دارد. ۲) C_1 چهار پر و C_2 شش پر دارد.

۳) C_1 دو پر و C_2 سه پر دارد. ۴) C_1 دو پر و C_2 شش پر دارد.

۱۰۲ـ فرض کنیم $z_1=3+i\sqrt{5}$ و $z_2\neq z_1$ عددی باشد که در معادلات $|z_1|=|z_2|$ و نیز $|1-z_2|=|1-z_1|$ صدق می‌کند در این صورت:

۱) $z_2=3-i\sqrt{5}$ ۲) $z_2<z_1$

۳) $z_1>z_2$ ۴) z_1 و z_2 نسبت به محور y متقارن‌اند.

۱۰۳ـ مطلوبست محاسبهٔ مقدار انتگرال معین زیر: $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\mathrm{Ln}x}}$

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ۴) $\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

۱۰۴ـ قضیه مقدار میانگین را در مورد تابع $f(x)=x^2-3x$ بر روی بازه $[1,3]$ به کار می‌گیریم. طول نقطه C که وجود آن در قضیه مورد بحث می‌باشد، کدامیک از اعداد داده شده است؟

۱) 1 ۲) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

مهندسی کشاورزی

۱۰۵ـ اگر $f(x)=2^x+2^{-x}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ دامنه تابع gof کدام بازه است؟

۱) $[0,0]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $\{1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,2]$

۱۰۶ـ نمودار معکوس تابع $f(x)=x+\ln x$ نیمساز ناحیه اول را در نقطه A قطع می‌کند فاصله A تا نقطه (۵ و ۳) کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۷ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+\ln 3}{n})^{2n-1}$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 7 ۳) 8 ۴) 9

۱۰۸ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{|x^2+x-6|}$ کدام است؟

۱) $0/25$ ۲) $0/3$ ۳) $0/6$ ۴) $0/75$

۱۰۹ـ معادله منحنی $x^4-y^4=2xy$ در مختصات قطبی چگونه است؟

۱) $r=\cot g2\theta$ ۲) $r=\sin 2\theta$ ۳) $r=\sqrt{tg2\theta}$ ۴) $r=\cos 2\theta$

۱۱۰ـ مشتق مرتبه دهم تابع $y=\frac{3x+1}{2x+1}$ به ازای $x=-\frac{3}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}(10!)$ ۲) $-\frac{1}{4}(10!)$ ۳) $\frac{1}{2}(10!)$ ۴) $-\frac{1}{2}(10!)$

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵

۱ـ گزینه «۱»

$$\int_0^2 [t^2]dt = \int_0^1 [t^2]dt + \int_1^{\sqrt{2}}[t^2]dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}[t^2]dt + \int_{\sqrt{3}}^{2}[t^2]dt$$

$$= \int_0^1 0dt + \int_1^{\sqrt{2}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2dt + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3dt = (\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۲ـ گزینه «۱»

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)3^n}}{\frac{1}{(n+2)3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)3^{n+1}}{(n+1)3^n} = 3$$

$$|x+2|<3 \Rightarrow -3<x+2<3 \Rightarrow -5<x<1$$

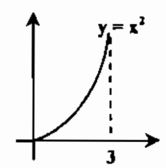
در $x=-5$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ در می‌آید که همگراست و در $x=1$ به صورت $\sum\frac{1}{n+1}$ در می‌آید که واگراست.

۳ـ گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$I_n = x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a + 2n\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{n-1}dx = 2n\int_0^a (x^2-a^2+a^2)(a^2-x^2)^{n-1}dx$$

$$= -2nI_n + 2na^2 I_{n-1} \Rightarrow (1+2n)I_n = 2na^2 I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$$

۴ـ گزینه «۴» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi\int_0^3 x.(x^2-0)dx = 2\pi\int_0^3 x^3dx = \frac{81\pi}{2}$$

۵ـ گزینه «۲» سری داده شده را به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n}(4x^2)^n$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1$$

$$|4x^2|<1 \Rightarrow x^2<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

در نقاط مرزی $\frac{1}{2}$ و $\frac{-1}{2}$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که همگراست.

۶ـ گزینه «۴» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$2xf(x^2) = 2x+3x^2 \Rightarrow f(x^2) = 1+\frac{3}{2}x \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(2) = 1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

۷ـ گزینه «۲»

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1\frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left(\text{Ln}x-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1)\right)\Big|_0^1 = \infty$$

۸ـ گزینه «۱»

$$f(x) = \text{Ln}(\sec x + \text{tg}x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(0) = 0$$

بنابراین تقریب درجه دوم f، به صورت روبرو در می‌آید:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$$

۹ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{2}-x$ و یا $x=\frac{\pi}{2}-t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\text{tg}x)^{\cos x} = \lim_{t\to 0^+}(\text{cotg}t)^{\sin t} = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\text{tg}t}\right)^{\sin t} \xrightarrow{\text{همارزی}} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^t} = 1$$

۱۰ـ گزینه «۴»

$$\text{مساحت دانه } n\text{ام} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-kx}\sin x dx = \frac{e^{-kx}}{k^2+1}(-k\sin x-\cos x)\Big|_{(n-1)\pi}^{n\pi} = (-1)^{n+1}\left(\frac{e^{-kn\pi}+e^{-k(n-1)\pi}}{k^2+1}\right)$$

$$\text{مساحت دانه } (n+1)\text{ام} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-kx}\sin x dx = \frac{e^{-kx}}{k^2+1}(-k\sin x-\cos x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$

$$= (-1)^n\left(\frac{e^{-k(n+1)\pi}+e^{-kn\pi}}{k^2+1}\right) = (-1)^n e^{-k\pi}\left(\frac{e^{-kn\pi}+e^{-k(n-1)\pi}}{k^2+1}\right)$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نسبت مساحت دانه $(n+1)$ ام به دانه nام برابر $e^{-k\pi}$ می‌باشد.

۱۱ـ گزینه «۴» از همارزی $\sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\sqrt[n]{(2n+1)}}_{\text{یک}}.\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\frac{n}{e}} = \frac{4}{e}$$

۱۲ـ گزینه «۱» طبق آزمون ریشه، برای همگرایی سری $\sum a_n$، کافی است $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{x^2}{e}<1 \Rightarrow -\sqrt{e}<x<\sqrt{e}$$

در نقاط مرزی $x=\sqrt{e}$ و $x=-\sqrt{e}$ سری واگرا خواهد بود.

۱۳ـ گزینه «۲»

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{(t-\tau)^2}d\tau = e^{(t-t)^2}\times 1 + \int_0^t 2(t-\tau)e^{(t-\tau)^2}d\tau = 1+(e^{(t-\tau)^2})\Big|_0^t = 1+(-1+e^{t^2}) = e^{t^2}$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0^+}f(x) = \lim_{x\to 0^+}([\cosh x]-[\sinh x]) = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x) = \lim_{x\to 0^-}([\cosh x]-[\sinh x]) = 1-(-1) = 2$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2n}\text{Ln}(e^n+2) \sim \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2n}\text{Ln}e^n = \frac{1}{2}$$

۱۶ـ گزینه «۳» تابع f در نقاط ۱ و ۰ و $x=-1$ ناپیوسته است.

۱۷ـ گزینه «۱»

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$$

۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به جدول مقابل

مشتق	انتگرال
$\oplus\ x^2$	$\sin x$
$\ominus\ 2x$	$-\cos x$
$\oplus\ 2$	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=(-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

۱۹ـ گزینه «۱» نقاط تلاقی منحنی با محور x ها، $x=0$ و $x=1$ می‌باشد. با توجه به تقارن منحنی نسبت به محور y ها، مساحت محصور بین $y=\sqrt{x(x-1)^2}$ و محور x ها را به دست آورده و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$S=2\int_0^1\sqrt{x(x-1)^2}\,dx=2\int_0^1(1-x)\sqrt{x}\,dx=2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_0^1=\frac{8}{15}$$

۲۰ـ گزینه «۱» شعاع دایره داده شده برابر ۱ است، بنابراین مساحت آن برابر π می‌باشد. معادله بیضی داده شده را به صورت $x^2+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$ می‌باشد، بنابراین مساحت بیضی برابر $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. با توجه به اینکه بیضی کاملاً درون دایره قرار دارد، مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=\pi-\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\pi(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

۲۱ـ گزینه «۱» به سادگی می‌توان نشان داد $r=1$، $s=\infty$ و $t=0$، بنابراین $t<r<s$.

۲۲ـ گزینه «۳» به طور کلی مشتق مرتبه nام تابع $y=\frac{1}{ax+b}$ به صورت $y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow y^{(1000)}=\frac{(-1)^{1000}\times 1000!}{x^{1001}}\Rightarrow y^{(1000)}(1)=1000!$$

۲۳ـ گزینه «۴»

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2}f(t)dt=2xf(x^2)\overset{x=4}{=\!=}8f(16)$$

۲۴ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$\int_0^\infty\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{x}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\times 0=\frac{\pi}{2x}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow\frac{d^4}{dx^4}(\frac{\pi}{2x})=\frac{\pi}{2}\frac{d^4}{dx^4}(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}\times\frac{(-1)^4\times 4!}{x^5}=\frac{12\pi}{x^5}\Big|_{x=\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

۲۵ـ گزینه «۴» در بازهٔ داده شده تابع f_4 به ازای تمام مقادیر x از بقیه توابع بزرگتر است، بنابراین میانگین f_4 در بازه داده شده از بقیه بزرگتر خواهد بود و نیازی به محاسبه میانگین توابع داده شده نیست.

۲۶ـ گزینه «۳»

$$\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,dx=\int_0^\pi|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}|\,dx=\int_0^\pi(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})\Big|_0^\pi=4$$

۲۷ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$a_n=\frac{1}{n}\int_0^n e^x dx=\frac{1}{n}e^x\Big|_0^n=\frac{e^n-1}{n}$$

دنباله به دست آمده یک دنباله صعودی و واگراست.

۲۸ـ گزینه «۲»

$$\int_{\sqrt{2}}^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{Arcsec}\,x\Big|_{\sqrt{2}}^2=\mathrm{Arcsec}\,2-\mathrm{Arcsec}\sqrt{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

۲۹ـ گزینه «۳» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=\mathrm{Ln}x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^y dx\Rightarrow v=\frac{x^{y+1}}{y+1}\end{cases}$$

$$\int_0^1 x^y\mathrm{Ln}x\,dx=\frac{x^{y+1}}{y+1}\mathrm{Ln}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^y}{y+1}dx=0-\frac{x^{y+1}}{(y+1)^2}\Big|_0^1=\frac{-1}{(y+1)^2}$$

۳۰ـ گزینه «۱»

$$\int_1^e\log_5 x\,dx=\int_1^e\frac{\mathrm{Ln}x}{\mathrm{Ln}5}dx=\frac{1}{\mathrm{Ln}5}\int_1^e\mathrm{Ln}x\,dx=\frac{1}{\mathrm{Ln}5}(x\mathrm{Ln}x-x)\Big|_1^e=\frac{1}{\mathrm{Ln}5}=\log_5 e$$

۳۱ـ گزینه «۳»

$$a_n=[\frac{(n+1)(n+2)(n+n)}{n^n}]^{\frac{1}{n}}=[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow\mathrm{Ln}a_n=\frac{1}{n}[(\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})+\mathrm{Ln}(1+\frac{2}{n})+\dots+\mathrm{Ln}(1+\frac{n}{n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathrm{Ln}(1+\frac{i}{n})=\int_0^1\mathrm{Ln}(1+x)dx$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\mathrm{Ln}a_n=I$ و یا $a_n=e^I$. با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینه (۳) صحیح است.

۳۲ـ گزینه «۳» انتگرالهای داده شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) در $x=0$ ناسره هستند، ولی هر سه در $x=0$ همگرا می‌باشند زیرا:

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx\le\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_0^\pi<\infty$$

$$\int_0^\pi\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^\pi<\infty$$

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^1<\infty$$

ولی $\int_0^1\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ در $x=0$ ناسره و واگراست. در همسایگی $x=0$، $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\sim\frac{1}{x}$ و چون $\int_0^1\frac{dx}{x}$ واگراست، پس $\int_0^1\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ نیز واگراست.

۳۳ـ گزینه «۳» قرار می‌دهیم $I_n=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$، در این صورت:

$$(1-x)I_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=(1-x^2)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})=\cdots=1-x^{2^{n+1}}$$

بنابراین $I_n=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$. و به ازای $x=\dfrac{2}{3}$، خواهیم داشت:

$$I_n=\frac{1-(\frac{2}{3})^{2^{n+1}}}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-(\frac{2}{3})^{2^{n+1}}\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}I_n=3$$

۳۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$$

۳۵ـ گزینه «۴» سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log n$ واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد. سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ نیز واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد ($\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=\infty$). سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگراست زیرا وقتی $n\to\infty$، $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\dfrac{1}{n}$ و سری $\sum\dfrac{1}{n}$، سری همساز است که واگراست.
سری داده شده در گزینه (۴)، مجموع دو سری همگرا به صورت زیر می‌باشد:

$$2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=2+\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)}_{\text{سری هندسی همگراست}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)}_{\text{سری } \sum\frac{1}{n^2} \text{ همگراست}}$$

۳۶ـ گزینه «۱»

۳۷ـ گزینه «۱»

روش اول: جمله اول سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^n}$ برابر ۱ است، پس مجموع سری از ۱ بزرگتر است، با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$$

از رابطه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$، نتیجه می‌شود $\sum\dfrac{1}{4n^2}=\dfrac{\pi^2}{24}$، که با جایگزینی در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

۳۸ـ گزینه «۲» از رابطه داده شده نتیجه می‌شود که از جمله‌ای به بعد دنباله $|a_n|$ یا به طور معادل دنباله $|a_{n+1}|$ نزولی است، در نتیجه دنباله $\dfrac{|a_{n+1}|}{1-r}$ نیز نزولی است(تقسیم کردن جملات دنباله به عدد مثبت $1-r$ تأثیری در نزولی بودن دنباله نمی‌گذارد.)

۳۹ـ گزینه «۴» بازه همگرایی سری $\sum\dfrac{(x-1)^n}{n}$ بازه $(0,2]$، بازه همگرایی سری $\sum\dfrac{x^n}{n^2}$ بازهٔ $[-1,1]$، بازه همگرایی سری $\sum n!x^n$ بازهٔ $[0,0]$ و بازه همگرایی سری $\sum\dfrac{\cos nx}{n^2}$ بازه $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد.

۴۰ـ گزینه «۳» به طور کلی مجانب مایل تابع $y=f(x)$ خط $y=mx+h$ می‌باشد، هرگاه هر دو حد زیر موجود و متناهی باشند.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad,\quad m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$$

در مورد تابع $f(x)=\sin x+x$ حد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ موجود و برابر ۱ می‌باشد ولی حد زیر وجود ندارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sin x-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sin x \qquad \text{وجود ندارد}$$

بنابراین تابع مجانب مایل ندارد.

۴۱ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $t=\sin x$، $dt=\cos x\,dx$ استفاده می‌کنیم، با این تغییر متغیر بازه انتگرال‌گیری به صورت $0\le t\le\dfrac{1}{2}$ در می‌آید. بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x\cos x}{1-\sin x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\,dt}{1-t}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-t}\right)dt=\left(-t-\mathrm{Ln}(1-t)\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{-1}{2}-\mathrm{Ln}\frac{1}{2}=\mathrm{Ln}2-\frac{1}{2}$$

۴۲ـ گزینه «۱»

$$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{1}{t}dt=\mathrm{Ln}t\Big|_1^{x^2}=\mathrm{Ln}x^2-\mathrm{Ln}1=2\mathrm{Ln}x$$

$$g(x)=2\int_1^{x}\frac{1}{t}dt=2\mathrm{Ln}t\Big|_1^{x}=2\mathrm{Ln}x-2\mathrm{Ln}1=2\mathrm{Ln}x$$

۴۳ـ گزینه «۲»

$$y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow y'=4x^3+3ax^2+2bx+c\Rightarrow y''=12x^2+6ax+2b$$

معادله $y''=0$ وقتی دارای دو جواب است که $\Delta>0$. بنابراین:

$$\Delta=(6a)^2-4(12)(2b)>0\Rightarrow 3a^2>8b$$

۴۴ـ گزینه «۴» چون $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{Ln}n}{\sqrt{n}}=0$ و قدر مطلق جملات سری نزولی هستند، بنابراین طبق آزمون لایب نیتز سری همگراست. ولی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{Ln}n}{\sqrt{n}}$ واگراست. بنابراین سری همگرای مشروط است.

