بسم الله الرحمن الرحیم

آمار

کارشناسی ارشد

مجموعه اقتصاد، مدیریت، حسابداری

شامل: شرح - نکته - تست

مؤلف: مهدی عباسی

ویراستار علمی: نفیسه زنده بودی

مقدمه ناشر

آیا آنانکه می‌دانند با آنانکه نمی‌دانند برابرند. (قرآن کریم)

پس از حمد و سپاس و ستایش به درگاه بی‌همتای احدیت و درود بر محمد مصطفی عالی نمونه اعلی بشریت که در تارک دور تاریخ، بنا به فرمان نافذ صمدیت از میان مردمی برخاست که خود بودند در پست‌ترین حد توحش و ضلال و بربریت و آنگاه با قوانین شامل خویش هم ایشان را رهبری نمود و رهانید از بدویت و طلب یاری و استعانت از قرآن کریم کتابی که جاودانه است تا ابدیت.

کتابی که پیش روی شماست، ویرایش جدید از مجموعه کتب خودآموز موسسه آموزش عالی آزاد ماهان است که بر مبنای خلاصه درس ـ نکات مهم و کلیدی و پرسش‌های متنوع چهارگزینه‌ای جمع‌آوری شده است، در ویرایش جدید ضمن توجه کامل به آخرین تغییرات در سرفصل‌های تعیین شده جهت آزمون‌های ارشد خلاصه مطالب هر فصل از منابع مختلف به تفکیک با ذکر مثال‌های متعدد بصورت تستی و در صورت نیاز تشریحی به همراه مجموعه سئوالات آزمون‌های تحصیلات تکمیلی سال‌های گذشته که با حل تشریحی ارائه شده است، مجموعه‌ای را ساخته است که می‌توان ادعا کرد مطالعه مطالب این کتاب دانشجویان ارجمند را تا حد زیادی از مطالعهٔ سایر منابع مشابه بی‌نیاز خواهد کرد ضمن اینکه بدیهی است شرکت در آزمون‌های آزمایشی ماهان که در جامعه آماری گسترده و در سطح کشور برگزار می‌شود می‌تواند محک جدّی برای عزیزان دانشجو باشد تا نقاط ضعف احتمالی خود را بیابند و با مرور مجدد مطالب این کتاب آنها را برطرف سازند. در اینجا بر خود واجب می‌دانیم که از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان ارجمند از سراسر کشور که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود ما را در پربارتر کردن ویرایش جدید این کتاب یاری نمودند سپاسگذاری نمائیم و به پاس تلاش‌هایشان این کتاب را به همه این عزیزان تقدیم می‌داریم.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

معاونت آموزش ـ بهار ۸۸

قلی زاده، مهدی
آمار رشته مدیریت، اقتصاد و حسابداری/ مهدی قلی زاده، مهدی عباسی
مهر سبحان، ۱۳۸۸
۲۵۱ص : جدول، نمودار (آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مدیریت، اقتصاد، حسابداری)
ISBN: 978-964-2831-21-0
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
۱-آمار ۲- آزمونها و تمرینها (عالی) ۳- آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی
٤- دانشگاهها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمونها
الف) مهدی عباسی ب) مهدی قلی زاده
ج ـ عنوان
۸ آ ٤٨٤ق/ ۲۳۵۳ LB ۳۷۸/۱٦٦٤
کتابخانه ملی ایران ۳۹٤۱۱/ ۸۵ م

انتشارات مهر سبحان

نام کتاب: آمار رشته مدیریت، اقتصاد، حسابداری
مولف: مهدی قلی‌زاده، مهدی عباسی
ناشر: مهر سبحان
نوبت و تاریخ چاپ: دوم / ۱۳۸۸
حروف نگاری و صفحه‌آرایی: انتشارات ماهان
طراح جلد سمیرا خانزاد
تیراژ ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۱۹۰/۰۰۰ریال
شابک: ISBN:۹۷۸-۹۶۴-۲۸۳۱-۲۱-۰

انتشارات مهر سبحان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع مطهری، روبروی قنادی هتل بزرگ تهران، جنب بانک ملی، پلاک ۸۶۴
تلفن: ۴-۸۸۱۰۰۱۱۳

فهرست مطالب

علم آمار: روشی علمی است که برای جمع‌آوری، تلخیص، تجزیه و تحلیل، تفسیر و به طور کلی مطالعه و بررسی مشاهدات بکار برده می‌شود.

جامعه آماری به دو دسته تقسیم می‌شود:
- ۱- محدود: تعداد افراد جامعه محدود است.
- ۲- نامحدود: تعداد افراد جامعه نامحدود است.

صفت: کمیت یا کیفیتی است که متعلق به عناصر جامعه آماری بوده و همواره به دو بخش تقسیم می‌شود: صفت مشترک (ثابت) و صفت متغیر.

۱- صفت مشترک (ثابت): صفتی که بین همه عناصر جامعه آماری مشترک است. مثل صفت دانشجو بودن برای دانشجویان یک کشور

۲- صفت متغیر: صفتی است که افراد یک جامعه را از یکدیگر متفاوت، جدا و مشخص می‌سازد و از فردی به فرد دیگر می‌تواند تغیر کند مثل صفات: قد، سن، وزن و ...

صفات متغیر به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- صفات متغیر کمی: در این صفات امکان اندازه‌گیری و بیان یک عدد واحددار مثل: کیلومتر ـ کیلو و .... وجود دارد. این صفات نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱-۱- صفات کمی گسسته:

۲-۱- صفات کمی پیوسته:

۲- صفات متغیر کیفی: در این صفات امکان اندازه‌گیری با ابزارهای رایج وجود نداشته و نمی‌توان آن را به صورت عددی واحددار بیان نمود.

طبقه‌بندی علم آمار

نمونه: به هر بخشی از جامعه آماری محدود یا نامحدود یک نمونه گفته می‌شود

آماره: اصطلاحی است که در مورد نمونه استفاده می‌شود و خصوصیتی از آن را بررسی می‌کند.

نکته: هر آماره یک متغیر تصادفی است، چرا که از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند.

پارامتر: عددی است که خصوصیتی از یک جامعه را بیان می‌کند.

نکته: پارامترها در جامعه ثابت هستند ولی مجهول و باید آن‌ها را از طریق آماره‌ها در نمونه‌گیری تخمین بزنیم.

پارامترها و آماره‌های مهم:

شاخص	گروه	نماد کلی	میانگین	واریانس	نسبت
آماره	نمونه	$\hat{\theta}$	$\bar{x}$	S^2	P
پارامتر	جامعه	θ	μ	σ^2	π

مراحل اساسی که هسته اصلی اکثر تحقیقات علمی را تشکیل می‌دهند عبارتند از:

۱) مشخص کردن هدف: هرگاه دانش موجود درباره موضوع مورد نظر، کافی نباشد، به کمک روش‌های تحقیق تلاش برای افزایش آگاهی از موضوع انجام می‌گیرد. امر تحقیق بیشتر ممکن است معطوف به هدف‌های مشخصی باشد از قبیل اثبات یک نظریه جدید یا بررسی دقیق نظریه موجود از این لحاظ که تا چه میزانی نتایج منطقی حاصل از آن به وسیله یافته‌های واقعی تائید می‌شود. در بعضی موارد ممکن است هدف تحقیق فقط این باشد که پایه‌ای برای اطلاعات بدست آید که تا حدی منعکس کننده وضع جاری امور باشد. نهایتاً هدف تحقیق ممکن است بسیار جامعتر باشد و علاوه بر ایجاد ادراکی دقیقتر از عوامل عمل کننده محیطی، تعیین امکانات و کاربدر آنها در کنترل یا اصلاح امور جنبی یک پدیده را نیز شامل بشود.

۲) جمع‌آوری داده‌ها: فرایند گردآوری اطلاعات ممکن است فعالیت‌های بسیار متنوعی از قبیل آزمایش‌های پیچیده در شرایط کنترل شده، بررسی‌های اجتماعی ـ اقتصادی، نظرخواهی یا حتی بررسی تاریخی را در برگیرد.

۳) تجزیه و تحلیل داده‌ها: داده‌هایی که به وسیله روش‌های مناسب آزمایش یا مشاهده یا ... گردآوری می‌شوند منبع اساسی برای کسب اطلاعات جدید درباره پدیده مورد مطالعه هستند. بعد از جمع‌آوری داده‌ها لازم است مجموعه داده‌ها را بررسی کنیم و

اطلاعات مربوط به موضوعاتی را که در مرحله مشخص کردن هدف‌ها مطرح شده‌اند؛ استخراج کنیم. تجزیه و تحلیل دقیق داده‌ها برای بررسی معلومات جدید و تعیین نقاط قوت و ضعف آنها ضروری است.

۴) **بیان یافته‌ها:** مفاد اطلاعاتی که از داده‌ها حاصل می‌شوند با توجه به هدف‌هایی که در مرحله اول تحقیق مشخص شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مفاهیم و تعاریف:

– **علم آمار:** به مجموعه روشهای علمی اطلاق می‌شود که برای جمع‌آوری اطلاعات اولیه، مرتب و خلاصه کردن، طبقه‌بندی و تجزیه و تحلیل و تفسیر آنها بکار می‌رود.

– **جامعه آماری:** هر مجموعه‌ای از اشیاء یا افراد که حداقل دارای یک صفت مشخصه باشند را جامعه می‌نامیم. صفت مشخصه صفتی است که بین همه عناصر جامعه آماری مشترک بوده و متمایز کننده آن جامعه آماری از سایر جوامع است. مجموع افراد (عناصر) یک جامعه را حجم جامعه می‌نامیم و آن را با N نمایش می‌دهیم.

– **نمونه آماری:** تعداد محدودی از عناصر جامعه آماری که بیان کننده ویژگی‌های اصلی جامعه می‌باشد. حجم نمونه را با n نمایش می‌دهیم.

– طبقه‌بندی علم آمار: علم آمار از نظر موضوعی به سه دسته تقسیم می‌شود:

۱- آمار توصیفی: این نوع آمار صرفاً به توصیف جامعه می‌پردازد و هدف آن محاسبه پارامترهای جامعه است. اگر محاسبه مقادیر و شاخص‌های جامعه آماری با استفاده از سرشماری تمامی عناصر آن صورت پذیرد آن را آمار توصیفی می‌گویند.

۲- آمار استنباطی (آمار استنتاجی): در این نوع آمار، محقق با استفاده از مقادیر نمونه، آماره‌ها را محاسبه کرده و آنها را به کمک تخمین (برآورد) و آزمون‌های فرضی به پارامترهای جامعه تعمیم می‌دهد.