۴۵ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2|x|}{3x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}\\[2ex]\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2x}{3x}=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$$

چون حد چپ و راست در $x=0$ با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

۴۶ـ گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم که $f(0)=1$ در رابطه داده شده به جای a و b صفر قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$f(0+0)=f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=f(0)f(0)\xrightarrow{f(0)\neq0}f(0)=1$$

حال برای محاسبه $f'(x)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x)f'(x)$$

۴۷ـ گزینه «۳» گزاره بیان شده در گزینه (۳) همان قضیه نقطه ثابت می‌باشد و صحیح است. حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:
در گزینه (۱) وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند، عبارت $\cos x$ به طور متناوب تغییر علامت می‌دهد و زیر رادیکال منفی می‌شود، پس حد وجود ندارد.
در گزینه (۲) اگر فرض کنیم $f(x)=x$ و $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$، آنگاه توابع f و $f.g$ در $x=0$ حدی برابر صفر دارند ولی تابع g در $x=0$ حدی برابر صفر دارند ولی تابع g در $x=0$ حد ندارد.
در گزینه (۴) اگر فرض کنیم $f(x)=x^2$

۴۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=\sin(\mathrm{Ln}x)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}\cos(\mathrm{Ln}x)\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$$

$$I=\int\sin(\mathrm{Ln}x)dx=x\sin(\mathrm{Ln}x)-\int\cos(\mathrm{Ln}x)dx$$

مجدداً برای محاسبه $\int \cos(Lnx)dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=\cos(Lnx) \Rightarrow du=\frac{-1}{x}\sin(Lnx) \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

$$I=\int \sin(Lnx)dx = x\sin x(Lnx)-(x\cos(Lnx)+\overbrace{\int \sin(Lnx)dx}^{I})$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$2I=x\sin(Lnx)-x\cos(Lnx) \Rightarrow I=\frac{1}{2}x\sin(Lnx)-\frac{1}{2}x\cos(Lnx)$$

در نتیجه $f(x)=\frac{-1}{2}x\cos(Lnx)$.

۴۹ـ گزینه «۴» می‌دانیم $(x^x)'=x^x(1+Lnx)$ بنابراین:

$$(\sin x^x)'=(x^x)'\cos x^x = x^x(1+Lnx)\cos x^x$$

۵۰ـ گزینه «۳» واضح است که شعاع همگرایی سری $R=\frac{1}{3}$ می‌باشد، بنابراین:

$$|x|<\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

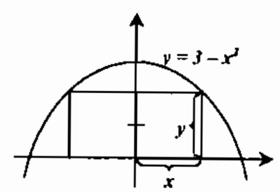
در نقطه مرزی $x=\frac{1}{3}$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ در می‌آید که همگراست و در $x=\frac{-1}{3}$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ در می‌آید که واگراست.

۵۱ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xf(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۵۲ـ گزینه «۱» ابتدا قرار می‌دهیم $f(x)=C_0x+\frac{C_1}{2}x^2+\frac{C_2}{3}x^3+\cdots+\frac{C_n}{n+1}x^{n+1}$. در این صورت واضح است که $f(0)=0$ و طبق فرض $f(1)=0$. بنابراین طبق قضیه رُل $f'(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^{n+1}=0$ حداقل یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ دارد.

۵۳ـ گزینه «۴»

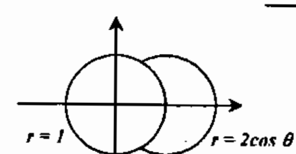


با توجه به شکل مقابل مساحت مستطیل برابر $S=2xy$ است و با جایگزینی y برحسب x از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$S(x)=2x(3-x^2)=6x-2x^3 \Rightarrow S'(x)=6-6x^2=0 \Rightarrow x=1\,,\ y=2$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S=2\times1\times2=4$ خواهد بود.

۵۴ـ گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.



$$2\cos\theta=1 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3}$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}((2\cos\theta)^2-1^2)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos2\theta)d\theta=(\theta+\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۵ـ گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لورن تابع مقابل انتگرال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-x^3+\cdots \Rightarrow \frac{1}{x^a+1}=1-x^a+x^{2a}-x^{3a}+\cdots$$

بنابراین:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^a+1}=\int_0^1(1-x^a+x^{2a}-x^{3a})dx=(x-\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{x^{2a+1}}{2a+1}-\frac{x^{3a+1}}{3a+1}+\cdots)\Big|_0^1=1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{3a+1}+\cdots$$

۵۶ـ گزینه «۱» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$y_1=x^2\,,\ y_2=2-x^2 \Rightarrow x^2=2-x^2 \Rightarrow x=-1,1$$ نقاط تلاقی

$$V=2\pi\int_0^1 x|f(x)-g(x)|dx=2\pi\int_0^1 x(2-x^2-x^2)dx=2\pi\int_0^1(2x-2x^3)dx=2\pi(x-\frac{x^4}{2})\Big|_0^1=\pi$$

با توجه به اینکه ناحیه موردنظر در ناحیه اول قرار دارد فقط $x=1$ قابل قبول است.

۵۷ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{i}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_1^2\frac{dx}{x^2}$$

۵۸ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}<\frac{1}{x^2}$، و چون $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}$، بنابراین طبق آزمون مقایسه انتگرال موردنظر همگراست و مقدارش از $\frac{1}{2}$ کمتر است، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵۹ـ گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$\log(2x-x^2)\geq 0 \Rightarrow 2x-x^2\geq 1 \Rightarrow -(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین دامنه تابع فقط شامل نقطه $x=1$ می‌باشد، که با قرار دادن این مقدار در تابع $y=f(1)=0$ به دست می‌آید.

۶۰ـ گزینه «۳» جمله عمومی بسط به صورت زیر است که در آن $a+b+c=7$.

$$\text{جمله عمومی بسط}=\frac{7!}{a!b!c!}x^a(\frac{-2}{x})^b(\sqrt{2})^c=\frac{7!}{a!b!c!}(-2)^b(\sqrt{2})^cx^{a-b}$$

جملات شامل x^5 در بسط به ازای مقادیر زیر برای a، b و c حاصل می‌شود:

$$a=6\,,\ b=1\,,\ c=0 \quad \text{ضریب } x^5=\frac{7!}{6!}(-2)^1(\sqrt{2})=-14$$

$$a=5\,,\ b=0\,,\ c=2 \Rightarrow \text{ضریب}=\frac{7!}{5!2!}(-2)^0(\sqrt{2})^2=42$$

۶۱ـ گزینه «۱» منحنی داده شده در مختصات قطبی به صورت $\rho^3=9\rho^2\sin\theta\cos\theta$ و یا $\rho=9\sin\theta\cos\theta$ در می‌آید. بنابراین می‌خواهیم عبارت $x=\rho\cos\theta$ را تحت قید $\rho=9\sin\theta\cos\theta$ ماکسیمم کنیم، با جایگزینی قید در عبارت به دست می‌آید:

$$x=\rho\cos\theta=9\sin\theta\cos^2\theta \Rightarrow x'=9\cos^3\theta-18\sin^2\theta\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow 9\cos\theta(\cos^2\theta-2\sin^2\theta)=0 \Rightarrow \cos\theta=0\,,\ \cot g^2\theta=2$$

به ازای $\cos\theta=0$، مقدار $x=0$ می‌شود و از $\cot g^2\theta=2$، نتیجه می‌شود:

$$\cot g^2\theta=2 \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=9\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2=2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مقدار x برابر $2\sqrt{3}$ است.

۶۲ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5=(e^{(2\theta)i})^5=e^{(10\theta)i}$$

$$-(\sin\theta+i\cos\theta)^6=-(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta))^6=e^{\pi i}(e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i})^6=e^{(4\pi-6\theta)i}=e^{-6\theta i}$$

بنابراین معادله داده شده به صورت روبرو در می‌آید:

$$e^{(10\theta)}=e^{(-6\theta)i} \Rightarrow 10\theta=-6\theta+2k\pi \Rightarrow 16\theta=2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{k\pi}{8}$$

۶۳ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n=e$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(\frac{n+1}{n})^n]}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{2^n}=\infty$$

۶۴ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\alpha=\sin^{-1}x$ و $\beta=\sin^{-1}(2x^2-1)$. در این صورت:

$$x=\sin\alpha \Rightarrow 2x^2-1=2\sin^2\alpha-1=-\cos 2\alpha \;,\; 2x^2-1=\sin\beta$$

بنابراین $\sin\beta=-\cos 2\alpha$ و یا $\sin(-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)$. که از آن نتیجه می‌شود $\beta-2\alpha=\frac{-\pi}{2}$. یعنی تابع f داده شده، تابع ثابت $f(x)=\frac{-\pi}{2}$ می‌باشد. پس $f(x)+f'(x)=\frac{-\pi}{2}$.

۶۵ـ گزینه «۳»

۶۶ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که به ازای $x=2$، مقدار $y=1$ به دست می‌آید.

$$x=y^3+y \Rightarrow \frac{dx}{dy}=3y^2+1=4$$

$$g(x)=x^2+x \Rightarrow \frac{dg}{dx}=2x+1=5$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{dg}{dy}=\frac{dg}{dx}.\frac{dx}{dy}=5\times4=20 \Rightarrow \frac{dy}{dg}=\frac{1}{20}$$

۶۷ـ گزینه «۳» در همسایگی مبدأ داریم $tgx\sim x+\frac{x^3}{3}$ و $\sin x\sim x-\frac{x^3}{6}$، بنابراین در همسایگی مبدأ f به صورت $f(x)\sim x+\frac{x^3}{3}+x-\frac{x^3}{6}-2x=\frac{x^3}{6}$ خواهد بود، که نمودار آن شبیه گزینه (۳) می‌باشد.

۶۸ـ گزینه «۴» انتگرال موردنظر برابر $\Gamma(6)=5!=120$ می‌باشد.

۶۹ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ ، $dx=\cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{(1+\sin^2\theta)(\sqrt{1-\sin^2\theta})}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

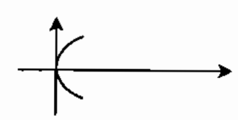
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\cot g^2\theta+2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\frac{\cot g\theta}{\sqrt{2}})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

۷۰ـ گزینه «۴» دایره $r=\sin\theta$ به شعاع $\frac{1}{2}$ درون دلوار قائم $r=1+\sin\theta$ قرار می‌گیرد. بنابراین کافی است مساحت دلوار را به دست آورده، سپس مساحت دایره را از آن کم کنیم.

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}\int(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2})d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

با توجه به اینکه مساحت دایره $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، مساحت موردنظر برابر $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ خواهد بود.

۷۱ـ گزینه «۱» با حذف t بین x و y به رابطه $y=x\pm2\sqrt{x}$ می‌رسیم. در همسایگی مبدأ $x\pm2\sqrt{x}\sim\pm2\sqrt{x}$ و بنابراین منحنی را می‌توان به صورت $y=\pm\sqrt{x}$ در نظر گرفت که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد، و با توجه به شکل نمودار در مبدأ دارای خط مماس است و جهت تقعر نیز عوض می‌شود. پس مبدأ نقطه عطف می‌باشد.



۷۲ـ گزینه «۳» به ازای $x=2$ عرض منحنی f برابر $y=0$ است.

$$f(x)=\int_2^x\sqrt{t^2+5}dt \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow f'(2)=3$$

بنابراین معادله خط مماس $y=3(x-2)$ خواهد بود و از تلاقی آن با خط $y=x$ ، $x=3$ به دست می‌آید.

۷۳ـ گزینه «۳» سری داده شده $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^P}$ می‌باشد. با توجه به اینکه $\frac{n+2}{n^P}\sim\frac{n}{n^P}=\frac{1}{n^{P-1}}$، می‌توان نتیجه گرفت سری به ازای $P-1>1$، و یا $P>2$ همگراست.

۷۴ـ گزینه «۲» برای نوشتن بسط مک لورن e^{-x}، کافی است در بسط مک‌لورن e^x، به جای x، مقدار $-x$ را جایگزین کنیم.

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{1-e^{-x}}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\cdots$$

$$\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx\cong\int_0^1(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})dx=(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{18})\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{18}\approx0/8$$

۷۵ـ گزینه «۲» عبارت $4x-x^2$ در فاصله $[0,4]$، نامنفی و در سایر جاها منفی می‌باشد، بنابراین برای ماکزیمم شدن انتگرال داده شده، قرار می‌دهیم $a=0$ و $b=4$، در این صورت:

$$\int_0^4(4x-x^2)dx=(2x^2-\frac{x^3}{3})\Bigg|_0^4=\frac{32}{3}$$

۷۶ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$|z_1-\bar{z}_2|=|z_1+\bar{z}_2|\Rightarrow|(x_1-x_2)+(y_1+y_2)i|=|(x_1+x_2)+(y_1-y_2)i|$$

$$\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2\Rightarrow x_1x_2=y_1y_2$$

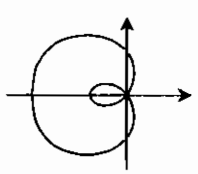
از طرفی:

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)i\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1z_2)=0$$

۷۷ـ گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=(Lnx)^n \Rightarrow du=n(Lnx)^{n-1}.\frac{1}{x}\\ dv=x^mdx \Rightarrow v=\frac{x^{m+1}}{m+1}\end{cases}$$

$$I_{m,n}=\frac{x^{m+1}(Lnx)^n}{m+1}\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{n}{m+1}.x^m(Lnx)^{n-1}dx=\frac{-n}{m+1}I_{m,n-1}$$



۷۸ـ گزینه «۳» از $r=0$ نتیجه می‌شود $\frac{7\pi}{4}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$. حلقه داخلی با توجه به شکل به ازای $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}\le\theta\le2\pi$ ایجاد می‌شود. با توجه به تقارن شکل کافی است محاسبه برای $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ انجام شود و حاصل را در ۲ ضرب کنیم.

$$S=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sqrt{2}\cos\theta)^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sqrt{2}\cos\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sqrt{2}\cos\theta)^2d\theta=(2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi-3}{2}$$

۷۹ـ گزینه «۳» در همسایگی $x = 0$، $f(x)$ را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2} \sim \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})}{x^2} = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{5!} + \cdots$$

بنابراین:

$$f'(x) = \frac{1}{6} - \frac{3x^2}{5!} + \cdots \ , \ f''(x) = \frac{-6x}{5!} + \cdots \ , \ f'''(x) = \frac{-6}{5!} + \cdots \Rightarrow f'''(0) = \frac{-1}{20}$$

۸۰ـ گزینه «۲» توجه کنید که در صورت مسأله، معادله‌ای داده نشده و احتمالاً منظور طراح معادله $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ بوده است. حال توجه کنید که:

$$f(-2) < 0 \ , \ f(0) > 0 \ , \ f(1) < 0 \ , \ f(2) > 0$$

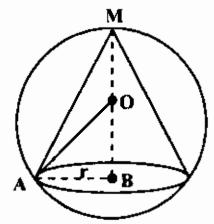
بنابراین طبق قضیه مقدار میانی معادله سه جواب دارد، که دو جواب آن در فاصله $[0,2]$ است. به طور دقیق‌تر یک جواب در فاصله $[0,1]$ و یک جواب در فاصله $[1,2]$ می‌باشد.

۸۱ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد f در $x = 0$ بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیر است و تمام مشتقات آن از هر مرتبه‌ای برابر صفر است. پس f بسط تیلور دارد، ولی چون $f^{(n)}(0) = 0$، بنابراین بسط تیلور f به خود f همگرا نیست.

۸۲ـ گزینه «۳» با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} (h-1)^2 + r^2 = 1 \\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(2h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2h^2 - h^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}(4h - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3} , r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۸۳ـ گزینه «۱» شکل داده شده رُز ۴ برگ می‌باشد و معادله آن $r = \cos 2\theta$ است.

۸۴ـ گزینه «۱» چون طبق فرض f زوج است، بنابراین $f(-x) = f(x)$، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه به دست می‌آید $f'(x) = -f'(-x)$، یعنی f' فرد است.

۸۵ـ گزینه «۳» به طور کلی داریم:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

۸۶ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cosh t \\ y = 3\sinh t \end{cases} \Rightarrow (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

با توجه به اینکه x همواره مقداری مثبت است، بنابراین معادله فوق، فقط شاخه راست هذلولی را تشکیل می‌دهد.

۸۷ـ گزینه «۳»

$$x = e^t \cos t \Rightarrow x' = e^t \cos t - e^t \sin t \ , \ y = e^t \sin t \Rightarrow y' = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = (e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 = 2e^{2t}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^4 \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^4 e^t dt = \sqrt{2}(e^4 - 1)$$

۸۸ـ گزینه «۲»

$$R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{1}{n(\mathrm{Ln}\,n)^2}}{\frac{1}{(n+1)(\mathrm{Ln}(n+1))^2}}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)(\mathrm{Ln}(n+1))^2}{n(\mathrm{Ln}\,n)^2} = 1$$

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

در نقاط مرزی $x = 1$ و $x = 3$، سری به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n(\mathrm{Ln}\,n)^2}$ و $\sum \frac{1}{n(\mathrm{Ln}\,n)^2}$ در می‌آید که هر دو همگرا هستند.

۸۹ـ گزینه «۳» در واقع می‌خواهیم عبارت $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ و یا به طور معادل $d^2 = g(x,y) = x^2 + y^2$ را تحت قید $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ مینیمم کنیم. با جایگزینی y از رابطه $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ در معادله g نتیجه می‌شود:

$$g(x,y) = x^2 + \frac{4}{x^2 + 1} \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{8x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 1)^2 = 8x$$

از حل معادله فوق ۱ و ۱- و $x = 0$ به دست می‌آید و مقادیر متناظر برابر y به ترتیب $\sqrt{2}$، $\sqrt{2}$ و ۲ خواهد بود. با جایگزینی نقاط $P(1,\sqrt{2})$، $P'(-1,\sqrt{2})$، $P''(0,2)$ در d، مشاهده می‌شود که حداقل مقدار ممکن برای d برابر $\sqrt{3}$ است.

۹۰ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^2} = 1^\infty = \lim_{x \to \infty} e^{x^2(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1)} = \lim_{x \to \infty} e^{x^2(\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1})} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

۹۱ـ گزینه «۳» ابتدا حد f را در $x = 0$ به دست می‌آوریم. برای محاسبه حد، بسط مکلورن e^{-x^2} را تا ۳ جمله می‌نویسیم.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$$

از طرفی $f(0) = k$. بنابراین برای پیوستگی f در $x = 0$، بایستی $k = \frac{1}{2}$ باشد.

۹۲ـ گزینه «۴»

$$f(x) = x^{\sin x} + (\sin x)^x \Rightarrow f'(x) = x^{\sin x}(\cos x\,\mathrm{Ln}\,x + \sin x.\frac{1}{x}) + (\sin x)^x(\mathrm{Ln}\sin x + x.\frac{\cos x}{\sin x})$$

با جایگذاری $\frac{\pi}{2}$ در معادله فوق نتیجه می‌شود $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

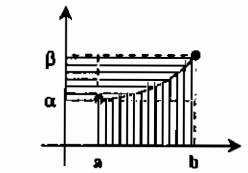
۹۳ـ گزینه «۱»

$$(f^{-1})'(v) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8x^7 + 12x^3 + 4x}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{24}$$

۹۴ـ گزینه «۱» ابتدا انتگرال داده شده را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}\,x}{x^2 + 1}dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{Ln}\,x}{x^2 + 1}dx + \int_1^\infty \frac{\mathrm{Ln}\,x}{x^2 + 1}dx$$

حال به کمک تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$، می‌توان به سادگی نشان داده که انتگرال اول قرینه انتگرال دوم می‌باشد. و بنابراین حاصل عبارت فوق برابر صفر است.



۹۵ـ گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل مساحت قسمتی که به طور عمودی هاشور خورده برابر $\int_a^b f(x)dx$ و مساحت قسمتی که به طور افقی هاشور خورده برابر $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ است. بنابراین مجموع مساحت قسمت‌های هاشور خورده برابر $b\beta - a\alpha$ می‌باشد.

۹۶ـ گزینه «۴»

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{2n^2} = 1$$

به ازای $x = 1$، سری به صورت روبرو در می‌آید: $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n}) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} \Rightarrow$ همگراست

و به ازای $x = -1$، سری به صورت روبرو در می‌آید: $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})(-1)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2} \Rightarrow$ همگراست

۹۷ـ گزینه «۳»

$$\frac{1-i}{(1+i)^4} = \frac{1-i}{((1+i)^2)^2} = \frac{1-i}{(1+i^2+2i)^2} = \frac{1-i}{(2i)^2} = \frac{1-i}{-4} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

۹۸ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

بنابراین:

$$y = (e^x - 1)\cos x = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots)$$

$$\text{ضریب } x^3 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-1}{3}$$

۹۹ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3x)^{\operatorname{tg}3x} = 1^\infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} e^{\operatorname{tg}3x(\sin 3x - 1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} e^{\frac{\sin 3x - 1}{\operatorname{cotg}3x}} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} e^{\frac{3\cos 3x}{-3(1+\operatorname{cotg}^2 3x)}} = e^0 = 1$$

۱۰۰ـ گزینه «۳» معادله داده شده را به صورت $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$f'(x) = 2x - x\cos x = 0 \Rightarrow x(2-\cos x) = 0 \Rightarrow x = 0$

چون معادله $f'(x) = 0$، یک ریشه دارد، بنابراین f حداکثر دو ریشه دارد. از طرفی $f(-\pi) > 0$ و $f(0) < 0$، بنابراین f حداقل یک ریشه در بازهٔ $(-\pi, 0)$ دارد و همچنین $f(0) < 0$ و $f(\pi) > 0$، بنابراین f حداقل یک ریشه در بازه $(0, \pi)$ دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً دو ریشه دارد.

۱۰۱ـ گزینه «۱» به طور کلی تعداد پرها یا برگهای $r = \cos\theta$ و $r = \sin n\theta$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد پرها (برگها)} = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ 2n & \text{زوج } n \end{cases}$$

۱۰۲ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $z_2 = x_2 + iy_2$، در این صورت از معادلات داده شده نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x_2^2 + y_2^2 = 14 \\ (1-x_2)^2 + y_2^2 = 9 \Rightarrow 1 - 2x_2 + x_2^2 + y_2^2 = 9 \xrightarrow{x_2^2+y_2^2=14} x_2 = 3\ ,\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

۱۰۳ـ گزینه «۱»

روش اول: $u = -\operatorname{Ln}x \Rightarrow x = e^{-u} \Rightarrow du = -e^{-u}du$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\operatorname{Ln}x}} = \int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-u}du}{\sqrt{u}} = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

روش دوم: به طور کلی $\int_0^1(-\operatorname{Ln}x)^n dx = \Gamma(n+1)$. بنابراین: $\int_0^1(-\operatorname{Ln}x)^{-\frac{1}{2}}dx = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

۱۰۴ـ گزینه «۲»

$$f'(x) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \Rightarrow 3x^2 - 2 = \frac{18-(-2)}{2} \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{12}{3}}$$

۱۰۵ـ گزینه «۱» ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(2^x + 2^{-x}) = \sqrt{2 - 2^x - 2^{-x}} = \sqrt{2 - 2^x - \frac{1}{2^x}} = \sqrt{\frac{2\times 2^x - 2^{2x} - 1}{2^x}} = \sqrt{\frac{-(2^x-1)^2}{2^x}}$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی: $\frac{-(2^x-1)^2}{2^x} \geq 0 \Rightarrow -(2^x-1)^2 0 \Rightarrow (2^x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 2^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

۱۰۶ـ گزینه «۴» محل تلاقی نمودار معکوس تابع با نیمساز ربع اول و سوم، همان محل تلاقی نمودار خود تابع با نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد. بنابراین کافی است محل تلاقی تابع با نیمساز ربع اول و سوم را بدست آوریم.

$$\begin{cases} y = x + \operatorname{Ln}x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x + \operatorname{Ln}x = x \Rightarrow \operatorname{Ln}x = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطه تلاقی $A(1,1)$ می‌باشد و فاصله آن تا نقطه $(3,5)$ برابر است با: $d = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{5}$

۱۰۷ـ گزینه «۴» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+\operatorname{Ln}3}{n})^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} e^{(2n-1)(\frac{n+\operatorname{Ln}3}{n}-1)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(2n-1)\operatorname{Ln}3}{n}} = e^{2\ln 3} = e^{\ln 9} = 9$$

۱۰۸ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{|x^2+x-6|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{6-x-x^2} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2^-}\frac{-2+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}{-1-2x} = \frac{3}{10}$$

۱۰۹ـ گزینه «۳»

$$x^4 - y^4 = 2xy \Rightarrow r^4\cos^4\theta - r^4\sin^4\theta = 2r^2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$r^2\underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{\cos 2\theta}\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{\text{یک}} = \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} \Rightarrow r^2 = \operatorname{tg}2\theta \Rightarrow r = \sqrt{\operatorname{tg}2\theta}$$

۱۱۰ـ گزینه «۱» با تقسیم صورت کسر بر مخرج، تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+1} \Rightarrow y^{(10)} = 0 - \frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{10}\times 2^{10}\times 10!}{(2x+1)^{11}}\Bigg|_{x=\frac{-3}{2}} = \frac{1}{4}(10!)$$

تنها کلمه‌ای که خدا برجبین هر مردی نوشته، امید است. «هوگو»

هر چند وقت یک بار به جایی بروید که صدای ناله درهای چوبی شنیده شود.

تست‌های سراسری ۱۳۸۶

MBA

۱ـ تابع با ضابطه $f(x)=(x-2)^2(x+4)$ در بازه $[a,b]$ وارون‌پذیر است، اگر $1\in[a,b]$ باشد، بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 3 ۳) 4 ۳) $4/5$ ۴) 5

۲ـ اگر $x\le 1$، $f(x)=x^2-3x+2$ و $g(x)=x^2+x$ باشد، بزرگترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) 30 ۲) 54 ۳) 68 ۴) 130

۳ـ به ازای کدام مقدار a نمودار معکوس تابع $f(x)=x^3+ax$ از نقطه ماکزیمم منحنی به معادله $y=\log_4(4x-x^2)$ می‌گذرد؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۴ـ حاصل $\mathrm{Arcsin}(\cos 2x)$ با شرط $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}-2x$ ۲) $\frac{3\pi}{3}-2x$ ۳) $2x-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2x-\frac{3\pi}{2}$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} x\left\lfloor\frac{x}{2x^2+1}\right\rfloor$، کدام است؟ (نماد $\lfloor\ \rfloor$ به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ∞ ۴) موجود نیست.

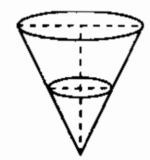
۶ـ اگر $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ باشد، تابع gof در فاصله $[2,2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-1+\sqrt{3}$ ۳) $2-\sqrt{3}$ ۴) 1

۷ـ مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر خط مماس بر منحنی به معادله $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$، کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۸ـ آب با سرعت $\frac{3}{5}$ لیتر در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکل به ارتفاع ۲۰ دسی‌متر و قطر دهانه ۱۰ دسی‌متر می‌شود. پایین مخزن سوراخ است وقتی ارتفاع آب ۱۶ دسی‌متر باشد سطح آب با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه بالا می‌آید. مقدار نشت آب در هر ثانیه چند لیتر است؟ $(16\pi=50)$



۱) $0/06$
۲) $0/09$
۳) $0/1$
۴) $0/12$

۹ـ از رابطه $x^2+4y^2=9$ اگر $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{K}{y^3}=0$ باشد، عدد K کدام است؟

۱) $-\frac{4}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۱۰ـ زاویه بین مماس‌ها بر دو منحنی به معادلات $4x^3-x^2y-x+2y=0$ و $x^3-5y^3+2x+y=0$ در مبدأ مختصات چند درجه است؟

۱) صفر ۲) 45 ۳) 90 ۴) 135

۱۱ـ اگر تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin\pi x}{x^2-x} & x\neq 0,1\\ a & x=0,1\end{cases}$ در بازه $[0,1]$ پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) نشدنی

۱۲ـ در طرح یک آموزشکده اگر برای ۴۰ تا ۸۰ نفر جا منظور شود سود حاصل برای هر نفر ۱۶۰ واحد پول است. اگر ظرفیت بیش از ۸۰ نفر باشد عدد سود حاصل برای هر نفر به اندازه ۱۶ برابر ظرفیت اضافی بالای ۸۰ نفر کاهش می‌یابد، با کدام ظرفیت بیشترین سود حاصل می‌شود؟

۱) 88 ۲) 89 ۳) 90 ۴) 95

۱۳ـ حاصل $\int_\alpha^\beta (t+\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}(\frac{t^2-1}{t^2})dt$ که در آن $\alpha=2+\sqrt{3}$ و $\beta=8+\sqrt{63}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{112}{3}$ ۲) $\frac{121}{3}$ ۳) $\frac{124}{3}$ ۴) $\frac{142}{3}$

۱۴ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۵ـ اگر $\cos x=\frac{1921}{1922}$ باشد، مقدار x چند رادیان است؟

۱) $\frac{1}{37}$ ۲) $\frac{1}{35}$ ۳) $\frac{1}{31}$ ۴) $\frac{1}{29}$

۱۶ـ اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد، حاصل $\mathrm{Ln}(\frac{x+iy}{x-iy})$، کدام است؟

۱) $i\tan^{-1}\frac{x}{y}$ ۲) $\tan(\sqrt{x^2+y^2})$ ۳) $\tan\sqrt{x^2-y^2}$ ۴) $2i\tan^{-1}\frac{y}{x}$

۱۷ـ تابع $-2<x<4$، $f(x)=\frac{1}{x+2}$ به صورت سری توان‌های صعودی $(x-1)$ نوشته شده است، ضریب جمله شامل $(x-1)^n$ در این سری کدام است؟

۱) $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ ۲) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ ۳) $\frac{(-1)^n}{2^n}$ ۴) $\frac{(-1)^n}{3^n}$

۱۸ـ حاصل $\int_0^\infty e^{-t}\cos^2 t\,dt$، کدام است؟

۱) $0/4$ ۲) $0/6$ ۳) $0/7$ ۴) $0/8$

ریاضی

۱۹ـ تابع f را روی $[0,1]$ با ضابطه $f(x)=x$ هرگاه x گویا باشد و $f(x)=1-x$ هرگاه x اصم باشد تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $g(x)=f(f(x))$ کدام گزاره درست است؟

۱) f و g تنها در نقطهٔ $\frac{1}{2}$ پیوسته‌اند.
۲) f و g فقط در نقاط گویا پیوسته هستند.
۳) g در هر نقطه از $[0,1]$ و f در نقاط گویا پیوسته است.
۴) g در هر نقطه از $[0,1]$ و f تنها در $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

۲۰ـ اگر $p,q>0$، کدام گزینه در مورد انتگرال $\int^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$ صحیح است؟

۱) هرگاه $0<q<1<p$ همگراست.
۲) هرگاه $0<p<1$ و $0<q<1$ همگراست.
۳) هرگاه $p>1$ و $q>1$ همگراست.
۴) به ازای هر p,q واگراست.

۲۱ـ بسط مک‌لورن $2x\cos x^3-3x^4\sin x^3$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n+2)x^{6n+1}}{(2n)!}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+1}(6n+2)}{(2n)!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+1}(6n+2)}{(2n+1)!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+1}(6n+2)}{(2n+1)!}$

۲۲ـ کدام گزینه در مورد $I_n = \int^{1} Ln^n x dx$ درست است؟

۱) I_n واگراست. ۲) I_n همگرا به $(-1)^n n!$ است. ۳) I_n همگرا به $(-1)^n n$ است. ۴) I_n همگرا به $(-1)^n$ است.

۲۳ـ کدام گزینه در مورد دنباله $(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})^{\frac{1}{n}}$، $0 < a < b < c$ صحیح است؟

۱) واگراست. ۲) همگراست به $\frac{1}{a}$ ۳) همگراست به $\frac{1}{b}$ ۴) همگراست به $\frac{1}{c}$

۲۴ـ دنباله تعریف شده به صورت $r_1 = 1$، $r_{n+1} = 1+\frac{1}{r_n}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) دنباله $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۲) دنباله $\{r_n\}$ صعودی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۳) زیر دنباله فرد $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۴) زیر دنباله زوج $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۲۵ـ هرگاه $F(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{n}\sin\frac{jx^2}{n}$، $F(\sqrt{\frac{\pi}{2}})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

۲۶ـ شعاع، بازه و مرکز همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ به ترتیب کدامند؟

۱) $\frac{-1}{2},(-1,0],1$ ۲) $-\frac{1}{2},[-1,0),1$ ۳) $\frac{-1}{2},[-1,0),\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2},(-1,0],\frac{1}{2}$

۲۷ـ اگر $A = \int^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$، مقدار $\int^{\pi}\frac{\sin x}{x+2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi+2}-A$ ۲) $\frac{1}{\pi+2}-\frac{1}{2}+A$ ۳) $\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A$ ۴) $\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}+A$

۲۸ـ در صورتی که بدانیم $f(\pi) = 2$ و $\int^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x dx = 5$، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۹ـ می‌دانیم $\Gamma(x) = \int^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$، مقدار انتگرال $\int^{1}x^2(Ln\frac{1}{x})^3dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3^3}\Gamma(3)$ ۲) $\frac{1}{3^3}\Gamma(4)$ ۳) $\frac{1}{3^4}\Gamma(3)$ ۴) $\frac{1}{3^4}\Gamma(4)$

۳۰ـ در صورتی که $f^2(x^2+1) = \int^{x^2+1}\frac{f(t)}{t^2+2t+1}dt$ و $f(0) = 0$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}$

۳۱ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln\frac{n!}{n^n}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) e^{-1} ۳) 1 ۴) e

۳۲ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}$ کدام است؟

۱) صفر ۳) ۱ ۳) e ۴) ∞

عمران

۳۳ـ معادله $3\tan x + x^2 = 2$ دارای:

۱) تنها یک ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است. ۲) دو ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است.