۳- آمار ناپارامتریک: در آمار پارامتریک فرض بر این است که مشاهدات از توزیع نرمال برخوردارند، در حالیکه در آمار ناپارامتریک این فرض ضرورتی ندارد. در این نوع آمار که بیشتر در علوم انسانی و رفتاری کاربرد دارد، متغیرها با مقیاس کیفی سنجیده می‌شوند و فاقد توزیع آماری (آزاد از توزیع) می‌باشند. در حقیقت در این آمار به هیچ توزیعی وابستگی وجود ندارد.

– **آماره و پارامتر:** شاخص‌هایی که از اندازه‌گیری تمامی عناصر جامعه آماری (سرشماری) بدست آمده باشد را پارامتر و شاخص‌هایی که از اندازه‌گیری عناصر نمونه به دست آمده باشد را آماره می‌نامند.

* اگر به افراد یک جامعه توجه کنیم تفاوت‌های زیادی می‌بینیم، آن صفاتی که عامل این تفاوت‌ها می‌باشند را صفات متغیر می‌نامیم. در واقع صفات متغیر صفاتی هستند که از یک فرد جامعه به فرد دیگر تغییر می‌کند. صفات متغیر به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- صفات کیفی: صفاتی هستند که قابل اندازه‌گیری و سنجش نبوده و واحد ندارند. مانند رنگ، کیفیت، نوع بیماری و .... صفات کیفی خود به دو دسته اسمی و ترتیبی تقسیم می‌شوند. در صفات اسمی به هر صفتی یک عدد اختصاص می‌دهیم. مثلاً برای متولدین فروردین عدد ۱، اردیبهشت عدد ۲ و ... . این اعداد فقط کد هستند و هیچیک از چهار عمل اصلی و سایر اعمال جبری بر روی آنها قابل انجام نیست. به عنوان مثال نمی‌توان گفت ۲ بزرگتر از ۱ است.

در صفات ترتیبی، اعداد شدت و ضعف را نشان می‌دهند و ترتیب بین آنها رعایت شده است. به عنوان مثال وقتی می‌گوییم این چینی درجه ۲ است دیگری درجه ۱، نشان‌دهنده بهتر بودن ۱ نسبت به ۲ است. ولی در اینجا نیز نمی‌توان آنها را با هم جمع و تفریق کرد و نمی‌توان گفت کیفیت چینی درجه ۱، دو برابر چینی درجه ۲ است.

۲- صفات کمی: صفاتی هستند که واحد اندازه‌گیری یا شمارش دارند و قابل اندازه‌گیری، شمارش و مقایسه می‌باشند. این صفات نیز خود بر دو نوع هستند:

۱-۲- صفات کمی گسسته: صفاتی هستند که مقادیر خودشان را از مجموعه‌های شمارش پذیر و محدود اختیار می‌کنند مانند تعداد دانشجویان یک دانشگاه، تعداد شرکت کنندگان در یک مسابقه، تعداد افراد یک خانواده و .... .

۲-۲- صفات کمی پیوسته: صفاتی هستند که مقادیر خودشان را از مجموعه اعداد حقیقی اختیار می‌کنند مانند قد،وزن و ....

• **نکته:** مطالعات آماری روی صفات متغیر انجام نمی‌گیرد نه صفات مشخصه، زیرا افراد جامعه نسبت به صفت مشخصه هیچ امتیاز و ارجحیتی ندارند.

فصل اول

آمار توصیفی

با توجه به نوع صفات کمی و کیفی مقیاس‌های متفاوت برای اندازه‌گیری متغیرها وجود دارد. انواع مقیاس‌ها به شرح زیر است:

۱- انواع مقیاس‌ها در آمارگیری:

۱-۱- مقیاس اسمی (طبقه‌ای): ضعیف‌ترین شکل اندازه‌گیری است. در این مقیاس از اعداد و یا سمبولها برای نمایش گروههای مختلف جامعه آماری استفاده می‌شود. مانند گروهبندی جامعه به ۳ گروه الف، ب، ج یا تقسیم بندی سبکهای مدیریتی به S_1, S_2, S_3, S_4. این مقیاس دارای ترتیب نمی‌باشد و فاصله در آن معنایی ندارد. در ضمن مقیاس اسمی دارای مبدأ صفر قراردادی و مطلق نمی‌باشد.

۱-۲- مقیاس رتبه‌ای (ترتیبی): این نوع مقیاس به علت ضعف در اندازه‌گیری در صفات کیفی استفاده می‌شود. در این مقیاس در عین تفاوت طبقات، نوعی ارتباط بین داده‌ها وجود دارد مانند تقسیم بندی افراد به ضعیف، متوسط و قوی. در این مقیاس ترتیب بین دو رده یا دسته وجود دارد ولی فاصله در آن معنایی ندارد. مقیاس ترتیبی نیز مانند مقیاس اسمی دارای مبدأ صفر قراردادی و مطلق نمی‌باشد.

۱-۳- مقیاس فاصله‌ای: همانطور که از اسم این مقیاس مشخص است، درآن فاصله بین دو داده مقدار مشخص می‌باشد. مانند درجه سانتیگراد. این مقیاس دارای نقطه صفر قراردادی می‌باشد.

۱-۴- مقیاس نسبتی (نسبی): این مقیاس کاملترین مقیاس اندازه‌گیری است. این مقیاس علاوه بر دارا بودن کلیه خصوصیات مقیاس فاصله‌ای دارای نقطه صفر واقعی (مطلق) نیز می‌باشد.

جدول مقیاس‌ها

مراتب / مقیاس	ترتیب	خواص	صفر قراردادی	صفر مطلق (واقعی)
اسمی	ندارد	ندارد	ندارد	ندارد
رتبه‌ای	دارد	ندارد	ندارد	ندارد
فاصله‌ای	دارد	دارد	دارد	ندارد
نسبی	دارد	دارد	دارد	دارد

۲- طبقه‌بندی داده‌های آماری

زمانیکه تعداد داده‌های بدست آمده از مشاهدات و یا اندازه‌گیری‌ها زیاد باشد، تحلیل این داده‌ها و محاسبه‌ها پارامترهای مرکزی و پراکندگی آنها بسیار دشوار خواهد بود. اگر این داده‌ها در طبقات مناسب گروه‌بندی شوند و به صورت خلاصه ارائه شوند، به راحتی می‌توان خصوصیات مهم آنها را مشاهده کرد.

برای طبقه‌بندی داده‌ها به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱- ابتدا دامنه تغییرات را تعیین می‌کنیم. دامنه تغییرات عبارتست از تفاضل بزرگترین و کوچکترین داده در مجموعه مشاهدات

$$R = \mathrm{Max}\{x_i\} - \mathrm{Min}\{x_i\}$$

۲- تعداد طبقات را تعیین می‌کنیم. برای تعیین تعداد طبقات روش قطعی وجود ندارد ولی ۲ روش تجربی زیر برای آن استفاده می‌شود:

۱) $k = ۱ + ۳/۳۲ \log(N)$ ۲) $k = \sqrt{N}$

۳- فاصله طبقات را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه فاصله طبقات باید دامنه تغییرات را بر تعداد طبقات تقسیم کنیم.

فاصله طبقات برابر است با حد بالای طبقه نهایی منهای حد پایین طبقه $I = \frac{R}{k}$

۴- در نهایت داده‌ها را در طبقات قرار داده و فراوانی هر طبقه را محاسبه می‌کنیم.

مثال: اگر جامعه آماری با نمرات درس ریاضی یک کلاس ۲۴ نفری باشد و بزرگترین و کوچکترین داده این جامعه ۱۹ و ۵ باشد، فاصله طبقات را محاسبه می‌کنید.

$R = ۱۹ - ۵ = ۱۴$

$N = ۲۴ \Rightarrow k = \sqrt{N} \Rightarrow k = \sqrt{۲۴} = ۴/۸ \simeq ۵$

$I = \frac{R}{k} = \frac{۱۴}{۵} = ۲/۸ \simeq ۳$

- به اعدادی که طبقات یک جدول توزیع فراوانی را مشخص می‌سازند حدود طبقات می‌گویند.
- مرکز یک طبقه برابر نصف مجموع حد پایین و حد بالای آن طبقه است که به نماینده طبقه یا متوسط طبقه معروف است.
- طول طبقه یا دسته تفاوت بین حدود بالا یا پایین دو طبقه متوالی است.

مثال: به جدول اعداد طبقه‌بندی شده (پیوسته) زیر توجه کنید:

طبقات	۰-۵	۵-۱۰	۱۰-۱۵
فراوانی	۱	۳	۱۲

در طبقه اول حد بالا ۵ و حد پایین ۰ می‌باشد و مرکز طبقه اول $\frac{۰+۵}{۲} = ۲/۵$ و طول طبقات نیز ۵ می‌باشد زیرا

$۵ - ۰ = ۵$

$۱۰ - ۵ = ۵$

$۱۵ - ۱۰ = ۵$

نکته: پیوسته کردن جداول با طبقات ناپیوسته:

به‌طور کلی در جداول با طبقات گسسته کافی است عبارت $\left(\frac{\text{حد بالای طبقه - حد پایین طبقه بندی}}{۲}\right)$ را محاسبه کنیم و مقدار محاسبه شده را از حد پایین طبقات کم و به حد بالای طبقات اضافه کنیم و طبقات را به صورت پیوسته مشخص کنیم.

۳- انواع فراوانی:

۳-۱- فراوانی مطلق (F_i): تعداد دفعات تکرار هر داده را فراوانی مطلق آن داده می‌گویند. در داده‌های طبقه‌بندی شده نیز فراوانی مطلق طبقه i برابر است با تعداد داده‌هایی که در طبقه i ام قرار دارد و با F_i نمایش می‌دهند و خواهیم داشت:

$$\sum F_i = F_۱ + F_۲ + ... + F_N = N$$

نکته: مجموع فراوانی‌های مطلق داده‌ها برابر با حجم جامعه می‌شود.

۳-۲- فراوانی نسبی (f_i): از تقسیم فراوانی مطلق هر داده (طبقه) بر حجم جامعه، فراوانی نسبی به دست می‌آید.

$$f_i = \frac{F_i}{N}$$

نکته: جمع فراوانی‌های نسبی کلیه داده‌ها (طبقه ها) برابر یک است.

$$\sum f_i = f_۱ + f_۲ + ... + f_N = ۱$$

۳-۳- فراوانی تجمعی (FC_i): فراوانی تجمعی داده (طبقه) iام برابر است با مجموع فراوانی‌های مطلق داده (طبقه) اول تا iام.

$$FC_i = \sum_{i=1}^{i} F_i = F_1 + F_2 + ... + F_i$$

نکته: فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر با حجم کل جامعه است.

۴-۳- فراوانی نسبی تجمعی: درصد مشاهدات واقع شده بین حد پایین اولین طبقه و حد بالای iامین طبقه را نشان می‌دهد یعنی $F_{ci} = \frac{F_{ci}}{N}$.

نکته: فراوانی نسبی تجمعی آخرین طبقه یک است.