۳) ریشه‌ای در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ نیست. ۴) دارای سه ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است.

۳۴ـ حد $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $Ln3+Ln2-1$ ۳) $Ln3-Ln2$ ۴) $Ln2+Ln4-3$

۳۵ـ انتگرال $\int\frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با:

۱) $CLn(1-e^x)+x^2$ ۲) $CLn(1-e^x)+x-x^2$ ۳) $x-Ln(1+e^x)+C$ ۴) $x+Ln(1+e^x)+C$

۳۶ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۷ـ شعاع همگرائی سری مقابل برابر با چیست؟ $a > b > 0$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n})x^n$

۱) $R = \frac{1}{b}$ ۲) $R = \frac{1}{a}$ ۳) $R = a$ ۴) $R = b$

۳۸ـ به ازای چه مقدار ثابت C، انتگرال $\int^{1}\frac{x-C}{Lnx}dx$ همگراست؟

۱) $C = -1$ ۲) $C = 1$ ۳) $C = 0$ ۴) $C = 2$

۳۹ـ مکان هندسی مجموعه تمام z های در صفحه مختلط که در شرط زیر صدق می‌کنند کدام است؟

$$|z-1|+|z+1|=1$$

۱) پاره‌خط ۲) مجموعه تهی ۳) بیضی ۴) دایره

مکانیک

۴۰ـ فرض کنید n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد و $I_n = \int(\cos x)^n dx$. در این صورت مقدار $nI_n-(n-1)I_{n-2}$ برابر است با:

۱) $(\cos x)^{n-1}\sin x$ ۲) $(eos\, x)^{n-2}(\sin x)^2$ ۳) $\cos x(\sin x)^{n-1}$ ۴) $(\cos x)^2(\sin x)^{n-2}$

۴۱ـ کدامیک از توابع زیر برابر با $\sinh^{-1}x$ (تابع معکوس سینوس هذلولی) می‌باشد؟

۱) $-Ln(x-\sqrt{x^2-1})$ ۲) $-Ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ ۳) $Ln(x-\sqrt{x^2-1})$ ۴) $Ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

۴۲ـ فرض کنید a_n و b_n همواره مثبت باشند و $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L \in R$. کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگراست.

۲) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگراست.

۳) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

۴) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

۴۳ـ اگر $f(x)=\lfloor x^2 \rfloor$ (منظور از کروشه بزرگترین جزء صحیح است.) $1 \le x \le 2$، آنگاه مقدار $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ بـه ازای $\sqrt{3} < x < 2$ کدام است؟

۱) $3(x-1)$ ۲) $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۳) $3(x-\sqrt{3})$ ۴) $3x-\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

۴۴ـ مساحت رویه‌ای را تعیین کنید که از دوران قسمتی از دلوار $r=1+\cos\theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات، حول محور x تشکیل می‌شود.

۱) 3π ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{16\pi}{5}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})$ ۴) $\frac{32\pi}{5}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})$

۴۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$ برابر است با:

۱) $-e$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) 2

معدن

۴۶ـ مساحت ناحیه نامتناهی راکه در ربع اول و بین خم $y=\tanh x$ و خط $y=1$ واقع است برابر است با:

۱) ∞ ۲) $\ln 2$ ۳) $\cosh 2$ ۴) $2\ln 2-\cosh 2$

۴۷ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-5)^n}{n^2}$ به ازای کدام مقادیر از x همگراست؟

۱) واگراست فقط اگر $x \ge 3$
۲) همگراست اگر $2 \le x \le 3$
۳) واگراست فقط اگر $x \le 2$
۴) همگراست اگر و فقط اگر $2 < x < 3$

۴۸ـ اگر $a_n=\frac{n!n!}{(2n)!}$ آنگاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ برابر است با:

۱) $R=1$ ۲) $R=2$ ۳) $R=4$ ۴) $R=\infty$

۴۹ـ فرض کنید که برای $n \ge 1$، $I_n=\int^{\infty} x^n e^{-x^2}dx$ و $I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. کدامیک از روابط برگشتی داده شده صحیح است؟

۱) $I_n=\frac{n-1}{2}I_{n-1}$ ۲) $I_n=\frac{n-1}{2}I_{n+1}$ ۳) $I_n=-\frac{n-1}{2}I_{n-2}$ ۴) $I_n=\frac{(n-1)}{2}I_{n-2}$

۵۰ـ مساحت محصور به منحنی $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}}=1$ را بیابید.

۱) π ۲) $\frac{3}{8}a^2\pi$ ۳) $\frac{2}{3}a^2\pi$ ۴) $\frac{4}{3}a^2\pi$

۵۱ـ حجم جسم حاصل از دوران مساحت محصور به محورهای مختصات و منحنی $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$، حول محور x، را حساب کنید.

۱) $5\pi a^3$ ۲) $\frac{1}{2}\pi a^3$ ۳) $\frac{1}{12}\pi a^3$ ۴) $\frac{1}{15}\pi a^3$

۵۲ـ مشتق تابع ضمنی زیر نسبت به متغیر x، را به دست آورید:

$$\int^{y} e^{-t^2}dt+\int^{x^2}\sin^2 t\,dt=0$$

۱) $-2xe^{y^2}\sin^2 x^2$ ۲) $-ye^{y^2}\sin^2 x^2$ ۳) $-2xe^{y}\sin^2 x^2$ ۴) $xe^{y^2}\sin x^2$

۵۳ـ حد $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را حساب کنید.

۱) -1 ۲) e ۳) 1 ۴) $\frac{1}{e}$

آمار

۵۴ـ حد دنباله $\{n\sin\frac{\pi}{n}\}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ∞

۵۵ـ فرض کنید $\lfloor x \rfloor$ جزء صحیح x باشد. برد تابع $g(x)=\lfloor x \rfloor - x$ کدام است؟

۱) $(-1,0]$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[-1,0]$ ۴) R

۵۶ـ نقطه‌های A و B به ترتیب روی محور x ها و y ها قرار دارند و نقطه $M\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ وسط قطعه خط AB قرار دارد. معادله خط AB کدام است؟

۱) $x+2y=8$ ۲) $4x+y=11$ ۳) $2x+3y=12$ ۴) $3x+2y=12$

۵۷ـ $\int^{2\pi}|\sin x|dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸ـ تابع $y=|x^2-1|$ در $x=1$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) پیوسته است. ۲) مشتق دارد. ۳) ماکزیمم دارد. ۴) حد ندارد.

۵۹ـ شعاع همگرایی سری توانی $1+2x+3^2x^2+2^3x^3+3^4x^4+2^5x^5+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۶۰ـ دنبالهٔ $\{x_n\}$ حد دارد و به صورت $x_1=2$ و $n=1,2,\ldots$، $2x_{n+1}=x_n+\frac{5}{x_n}$ تعریف شده است. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ کدام است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}+5}{2}$

۶۱ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$، $g(0)=g'(0)=0$، $g''(0)=70$، $f'(0)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 35 ۴) 70

۶۲ـ مشتق تابع $G(x)=\int^{x}e^{-t^2}dt$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

مکاترونیک

۶۳ـ فرض کنید تابع f بر بازهٔ $(2,4)$ دارای مشتقات مراتب اول و دوم پیوسته باشد. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)+f(3-h)-2f(3)}{h^2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $f''(3)$ ۴) $2f'(3)$

۶۴ـ با توجه به عبارت $x=\int^{y}\frac{dt}{\sqrt{5+6t^2}}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $y=4$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 24 ۳) 30 ۴) 50

۶۵ـ اگر $p>1$، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=A$، $\sum\frac{1}{n^p}=B$، مقدار $C=\sum\frac{1}{n^p}$ کدام است؟

۱) $C=\frac{2^p-1}{2^p}A$ ۲) $C=\frac{1}{2^p}A$ ۳) $C=\frac{2^p}{2^p+1}A$ ۴) $C=\frac{2^p+1}{2^p}A$

۶۶ـ کدام انتگرال همگراست؟

۱) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ ۲) $\int_0^{\frac{5}{2}} \sec x dx$ ۳) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ ۴) $\int_0^\infty \cos x dx$

۶۷ـ مساحت محصور به وسیلهٔ منحنی $r=\cos 2\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۶۸ـ تابع $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ بر کدام مجموعه پیوسته است؟

۱) R ۲) $\{1,-1\}$ ۳) $R-\{-1,+1\}$ ۴) $R-\{0,+1,-1\}$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۶۹ـ با توجه به $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ سری $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۲) $\frac{3}{2}\ln 2$ ۳) $\frac{2}{3}\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

۷۰ـ طول منحنی $r(\theta)=(\theta-\sin\theta)\vec{i}+(1-\cos\theta)\vec{j},\ 0\le\theta\le 2\pi$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۷۱ـ مساحت محدود به منحنی $x=t+t^2,\ y=t-t^2,\ 0\le t\le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۷۲ـ در صفحهٔ اعداد مختلط معادله $|z-(2+i)|-|z+3+4i|=75$ معرف چه شکلی است؟

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) دو خط راست

۷۳ـ اگر تابع f همه جا ناصفر و پیوسته باشد، $f^2(x)=2\int^{x} f^2(t)\frac{2t+4}{t^2+4t+27}dt$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^2+4x+27$ ۲) $\ln(x^2+4x+27)$ ۳) $\frac{2x+4}{x^2+4x+27}$ ۴) $\frac{x^2+4x+27}{2x+4}$

۷۴ـ مجموعه‌ای که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ روی آن همگراست، کدام است؟

۱) $(-1,1]$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(\frac{1}{2},+\infty)$

۷۵ـ می‌دانیم که $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$. a و b کدامند؟

۱) $a=-3$ و $b=-\frac{9}{2}$ ۲) $a=-3$ و $b=\frac{9}{2}$ ۳) $a=3$ و $b=\frac{9}{2}$ ۴) $a=3$ و $b=-\frac{9}{2}$

۷۶ـ کدام انتگرال واگراست؟

۱) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ۲) $\int_0^1 \ln x dx$ ۳) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ ۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx$

۷۷ـ با توجه به معادله $u=\int_2^v \frac{ds}{\sqrt{1+2s^2}},\ v\ge 2$ مقدار $\frac{d^2v}{du^2}$ به ازای $v=3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{\sqrt{19}}$ ۳) $2\sqrt{19}$ ۴) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

۷۸ـ تابع g بر بازهٔ $(-2,0)$ دارای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم پیوسته است. $A=\lim_{t\to 0}\frac{g(-1+t)+g(-1-t)-2g(-1)}{t^2}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $g''(-1)$ ۳) $2g'(-1)$ ۴) ∞

۷۹ـ اگر $x_n=\frac{P_n}{P}$ و $y_n=\frac{A_n}{A}$ به ترتیب نسبت محیط ومساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R به محیط و مساحت این دایره باشند، به ازای $n\ge 3$ رابطه بین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کدام است؟

۱) $x_n=y_n$ ۲) $y_n=Rx_n$ ۳) $x_n>y_n$ ۴) $x_n<y_n$

۸۰ـ اگر $A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ ، $B=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$ مقدار B برحسب A کدام است؟

۱) $B=\frac{A}{2}$ ۲) $B=\frac{3}{2}A$ ۳) $B=\frac{3}{4}A$ ۴) $B=\frac{2}{3}A$

۸۱ـ کدام سری واگراست؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ ۴) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-+\cdots$

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶

۱ـ گزینه «۲» تابع در یک فاصله وارون‌پذیر است، اگر در آن فاصله یکنوا باشد.

$$f(x)=(x-2)^2(x+4) \Rightarrow f'(x)=2(x-2)(x+4)+(x-2)^2=(x-2)(3x+6)=3(x-2)(x+2)$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow x=-2,+2$$

بنابراین تابع f در بازه $[-2,2]$ وارون‌پذیر است، زیرا در این فاصله مشتق تغییر علامت نمی‌دهد.

۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه g تابعی اکیداً صعودی است $(g'(x)=3x^2+1>0)$، لذا بیشترین مقدار gof به ازای بیشترین مقدار f در فاصله $(-\infty,1]$ حاصل می‌شود.

$$f(x)=x^3-3x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x=-1,+1 \Rightarrow f(-1)=4\ ,\ f(1)=0$$

بنابراین بیشترین مقدار f برابر ۴ است، در نتیجه داریم:

$$g(4)=4^3+4=64+4=68$$

۳ـ گزینه «۳» ابتدا نقطه ماکزیمم $y=\log_4(4x-x^2)$ را به دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{4-2x}{(4x-x^2)\mathrm{Ln}4}=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=\log_4(4\times 2-2^2)=1$$

نقطه $P(2,1)$ نقطه ماکزیمم تابع موردنظر می‌باشد و چون نمودار تابع معکوس $f(x)=x^3+ax$ از $P(2,1)$ عبور می‌کند لذا نمودار خود تابع f از نقطه $P'(1,2)$ عبور خواهد کرد.

$$2=1^3+a\times 1 \Rightarrow a=1$$

۴ـ گزینه «۴»

روش اول: ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\pi}{2}\le x\le \pi \Rightarrow \pi\le 2x\le 2\pi \Rightarrow \frac{-\pi}{2}\le 2x-\frac{3\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{Arcsin}(\cos 2x)=\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=2x-\frac{3\pi}{2}$$

تساوی آخر به این دلیل برقرار است که $2x-\frac{3\pi}{2}$ مقداری بین $\frac{-\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ است.

روش دوم: (عددگذاری): قرار می‌دهیم $x=\pi$ در این صورت:

$$\mathrm{Arcsin}(\cos 2\pi)=\mathrm{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$$

در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که به ازای $x=\pi$ برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود، گزینه ۴ است.

۵ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه علامت ∞ مشخص نشده، یکبار آنرا $+\infty$ و یکبار $-\infty$ فرض می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{x}{2x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[0^+\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\times 0=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{x}{2x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[0^-\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} x\times(-1)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

توضیح: در پاسخنامه سازمان سنجش گزینه (۱) به عنوان گزینه صحیح اعلام شده که احتمالاً اشتباهی در درج پاسخ صحیح صورت گرفته است.

۶ـ گزینه «۲»

$$gof=g(f(x))=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]$$

می‌دانیم تابع جزء صحیح معمولاً در نقاطی که عبارت درون جزء صحیح، صحیح شود ناپیوسته است و چون به ازای $x=2$ مقدار عبارت درون جزء صحیح برابر ۰ می‌شود، لذا نقطه ناپیوستگی بعدی تابع به ازای xای حاصل می‌شود که به ازای آن $\frac{1}{2}x^2-x=1$ شود.

$$\Rightarrow x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3} \Rightarrow 2+k=1+\sqrt{3} \Rightarrow k=-1+\sqrt{3}$$

۷ـ گزینه «۴» نقطه دلخواه $P(x_0,y_0)$ را روی منحنی موردنظر در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \Rightarrow y'=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت مقابل است:

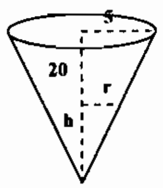
$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

برای به دست آوردن طول از مبدأ و عرض از مبدأ به ترتیب در معادله خط قرار می‌دهیم:

$$y=0 \Rightarrow x=x_0+\sqrt{x_0y_0} \quad , \quad x=0 \Rightarrow y=y_0+\sqrt{x_0y_0}$$

$$\text{مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ}=x_0+y_0+2\sqrt{x_0y_0}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=4$$

۸ـ گزینه «۳» با توجه به شکل روبرو نتیجه می‌شود $r=\frac{1}{4}h$، بنابراین:



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{48}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{1}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

با جایگزینی فرضیات مسأله در رابطه فوق نتیجه می‌شود ($\frac{3}{5}$ لیتر برابر $600\,cm^3$ است):

$$600-\text{مقدار نشتی}=\frac{1}{16}\pi\times 160^2\times\frac{dh}{dt}=\frac{1}{16}\pi\times 160^2\times 0/1=160\pi=500$$

$$\Rightarrow \text{مقدار نشتی}=600-500=100\,cm^3=0/1 \ \text{لیتر}$$

۹ـ گزینه «۳»

$$x^2+4y^2=9 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{8y}=\frac{-x}{4y} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-4y+4xy'}{16y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-4y-\frac{4x^2}{4y}}{16y^2}=\frac{-4y^2-x^2}{16y^3}=\frac{-9}{16y^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{9}{16y^3}=0$$

۱۰ـ گزینه «۳»

$$4x^3-x^2y-x+2y=0 \Rightarrow y'=-\left.\frac{12x^2-2xy-1}{-x^2+2}\right|_{(0,0)}=\frac{+1}{2}=m$$

$$x^3-5y^3+2x+y=0 \Rightarrow y'=-\left.\frac{3x^2+2}{-15y^2+1}\right|_{(0,0)}=-2=m'$$

با توجه به اینکه $mm'=-1$ می‌باشد، پس دو منحنی در مبدأ مختصات بر هم عمودند.

۱۱ـ گزینه «۲» برای پیوستگی f در بازهٔ $[0,1]$ لازم است روابط $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$ برقرار باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x^2-x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi x}{x^2-x}=-\pi\\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x^2-x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{2x-1}=-\pi\end{array}\right\}\Rightarrow a=-\pi$$

۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به فرضیات مسأله، سود از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$P=1600(80+x)-(80+x)16x=128000+320x-16x^2$$ (x تعداد ظرفیت اضافی است)

$$\frac{dP}{dx}=320-32x=0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow \text{ظرفیت کل}=10+80=90$$

۱۳ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $u=t+\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت کرانهای انتگرال به صورت زیر عوض می‌شوند:

$$u=t+\frac{1}{t}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{8+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=4 \quad , \quad u=t+\frac{1}{t}=8+\sqrt{63}+\frac{1}{8+\sqrt{63}}=\frac{128+16\sqrt{63}}{8+\sqrt{63}}=16$$

$$I=\int_4^{16}\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{16}=\frac{128}{3}-\frac{16}{3}=\frac{112}{3}$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\text{Arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مقدار $\cos x$ بسیار نزدیک به ۱ است، نتیجه می‌شود که x زاویه‌ای نزدیک به صفر است. بنابراین می‌توانیم از بسط مکلورن $\cos x$ استفاده کنیم:

$$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}=\frac{1921}{1922}\Rightarrow\frac{x^2}{2}=\frac{1}{1922}\Rightarrow x^2=\frac{1}{961}\Rightarrow x=\frac{1}{31}$$

۱۶ـ گزینه «۴»

$$\text{Ln}(\frac{x+iy}{x-iy})=\text{Ln}(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}})=\text{Ln}e^{2i\theta}=2i\theta\,\text{Ln}e=2i\,\text{Arctg}\frac{y}{x}$$

۱۷ـ گزینه «۱»

$$(x-1)^n \text{ ضریب جمله شامل } =\frac{f^{n}(1)}{n!}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+2}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\Rightarrow f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}}\Rightarrow \text{ضریب}=\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

۱۸ـ گزینه «۲»

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos^2 t\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\times\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}(\int_0^\infty e^{-t}dt+\int_0^\infty e^{-t}\cos 2t\,dt)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{1+2^2})=0/6$$

در محاسبه انتگرال دوم از فرمول $\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt=\frac{s}{s^2+a^2}$ استفاده کرده‌ایم.

۱۹ـ گزینه «۴» به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $g(x)=x$، پس g همواره پیوسته است و f فقط در نقاطی پیوسته است که $x=1-x$ یا $x=\frac{1}{2}$ باشد.

۲۰ـ گزینه «۱» انتگرال داده شده در $x=0$ و بی‌نهایت ناسره می‌باشد. برای اینکه انتگرال در $x=0$ همگرا باشد لازم است یکی از توانهای p یا q از ۱ کوچکتر باشد و برای همگرایی انتگرال در بی‌نهایت کافی است یکی از توانهای p یا q از ۱ بزرگتر باشند.

۲۱ـ گزینه «۱»

$$2x\cos x^3-3x^4\sin x^3=2x(1-\frac{x^6}{2!}+...)-3x^4(x^3-\frac{x^9}{6}+...)=2x-4x^7+...$$

۲۲ـ گزینه «۲» از تابع گاما استفاده کنید.

۲۳ـ گزینه «۲» از رابطه $0<a<b<c$، نتیجه می‌شود $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$، بنابراین:

$$(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})^{\frac{1}{n}}\sim(\frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$$

۲۴ـ گزینه «۴» با نوشتن چند جمله اول دنباله می‌توان دید که زیر دنباله زوج به صورت نزولی و زیر دنباله فرد به صورت صعودی همگرا می‌باشد.

$$r=1+\frac{1}{r}\Rightarrow r^2=r+1\Rightarrow r^2-r-1=0\Rightarrow r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

۲۵ـ گزینه «۴»

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{n}\sin(\frac{j}{n})x^2=x\int_0^1\sin tx^2dt=x(\frac{-1}{x^2}\cos tx^2)\Big|_0^1=\frac{-1}{x}\cos x^2+\frac{1}{x}\Rightarrow F=(\sqrt{\frac{\pi}{2}})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

۲۶ـ گزینه «۳» ابتدا سری داده شده را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+\frac{1}{2})^n$ می‌نویسیم. واضح است که $\frac{-1}{2}$ مرکز همگرایی است و به سادگی می‌توان نشان داد شعاع همگرایی $R=\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$|x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-1}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-1}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<x<0$$

در نقطه مرزی $x=0$ سری به صورت $\sum\frac{1}{n}$ در می‌آید که واگراست و در $x=-1$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که همگراست.

۲۷ـ گزینه «۳» از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sin x\,dx=dv\Rightarrow v=-\cos x\\ v=\frac{1}{x+2}\Rightarrow du=\frac{-1}{(x+2)^2}dx\end{cases}$$

$$\int_0^\pi\frac{\sin x}{x+2}dx=\frac{-\cos x}{x+2}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx=\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A$$

۲۸ـ گزینه «۳»

$$\int_0^\pi(f(x)+f''(x))\sin x\,dx=\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx+\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$$

برای محاسبه هر یک از انتگرالهای فوق از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-f(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx=-f(\pi)\cos\pi+f(0)\cos 0=2+f(0)$$

$$\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx\\ dv=\sin x\,dx\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$$

$$\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx=\sin x f'(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx=-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx$$

$$\begin{cases}dv=f''(x)dx\Rightarrow v=f'(x)\\ u=\sin x\Rightarrow du=\cos x\,dx\end{cases}$$

از جمع کردن حاصل انتگرالها نتیجه می‌شود: $2+f(0)=5\Rightarrow f(0)=3$

۲۹ـ گزینه «۴»

$$\int_0^1 x^2(\text{Ln}\frac{1}{x})^3dx=\int_0^1 x^2(-\text{Ln}x)^3dx=\frac{\Gamma(4)}{3^4}$$

یادآوری: در محاسبه انتگرال فوق از فرمول زیر استفاده کرده‌ایم.

$$\int_0^1 x^s(-\text{Ln}x)^n dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}}$$

۳۰ـ گزینه «۱» عیناً تست ۱۶۱ صفحه ۲۶۷ کتاب می‌باشد. از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$2\times 3x^2f(x^3+1)f'(x^3+1)=\frac{f(x^3+1)}{(x^3+2)^2}\times 3x^2\Rightarrow f'(x^3+1)=\frac{1}{2(x^3+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x^3+1)=\frac{1}{2((x^3+1)+1)^2}\Rightarrow f'(u)=\frac{1}{2(u+1)^2}\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

با توجه به اینکه $f(0)=0$ است، مقدار $c=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

۳۱ـ گزینه «۱» از هم‌ارزی $n! \sim (\frac{n}{e})^n$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(\frac{1}{e})^n=\frac{n}{n}\mathrm{Ln}\frac{1}{e}=\mathrm{Ln}\frac{1}{e}=-1$$

۳۲ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}\sim\lim_{n\to\infty}(n^2)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}=1$$

۳۳ـ گزینه «۱» ابتدا معادله را به صورت $f(x)=2\mathrm{tg}x+x^3-2=0$ بازنویسی می‌کنیم.

با توجه به اینکه $f(0)<0$ و $f(\frac{\pi}{4})>0$، پس معادله $f(x)=0$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه در بازه $(0,\frac{\pi}{4})$ دارد. از طرفی $f'(x)=2(1+\mathrm{tg}^2x)+3x^2>0$، پس f تابعی اکیداً صعودی در بازه $(0,\frac{\pi}{4})$ است و لذا نمی‌تواند بیش از یک ریشه در این بازه داشته باشد.

۳۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{3^x\mathrm{Ln}3-2^x\mathrm{Ln}2}{1}=\mathrm{Ln}3-\mathrm{Ln}2$$

۳۵ـ گزینه «۳»

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx=x-\mathrm{Ln}(1+e^x)+c$$

۳۶ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})=1$$

۳۷ـ گزینه «۲»

۳۸ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه انتگرال داده شده در $x=1$ ناسره است $(\mathrm{Ln}1=0)$، لازم است مقدار C طوری انتخاب شود که صورت کسر نیز در $x=1$ برابر صفر شود، یعنی: $1-C=0\Rightarrow C=1$

۳۹ـ گزینه «۲» زیرا مجموع فواصل هیچ نقطه‌ای در صفحه مختلط از دو نقطه $(1,0)$ و $(-1,0)$ برابر ۱ نمی‌باشد.

۴۰ـ گزینه «۱» از روش جزء به جزء استفاده کنید (فرض کنید $dv=\cos x dx$ و $u=\cos^{n-1}x$)

۴۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\sinh^{-1}x=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$. حال توجه کنید که:

$$-\mathrm{Ln}(\sqrt{x^2+1}-x)=\mathrm{Ln}(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x})=\mathrm{Ln}(\sqrt{x^2+1}+x)$$

۴۲ـ گزینه «۱» طبق آزمون نسبت.

۴۳ـ گزینه «۴»

$$F(x)=\int_1^x[t^2]dt=\int_1^{\sqrt{2}}1dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2dt+\int_{\sqrt{3}}^{x}3dt=t\Big|_1^{\sqrt{2}}+2t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+3t\Big|_{\sqrt{3}}^{x}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})+(3x-3\sqrt{3})=3x-\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$$

۴۴ـ گزینه «۴» مساحت حاصل از دوران منحنی قطبی حول محور x ها از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}d\theta$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\frac{\theta}{2})(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{-32\pi}{5}\cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32\pi}{5}(1-\frac{1}{4\sqrt{2}})$$

۴۵ـ گزینه «۲» کافی است دو بار از قاعده هوپیتال استفاده کنید.

۴۶ـ گزینه «۲»

$$S=\int_0^{\infty}(1-\mathrm{tgh}x)dx=(x-\mathrm{Ln}\cosh x)\Big|_0^{\infty}=(\mathrm{Ln}e^x-\mathrm{Ln}\frac{e^x+e^{-x}}{2})\Big|_0^{\infty}=\mathrm{Ln}\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\Big|_0^{\infty}=\mathrm{Ln}2-\mathrm{Ln}1=\mathrm{Ln}2$$

۴۷ـ گزینه «۲» واضح است که شعاع همگرایی سری $R=1$ است. بنابراین: $|2x-5|<R=1\Rightarrow -1<2x-5<1\Rightarrow 2<x<3$
با بررسی نقاط مرزی $x=2$ و $x=3$ مشاهده می‌شود که سری در هر دو نقطه مرزی همگراست.

۴۸ـ گزینه «۳»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^{2n}}{(\frac{2n}{e})^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2})^{2n}}=\frac{1}{4}\Rightarrow R=4$$

۴۹ـ گزینه «۴» برای یافتن رابطه بازگشتی موردنظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}dv=xe^{-x^2}dx\Rightarrow v=\frac{-1}{2}e^{-x^2}\\ u=x^{n-1}\Rightarrow du=(n-1)x^{n-2}\end{cases}$$

$$I_n=\int_0^{\infty}x^ne^{-x^2}dx=\underbrace{-\frac{x^{n-1}}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}}_{\text{صفر}}-\int_0^{\infty}\frac{-1}{2}(n-1)x^{n-2}e^{-x^2}dx\Rightarrow I_n=\frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}$$

۵۰ـ گزینه «۲» معادله داده شده را می‌توان به صورت پارامتری $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ در نظر گرفت.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3t\times 3a\cos^2t\sin t dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t dt$$

برای محاسبه انتگرال اخیر ساده‌ترین راه استفاده از تابع بتا می‌باشد که در این صورت: $S=12a^2\times\frac{1}{2}\beta(\frac{5}{2},\frac{3}{2})=6a^2\times\frac{\pi}{16}=\frac{3\pi a^2}{8}$

۵۱ـ گزینه «۴»

$$y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=a+x-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^a(a^2+x^2+4ax+2ax-4a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})dx$$

$$\Rightarrow V=\pi(a^2x+\frac{x^3}{3}+3ax^2-4a^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4a^{\frac{1}{2}}\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_0^a=\frac{1}{15}\pi a^3$$

۵۲ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin^2 x^2\times 2x}{e^{-y^2}}=-2xe^{y^2}\sin^2 x^2$$

۵۳ـ گزینه «۴» از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ استفاده می‌کنیم.

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(\frac{n}{e})^n}}{n}=\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{1}{e}$$

۵۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=}n\times\frac{\pi}{n}=\pi$$

۵۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$، بنابراین $-1<\lfloor x\rfloor-x\le 0$

۵۶ـ گزینه «۴» نقطه $A(a,0)$ و $B(0,b)$ می‌باشند. با توجه به اینکه M وسط قطعه خط AB قرار دارد نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=6$. معادله خط موردنظر به صورت مقابل است:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1\Rightarrow 3x+2y=12$$

۵۷ـ گزینه «۴»

$$\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$$

۵۸ـ گزینه «۱» نقطه $x=1$ ریشه ساده درون قدر مطلق می‌باشد، پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. همچنین واضح است که تابع در $x=1$ پیوسته است.

۵۹ـ گزینه «۲»

۶۰ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\lim_{n\to\infty}x_n=L$، در این صورت:

$$2L=L+\frac{5}{L}\Rightarrow L=\frac{5}{L}\Rightarrow L^2=5\Rightarrow L=\sqrt{5}$$

۶۱ـ گزینه «۳» برای محاسبه $f'(0)$، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=35$$

۶۲ـ گزینه «۲»

$$G(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\Rightarrow G'(x)=e^{-x^2}\Rightarrow G'(0)=1$$

۶۳ـ گزینه «۳»

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)+f(3-h)-2f(3)}{h^2}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{f'(3+h)-f'(3-h)}{2h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{f''(3+h)+f''(3-h)}{2}=f''(3)$$

۶۴ـ گزینه «۲»

$$x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{5+6t^2}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{5+6y^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{5+6y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\sqrt{5+6y^2})=\frac{d}{dy}(\sqrt{5+6y^2}).\frac{dy}{dx}=\frac{12y}{2\sqrt{5+6y^2}}\times\sqrt{5+6y^2}=6y=24$$

۶۵ـ گزینه «۱»

$$B=\sum_{n\ \text{زوج}}\frac{1}{n^P}=\frac{1}{2^P}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}=(\frac{1}{2^P})A\Rightarrow C=(1-\frac{1}{2^P})A$$

۶۶ـ گزینه «۱»

$$\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=2\sqrt{x-2}\Big|_2^5=2\sqrt{3}$$

۶۷ـ گزینه «۱» منحنی $r=\cos 2\theta$، رُز ۴ برگ می‌باشد. با توجه به تقارن شکل کافی است مساحت محصور بوسیله منحنی در فاصله $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل انتگرال را در ۸ ضرب کنیم.

$$S=8\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1+\cos 4\theta}{2})d\theta=\frac{\pi}{2}$$

۶۸ـ گزینه «۳» تابع f را می‌توان به صورت $f(x)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$ نوشت و بنابراین f در نقاطی که $|x|=1$ یا $x=\pm 1$ ناپیوسته است.

۶۹ـ گزینه «۲»

$$Ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\qquad(1)$$

$$\frac{1}{2}Ln2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\dots\qquad(2)$$

با جمع طرفین رابطه ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$Ln2+\frac{1}{2}Ln2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots$$

بنابراین حاصل سری داده شده برابر $\frac{3}{2}Ln2$ می‌باشد.

۷۰ـ گزینه «۲»

$$r(\theta)=(\theta-\sin\theta)\vec{i}+(1-\cos\theta)\vec{j}\Rightarrow r'(\theta)=(1-\cos\theta)\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=-4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=4$$

۷۱ـ گزینه «۱»

$$\int_0^1(t-t^2)(1+2t)dt=\int_0^1(-2t^3+t^2+t)dt=(-\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2})\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

یادآوری: مساحت محدود به منحنی پارامتری $x=f(t)$ و $y=g(t)$ از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$S=\int_a^b|g(t)||f'(t)|dt$$

۷۲ـ گزینه «۳» به طور کلی اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، معادلهٔ $|z-z_1|-|z-z_2|=c$ معرف یک هذلولی است.

۷۳ـ گزینه «۱» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$3f^2(x)f'(x)=3f^3(x)\times\frac{2x+4}{x^2+4x+27}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x+4}{x^2+4x+27}$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌شود $f(x)=x^2+4x+27$.