٤- نمودارهای فراوانی:

بطور کلی در آمار دو روش برای نمایش داده‌ها به صورت نموداری وجود دارد:

اگر مقیاس داده‌ها از نوع فاصله‌ای و نسبی باشد، از نمودارهای کمی و چنانچه مقیاس داده‌ها از نوع اسمی و یا رتبه‌ای باشد، از نمودارهای وصفی یا کیفی استفاده می‌شود.

مهمترین نمودارهای کمی عبارتند از: نمودار بافت نگار (مستطیلی یا هیستوگرام)، نمودار چندضلعی (چند بر فراوانی)، نمودار فراوانی تجمعی و تحلیل اکتشافی داده‌ها (نمودار شاخه و برگ – نمودار جعبه‌ای). مهمترین نمودارهای وصفی عبارتند از:

نمودار ستونی (میله‌ای)، نمودار دایره‌ای و نمودار پاره تو.

۴-۱- نمودارهای کمی:

الف) بافت نگار (مستطیلی یا هیستوگرام):

برای رسم این نمودار، روی محور x ها حدود طبقات یا حدود واقعی طبقات را با طول‌های مساوی و روی محور y ها فراوانی مطلق یا نسبی دسته را مشخص می‌کنیم.

ب) نمودار چندضلعی (چند بر فراوانی):

در این نمودارهای متوسط طبقه (نماینده طبقه) بر روی محور افقی و فراوانی نسبی یا مطلق روی محور عمودی نمایش داده می‌شود. در واقع در این حالت در هر نقطه طول آن نماینده طبقه و عرض آن برابر با فراوانی آن طبقه می‌باشد. سپس نقاط را به هم وصل کرده و دو نقطه فرضی – اولی مرکز طبقه ماقبل اولین طبقه و دومی طبقه مابعد آخرین طبقه – در نظر گرفته را نیز به نمودار وصل کرده، شکل نمودار به صورت چند ضلعی درمی‌آید.

ج) نمودار فراوانی تجمعی:

این نمودار به دو صورت رسم می‌شود. در هر دو روش محور عمودی دستگاه مختصات نشان‌دهنده فراوانی تجمعی طبقات می‌باشد.

ولی در روش اول محور افقی براساس متوسط طبقات مدرج می‌شود که این منحنی را پلی گن فراوانی تجمعی می‌گویند. در روش دوم محور افقی عبارتست از کرانه بالای طبقات که به این منحنی، منحنی فراوانی تجمعی می‌گویند.

د) تحلیل اکتشافی داده ها:

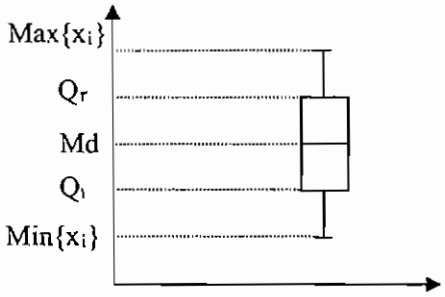
از مهمترین ویژگی‌های نمودار اکتشافی این است که برخلاف نمودارهای بافت نگار، چند ضلعی و فراوانی تجمعی، امکان شناسایی کلیه داده‌ها وجود دارد.

د-۱- نمودار شاخه و برگ:

برای تهیه این نمودارها ارقام داده را به دو قسمت شاخ و برگ تقسیم می‌کنیم، شاخه شامل یک یا چند رقم اولیه و برگ شامل ارقام باقیمانده می‌باشد. به عنوان مثال عدد ۲۵ را به دو قسمت شاخه ۲ و برگ ۵ تقسیم می‌کنیم. سپس شاخه‌ها در سمت چپ نوشته شده و تمام برگها به ترتیب از کوچک به بزرگ در کنار آن نوشته می‌شوند.

د-۲- نمودار جعبه‌ای:

این نمودار نشان‌دهنده حداقل و حداکثر مشاهدات و چارکها است بدین ترتیب که جعبه شامل اختلاف چارک اول و سوم است. در این نمودار، ابتدای جعبه چارک اول و انتهای جعبه چارک سوم است، خطی که جعبه را به دو بخش تقسیم می‌کند میانه مشاهدات است. از هر یک از دو سر جعبه نیز خطی به حداقل و حداکثر داده‌ها امتداد می‌یابد.



۲-۴- نمودارهای وصفی:

الف) نمودار ستونی (میله‌ای):

در این نمودار محور افقی نشان‌دهنده مرکز طبقات و محور عمودی نشان‌دهنده فراوانی مطلق یا نسبی می‌باشد.

نکته: اگر نقاط انتهایی نمودار میله‌ای را به طور متوالی به یکدیگر وصل کنیم، نمودار چند بر فراوانی (پلی گن) حاصل می‌شود.

ب) نمودار دایره‌ای:

برای رسم این نمودار ابتدا فراوانی‌ها به صورت درصد یا درجه محاسبه شده و سپس دایره‌ای رسم کرده و سهم هر طبقه را در دایره مشخص می‌کنیم. برای تعیین کردن سهم هر طبقه از دایره، براساس درجه یا درصد از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم:

$S_i = f_i \times ۳۶۰^\circ$

$S_i = f_i \times ۱۰۰$

ج) نمودار پاره تو:

این نمودار دارای یک محور افقی و دو محور عمودی می‌باشد. بر روی محور افقی نوع طبقه قرار داده می‌شود و روی محور عمودی که در ابتدای محور افقی قرار دارد، فراوانی هر طبقه قرار دارد. محور عمودی دوم که در انتهای محور افقی قرار دارد نیز نشان‌دهنده فراوانی نسبی تجمعی است. نمودار پاره تو به ترتیب نزولی فراوانیها رسم می‌شود.

نکته: منحنی‌ها به دو دسته عمده متقارن و نامتقارن (چوله) تقسیم می‌شوند. توزیع‌های متقارن به توزیع‌هایی گفته می‌شود که دو مقداری که نسبت به ماکزیمم توزیع دارای فاصله مساوی هستند، دارای فراوانی‌های برابر می‌باشند. بهترین نمونه توزیع‌های متقارن توزیع نرمال است.

توزیع‌های نامتقارن (چوله) به توزیع‌هایی گفته می‌شود که دو مقداری که نسبت به ماکزیمم دارای فاصله مساوی هستند، فراوانی‌های یکسان ندارند. در واقع در این توزیع‌ها سرعت میل به سمت صفر در دو سمت ماکزیمم منحنی، یکنواخت نیست.

۵- جمع مشاهدات

یکی از ساده‌ترین اعمالی که بر روی مشاهدات یا داده‌های آماری صورت می‌گیرد و در علم آمار همه با آن سر و کار داریم جمع مشاهدات است.

برای این منظور از نماد $\sum$ که یک حرف یونانی است استفاده می‌شود. در ذیل قواعد مربوط به $\sum$ را یادآوری می‌کنیم:

۱) $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$

۲) $\sum_{i=1}^{N} kx_i = k\sum_{i=1}^{N} x_i$ (k عدد ثابت)

۳) $\sum_{i=1}^{N} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \pm \sum_{i=1}^{N} y_i$

۴) $\sum_{i=1}^{N} a = Na$ (a عدد ثابت)

مثال: اگر داشته باشیم $\sum_{i=1}^{5} x_i = ۱۰$، مقدار عبارت $\left[\sum_{i=1}^{5}(۲x_i + ۳)\right]^۲$ را بدست آورید:

$$\left[\sum_{i=1}^{5}(۲x_i + ۳)\right]^۲ = \left[۲\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} ۳\right]^۲ = \left[۲(۱۰) + ۵(۳)\right]^۲ = ۱۲۲۵$$

مثال: عبارت $\sum_{i=1}^{N}(x_i-a)^2$ را ساده کنید.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-2ax_i+a^2\right)=\sum_{i=1}^{N}x_i^2-2a\sum_{i=1}^{N}x_i+\sum_{i=1}^{N}a^2=$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i^2-2a\sum_{i=1}^{N}x_i+Na^2$$

۶- پارامترهای مرکزی

یکی از مهمترین موضوعات در مطالعه هر جامعه آماری تعیین مقدار نماینده‌ای است که مشاهدات در اطراف آن توزیع شده‌اند که آن را پارامتر مرکزی می‌نامیم. مهمترین شاخص ها(پارامترهای) مرکزی عبارتند از: میانگین[1]، میانه[2]، مد[3].

۶-۱- میانگین

اصلی‌ترین شاخص مرکزی میانگین می‌باشد. با توجه به نوع داده اندازه‌گیری شده ۳ نوع میانگین خواهیم داشت:

الف- میانگین حسابی: اگر تمام داده‌های یک مجموعه اطلاعات آماری را با هم جمع کرده و بر تعداد عناصر آن مجموعه تقسیم می‌کنیم، میانگین حسابی بدست خواهد آمد:

$$\bar{x}_{\text{میانگین نمونه}}=\frac{\sum x_i}{n} \qquad \mu \text{ کل جامعه} \qquad \mu_x=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}$$

μ_x میانگین حسابی، x_i داده iام و N تعداد کل داده‌ها (مشاهدات) است.

نکته: میانگین حسابی فوق، میانگین حسابی ساده می‌باشد زیرا در آن وزن تمامی داده‌ها با هم برابر است. گاهی اوقات وزن یا فراوانی داده‌ها با هم برابر نمی‌باشد و هر داده دارای فراوانی (وزنی) است که با w_i نمایش می‌دهند و $\sum_{i=1}^{k}w_i=w_1+w_2+...+w_k=N$. در این صورت از میانگین حسابی موزون استفاده می‌کنیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu_w=\frac{\sum_{i=1}^{k}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}w_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k}w_ix_i}{N}$$

نکته: میانگین داده‌های x_1 تا x_n که تشکیل تصاعد حسابی را می‌دهند به‌صورت روبه‌رو می‌باشد. $\bar{x}=\frac{x_1+x_n}{2}$

میانگین اعداد طبیعی ۱ تا N برابر است با $\bar{x}=\frac{1+2+3+...+N}{N}=\frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N}=\frac{N+1}{2}$

مثال: نمرات ۲۰ مدیر شرکت‌کننده در یک آزمون به شرح زیر می‌باشد:

نمره (x_i)	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸	۱۹	۲۰
فراوانی (w_i)	۲	۳	۳	۸	۳	۱

میانگین نمرات این مدیران را بدست آورید.

$$\mu_w=\frac{(14\times2)+(15\times3)+(16\times3)+(18\times8)+(19\times3)+(20\times1)}{20}=17/1$$

[1]-mean
[2]-Median
[3]-Mode

میانگین حسابی

معدل مجموعه‌ای از مشاهدات را میانگین حسابی می‌نامند که از تقسیم مجموع مشاهدات بر تعداد آن‌ها محاسبه می‌شود.