۷۴ـ گزینه «۴» از آزمون ریشه nام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n|}=|\frac{x-1}{x}|<1\Rightarrow -1<\frac{x-1}{x}<1\Rightarrow -1<1-\frac{1}{x}<1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

۷۵ـ گزینه «۲» بسط مک‌لورن $\sin 3x$ را تا دو جمله می‌نویسیم.

$$\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b=\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}\xrightarrow{\text{بسط}}\frac{3x-\frac{1}{6}(3x)^3+ax+bx^3}{x^3}=\frac{(a+3)x+(b-\frac{27}{6})x^3}{x^3}$$

برای اینکه حاصل حد برابر صفر شود، لازم است $a+3=0$ و $b-\frac{27}{6}=0$ باشد. یعنی $a=-3$ و $b=\frac{9}{2}$

۷۶ـ گزینه «۴»

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\,dx=\text{Ln}\,|\,\text{tg}x+\sec x\,|\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\infty$$

۷۷ـ گزینه «۳»

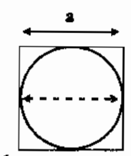
$$\frac{du}{dv}=\frac{1}{\sqrt{1+2v^2}}\Rightarrow\frac{dv}{du}=\sqrt{1+2v^2}\Rightarrow\frac{d}{du}(\sqrt{1+2v^2})=\frac{d}{dv}(\sqrt{1+2v^2}).\frac{dv}{du}=\frac{2v}{\sqrt{1+2v^2}}.\sqrt{1+2v^2}=2v$$

$$\frac{d^2v}{du^2}=\frac{d}{du}(2v)=\frac{d}{dv}(2v).\frac{dv}{du}=2\sqrt{1+2v^2}\xrightarrow{v=3}\frac{d^2v}{dv^2}=2\sqrt{19}$$

۷۸ـ گزینه «۲» صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است و برای محاسبه حد از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{g'(-1+t)-g'(-1-t)-0}{2t}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{t\to 0}\frac{g''(-1+t)+g''(-1-t)}{2}=\frac{2g''(-1)}{2}=g''(-1)$$

۷۹ـ گزینه «۳» به ازای $n=4$ خواهیم داشت: $2r=a\Rightarrow r=\frac{a}{2}$



r : شعاع دایره

a : طول چهار ضلعی منتظم محیطی

$$\begin{cases}P_n=4a\\ P=2\pi r=2\pi(\frac{a}{2})=\pi a\end{cases}\Rightarrow\frac{P_n}{P}=\frac{4}{\pi}\qquad\begin{cases}A_n=a^2\\ A=\pi r^2=\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi a^2}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{A_n}{A}=\frac{4}{\pi}$$

ملاحظه می‌گردد که نسبت $\frac{P_n}{P}$ و $\frac{A_n}{A}$ با هم برابرند.

روش دوم: بین P_n و A_n رابطه: $A_n=\frac{RP_n}{2}$ برقرار است و بین A و P رابطهٔ $A=\frac{RP}{2}$ برقرار است. از تقسیم کردن طرفین این دو رابطه نتیجه می‌شود که $\frac{A_n}{A}=\frac{P_n}{P}$.

۸۰ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$، در این صورت:

$$C=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}A\ ,\ B=A-2C\Rightarrow B=A-2(\frac{1}{4}A)=\frac{A}{2}$$

۸۱ـ گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n\times n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow\ \text{واگراست}$$

آنچه سرنوشت ما را تعیین می‌کند، شرائط زندگیمان نیست بلکه تصمیم‌های ماست. **(آنتونی رابینز)**

بهتر است دوباره سئوال کنی تا اینکه یکبار راه اشتباه بروی. **(ضرب‌المثل آلمانی)**

تست‌های سراسری ۱۳۸۷

MBA

۱ـ تعداد جملات گویا در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})^{35}$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲ـ اگر $f(x)=\cos x$ و $(gof)(x)=1+tg^2x$ باشند، مقدار $(gog)(\sqrt{2}-1)$، کدام است؟

۱) $3-2\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}-7$ ۳) $13-9\sqrt{2}$ ۴) $17-12\sqrt{2}$

۳ـ نقطه M بر روی خط $y=2x$ چنان انتخاب شده است که مجموع فواصل M از دو نقطه (۱,۳) و (۳,۴) کمترین مقدار ممکن را دارد، طول نقطه M کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{g(x)}$ اگر $g(x)=\frac{12}{x^2}$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) e^{-1} ۳) e^{-2} ۴) صفر

۵ـ یکی از جواب‌های معادله $1-iz-z^2+iz^3+z^4=0$ به صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ است. کمترین مقدار α در بازه $]0,2\pi[$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{10}$ ۳) $\frac{2\pi}{5}$ ۴) $\frac{3\pi}{10}$

۶ـ اندازه مشتق $\tanh^{-1}(\sin 2x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) تعریف نشده

۷ـ اگر $f(\frac{1}{x})=e^x$ باشد معادله خط مجانب مایل تابع $g(x)=\frac{x}{f(x)}$، است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=x+1$ ۳) $y=x-1$ ۴) $y=x-2$

۸ـ اگر $u=x^2+2x$ و $t=u\sqrt{4-u}$ باشد. مقدار $\frac{dx}{dt}$ به ازای $u=3$، کدام است؟

۱) $-0/6$ ۲) $-0/4$ ۳) $0/6$ ۴) $0/4$

۹ـ می‌خواهیم از یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد یال‌های یک مکعب مستطیل را بسازیم، بیشترین حجم این مکعب مستطیل در صورتی که یکی از بعدها دو برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{572}{9}$ ۲) $\frac{512}{9}$ ۳) $\frac{488}{9}$ ۴) $\frac{472}{9}$

۱۰ـ دو منحنی به معادلات $27y^2=4(x-2)^3$ و $y^2=4x$ در نقطه‌ای با کدام طول از یکدیگر می‌گذرند؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱-

۱۱ـ حاصل $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2x}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۲ـ مساحت محدود به دو منحنی به معادلات $y^3-2y^2-x+2y=0$ و $y^2+x-2y=0$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۳ـ سطح محدود به منحنی $y=\frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\sin^2 x}$، محور xها و دو خط به معادلات $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{7\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۴ـ مختصات مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y=\sqrt{6x-x^2}$ و محور xها کدام است؟

۱) $(2,\frac{\pi}{4})$ ۲) $(2,\frac{4}{\pi})$ ۳) $(3,\frac{\pi}{4})$ ۴) $(3,\frac{4}{\pi})$

۱۵ـ حاصل $\int^{\infty}\sqrt{x}e^{-x^2}dx$ چند برابر حاصل $\int^{\infty}e^{-x^2}dx$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

ریاضی

۱۶ـ تابع $f(x)=x^3\cos x$ دارای نمایش سری به صورت $f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\dots$ است، که برای تمام مقادیر x برقرار است، C_9 عبارت است از:

۱) $-\frac{1}{6!}$ ۲) $-\frac{1}{4!}$ ۳) $\frac{1}{6!}$ ۴) $\frac{1}{4!}$

۱۷ـ اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره متناوب c باشد مقدار $\int_c^{a+c}f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\int_0^a f(x)dx$ ۲) $\int_0^c f(x)dx$

۳) $\int_a^c f(x)dx$ ۴) $\int_0^c f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

۱۸ـ در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله با ضابطه زیر کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

$a_0=1\ ,\ a_n=\min\{a_{n-1},\cos n\}$

۱) چون کران‌دار نیست، پس واگرا است.

۲) نه نزولی و نه صعودی است و واگرا است.

۳) چون صعودی و کراندار از بالا است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

۴) چون نزولی و کراندار از پایین است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

۱۹ـ فرض کنیم a عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت همواره دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ از اعداد اصم موجود است به قسمتی که:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=a$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+1}{a_n}=a$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+1}{a_n^2}=|a|$

۲۰ـ مشتق تابع $\cos^{-1}(1+tg^{-1}\sqrt{x})$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$ ۲) $\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

۳) $\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

۲۱ـ اگر تابع f چنان باشد که $x^2\cos\pi x=\int^{\sqrt{x}}f(t)dt$ آنگاه $f(2)$ برابر است با:

۱) -16π ۲) -8 ۳) 8 ۴) 32

۲۲ـ کدام گزینه جواب انتگرال زیر است؟ $\int\cos(\ln x)dx$

۱) $x\cos(\ln x)$ ۲) $x\sin(\ln x)$

۳) $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$ ۴) $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$

۲۳ـ طول قوس منحنی $y=\mathrm{Arcsin}\,x\pm\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۴ـ مقدار $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-tg^{-1}x)\cot g(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ∞

۲۵ـ اگر $f(\int^{x}\frac{e^t}{t^2+1}dt)=x$ و برای $f(0)=a, a\in\mathbb{R}$، $f'(0)$ بر حسب a برابر است با:

۱) $\frac{a^2+1}{e^a}$ ۲) $\frac{e^a}{a^2-1}$ ۳) $\frac{e^a}{a^2+1}$ ۴) $\frac{a^2-1}{e^a}$

۲۶ـ مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\left\{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})\right\}^{\frac{1}{n}}$ برابر است با:

۱) $\frac{4}{e}$ ۲) $\frac{e}{4}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۲۷ـ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بوده و $f(0)=1$ و $f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

۲۸ـ فرض کنید $a_1>0$ و $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+A^4a_n^{-1})\ (n=1,2,\dots)$ کدام گزینه در مورد دنباله $\{a_n\}$ صحیح است؟ $(A>0)$

۱) واگرا است. ۲) صعودی و از بالا کراندار است.

۳) نزولی و از پایین کراندار است. ۴) یکنوا و کراندار است.

۲۹ـ فرض کنید f و g توابعی انتگرال‌پذیر بر $[0,1]$ باشند و $\int^1 f(x)dx=\int^1 g(x)dx$ در این صورت اگر $f\geq g$ بر $[0,1]$ یا $f\leq g$ بر $[0,1]$ آنگاه با فرض آنکه .... بر $[0,1]$ پیوسته باشد، داریم $f=g$ بر $[0,1]$.

۱) $f-g$ ۲) $f+g$ ۳) f یا g ۴) f,g

۳۰ـ به ازای چه مقادیری از a در گزینه‌های زیر تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

۱) $e^{-\frac{1}{6}}$ ۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ ۳) $e^{\frac{1}{6}}$ ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

۳۱ـ حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^x-n}{x}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}2$ ۲) $\mathrm{Ln}n$ ۳) $\mathrm{Ln}n!$ ۴) $\mathrm{Ln}(n+1)$

۳۲ـ $\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}\int^{x}e^{t^2}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

مکانیک

۳۳ــ سطح محور به $y=\sin x$ ، $0 \le x \le \pi$ و محور x، حول محور y دوران می‌کند حجم حاصل کدام است؟

۱) $2\pi^2$ ۲) 3π ۳) 6π ۴) π^2

۳۴ــ طول قوس منحنی f کدام است؟

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}x \ , \ 1\le x\le 3$$

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}+\operatorname{Ln}3$ ۳) $2+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}3$ ۴) $1+\frac{3}{2}\operatorname{Ln}3$

۳۵ــ حد دنباله $\{a_n\}$ کدام است؟

$$a_n=(\sqrt[n]{n}-1)\operatorname{Ln}(n)$$

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) ∞

۳۶ــ شعاع همگرایی سری زیر کدام است؟(a یک عدد گویای ثابت است.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sin(na))x^n \ , \ a\neq 0$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) به مقدار a بستگی دارد.

۳۷ــ ضریب x^{10} در بسط مک لوران تابع زیر کدام است؟

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$$

۱) -5 ۲) 5 ۳) 1 ۴) -1

مهندسی معدن

۳۸ــ در مورد تابع $f(x)=x\operatorname{Ln}x$ ، $0\le x\le 1$ (۰ نقطه ناپیوستگی رفع کردنی تابع است) کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) دارای مینیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است. ۲) دارای ماکزیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است.

۳) تقعر منحنی در تمام بازه رو به بالاست. ۴) تقعر منحنی در تمام بازه رو به پایین است.

۳۹ــ اگر $f(x)=x\sqrt{3+x^2}$ ،آنگاه مقدار $(f^{-1})'(-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{7}}{11}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{11}{\sqrt{7}}$

۴۰ــ اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}$ ،آنگاه مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۱ــ فاصله (بازه) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ را تعیین کنید؟

۱) $[0,1]$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(0,1)$ ۴) $[0,2)$

۴۲ــ ناحیه‌ای بی‌کران تحت منحنی $y=f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$ از $x=0$ تا $x=1$ حول محور y دوران کرده است. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل را بیابید؟

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 8π

آمار

۴۳ــ مجموعه A شامل نقاطی از صفحه است که عدد مختلط متناظر با آنها یعنی z در نابرابری $|\frac{z+i-1}{z-i}|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ صدق می‌کند. کدام نقطه به A تلعق دارد؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(1,-1)$

۴۴ــ اگر $a\ge 0$ و $\int_{-a}^{1-a}y(y+a)^{1000}dy=0$ ، a کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1000}{999}$ ۳) $\frac{1000}{1001}$ ۴) $\frac{1001}{1002}$

۴۵ــ به ازای چه مقادیری از a، $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 1 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 3

۴۶ــ اگر $f(x)=x^{(x/(x^2-1))}$ ، $(x\neq\pm 1)$، مقدار تابع f را در $x=1$ چه مقداری انتخاب کنیم تا در این نقطه پیوسته شود؟

۱) $\sqrt{e}$ ۲) e ۳) $1+\frac{1}{e}$ ۴) $\sqrt{e}+1$

۴۷ــ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(1+\frac{2}{n})+\dots+\frac{1}{n}\operatorname{Ln}2]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\ln 2$ ۳) $2\ln 2-1$ ۴) e

۴۸ــ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به صورت $a_0=1$ ، $(n^2+2)a_{n+1}-(n^2+1)pa_n=0$ تعریف می‌کنیم. مجموعه مقادیر p که سری $\sum a_n$ به ازای آنها همگرای مطلق است کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

۴۹ــ فرض کنید بازای هر n، $a_n\ge 0$. اگر $\sum_n a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\sum_n\sqrt{a_n}$ همگراست. ۲) $\sum_n\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگراست. ۳) $\sum_n\frac{1}{n^2\sqrt{a_n}}$ همگراست. ۴) $\sum_n\frac{\sqrt{a_n}}{1+a_n}$ همگراست.

۵۰ــ اگر $x_n=\sin(\sin\dots(\sin(1))\dots)$ ، کدام گزاره صحیح است؟

۱) $\{x_n\}$ به صفر همگراست. ۲) $\{x_n\}$ واگراست.

۳) $\{x_n\}$ به ۱ همگراست. ۴) $\{x_n\}$ صعودی است.

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستمهای اقتصادی و اجتماعی

۵۱ــ $\lim\limits_{x\to 1^-}x^{\frac{x}{1-x}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) ∞ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

۵۲ــ تابع $f:R\to R$ در شرطهای $f(1)=3$ و $f(x+y)=f(x)+f(y), x,y\in R$ ، صدق می‌کند. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۵۳ــ در مورد تابع $x\ge 0$ ، $g(x)=\int_0^x\frac{dt}{\cosh t}$ کدام گزاره درست است؟

۱) $g(x)=\tan^{-1}(\sinh x)$ ۲) $g(x)=\tan^{-1}(e^x)$ ۳) $g(x)=\operatorname{Ln}(\tan x)$ ۴) $g(x)=\tanh^{-1}(e^x)$

۵۴ـ مساحت واقع بین محورyها، خط $y = x$ و منحنی $y = \frac{2}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

۵۵ـ مساحت بین خم $y = e^{-|x|}$ و محور xها کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۵۶ـ کدام سری واگرا است؟

۱) $\frac{1}{Ln2} - \frac{1}{Ln3} + \frac{1}{Ln4} - \frac{1}{Ln5} + \dots$ ۲) $\frac{1}{2Ln2} + \frac{1}{3Ln3} \dots$

۳) $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \dots$ ۴) $\frac{1}{2(Ln2)^2} + \frac{1}{3(Ln3)^2} + \frac{1}{4(Ln4)^2} + \dots$

۵۷ـ اگر $a > 1$ عددی ثابت باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a+(-1)^n)^n x^n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $\frac{1}{a-1}$ ۳) $\frac{1}{a+1}$ ۴) $\frac{a+1}{a-1}$

۵۸ـ انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 25\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}\tan^{-1}(\frac{2}{5}\tan x) + c$ ۲) $\frac{1}{10}\tan(\frac{2}{5}\tan x) + c$

۳) $\frac{1}{10}\tan(\frac{2}{5}\tan^{-1} x) + c$ ۴) $\frac{1}{10}\tan^{-1}(\frac{2}{5}\tan^{-1} x) + c$

۵۹ـ مجموع سری $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots$ ، $|x| < 1$ کدام است؟

۱) $\frac{2x}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ۳) $\frac{1+x}{1+x^2}$ ۴) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

۶۰ـ فرض کنید $\alpha > 1$ ، $c > 0$ اعدادی ثابت باشند. دنباله $\{x_n\}$، با تعریف $n \geq 1$ و $x_{n+1} = (1-\frac{1}{\alpha})^2 x_n + \frac{2}{\alpha} x_n^{1-\alpha}$ و $x_1 = c$ م به کدام عدد همگرا است؟

۱) $\sqrt[\alpha]{2}$ ۲) $2\sqrt[\alpha]{\alpha}$ ۳) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ۴) $\sqrt[\alpha]{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}$

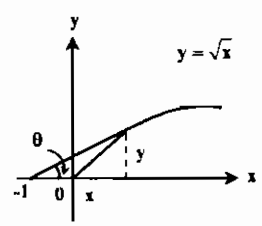
۶۱ـ میانگین تابع $f(x) = [x]$ بر بازه $[0,100]$ کدام است؟

۱) ۴۹/۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۰/۵ ۴) ۵۱

۶۲ـ بیشترین مقدار زاویه θ در شکل مقابل کدام است؟

۱) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۳) $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$ ۴) $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$



۶۳ـ مساحت تولید شده به وسیله دور اول مارپیچ ارشمیدسی $\theta \geq 0$ و $r = \frac{1}{2\pi}\theta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi^2}{3}$

معماری کشتی

۶۴ـ مقدار انتگرال معین $\int_1^e e^{x^2} Ln(2Lnx+1)xdx$ کدام است؟

۱) $e^e - 1$ ۲) $e^2 - 1$ ۳) $e^{\sqrt{e}} - 1$ ۴) $e^{e^2} - 1$

۶۵ـ مکان اعداد مختلط $z = x + iy$ که در نامساوی $|\frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}| \leq |\frac{z-i}{z+i}|$ صدق کند کدام است؟

۱) محیط دایره‌ای به مرکز(۰ و ۳) و شعاع ۴ ۲) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز (۳- و ۰) و شعاع $2\sqrt{2}$

۳) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز (۰ و ۳+) و شعاع $2\sqrt{2}$ ۴) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز (۳ و ۰) و شعاع $2\sqrt{2}$

مهندسی نفت

۶۶ـ بسط تیلور حول $x_0 = 0$ (بسط مک‌لورن) تابع با ضابطه $\operatorname{Arctan} x$ کدام است برای $|x| < 1$

۱) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ ۲) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

۳) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ ۴) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

۶۷ـ با فرض $x > 1$ بسط $\tan^{-1} x$ کدام است.