الف) محاسبه میانگین داده‌های طبقه‌بندی نشده

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i x_i}{N} = \sum f_i x_i$$

مثال: اگر میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ برابر ۵ باشد و عدد ۱۰ به آن‌ها اضافه شود، میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ و ۱۰ چیست؟

$$5 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 50$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 10}{11} = \frac{50+10}{11} = \frac{60}{11}$$

نکته: اگر مقادیر مشاهده شده برای متغیر زیاد متنوع نباشد از جدول توزیع فراوانی نیمه طبقه‌بندی شده استفاده می‌شود توجه کنید که محاسبات برای این نوع داده‌ها مانند حالت داده‌های طبقه‌بندی نشده است.

نکته: محاسبه میانگین برای داده‌های نیمه طبقه‌بندی شده

مثال:

x_i	۲	۱	۳
f_i	۵	۴	۲

فراوانی مطلق

$$\bar{x} = \frac{3\times2+1\times4+2\times5}{2+4+5} = \frac{20}{11}$$

ب) محاسبه میانگین داده‌های طبقه‌بندی شده

ابتدا مرکز طبقات را بدست می‌آوریم و پس ⇐

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \sum f_i x_i \ (\text{مرکز طبقه } x_i)$$

$$f_i = \frac{F_i}{N}$$

مثال: مطلوبست میانگین روبه‌رو

C−L	۰−۵	۵−۱۰	۱۰−۱۵
F_i	۲	۳	۴

$$\text{مرکز هر طبقه} = \frac{\text{حد بالا} + \text{حد پایین}}{2}$$

$$\frac{5+0}{2} = 2/5 \quad \frac{5+10}{2} = 7/5 \quad \frac{10+15}{2} = 12/5$$

$$\frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{2\times2/5+3\times7/5+12/5\times4}{9} = \frac{77/5}{9}$$

ویژگی‌های میانگین حسابی:

۱) جمع جبری اختلاف اعداد مجموعه از میانگین‌شان برابر صفر است. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x) = 0$

۲) هرگاه هریک از داده‌ها با عدد ثابت a جمع شوند، میانگین داده‌های حاصل شده برابر است با میانگین مجموعه داده‌های قبلی به اضافه a.

$$y_i = x_i \pm a \Rightarrow \mu_y = \mu_x \pm a$$

نکته: در جامعه آماری فقط یک میانگین داریم.

۳) هرگاه مجموعه از داده‌ها در عدد ثابت k ضرب شوند میانگین اعداد حاصل شده برابر است با میانگین مجموعه داده‌های قبلی ضربدر k.

$$y_i = kx_i \Rightarrow \mu_y = k\mu_x$$

نکته: مقادیر بزرگ و کوچک به سهم خود در میانگین سهم دارند.

همچنین از رابطه ۲و۳ می‌توان نتیجه‌گیری کرد:

$$y_i = kx_i + a \Rightarrow \mu_y = k\mu_x + a$$

۴) اگر مجموعه y,x مجموعه‌هایی از داده‌ها با میانگین μ_y,μ_x باشند و مجموعه Z از حاصل جمع یا تفریق دو مجموعه y,x بدست آمده باشد خواهیم داشت:

$$z_i = x_i \pm y_i \Rightarrow \mu_z = \mu_x \pm \mu_y$$

۵) هرگاه k_1 عدد دارای میانگین k_2,m_1 عدد دارای میانگین $k_n,\dots,m_2$ عدد دارای میانگین m_n باشند، میانگین کل این اعداد برابر است با:

$$\mu = \frac{k_1m_1 + k_2m_2 + \dots + k_nm_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

۶) مجموع مجذورات انحراف داده‌ها از میانگین کمترین مقدار ممکن است:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \min$$

نکته: میانگین تنها پارامتری است که اگر به جای کلیه داده‌ها قرار گیرد، مجموع آن‌ها تغییر نمی‌کند.

ب- میانگین پیراسته: گاهی اوقات بعضی داده‌ها به علت بزرگی یا کوچکی زیاد با بقیه داده‌ها تجانس و همخوانی ندارد، در این مواقع از میانگین پیراسته استفاده می‌شود. برای بدست آوردن میانگین پیراسته بدین شکل عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

۲) تمام مشاهدات (داده های) کوچکتر از LN درصد پائین و بزرگتر از LN درصد بالا حذف شده و میانگین باقیمانده داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال: اگر میزان نمره بهره‌وری ۱۲ کارگر مقادیر زیر باشد میانگین پیراسته را در صورتیکه LN=%25٪ باشد بدست آورید.

۲,۳,۴,۷,۹,۱۲,۱۳,۱۵,۱۵,۱۷,۱۸,۱۹

حل: چون ۱۲ داده داریم ، ۲۵٪ بالا و پایین به ترتیب ۱۷ و ۴ می‌باشد، در نتیجه میانگین پیراسته به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mu_x = \frac{7+9+12+13+15+15}{6} = 11/83$$

نکته: نوع دیگری از میانگین پیراسته وجود دارد که در آن بجای مقادیر کوچکتر از LN درصد پایین و بزرگتر از LN درصد بالا، تعداد عددی LN٪ پایین و بالا را قرار می‌دهند و سپس میانگین کل مشاهدات را محاسبه می‌کنند. به این نوع میانگین، میانگین وینزوری گفته می‌شود.

مثال: در مثال قبل برای محاسبه میانگین وینزوری بجای داده‌های ۲و۳و۴، عدد ۴ راقرار می‌دهیم و بجای داده‌های ۱۷و۱۸و۱۹ عدد ۱۷ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{4+4+4+7+9+12+13+15+15+17+17+17}{12} = 11/1 \text{ میانگین وینزوری}$$

ج- میانگین هندسی (μ_G): برای محاسبه میانگین اندازه‌های نسبی مانند نسبتها، درصد ها، نرخ‌های رشد و شاخص‌ها از میانگین هندسی استفاده می‌شود.

$$\mu_G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \dots \times n} = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

هرگاه $x_1,x_2,\dots,x_n$ ، یک مجموعه داده‌های n تایی باشند، میانگین هندسی این n عدد برابر با n امین ریشه حاصلضرب اعداد است.

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1.x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

نکته: اگر در بین داده‌ها عدد منفی یا صفر وجود داشته باشد نمی‌توان از میانگین هندسی استفاده نمود.

نکته: اگر داده‌ها هر یک دارای وزن مخصوص به خود باشند، بجای میانگین هندسی از میانگین هندسی موزون استفاده

می‌کنیم. فرمول محاسبه میانگین هندسی موزن به صورت زیر است:

$$\mu_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{w_i}} = \sqrt[n]{x_1^{w_1} \times x_2^{w_2} \times \ldots \times x_k^{w_k}}$$

در این فرمول $\sum_{i=1}^{k} w_i$ مساوی N است.

مثال: راندمان ۱۰ ماشین در جدول زیر آمده است. میانگین راندمان این ۱۰ ماشین را محاسبه کنید.

راندمان (درصد)	۸۰	۷۵	۹۰	۸۵
تکرار (w_i)	۲	۳	۱	۴

$$\mu_G = \sqrt[10]{80^2 \times 75^3 \times 90 \times 85^4} \Rightarrow \log \mu_G = \frac{1}{10}\log\left(80^2 \times 75^3 \times 90 \times 85^4\right)$$

براساس خاصیت ضرب لگاریتم خواهیم داشت:

$$\log \mu_G = \frac{1}{10}\left(2\log 80 + 3\log 75 + \log 90 + 4\log 85\right)$$

$$\log \mu_G = \frac{1}{10}\left[(2\times 1/9030) + (3\times 1/8750) + (1/9542) + (4\times 1/9294)\right]$$

$$\log \mu_G = \frac{1}{10}\left[3/806 + 5/625 + 1/9542 + 7/7176\right] \Rightarrow \log \mu_G = 1/91028$$

نکته: در میانگین هندسی اگر به جای نسبت از اعداد استفاده کنیم، برای به‌دست آوردن متوسط رشد یا میانگین به درصد باید در صفر مقدار به دست آمده را از یک کسر کنیم.

میانگین وزنی (μ_ω): در صورتی که داده‌ها دارای وزن‌های متفاوتی باشند از میانگین وزنی استفاده می‌شود:

$$\bar{x}_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

د- میانگین هارمونیک: (توافقی یا معکوس یا همساز μ_H)

اگر مقیاس سنجش داده‌ها ترکیبی باشد مانند کیلومتر در ساعت، متر در ثانیه یا نفر ساعت و ... برای یافتن متوسط آنها از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم. هرگاه $x_1, x_2, \ldots, x_n$ همگی غیرصفر و متحد العلامه باشند برای محاسبه میانگین هارمونیک از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. (میانگین هارمونیک را با μ_H نمایش می‌دهیم)

$$\mu_H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

مثال: سه ماشین به تولید یک کالا مشغول‌اند، اولی یک کالا را در ۲، دومی در ۳ و سومی در ۶ دقیقه تولیدمی‌کنند. اگر این سه ماشین با هم کار کنند به طور متوسط یک کالا در چند دقیقه تولید می‌شود؟

$$\mu_H = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3$$

مثال: اتومبیلی فاصله تهران تا قم را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت، مسیر قم – اصفهان را با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت و مسیر اصفهان – شیراز را با سرعت ۱۱۰ کیلومتر در ساعت می‌رود. متوسط سرعت این اتومبیل در مسیر تهران – شیراز چقدر است؟

$$\mu_H = \frac{3}{\frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}} = 91/73$$

نکته: در میانگین هارمونیک نیز مانند سایر میانگین‌ها در صورتیکه داده‌ها دارای وزن مخصوصی باشند از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mu_H = \frac{\sum w_i}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_k}{x_k}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{x_i}} \quad (\sum wi = N)$$

نکته: در حالت کلی در مورد یک سری از داده‌ها در مورد میانگین‌های حسابی و هندسی و هارمونیک رابطه روبه‌رو صدق می‌کند:

$\mu_H < \mu_G < \mu_x$

۲-۶- مد (نما[1])

مد در آماره داده‌ای است که بیشترین فراوانی (تکرار) را در بین مشاهدات (داده های) جامعه داشته باشد. مد (نما) کم اهمیت‌ترین پارامتر مرکزی است. برای محاسبه مد در داده‌های طبقه‌بندی نشده و طبقه‌بندی شده به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) در داده‌های طبقه‌بندی نشده: مد عددی است که بیش از همه تکرار شده باشد. از این رو ممکن است در یک سری داده آماری مد وجود نداشته باشد و یا اینکه چند مد وجود داشته باشد. در صورتیکه فراوانی همه داده‌ها یکسان باشد جامعه ما فاقد مد خواهد بود و در صورتیکه بیش از یک داده (نه همه داده‌ها) دارای فراوانی یکسان و بیشتر از بقیه داده‌ها بود، آن داده‌ها همگی مد می‌باشند. مد را با MO نمایش می‌دهیم.

نکته: برای تعیین مد در هسیتوگرام، در ستونی که بیشترین ارتفاع را دارد در خط مورب رسم می‌کنیم، حمل تقاطع خطوط، نشان‌دهنده مقدار مد است.