۱) $\tan^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ ۲) $\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots$

۳) $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots$ ۴) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

مهندسی کشاورزی

۶۸ـ اگر $g(x) = \sqrt{1 - 2\sin x}, f(x) = \log_2^x$ باشند برد تابع fog کدام است؟

۱) $(-\infty, 0)$ ۲) $(-\infty, \frac{1}{2}]$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $(-\frac{1}{2}, 0)$

۶۹ـ دامنه تابع $f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x-1}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$ ۲) $[0, 2]$ ۳) $[2, +\infty)$ ۴) $R - (0, 2)$

۷۰ـ اگر $f(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$ آن‌گاه $f^{-1}(3)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}$ ۲) $-\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۷۱ـ معادله درجه سوم $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ از نظر تعداد و علامت ریشه‌ها چگونه است؟

۱) یک ریشه منفی ۲) یک ریشه مثبت

۳) ریشه ساده مثبت ـ مضاعف منفی ۴) ریشه ساده منفی ـ مضاعف مثبت

۷۲ـ اگر $g(x) = (x)^{\frac{2}{2}} - \frac{1}{x}, f(x) = -x^2 + 2x$ بیشترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{31}{4}$

۷۳ـ مجانب‌های تابع $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$ خط $y = \frac{3}{4}x$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، اندازه پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۷۴ـ حد عبارت $\sin 2x(\cot gx + \cot g2x)$ وقتی $x \to 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ∞

۷۵ـ مشتق $\cos(\pi \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

۷۶ـ مشتق عبارت $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۷۷ـ معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{2x-1}$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y = -2x$ ۲) $y = -x$ ۳) $y = x$ ۴) $y = 2x$

۷۸ـ تقعر نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$ در کدام بازه به طرف yهای مثبت است؟

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(1, +\infty)$ ۴) $(1, 3)$

۷۹ـ دنباله با جمله عمومی $u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

۸۰ـ اگر $x + y = 3$ باشد کمترین مقدار $x^3 + y^3$ کدام است؟

۱) $\frac{27}{4}$ ۲) $\frac{27}{8}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۸۱ـ مقدار تقریبی $\sqrt[5]{31/2}$ با استفاده از دیفرانسیل کدام است؟

۱) ۱/۹۸۰ ۲) ۱/۹۸۵ ۳) ۱/۹۹۰ ۴) ۱/۹۹۵

۸۲ـ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & ; \ x \geq 0 \\ x + \frac{b}{x-1} & ; \ x < 0 \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر است. a.b کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

۸۳ـ اگر $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}$ حاصل $\lim\limits_{\alpha \to 1} F(\alpha)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۴ـ اگر $F(\alpha) = \int_{2}^{2x} \frac{dt}{t^3 - 7}$ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

۱) $y = x - 1$ ۲) $y = 2x - 2$ ۳) $y = x + 1$ ۴) $y = 2x + 1$

۸۵ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = 1 - tg^2 x$ معادله و محورxها، در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

۱) $\pi - 2$ ۲) $\pi - 1$ ۳) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۴) π

پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷

۱ـ گزینه «۲» بطور کلی جمله عمومی بسط بصورت روبرو می‌باشد:

$$T_{k+1} = \binom{35}{k}(\sqrt{2})^{35-k}(\sqrt[3]{5})^k = \binom{35}{k} 2^{\frac{35-k}{2}} \times 5^{\frac{k}{3}}$$

در رابطه بالا $0 \leq k \leq 35$ می‌باشد و مقادیر k باید طوری انتخاب شود که بر ۳ بخش‌پذیر باشند و همچنین $(35 - k)$ بر ۲ بخش‌پذیر باشد که در این صورت k مقادیر ۳۳ و ۲۷ و ۲۱ و ۱۵ و ۹ و ۳ را می‌تواند اتخاذ کند.

۲ـ گزینه «۴»

$$g(\cos x) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(gog)(\sqrt{2} - 1) = g(\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}) = g(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}) = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$$

۳ـ گزینه «۳» نقطه $P(x, 2x)$ روی خط موردنظر قرار دارد و مجموع فواصل آن از دو نقطه داده شده برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (2x-4)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5x - 7}{\sqrt{(x-1)^2 + (2x-3)^2}} + \frac{5x - 11}{\sqrt{(x-3)^2 + (2x-4)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

روش دوم: قرینه یکی از نقاط داده شده را نسبت به خط $y = 2x$ بدست آورده، سپس معادله خط گذرنده از نقطه دیگر و نقطه قرینه شده را بیابید و دو خط را تلاقی دهید.

۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x \to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{12}{x^2}} = 1^{\infty} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{12}{x^2}(\frac{\sin x}{x} - 1)} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{12(\sin x - x)}{x^3}} \underset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \to 0} e^{\frac{12(-\frac{x^3}{6})}{x^3}} = e^{-2}$$

۵ـ گزینه «۲» با ضرب معادله در $(1 + iz)$ نتیجه می‌شود:

$$1 + iz^5 = 0 \Rightarrow z^5 = \frac{-1}{i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$$

۶ـ گزینه «۳»

$$\text{مشتق} = \frac{2\cos 2x}{1 - \sin^2 2x} = \frac{2\cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos 2x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos\frac{\pi}{3}} = 4$$

۷ـ گزینه «۳»

$$f(\frac{1}{x}) = e^x \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$m = \lim_{x \to \infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$h = \lim_{x \to \infty}(g(x) - x) = \lim_{x \to \infty}(\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} - x) = \lim_{x \to \infty}\frac{x - xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to \infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}}) \sim \lim_{x \to \infty} x(\frac{-1}{x}) = -1$$

۸ـ گزینه «۲» به ازای $u = 3$، مقدار $x = 1$ و $t = 3$ حاصل می‌شود.

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2 \xrightarrow{x=1} \frac{du}{dx} = 5 \quad , \quad \frac{dt}{du} = \sqrt{4 - u} + \frac{-u}{2\sqrt{4-u}} \xrightarrow{u=3} \frac{dt}{du} = -\frac{1}{2}$$

و بنابراین $\frac{dx}{dt} = -0/4$ بدست می‌آید.

۹ـ گزینه «۲» یال‌های مکعب را x ، ۲x و y فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$4x+8x+4y=48 \Rightarrow 3x+y=12$$

$$\begin{cases} 3x+y=12 \\ V=x\times 2x\times y=2x^2y \end{cases} \Rightarrow V=24x^2-6x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=48x-18x^2=0 \Rightarrow x=\frac{8}{3},\ y=4$$

بنابراین حجم مکعب مستطیل $\frac{512}{9}$ خواهد بود.

۱۰ـ گزینه «۱»

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y^2=\frac{4}{27}(x-2)^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{27}(x-2)^3=4x \Rightarrow x=8\ ,\ x=-1$$

توجه کنید که جواب $x=-1$ قابل قبول نیست.

۱۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ ، بنابراین:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\,\mathrm{Arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}$$

۱۲ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases} x=2y-y^2 \\ x=y^3-2y^2+2y \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی منحنی‌ها}} y=0,1$$

$$S=\int_0^1((2y-y^2)-(y^3-2y^2+2y))dy=\int_0^1(y^2-y^3)dy=\frac{1}{12}$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$V=\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}dx=\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\frac{\cos x}{\sin^4 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x})dx=\pi(\frac{-1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x})\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{4\pi}{3}$$

۱۴ـ گزینه «۴» معادله داده شده را می‌توان بصورت $y=\sqrt{9-(x-3)^2}$ نوشت که نیم‌دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز $P(0,3)$ است. با توجه به تقارن نیم‌دایره نسبت به خط $x=3$ ، مرکز ثقل روی این خط قرار دارد. برای محاسبه عرض مرکز ثقل از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. از دوران نیم‌دایره حول محور x ها کره‌ای به شعاع ۳ بدست می‌آید که حجم کره برابر 36π می‌باشد مساحت نیم‌دایره برابر $\frac{9\pi}{2}$ است، حال طبق قضیه پاپوس:

$$36\pi=2\pi\bar{y}\times\frac{9\pi}{2} \Rightarrow \bar{y}=\frac{4}{\pi}$$

۱۵ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $x=t^2$ ، $dx=2t\,dt$ نتیجه می‌شود:

$$I=\int_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x^3}dx=\int_0^{\infty}2t^2e^{-t^6}dt$$

مجدداً با تغییر متغیر $u=t^3$ و $du=3t^2dt$ نتیجه می‌شود:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{2}{3}e^{-u^2}du=\frac{2}{3}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du$$

۱۶ـ گزینه «۱»

$$f(x)=x^3(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)=x^3-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{4!}-\frac{x^9}{6!}\Rightarrow C_9=\frac{-1}{6!}$$

۱۷ـ گزینه «۱» طبق خواص انتگرال معین داریم:

$$\int_a^{a+c} f(x)dx=\int_0^c f(x)dx$$

۱۸ـ گزینه «۴» واضح است که دنباله مورد نظر نزولی و کران پایین آن ۱− می‌باشد، پس همگراست.

۱۹ـ گزینه «۱»

۲۰ـ گزینه «۲»

۲۱ـ گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم.

$$2x\cos\pi x-\pi x^2\sin\pi x=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\xrightarrow{x=4}8=\frac{1}{4}f(2)\Rightarrow f(2)=32$$

۲۲ـ گزینه «۴» با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء، انتگرال مورد نظر به دست می‌آید.

۲۳ـ گزینه «۴»

۲۴ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,x)\cot g(\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,x}{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$$

۲۵ـ گزینه «۱» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{e^x}{x^2+1}f'(\int_0^x\frac{e^t}{t^2+1}dt)=1$$

۲۶ـ گزینه «۱»

۲۷ـ گزینه «۲» از رابطه $f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ نتیجه می‌شود $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ و بسط مک‌لورن تابع مورد نظر $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\times n!}$ می‌باشد.

۲۸ـ گزینه «۳» واضح است که کران پایین دنباله ۰ و دنباله نزولی می‌باشد.

۲۹ـ گزینه «۱»

۳۰ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}}=e^{\frac{-1}{6}}$$

۳۱ـ گزینه «۳» از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^x-n}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\mathrm{Ln}2+3^x\mathrm{Ln}3+\cdots+n^x\mathrm{Ln}n}{1}=\mathrm{Ln}2+\mathrm{Ln}3+\cdots+\mathrm{Ln}n=\mathrm{Ln}(n!)$$

۳۲ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{2xe^{x^2}})+\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to\infty}(\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۳۳ـ گزینه «۱» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin dx = 2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi^2$$

۳۴ـ گزینه «۳»

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x})^2}\,dx = \int_1^2 (\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})dx = (\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}Lnx)\Big|_1^2 = 2+\frac{1}{2}Ln2$$

۳۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم $0 \le Lnn < \sqrt{n}$، بنابراین $0 \le (\sqrt[n]{n}-1)Lnn < (\sqrt[n]{n}-1)\sqrt{n}$ و چون $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)\sqrt{n} = 0$ سپس طبق قضیه ساندویچ حد موردنظر نیز برابر صفر است.

۳۶ـ گزینه «۱»

۳۷ـ گزینه «۴» می‌دانیم $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$، بنابراین:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3} = (1+x^3+x^6+x^9+\ldots)-x(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)$$

بنابراین ضریب موردنظر ۱- می‌باشد.

۳۸ـ گزینه «۳»

$$f(x) = xLnx \Rightarrow f'(x) = Lnx+1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) > 0 \Rightarrow$ نقطه $x = e^{-1}$ نقطه می‌نیمم تابع است

مقدار تابع در این نقطه $f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$ می‌باشد و در بازه موردنظر همواره $f'' > 0$ است، پس تقعر منحنی روبه بالاست.

۳۹ـ گزینه «۳»

$$x\sqrt{x^2+3} = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\sqrt{3+x^2}+x\times\frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}} = \frac{5}{2}$$

۴۰ـ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

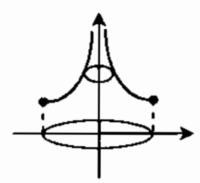
انتگرال موردنظر برابر مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ است.

۴۱ـ گزینه «۴» واضح است که $R = 1$، بنابراین:

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

در نقطه $x = 0$ سری به صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ در می‌آید که یک سری همگراست ولی در $x = 2$ سری $\sum\frac{1}{n}$ حاصل می‌شود که واگراست.

۴۲ـ گزینه «۳» از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi\int_0^1 x(x^{\frac{-3}{2}})dx = 2\pi(2\sqrt{x})\Big|_0^1 = 4\pi$$

۴۳ـ گزینه «۱»

$$|\frac{x+iy+i-1}{x+iy-i}| \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(x-1)^2+2(y+1)^2 \ge x^2+(y-1)^2$$

$$x^2+y^2-4x+6y+3 \ge 0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 \ge 10$$

۴۴ـ گزینه «۴»

$$\int_{-a}^{1-a} y(y+a)^{1000}dy = \int_{-a}^{1-a}(y+a)^{1001}dy + \int_{-a}^{1-a}(-a)(y+a)^{1000}dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(y+a)^{1002}}{1002}\Big|_{-a}^{1-a} + (-a)\times\frac{(y+a)^{1001}}{1001}\Big|_{-a}^{1-a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{1002}+(-a)\times\frac{1}{1001} = 0 \Rightarrow a = \frac{1001}{1002}$$

۴۵ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos(\frac{\pi x}{a})} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{\frac{-\pi x}{a}\sin(\frac{\pi x}{a})} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{2}{\frac{-\pi^2}{a^2}\cos(\frac{\pi x}{a})} = \frac{2a^2}{\pi^2}$$

بنابراین $a^2 = 1$ یعنی $a = \pm 1$.

۴۶ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{x^2-1}(x-1)} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

۴۷ـ گزینه «۳» حد موردنظر برای انتگرال روبرو است:

$$I = \int_0^1 Ln(1+x)dx = ((1+x)Ln(1+x)-x)\Big|_0^1 = 2Ln2-1$$

۴۸ـ گزینه «۲»

$$(n^2+2)a_{n+1}-(n^2+1)pa_n = 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^2+1)p}{n^2+2}$$

طبق آزمون نسبت $|P|<1$ حاصل می‌شود یعنی $-1<P<1$.

۴۹ـ گزینه «۲»

۵۰ـ گزینه «۱» دنباله x_n دنباله‌ای نزولی و کراندار است، و بنابراین همگراست می‌توان آن را به صورت بازگشتی زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sin(a_n) \end{cases}$$

در این صورت اگر حد آن‌را L فرض کنیم نتیجه می‌شود $L = \sin L$ و در نتیجه $L = 0$.

۵۱ـ گزینه «۴»

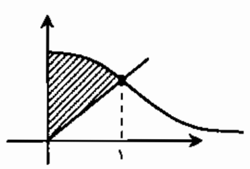
$$\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{x}{1-x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{1-x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} e^{-x} = \frac{1}{e}$$

۵۲ـ گزینه «۱» تابع موردنظر را می‌توان تابع $f(x) = 3x$ در نظر گرفت در این صورت مقدار $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ می‌باشد.