مثال: در بین داده‌های مقابل مد را محاسبه نمایید.

۲,۴,۳,۸,۳,۲,۴,۹,۷

Mo = ۲,۴,۳

ب) در داده‌های طبقه‌بندی شده: ابتدا از روی ستون فراوانی مطلق طبقه‌ای را پیدا می‌کنیم که بیشترین فراوانی را داشته باشد. به آن طبقه، طبقه مددار می‌گوییم و با استفاده از این فرمول مد را محاسبه می‌کنیم:

$$mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) I$$

L_i: حد پایین طبقه مددار

d_1: تفاوت فراوانی مطلق طبقه مددار با فراوانی مطلق طبقه ما قبل آن.

d_2: تفاوت فراوانی مطلق طبقه مددار با فراوانی مطلق طبقه بعد از آن.

I: طول طبقه

مثال: در داده‌های طبقه‌بندی شده زیر، مد را محاسبه نمایید.

طبقه داده ها	۶۵۰-۶۵۴	۶۵۵-۶۵۹	۶۶۰-۶۶۴	۶۶۵-۶۶۹
F_i	۸	۱۱	۱۵	۱۲

طبقه داده ها	۶۴۹/۵-۶۵۴/۵	۶۵۴/۵-۶۵۹/۵	۶۵۹/۵-۶۶۴/۵	۶۶۴/۵-۶۶۹/۵
F_i	۸	۱۱	۱۵	۱۲

$$mo = ۶۵۹/۵ + \left(\frac{۴}{۴+۳}\right)(۵) = ۶۶۲/۳$$

۳-۶- چارکها[2] چندک‌ها (چارک‌ها، دهک‌ها، صدک‌ها)

دهک‌ها و صدکها

دهکها دامنه تغییرات را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کند. برای محاسبه دهکها، فراوانی تجمعی را تهیه کرده و سپس با

1. mode
2. quartiles

استفاده از رابطه $C_{D_a} = \frac{aN}{۱۰}$ محل دهک aام را پیدا کرده و سپس به کمک رابطه زیر مقدار دهک aام را محاسبه می‌نماییم. (دهک aام را با D_a نمایش می‌دهیم)

$$D_a = L_{D_a} + \left(\frac{\frac{aN}{۱۰} - FC_{i-۱}}{F_i} \right) I$$

صدکها دامنه تغییرات را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کند. برای محاسبه صدکها نیز همانند دهکها و چارکها فراوانی تجمعی را محاسبه کرده و محل صدک a ام را با استفاده از رابطه $C_{P_a} = \frac{aN}{۱۰۰}$ پیدا می‌کنیم. سپس به کمک رابطه زیر مقدار صدک a ام را محاسبه می‌کنیم. (صدک a ام را با P_a نمایش می‌دهیم)

$$P_a = L_{P_a} + \left(\frac{\frac{aN}{۱۰۰} - FC_{i-۱}}{F_i} \right) I$$

نکته: دهک پنجم = چارک دوم = صدک پنجاهم = میانه می‌باشد.

اگر جامعه آماری به ۴ قسمت مساوی تقسیم شود چارکهای اول، دوم و سوم مشخص می‌شوند. چارک اول که با $Q_۱$ نمایش داده می‌شود مقداری است، که ۲۵ درصد داده‌های جامعه از آن کوچکتر و ۷۵ درصد داده‌ها از آن بزرگتر هستند.

چارک دوم که با $Q_۲$ نمایش داده می‌شود مقداری است که نیمی از داده‌ها از آن کوچکتر و نیمی از داده‌ها از آن بزرگتر هستند.

چارک سوم نیز مقداری است که ۷۵ درصد داده‌ها از آن کوچکتر و ۲۵ درصد داده‌ها از آن بزرگتر هستند و آن را با $Q_۳$ نشان می‌دهند.

- در صورتیکه داده‌ها طبقه‌بندی نشده باشند برای تعیین چارکها به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده و آنها را از ۱ تا N شماره گذاری می‌نماییم.

ب) محل چارک a ام $(a = ۱,۲,۳)$ را با استفاده از رابطه $C_{Q_a} = \frac{aN}{۴} + \frac{۱}{۲}$ بدست می‌آوریم که مقدار $\frac{۱}{۲}$ زوج و فرد بودن تعداد داده‌ها را مشخص می‌کند.

ج) با استفاده از محل چارک،مقدار چارک را مشخص می‌کنیم.

مثال: داده‌های آماری زیر را در نظر گرفته ، مقادیر چارکهای اول، دوم و سوم را بدست آورید.

۲۰,۷۰,۴۵,۶۰,۱۲۰,۱۰۰,۱۳۰

حل: برای محاسبه چارکها ابتدا آنها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم و از ۱ تا N شماره گذاری می‌نماییم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷
۴۵,۶۰,۷۰,۹۰,۱۰۰,۱۲۰,۱۳۰

$$C_{Q_۱} = \frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۲} = ۲/۲۵ \quad \Rightarrow \quad Q_۱ = ۶۰ + ۰/۲۵(۷۰ - ۶۰) \Rightarrow Q_۱ = ۶۲/۵$$

$$C_{Q_۲} = \frac{۲(۷)}{۴} + \frac{۱}{۲} = ۴ \quad \Rightarrow \quad Q_۲ = ۹۰$$

$$C_{Q_۳} = \frac{۳(۷)}{۴} + \frac{۱}{۲} = ۵/۷۵ \Rightarrow \quad Q_۳ = ۱۰۰ + ۰/۷۵(۱۲۰ - ۱۰۰) \Rightarrow Q_۳ = ۱۱۵$$

نکته: وقتی $C_{Q_۱} = ۲/۲۵$ بدست می‌آید بدین معنی است که چارک اول در فاصله ۲۵ درصدی داده‌های دوم و سوم قرار دارند که به صورت فوق چارک اول بدست می‌آید.

- در صورتیکه داده‌ها طبقه‌بندی شده باشند، برای محاسبه چارکها فراوانی تجمعی را تهیه کرده و محل چارک aام را با استفاده از رابطه $C_{Q_a} = \frac{aN}{۴}$ پیدا می‌کنیم. سپس مقدار چارک a ام را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌نماییم.

$$Q_a = L_{Q_a} + \left(\frac{\frac{aN}{۴} + FC_{i-۱}}{F_i} \right) I$$

L_{Q_a}: حد پایین طبقه چارک دار

$FC_{i-۱}$: فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه چارک دار

F_i: فراوانی مطلق طبقه چارک دار

I: طول طبقه

مثال: در جدول توزیع فراوانی زیر، چارک سوم را بدست آورید.

cL	۲−۵	۶−۹	۱۰−۱۳	۱۴−۱۷	۱۸−۲۱
F_i	۳	۵	۷	۴	۳

حل: برای محاسبه چارک سوم ابتدا فراوانی تجمعی را محاسبه کرده، سپس محل چارک سوم را بدست می‌آوریم:

cL	۲−۵	۶−۹	۱۰−۱۳	۱۴−۱۷	۱۸−۲۱
F_i	۳	۵	۷	۴	۳
FC_i	۳	۸	۱۵	۱۹	۲۲

$$C_{Q_۳} = \frac{۳N}{۴} = \frac{۳(۲۲)}{۴} = ۱۶/۵ \qquad Q_۳ = L_{Q_۳} + \left(\frac{\frac{۳N}{۴} - FC_۳}{F_۴} \right) I$$

$$Q_۳ = ۱۳/۵ + \left(\frac{\frac{۳(۲۲)}{۴} - ۱۵}{۴} \right) = ۱۲/۶۲$$

۴-۶- میانه[1] (Me یا Md)

در حقیقت عددی است که ۵۰ درصد داده‌ها قبل و ۵۰ درصد داده‌ها بعد از آن قرار دارند. میانه در واقع همان چارک دوم می‌باشد و داده‌ها را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند بطوریکه تعداد داده‌های کوچکتر از میانه برابر تعداد داده‌های بزرگتر از میانه است را با Md میانه نشان می‌دهیم و برای محاسبه آن در داده‌های طبقه‌بندی نشده و طبقه‌بندی شده به صورت زیر عمل می‌نماییم:

الف- محاسبه میانه در داده‌های طبقه‌بندی نشده: ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب نموده و آنها را از ۱ تا N شماره‌گذاری می‌کنیم. محل میانه را از طریق رابطه $C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}$ پیدا کرده و سپس مقدار مربوط به آن را به عنوان میانه بدست می‌آوریم.

نکته: اگر در حالت داده‌های طبقه‌بندی نشده، جدول توزیع فراوانی داده شد، (حالت نیمه طبقه‌بندی شده) از روی جدول، فراوانی تجمعی را به دست می‌آوریم و محل میانه با توجه به ترتیب صعودی که در جدول حفظ شد به دست می‌آید.

ب- محاسبه میانه در داده‌های طبقه‌بندی شده: ابتدا از روی جدول فراوانی تجمعی را محاسبه می‌کنیم، پس از فرمول N/۲ محل میانه را محاسبه کرده و در ستون فراوانی تجمعی، طبقه‌ای را که فراوانی تجمعی (FC) آن مساوی N/۲ یا بلافاصله بیش از آن باشد، در نظر گرفته و میانه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_{Md} = \frac{N}{۲} \qquad Md = L_i + \left(\frac{\frac{N}{۲} - FC_{i-۱}}{F_i} \right) I$$

L_i: حد پایین طبقه میانه دار

$FC_{i-۱}$: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل میانه‌دار

1. Median

F_i : فراوانی مطلق طبقه میانه‌دار (یا فراوانی تجمعی طبقه ما قبل میانه ـ فراوانی تجمعی طبقه میانه‌دار)

I : طول طبقه

نکته: در داده‌های طبقه‌بندی نشده، اگر تعداد داده‌ها فرد باشد داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد برابر میانه است، اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانگین دو داده‌ای که در وسط قرار گرفته است برابر میانه است.

نکته: در هر جامعه آماری فقط یک میانه وجود دارد.

نکته: مهمترین خاصیت میانه این است که مجموع قدرمطلق تفاضل داده‌ها از میانه، از حاصل جمع قدرمطلق تفاضل داده‌ها از هر عدد دیگری کمتر است.

$$\sum|x_i - Md| < \sum|x_i - c|,\ c \neq Md \Rightarrow \sum|x_i - Md| = Min$$

نکته: برخلاف میانگین، میانه از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

نکته: رابطه تجربی بین میانگین و مد و میانه به صورت زیر است:

۱) $\mu = Md = mo$ در توزیع‌های متقارن

۲) $\mu > Md > mo$ در توزیع‌های با چولگی مثبت

۳) $\mu < Md < mo$ در توزیع‌های با چولگی منفی

۴) $mo - \mu = ۳(Md - \mu)$ رابطه تقریبی در توزیع با چولگی خفیف

نکته: از لحاظ هندسی میانه طول خط عمودی است بر محور xها در نمودار بافت نگار که آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

نکته: در نمودار فراوانی تجمعی حمل برخورد دو نمودار، فراوانی تجمعی کمتر از میانه و فراوانی تجمعی بیشتر از میانه، میانه را در اختیار قرار می‌دهد. می‌توان گفت میانه طول نقطه‌ای است که عرض آن ۵۰٪ است.