۵۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

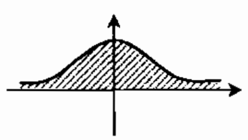
$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^x \frac{2dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{2e^t dt}{e^{2t}+1} = 2Arctg(e^t)\Big|_0^x$$

۵۴ـ گزینه «۳»



$$S = \int_0^1 (\frac{2}{1+x^2}-x)dx = (2Arctgx-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

۵۵ـ گزینه «۳»



$$S = 2\int_0^{\infty} e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 2$$

۵۶ـ گزینه «۲» سری داده شده در گزینه (۲)، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ است بر طبق آزمون انتگرال وگراست.

۵۷ـ گزینه «۳» طبق آزمون ریشه

۵۸ـ گزینه «۱»

$$\int\frac{dx}{4\sin^2 x+25\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{25+4tg^2x}dx=\frac{1}{10}Arctg(\frac{2}{5}tgx)+c$$

۵۹ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم ... + $S=1-3x^2+5x^4-7x^6$ در این صورت:

$$\int Sdx=x-x^3+x^5-x^7+...=x(1-x^2+x^4+...)=\frac{x}{1+x^2}+c$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

۶۰ـ گزینه «۴» حد دنباله موردنظر را L فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$L=(1-\frac{1}{\alpha})^2L+\frac{2}{\alpha}L^{1-\alpha}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}L^{-\alpha}=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\Rightarrow L=\sqrt[\alpha]{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}$$

۶۱ـ گزینه «۱»

$$\text{میانگین}=\frac{1}{100}\int_0^{100}[x]dx=\frac{1}{100}\times\frac{100\times 99}{2}=49/5$$

۶۲ـ گزینه «۴»

$$tg\theta=\frac{y}{x+1}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}=f(x)$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow tg\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=Arctg\frac{1}{2}$$

۶۳ـ گزینه «۳»

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}\theta^2d\theta=\frac{1}{8\pi^2}\times\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{3}$$

۶۴ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $u=x^2Lnx$ ، $du=(2xLnx+x)dx$ استفاده می‌کنیم: در اینصورت:

$$\int_1^e e^{x^2Lnx}(2Lnx+1)xdx=\int e^udu=e^u=e^{x^2Lnx}\Big|_1^e=e^{e^2}-1$$

۶۵ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $|\frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}|=\sqrt{2}$ ، بنابراین رابطه داده شده بصورت زیر در می‌آید:

$$|\frac{z-i}{z+i}|\le\sqrt{2}\Rightarrow|\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}|\le\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2\le 2(x^2+(y+1))^2\Rightarrow x^2+y^2+6y+1\ge 0\Rightarrow x^2+(y+3)^2\ge 8$$

۶۶ـ گزینه «۱»

$$Arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

۶۷ـ گزینه «۳» وقتی $x\to\infty$ ، $Arctgx\to\frac{\pi}{2}$. بنابراین بسط موردنظر نیز وقتی $x\to\infty$ میل کند باید به $\frac{\pi}{2}$ میل کند که تنها گزینه (۳) این ویژگی را دارد.

۶۸ـ گزینه «۲»

$$fog=f(g(x))=\log_3\sqrt{1-2\sin x}$$

می‌دانیم $0\le\sqrt{1-2\sin x}\le\sqrt{3}$ بنابراین:

$$-\infty\le\log_3\sqrt{1-2\sin x}\le\frac{1}{2}\Rightarrow \text{برد}=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

۶۹ـ گزینه «۴»

$$-1\le\frac{1}{x-1}\le 1\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 1\\ \text{یا}\\ x-1\le -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ \text{یا}\\ x\le 0\end{cases}$$

۷۰ـ گزینه «۳»

$$\frac{1+\sin x}{\sin x}=3\Rightarrow 2\sin x=1\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

۷۱ـ گزینه «۱»

۷۲ـ گزینه «۱» چون تابع g صعودی است $(g'(x)>0)$، بنابراین بیشترین مقدار gof وقتی حاصل می‌شود که f ماکزیمم باشد.

$$f'(x)=-2x+2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow(gof)(1)=g(f(1))=g(1)=0$$

۷۳ـ گزینه «۱» مجانب‌های f خطوط $x=1$ و $x=-1$ می‌باشند.

$$x=1\Rightarrow A(1,\frac{3}{4})\ ,\ x=-1\Rightarrow B(-1,\frac{-3}{4})$$

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(\frac{3}{4}+\frac{3}{4})^2}=\frac{5}{4}$$

۷۴ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\sin 2x(\frac{1}{tgx}+\frac{1}{tg2x})\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}2x(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x})=3$$

۷۵ـ گزینه «۴»

$$y=\cos(\pi\cos x)\Rightarrow y'=\pi\sin x\sin(\pi\cos x)\Rightarrow y'=(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

۷۶ـ گزینه «۱»

$$y=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{3}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$$

$$y'=\frac{1}{3}(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}})\Rightarrow y'(2)=\frac{-1}{6}$$

۷۷ـ گزینه «۴» به ازای $x=\frac{1}{2}$ مقدار $y=1$ حاصل می‌شود.

$$y'=2e^{2x-1}\Rightarrow y'(\frac{1}{2})=2$$

معادله خط مماس $y-1=2(x-\frac{1}{2})\Rightarrow y=2x$

۷۸ـ گزینه «۲»

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{2}})\Rightarrow f''(x)=\underbrace{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}_{\text{همواره مثبت}}$$

توجه کنید که دامنهٔ f بازه $[0,+\infty)$ است.

۷۹ـ گزینه «۴»

$$a_n=\{0,-1,0,1,...\}$$

۸۰ـ گزینه «۱»

$$y=3-x\Rightarrow x^3+y^3=x^3+(3-x)^3=f(x)$$

$$f'(x)=3x^2-3(3-x)^2=0\Rightarrow x=\frac{3}{2},y=\frac{3}{2}\Rightarrow\min(x^3+y^3)=\frac{97}{4}$$

۸۱ـ گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n+b} \approx a+\frac{b}{na^{n-1}}$، بنابراین:

$$\sqrt[5]{2^5-0/8} \cong 2-\frac{0/8}{5\times 2^4}=2-\frac{1}{100}=1/99$$

۸۲ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} f(0^+)=f(0^-)\Rightarrow a=-b\Rightarrow a+b=0 \\ f'(0^+)=f'(0^-)\Rightarrow -a=1-b\Rightarrow b-a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{-1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$

۸۳ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = Lnx$، $du=\frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}=2\sqrt{Lnx}\Rightarrow \lim_{\alpha\to 1} f(\alpha)=2\sqrt{Lnx}\Big|_1^e=2$$

۸۴ـ گزینه «۲» به ازای $x=1$، مقدار $y=f(1)=0$ حاصل می‌شود.

$$f'(x)=\frac{1}{(2x)^3-7}\times 2\Rightarrow f'(1)=2\Rightarrow y-0=2(x-1)$$

۸۵ـ گزینه «۱»

$$S=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-tg^2x)dx=(2x-tgx)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2$$

صداقت، بهترین سیاست است. (ضرب‌المثل انگلیسی)

خداوند زیرک است امّا نادرست نیست. (انیشتن)

پاسخنامه تست‌های تکمیلی

فصل اول : تابع

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۲»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۳»	۳۴ـ گزینه «۳»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۱»	۳۸ـ گزینه «۴»	۳۹ـ گزینه «۲»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۳»	۴۴ـ گزینه «۱»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۱»	۵۰ـ گزینه «۳»
۵۱ـ گزینه «۴»	۵۲ـ گزینه «۳»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۴»	۵۵ـ گزینه «۴»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۲»	۵۸ـ گزینه «۱»	۵۹ـ گزینه «۴»	۶۰ـ گزینه «۳»
۶۱ـ گزینه «۱»	۶۲ـ گزینه «۴»	۶۳ـ گزینه «۲»	۶۴ـ گزینه «۲»	۶۵ـ گزینه «۱»
۶۶ـ گزینه «۲»	۶۷ـ گزینه «۴»	۶۸ـ گزینه «۲»	۶۹ـ گزینه «۳»	۷۰ـ گزینه «۱»
۷۱ـ گزینه «۲»	۷۲ـ گزینه «۲»	۷۳ـ گزینه «۲»	۷۴ـ گزینه «۱»	۷۵ـ گزینه «۴»
۷۶ـ گزینه «۳»	۷۷ـ گزینه «۲»	۷۸ـ گزینه «۳»	۷۹ـ گزینه «۴»	۸۰ـ گزینه «۴»
۸۱ـ گزینه «۴»	۸۲ـ گزینه «۱»	۸۳ـ گزینه «۱»	۸۴ـ گزینه «۲»	۸۵ـ گزینه «۲»
۸۶ـ گزینه «۳»	۸۷ـ گزینه «۳»	۸۸ـ گزینه «۲»	۸۹ـ گزینه «۴»	۹۰ـ گزینه «۳»

فصل دوم : حد و پیوستگی

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۴»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۳»
۳۱ـ گزینه «۳»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۳»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۱»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۳»	۳۹ـ گزینه «۲»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۱»	۴۳ـ گزینه «۲»	۴۴ـ گزینه «۴»	۴۵ـ گزینه «۳»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۱»
۵۱ـ گزینه «۱»	۵۲ـ گزینه «۲»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۳»
۵۶ـ گزینه «۱»	۵۷ـ گزینه «۱»	۵۸ـ گزینه «۲»	۵۹ـ گزینه «۱»	۶۰ـ گزینه «۴»
۶۱ـ گزینه «۴»	۶۲ـ گزینه «۳»	۶۳ـ گزینه «۳»	۶۴ـ گزینه «۳»	۶۵ـ گزینه «۱»
۶۶ـ گزینه «۲»	۶۷ـ گزینه «۳»	۶۸ـ گزینه «۲»	۶۹ـ گزینه «۲»	۷۰ـ گزینه «۳»
۷۱ـ گزینه «۴»	۷۲ـ گزینه «۱»	۷۳ـ گزینه «۳»	۷۴ـ گزینه «۱»	۷۵ـ گزینه «۱»
۷۶ـ گزینه «۱»	۷۷ـ گزینه «۱»	۷۸ـ گزینه «۳»	۷۹ـ گزینه «۳»	۸۰ـ گزینه «۳»
۸۱ـ گزینه «۱»	۸۲ـ گزینه «۲»	۸۳ـ گزینه «۴»	۸۴ـ گزینه «۴»	۸۵ـ گزینه «۱»
۸۶ـ گزینه «۲»	۸۷ـ گزینه «۲»	۸۸ـ گزینه «۲»	۸۹ـ گزینه «۳»	۹۰ـ گزینه «۲»

فصل سوم : مشتق و کاربرد مشتق

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۳»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۳»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۲»	۳۴ـ گزینه «۴»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۴»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۴»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۲»	۴۳ـ گزینه «۱»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۳»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۲»	۴۹ـ گزینه «۲»	۵۰ـ گزینه «۳»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۴»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۲»
۵۶ـ گزینه «۴»	۵۷ـ گزینه «۴»	۵۸ـ گزینه «۱»	۵۹ـ گزینه «۳»	۶۰ـ گزینه «۴»
۶۱ـ گزینه «۳»	۶۲ـ گزینه «۱»	۶۳ـ گزینه «۴»	۶۴ـ گزینه «۲»	۶۵ـ گزینه «۳»
۶۶ـ گزینه «۱»	۶۷ـ گزینه «۲»	۶۸ـ گزینه «۳»	۶۹ـ گزینه «۲»	۷۰ـ گزینه «۴»
۷۱ـ گزینه «۳»	۷۲ـ گزینه «۱»	۷۳ـ گزینه «۱»	۷۴ـ گزینه «۲»	۷۵ـ گزینه «۱»
۷۶ـ گزینه «۱»	۷۷ـ گزینه «۳»	۷۸ـ گزینه «۲»	۷۹ـ گزینه «۳»	۸۰ـ گزینه «۳»
۸۱ـ گزینه «۲»	۸۲ـ گزینه «۴»	۸۳ـ گزینه «۳»	۸۴ـ گزینه «۴»	۸۵ـ گزینه «۴»
۸۶ـ گزینه «۳»	۸۷ـ گزینه «۱»	۸۸ـ گزینه «۲»	۸۹ـ گزینه «۲»	۹۰ـ گزینه «۲»

۹۱ـ گزینه «۴»	۹۲ـ گزینه «۲»	۹۳ـ گزینه «۳»	۹۴ـ گزینه «۳»	۹۵ـ گزینه «۴»
۹۶ـ گزینه «۳»	۹۷ـ گزینه «۲»	۹۸ـ گزینه «۴»	۹۹ـ گزینه «۲»	۱۰۰ـ گزینه «۴»
۱۰۱ـ گزینه «۳»	۱۰۲ـ گزینه «۳»	۱۰۳ـ گزینه «۳»	۱۰۴ـ گزینه «۳»	۱۰۵ـ گزینه «۲»
۱۰۶ـ گزینه «۲»	۱۰۷ـ گزینه «۳»	۱۰۸ـ گزینه «۴»	۱۰۹ـ گزینه «۴»	۱۱۰ـ گزینه «۴»

فصل چهارم : انتگرال

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۴»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۳»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۲»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۱»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۲»	۴۴ـ گزینه «۳»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۱»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۲»	۵۰ـ گزینه «۳»
۵۱ـ گزینه «۴»	۵۲ـ گزینه «۳»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۱»	۵۵ـ گزینه «۴»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۲»	۵۸ـ گزینه «۳»	۵۹ـ گزینه «۲»	۶۰ـ گزینه «۱»
۶۱ـ گزینه «۱»	۶۲ـ گزینه «۳»	۶۳ـ گزینه «۱»	۶۴ـ گزینه «۳»	۶۵ـ گزینه «۳»
۶۶ـ گزینه «۴»	۶۷ـ گزینه «۲»	۶۸ـ گزینه «۳»	۶۹ـ گزینه «۴»	۷۰ـ گزینه «۱»
۷۱ـ گزینه «۲»	۷۲ـ گزینه «۳»	۷۳ـ گزینه «۱»	۷۴ـ گزینه «۴»	۷۵ـ گزینه «۴»
۷۶ـ گزینه «۱»	۷۷ـ گزینه «۱»	۷۸ـ گزینه «۱»	۷۹ـ گزینه «۳»	۸۰ـ گزینه «۱»
۸۱ـ گزینه «۳»	۸۲ـ گزینه «۳»	۸۳ـ گزینه «۲»	۸۴ـ گزینه «۱»	۸۵ـ گزینه «۲»
۸۶ـ گزینه «۴»	۸۷ـ گزینه «۱»	۸۸ـ گزینه «۳»	۸۹ـ گزینه «۲»	۹۰ـ گزینه «۴»
۹۱ـ گزینه «۴»	۹۲ـ گزینه «۱»	۹۳ـ گزینه «۱»	۹۴ـ گزینه «۴»	۹۵ـ گزینه «۲»

فصل پنجم : کاربرد انتگرال

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۴»	۲۵ـ گزینه «۴»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۲»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۲»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۳»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۳»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۴»

فصل ششم : دنباله و سری

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۴»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۳»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۳»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۱»	۴۳ـ گزینه «۲»	۴۴ـ گزینه «۳»	۴۵ـ گزینه «۳»
۴۶ـ گزینه «۲»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۲»	۴۹ـ گزینه «۱»	۵۰ـ گزینه «۴»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۱»	۵۵ـ گزینه «۴»
۵۶ـ گزینه «۴»	۵۷ـ گزینه «۲»	۵۸ـ گزینه «۴»	۵۹ـ گزینه «۳»	۶۰ـ گزینه «۴»

فصل هفتم : دستگاه مختصات قطبی

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۴»

فصل هشتم : اعداد مختلط

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۲»

منابع و مآخذ :

1) LEITHOLD, Louis, «The calculus with Analytic Geometry».

2) SILVERMAN, RICHARD, A:«Modern calculus and Analytic Geometry» Macmillan Company.

3) HOW TO LEARN CALCULUS OF ONE VARIABLE (volume 1,2) J.D.Ghosh, MD. Anwarul Haque

4) General Mathematics Volume two by J.A.Maron

5) Elliott Mendelson. Schaum's 3000 Solved Problems in calculus, 1986 McGraw –Hill

6) ENGINEERING MATHEMATICS C. S. Sharma / I. J. S. Sarna (c. b. s)

۷) تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی از ب ـ ب ـ دمیدوویچ، ترجمهٔ پرویز شهریاری

۸) حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ـ جرج توماس ـ راس فینی، ترجمه مرکز نشر دانشگاهی تهران .

۹) مجموعه فرمولهای ریاضی از موری . و . اشپیگل، انتشارات استاد مشهد ۱۳۷۳.

۱۰) مجموعه آزمونهای مؤسسه مدرسان شریف.