۷- پارامترهای پراکندگی

گاهی اوقات دو سری داده میانگین برابری دارند ولی نحوه پراکندگی این دو سری با هم متفاوت می‌باشد. به همین دلیل علاوه بر پارامترهای مرکزی در آمار، پارامترهای پراکندگی را تعریف می‌کنیم تا نحوه پراکندگی داده‌ها در اطراف میانگین مشخص شود.

۷-۱) دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده آماری می‌باشد و آن را با R نمایش می‌دهند:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

دامنه تغییرات کم اهمیت‌ترین و ساده‌ترین پارامتر پراکندگی است زیرا فقط دو عدد از داده‌ها را دربرمی‌گیرد و چگونگی پراکندگی سایر داده‌ها را نشان نمی‌دهند. این پارامتر از ثبات چندانی برخوردار نیست چون از مجموع مشاهدات فقط به کوچکترین و بزرگترین مشاهده توجه می‌شود. و چگونگی توزیع سایر مشاهدات نیز نشان داده نمی‌شود.

۷-۲) دامنه میان چارکی

اختلاف بین چارک سوم و چارک اول را دامنه میان چارکی می‌نامند و آن را با IQR نشان می‌دهند.

$$IQR = Q_۳ - Q_۱$$

نکته: اگر انحراف چارکی اندازه‌ها برابر صفر باشد، ۵۰ درصد اندازه‌هایی که در وسط قرار گرفته‌اند، با هم برابرند در نتیجه چارک اول و دوم و سوم با هم برابرند.

$$Q = ۰ \Leftrightarrow Q_۱ = Q_۲ = Q_۳$$

اگر دامنه میان چارکی را بر دو تقسیم کنیم انحراف چارکی به دست می‌آید که آن را با SIQR نمایش می‌دهند:

$$SIQR = \frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$$

نکته: در توزیع‌های نامتقارن اغلب از میانه به عنوان شاخص مرکزی و از انحراف چارکی به عنوان شاخص پراکندگی استفاده می‌شود.

اگر انحراف چارکی برابر صفر باشد در نتیجه چارکهای اول و دوم و سوم برابرند.

۳-۷) انحراف متوسط از میانگین (انحراف میانگین، انحراف متوسط، $A.D_\mu$)

تمامی پارامترهای پراکندگی که تا قبل از این بیان شده تعداد محدودی از داده‌ها را تحت پوشش قرار می‌دادند و به همین دلیل نشانگر مناسبی برای نوع توزیع و پراکندگی کلیه داده‌های جامعه آماری نبودند، به همین دلیل پارامترهایی که شامل کلیه اعضای جامعه آماری باشند برای تعیین دقیقتر نوع پراکندگی داده‌ها مورد نیاز می‌باشد.

یکی از این پارامترها انحراف متوسط از میانگین است که با $A.D_\mu$ نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$A.D_\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu_x|}{N}$$ در داده‌های طبقه‌بندی نشده

$$A.D_\mu = \frac{\sum F_i |x_i - \mu_x|}{N} = \sum F_i (x_i - \mu_x)$$ در داده‌های طبقه‌بندی شده

در واقع انحراف متوسط از میانگین، قدرمطلق انحرافات متغیرها از میانگین است.

نکته: مهمترین نقض انحراف متوسط از میانگین صرفنظر کردن از علامتهای جبری است. چون وجود علامت قدرمطلق باعث خنثی شدن علامتهای جبری می‌شود.

مثال: ۱۰ داده آماری به شرح زیر داریم:

۱۴,۱۶,۱۳,۸,۲۱,۱۴,۹,۱۲,۱۵,۱۲

انحراف متوسط از میانگین را محاسبه کنید.

حل:

$$\bar{x} = \mu_x = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۱۴+۱۶+۱۳+...+۱۲}{۱۰} = ۱۳/۴$$

$$A.D_\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu_x|}{N} = \frac{|۱۴-۱۳/۴| + |۱۶-۱۳/۴| + ... + |۱۲-۱۳/۴|}{۱۰} = ۲/۶$$

یعنی بطور متوسط هر داده از میانگین داده‌ها ۲/۶ فاصله دارد.

نکته ۱: اگر همه داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف متوسط از میانگین برابر صفر است و برعکس:

$$x_۱ = x_۲ = ... = x_n \Leftrightarrow A.D_\mu = ۰$$

نکته ۲: اگر به همه داده‌ها عدد ثابتی مانند a را اضافه و یا کم کنیم، انحراف متوسط از میانگین تغییر نمی‌کند:

$$y_i = x_i \pm a \Rightarrow A.D_{\mu y_i} = A.D_{\mu x_i}$$

نکته ۳: اگر داده‌ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب کنیم، انحراف متوسط از میانگین در قدر مطلق a ضرب می‌شود:

$$y_i = ax_i \Rightarrow A.D_{\mu y_i} = |a| A.D_{\mu x_i}$$

نکته ۴: اگر داده‌ها را بر عدد ثابتی مانند a تقسیم کنیم، انحراف متوسط از میانگین بر قدر مطلق a تقسیم می‌شود:

$$y_i = \frac{x_i}{a} \Rightarrow A.D_{\mu y_i} = \frac{A.D_{\mu x_i}}{|a|}$$

نکته ۵: انحراف متوسط از میانگین اعداد ثابت صفر است.

مثال: اگر انحراف متوسط از میانگین اعداد $x_۵, x_۴, x_۳, x_۲, x_۱$ و ۸ برابر صفر باشد، انحراف متوسط از میانگین اعداد $x_۵, ۴x_۴, ۳x_۳, ۲x_۲, x_۱$ را بدست آورید:

حل: چون انحراف متوسط از میانگین برابر صفر است طبق نکته ۱ همه این ۶ داده با هم برابرند:

$$A.D_\mu = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = x_۵ = ۸$$

در نتیجه $x_۱ = ۸$ ، $۲x_۲ = ۱۶$ ، $۳x_۳ = ۲۴$ ، $۴x_۴ = ۳۲$ ، $x_۵ = ۸$ $\Leftarrow$ $\mu = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۸+۱۶+۲۴+۳۲+۸}{۵} = ۱۷/۶$

$$A.D_{\mu}=\frac{|۸-۱۷/۶|+...+|۸-۱۷/۶|}{۵}=۸/۳۲$$

نکته: همانند انحراف متوسط از میانگین، انحراف متوسط از مد و انحراف متوسط از میانه را نیز می‌توان از طریق فرمولهای زیر محاسبه کرد:

انحراف متوسط از مد $AD_{Mo}=\frac{\sum F_i|x_i-Mo|}{N}$ $\qquad$ $A.D_{Mo}=\frac{\sum|x_i-Mo|}{N}$

انحراف متوسط از میانه $A.D_{Md}=\frac{\sum F_i|x_i-Md|}{N}$ $\qquad$ $A.D_{Md}=\frac{\sum|x_i-Md|}{N}$

۴-۷- واریانس و انحراف معیار

همانطور که گفته شد در انحراف متوسط از میانگین به منظور جلوگیری از خنثی شدن انحرافات منفی از قدرمطلق استفاده می‌شود. به دلیل مشکلاتی که در هنگام کار با انحراف متوسط از میانگین وجود داشت، پارامتر دیگری به نام واریانس تعریف شده است. واریانس عبارتست از میانگین مجموع مجذورات انحرافات داده‌ها از میانگین. واریانس یک جامعه آماری را با $\sigma_x^۲$ یا $v(x)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v(x)=\sigma_x^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{k}(x_i-\mu_x)^۲}{N}=\frac{\sum_{i=۱}^{k}x_i^۲}{N}-\mu_x^۲$$

نکته: در محاسبه واریانس نیز مانند میانگین اگر داده‌ها دارای فراوانی w_i باشد واریانس به طریق زیر محاسبه می‌شود.

$$v(x)=\sigma_x^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{k}w_i(x_i-\mu_x)^۲}{N}=\frac{\sum_{i=۱}^{k}w_ix_i^۲}{N}-\mu_x^۲$$

نکته: اگر از مقدار بدست آمده برای واریانس جذر بگیریم، مقدار بدست آمده انحراف معیار جامعه خواهد بود. (انحراف معیار را با σ_x نمایش می‌دهند)

$$\sigma_x=\sqrt{v(x)}$$

مثال: نمرات ۸ دانشجو در یک تست هوش به قرار زیر است:

۱۲,۱۷,۱۹,۱۴,۱۱,۱۷,۱۷,۱۵

واریانس را محاسبه نمایید.

حل:

$$\mu_x=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{۱۲+۱۷+...+۱۵}{۸}=۱۵/۲۵$$

$$\sigma_x^۲=\frac{\sum(x_i-\mu_x)^۲}{N}=\frac{(۱۲-۱۵/۲۵)^۲+...+(۱۵-۱۵/۲۵)^۲}{۸}=۶/۶۸$$

خواص واریانس:

۱) اگر همه داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس صفر است و برعکس.

$$x_۱=x_۲=....=x_n \Leftrightarrow \sigma_x^۲=۰$$

نکته: واریانس بیش از سایر پارامترها تحت تأثیر انحرافات بزرگ قرار دارد.

۲) اگر به داده‌ها عدد ثابتی مانند a را اضافه و یا از آنها کسر کنیم واریانس ثابت می‌ماند.

$$y_i=x_i\pm a \Rightarrow \sigma_y^۲=\sigma_x^۲$$

۳) اگر داده‌ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب و یا بر عدد ثابتی مانند a تقسیم کنیم، واریانس آنها در مجذور a ضرب و یا بر مجذور a تقسیم می‌شود.

$$y_i = ax_i \Rightarrow \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

$$y_i = \frac{x_i}{a} \Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{a^2}$$

نکات مهم واریانس:

۱-
$$\left.\begin{array}{l}\sigma(x \pm a) = \sigma x \\ \sigma(bx \pm a) = |b|\sigma_x \\ \sigma[\frac{x}{a}] = \frac{\sigma x}{|a|}\end{array}\right\} \xleftarrow{\text{انحراف معیار}} \left.\begin{array}{l}\sigma^2(x \pm a) = V(x \pm a) = \sigma_x \\ \sigma^2(bx \pm a) = b^2\sigma^2 x \\ \sigma^2(\frac{x}{a}) = \frac{\sigma^2 x}{a^2}\end{array}\right\}$$

۲- واحد اندازه‌گیری واریانس: مجذور واحد اصلی متغیر است. بنابراین اگر x بر حسب ریال اندازه‌گیری شده باشد. واحد واریانس ریال به توان ۲ خواهد بود.

۳- هرگاه اندازه‌های آماری تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت d بدهند، انحراف معیار از فرمول رو به رو بدست می‌آید:

$$\sigma x = d\sqrt{\frac{N^2 - 1}{12}}$$

۴- در مقایسه ۲ جامعه آماری، آن که انحراف معیارش کم‌تر است، مقادیر صفات متغیر مورد مطالعه آن جامعه یکنواخت‌تر از جوامع دیگر خواهند بود.

۵- واریانس یک نمونه n تایی: اگر واریانس نمونه مورد نظر باشد، در مخرج کسر تمامی فرمول‌های واریانس، به جای n از $(n-1)$ استفاده می‌شود.

$$V(x) = S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

۵-۷- نیمه واریانس[1] (S.V)

نیمه واریانس را که با S.V نمایش می‌دهند برای انحرافات مقادیر نامطلوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. در داده‌های مربوط به سود، مقادیر کوچکتر از میانگین و در داده‌های مربوط به زیان، مقادیر بزرگتر از میانگین نامطلوب هستند. بنابراین اگر داده‌های ما $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد و از میان این داده‌ها فقط k تای آن $(k < n)$ نامطلوب باشد، نیمه واریانس برابر خواهد بود با:

$$S.V = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu_x)^2}{k} \qquad S.V = \frac{\sum F_i(x_i - \mu_x)^2}{k}$$

مثال: اگر هزینه تولید شرکت B در ۸ سال مقادیر زیر باشد، نیمه واریانس را محاسبه کنید:

۹و۱۱و۵و۱۰و۱۲و۶و۴ و ۷

حل:

$$\mu_x = \frac{7+4+6+12+10+5+11+9}{8} = 8$$

همانطور که گفته شد در داده‌های مربوط به زیان، مقادیر بزرگتر از میانگین نامطلوب هستند. بنابراین:

$$SV = \frac{(12-8)^2 + (10-8)^2 + (11-8)^2 + (9-8)^2}{4} = 7/5$$

۶-۷- ضریب پراکندگی[2] (ضریب تغییرات)

عبارتست از نسبت انحراف معیار به میانگین و آن را CV نمایش می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \times 100$$

1. semivariance
2. coefficient of variation

از ضریب پراکندگی معمولاً در موارد زیر استفاده می‌شود:

۱- دو جامعه آماری مورد مقایسه، داده‌های ناهمگون و نامتجانس دارند. مانند مقایسه دو جامعه که با واحدهای گوناگون اندازه‌گیری شده‌اند.

۲- دو جامعه آماری مورد مقایسه، دارای ابعاد متفاوت باشند، مانند مقایسه سود و زیان صنایع دستی و سنگین و یا مقایسه واحد میلی متر با سانتی متر.

۳- دو جامعه آماری مورد مقایسه، دارای واریانس یکسان و میانگین‌های متفاوت باشند و یا دارای واریانس‌ها و میانگین‌های مختلفی باشند.

نکته: عیب اساسی ضریب تغییرات این است که وقتی μ_x به صفر نزدیک باشد، قابل استفاده نیست.

مثال: متوسط سود دو شرکت در ۵ سال گذشته در زیر آمده است: (ارقام به میلیون ریال)

شرکت x ← ۱۲۰ , ۷۰ , ۶۵ , ۹۰ , ۱۰۵

شرکت y ← ۷۵ , ۶۵ , ۷۰ , ۸۰ , ۷۵

می خواهیم بدانیم سود کدام شرکت متجانس تر است؟

حل: برای اینکه بفهمیم سود کدام شرکت متجانس تر است ابتدا میانگین و واریانس سود دو شرکت طی ۵ سال گذشته را بدست می‌آوریم:

$$\mu_x = \frac{۱۲۰+۷۰+۶۵+۹۰+۱۰۵}{۵} = ۹۰ \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^۲ = \frac{(۱۲۰-۹۰)^۲ + \ldots + (۱۰۵-۹۰)^۲}{۵} = ۴۳۰$$

$$\mu_y = \frac{۷۵+۶۵+۷۰+۸۰+۷۵}{۵} = ۷۳ \quad \Rightarrow \quad \sigma_y^۲ = \frac{(۷۵-۷۳)^۲ + \ldots + (۷۵-۷۳)^۲}{۵} = ۲۶$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \times ۱۰۰ = \frac{۲۰/۷۳}{۹۰} \times ۱۰۰ = ۲۳$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y} \times ۱۰۰ = \frac{۵/۰۹}{۷۳} \times ۱۰۰ = ۶/۹۸$$

نکات ضریب تغییرات:

۱- ضریب تغییرات اعداد ثابت، برابر صفر است.

۲- اگر همه متغیرها با هم برابر باشند، ضریب تغییرات برابر صفر است و برعکس.

۳- اگر به متغیرها عدد ثابتی مثل x را اضافه یا کم کنیم آنگاه:

$$CV(x \pm a) = \frac{\sigma(x \pm a)}{\mu(x \pm a)} = \frac{\sigma x}{\mu x \pm a}$$

با مقایسه ضریب پراکندگی دو شرکت y, x متوجه می‌شویم که سود شرکت y متجانس تر است.

میانگین و واریانس چندین جامعه

اگر k جامعه با $N_۱, N_۲, \ldots, N_k$ داده داشته باشیم که میانگین آنها $\mu_۱$، $\mu_۲$ و ... و واریانس آنها $\sigma_۱^۲$، $\sigma_۲^۲$ و ... باشد میانگین و واریانس جامعه کل برابر خواهد بود با:

$$\mu_x = \frac{\sum N_i \mu_x}{\sum N_i}$$

$$\sigma_x^۲ = \frac{\sum N_i \sigma_i^۲}{\sum N_i} + \frac{\sum N_i (\mu_i - \mu_x)^۲}{\sum N_i}$$

بطور کلی واریانس جامعه کل از میانگین واریانس جوامع تشکیل‌دهنده بزرگ‌تراست و فقط وقتی میانگین جوامع تشکیل‌دهنده یکسان باشد، واریانس کل برابر با میانگین واریانس‌های جوامع می‌باشد.

$$\sigma_x^2 \geq \frac{\sum N_i \sigma_i^2}{\sum N_i}$$

۴- اگر متغیرها را در عدد ثابتی ضرب کنیم ضریب تغییرات عبارتست از:

$$CV(xx_a) = \frac{\sigma(ax)}{\mu(ax)} = \frac{|a|\sigma_x}{a\mu_x} = \begin{cases} CV(x) & \text{اگر a مثبت باشد} \\ -CV(x) & \text{اگر a منفی باشد} \end{cases}$$

۵- اگر متغیرها را بر عدد ثابتی مثل تقسیم کنیم آنگاه:

$$CV(\frac{x}{a}) = \frac{\sigma(\frac{x}{a})}{\mu(\frac{x}{a})} = \frac{\frac{\sigma_x}{|a|}}{\frac{\mu_x}{a}} = \begin{cases} CV(x) & \text{اگر a مثبت باشد} \\ -CV(x) & \text{اگر a منفی باشد} \end{cases}$$

۶- فرمول‌های دیگر ضریب پراکندگی:

درصد ضریب پراکندگی: $CV \times ۱۰۰ = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \times ۱۰۰$

ضریب پراکندگی از میانگین $\frac{\frac{\Sigma|x_i - \mu|}{N}}{\bar{*}}$

ضریب پراکندگی از میانه $\frac{\frac{\Sigma|x_i - \mu d|}{N}}{\mu d}$

ضریب پراکندگی از مد $\frac{\frac{\Sigma|x_i - \mu o|}{N}}{\mu o}$

واریانس نسبی $VR = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$

قضیه چی بی شف:

در یک جامعه آماری که $x_N, \ldots, x_2, x_1$ داده دارد حداقل $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ درصد از داده‌ها در فاصله k انحراف معیار از میانگین قرار می‌گیرند که k عدد بزرگتر یا مساوی یک می‌باشد.

تأکید قضیه بر حداقل بودن تعداد داده‌ها به دلیل قابل تعمیم بودن قضیه به همه انواع توزیعها می‌باشد.

مثال: اگر در یک تحقیق که در مورد بهره‌وری کارکنان در ساعات کار شده است نمره ۱۱ به عنوان میانگین با واریانس ۴ بدست آمده باشد، حداقل چند درصد از نمرات کارکنان در فاصله ۱۵-۷ قرار می‌گیرند.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_x = ۱۱, \sigma_x = ۲ \\ ۷ = \mu_x - ۲\sigma_x \\ ۱۵ = \mu_x + ۲\sigma_x \end{array}\right\} \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow \% \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \% \left(1 - \frac{1}{۲^2}\right) = \% ۷۵$$

در نتیجه ۷۵٪ داده‌ها در فاصله ۱۵-۷ قرار می‌گیرد.

نکته مهم: در یک توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار σ_x ارتباط زیر بین میانگین و انحراف معیار برقرار است:

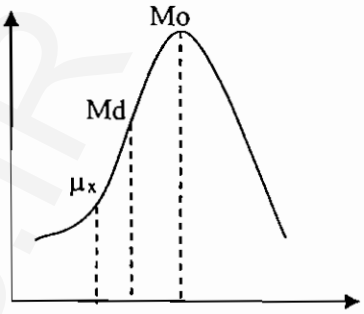
۱) ۶۸/۲۶٪ داده‌ها در فاصله $\mu_x \pm \sigma_x$ قرار می‌گیرند.

۲) ۹۵/۴۴٪ داده‌ها در فاصله $\mu_x \pm ۲\sigma_x$ قرار می‌گیرند.

۳) ۹۹/۷۳٪ داده‌ها در فاصله $\mu_x \pm ۳\sigma_x$ قرار می‌گیرند.

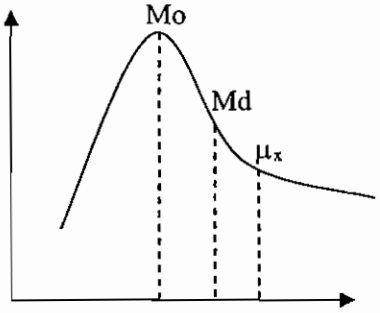
۸- پارامترهای انحراف از قرینگی (چولگی)

برای مقایسه دو جامعه علاوه بر پارامترهای مرکزی و پراکندگی، معیار دیگری به نام پارامترهای انحراف از قرینگی وجود دارد. انحراف از قرینگی (چولگی) در مقایسه با توزیع نرمال (متقارن) معین می‌شود. توزیع متقارن توزیعی است که پارامترهای مرکزی آن یعنی میانه، مد و میانگین با همدیگر مساوی باشند. توزیع‌های غیرمتقارن به دو صورت هستند: چوله به راست و چوله به چپ. در توزیع چوله به راست $Mo < Md < \mu_x$ می‌باشد (نمودار الف) و در توزیع چوله به چپ $\mu_x < Md < Mo$ می‌باشد (نمودار ب).



نمودار ب ـ چوله به چپ (چولگی منفی)

$\mu_x < Md < Mo$



نمودار الف ـ چوله به راست (چولگی مثبت)

$Mo < Md < \mu_x$

تعریف ضریب چولگی:

شاخص اندازه‌گیری پارامتر تعیین انحراف از قرینگی (چولگی)، ضریب چولگی است که با Sk نمایش داده می‌شود.

چولگی انواع زیر را دارد:

۱) ضریب چولگی اول پیرسون:

$$Sk_1 = \frac{\mu_x - Mo}{\sigma_x}$$

۲) ضریب چولگی دوم پیرسون:

$$Sk_2 = \frac{3(\mu_x - Md)}{\sigma_x}$$

۳) برای محاسبه دقیقتر ضریب چولگی از نسبت گشتاور مرتبه سوم مرکزی به مکعب انحراف معیار استفاده می‌شود. یعنی:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

نکته: زمانی‌که چولگی توزیع متعادل یا متناسب یا خفیف باشد، فرمول‌های پیرسون با یکدیگر برابر شده و رابطه زیر بوجود می‌آید:

$$\bar{x} - MO = 3(\bar{x} - Md)$$

که در آن:

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \mu_x)^3}{N} \quad \text{یا} \quad \mu_3 = \frac{\sum F_i (x_i - \mu_x)^3}{N}$$

$$\mu_3 = \sum f_i (x_i - \mu_x)^3$$

۴) روش دیگر محاسبه ضریب چولگی برحسب چندکها می‌باشد:

$$Sk_P = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$$

ضریب چولگی چارکی

$$Sk_Q = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

تفسیر ضریب چولگی:

۱- اگر $Sk = 0$ باشد، توزیع متقارن است (چولگی ندارد)

۲- اگر $Sk > 0$ باشد ، توزیع چولگی مثبت دارد.

۳- اگر $Sk < ۰$ باشد، توزیع چولگی منفی دارد.

۴- اگر $|Sk| \leq ۰/۱$ ، توزیع چولگی خفیف دارد (تقریباً نرمال است)

۵- اگر $|Sk| > ۰/۵$ باشد، توزیع چولگی شدید دارد.

۶- اگر $۰/۱ < |Sk| \leq ۰/۵$ باشد، توزیع چولگی کمی دارد.

مثال: در جامعه‌ای چارک‌های اول و سوم بترتیب ۴۱ و ۷۸ و میانه ۵۴/۵ می‌باشد، ضریب چولگی را محاسبه کرده و آن را تفسیر کنید.

$$Sk = \frac{Q_۳ - ۲Q_۲ + Q_۱}{Q_۳ - Q_۱} \Rightarrow Sk = \frac{۷۸ - ۲(۵۴/۵) + ۴۱}{۷۸ - ۴۱}$$

$Sk = ۰/۲۷$ توزیع چولگی مثبت و کم دارد.

مثال: در یک جامعه با حجم $N = ۲۰۰۰$ ، $\sum (x_i - \mu_x)^۳ = ۴۰۰۰۰$ و واریانس و میانگین آن بـه ترتیـب ۱۸ و ۲۰۰ می‌باشد. ضریب چولگی را محاسبه کرده و آن را تفسیر کنید:

$$\mu_۳ = \frac{\sum (x_i - \mu_x)^۳}{N} \Rightarrow \mu_۳ = \frac{۴۰۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۲۰$$

$$Sk = \frac{\mu_۳}{\sigma^۳} \Rightarrow Sk = \frac{۲۰}{\left(\sqrt{۱۸}\right)^۳} \Rightarrow Sk = \frac{۲۰}{۷۶/۳۶} = ۰/۲۶$$

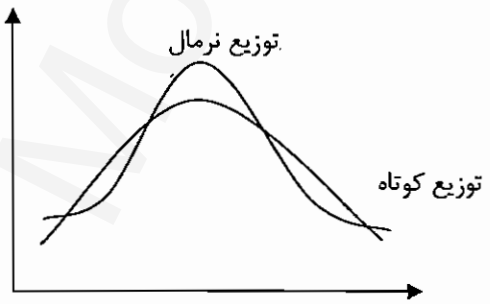
توزیع چولگی مثبت و کم دارد.

۹- پارامترهای انحراف از کشیدگی:

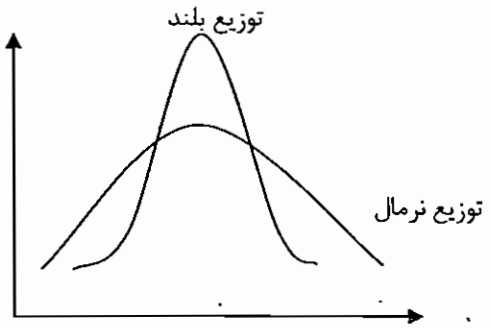
منظور از کشیدگی توزیع، میزان بلندی آن است. انحراف از کشیدگی نیز مانند چولگی جامعه آماری در مقایسه توزیع جامعه آماری با توزیع نرمال تعیین می‌شود. در واقع با پارامتر انحراف از کشیدگی، بلندی یا کوتاهی توزیع مورد نظر نسبت به توزیع نرمال تعیین می‌شود.

توزیع‌ها در مقایسه با توزیع نرمال دو حالت دارند:

الف) توزیع کوتاه: گروهی از توزیع‌های آماری نسبت به توزیع نرمال از پراکندگی بیشتری برخوردارند. این توزیع نسبت به توزیع نرمال کوتاهترند.



ب) توزیع بلند: گروهی از توزیع‌های آماری دارای داده‌هایی هستند که تمرکز آنها در اطراف میانگین بیش از توزیع نرمال است. این توزیع‌ها بلندتر از توزیع نرمال هستند.



ضریب کشیدگی:

شاخص پراکندگی جامعه نسبت به توزیع نرمال را ضریب کشیدگی می‌نامند و با E نمایش می‌دهند. اگر E کوچکتر از صفر باشد $(E<0)$ توزیع مورد نظر از توزیع نرمال کوتاهتر است و اگر E بزرگتر از صفر باشد $(E>0)$ توزیع موردنظر بلندتر از توزیع نرمال است و اگر $E=0$ باشد توزیع نرمال می‌باشد.

نکته مهم: قدرمطلق ضریب کشیدگی $(|E|)$ نشان‌دهنده میزان اختلاف پراکندگی (کشیدگی) توزیع مورد نظر با توزیع نرمال است. بطور کلی در مورد قدرمطلق کشیدگی $(|E|)$ سه حالت داریم:

۱) اگر $|E|\le 0/1$ باشد، توزیع جامعه از نظر پراکندگی تقریباً نرمال است.

۲) اگر $0/1<|E|\le 0/5$ باشد، توزیع از نظر پراکندگی دارای تفاوت اندکی با توزیع نرمال است.

۳)اگر $|E|>0/5$ باشد، تفاوت توزیع با توزیع نرمال از نظر پراکندگی فاحش است.

$$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$$

$$\mu_4=\frac{\Sigma(x_i-\mu_x)^4}{N} \quad \text{یا} \quad \mu_4=\frac{\Sigma F_i(x_i-\mu_x)^4}{N} \quad \text{یا} \quad \mu_4=\Sigma fi(x_i-\mu_x)^4$$

نکته: کشیدگی گشتاوری توزیع نرمال همیشه ۳ است و کشیدگی چندکی توزیع نرمال ۰/۲۶۳ می‌باشد.

مثال: گشتاورهای مرکزی رتبه دوم و سوم و چهارم به صورت زیر بدست آمده است:

$$\mu_2=8 \ ,\mu_3=12/5 \ ,\mu_4=224$$

مقدار ضریب کشیدگی و تفسیر آن چیست؟

$$\mu_2=\sigma^2=8\Rightarrow\sigma^4=8^2=64$$

$$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3\Rightarrow E=\frac{224}{64}-3\Rightarrow E=3/5-3=0/5>0$$

توزیع از توزیع نرمال کشیده‌تر است.

نکته:گشتاور مرکزی مرتبه دوم همان واریانس می‌باشد.

۱۰-گشتاورها

گشتاور مرتبه nام نسبت به هر عدد دلخواه (مانند a) را می‌توان به صورتهای زیر محاسبه نمود:

$$M_n(a)=\frac{\Sigma(x_i-a)^n}{N} \quad \text{یا} \quad M_n(a)=\frac{\Sigma F_i(x_i-a)^n}{N}$$

به عنوان مثال گشتاور مرتبه دوم نسبت به عدد دلخواه a را می‌توان از رابطه $M_2(a)=\frac{\Sigma(x_i-a)^2}{N}$ محاسبه نمود.

الف ـ گشتاورهای اولیه (نسبت به مبدأ)

برای محاسبه گشتاورهای اولیه کافی است در روابط بالا بجای a عدد صفر قرار دهیم $(a=0)$ گشتاورهای اولیه را با m نمایش می‌دهیم:

$$m_n=\frac{\Sigma x_i^n}{N} \quad \text{یا} \quad m_n=\frac{\Sigma F_i x_i^n}{N}$$

نکته: گشتاور مرتبه اول نسبت به مبدأ صفر برابر میانگین حسابی است یعنی $m_1=\mu x=\bar{x}$

ب ـ گشتاورهای مرکزی نسبت به میانگین (گشتاورهای مرکزی)

برای محاسبه گشتاورهای مرکزی بجای a مقدار μ_x را قرار می‌دهیم $(a=\bar{x})$. گشتاورهای مرکزی را با μ نمایش می‌دهیم:

$$\mu_n=\frac{\Sigma(x_i-\mu_x)^n}{N} \quad \text{یا} \quad \mu_n=\frac{\Sigma F_i(x_i-\mu_x)^n}{N}$$

مقدار گشتاور مرکزی مرتبه اول صفر و گشتاور مرکزی مرتبه دوم برابر با واریانس است.

روابط بین گشتاورها:

$$\mu_1 = 0 \qquad m_1 = M_1 + a$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \qquad m_2 = M_2 + 2aM_1 + a^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \qquad m_3 = M_3 + 3aM_2 + 3a^2M_1 + a^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 \qquad m_4 = M_4 + 4aM_3 + 6a^2M_2 + 4a^3M_1 + a^4$$

نکات مهم گشتاورها:

۱- گشتاورهای آماری نسبت به مبدا صفر و نسبت به میانگین حسابی حالات خاصی از گشتاورهای آماری نسبت به نقطه دلخواه x می‌باشند.

۲- به کمک گشتاورهای آماری می‌توان معیارها و پارامترها و فرمول‌های آماری را به طور ساده و خلاصه بیان کرد.

۳- گشتاور مرتبه اول نسبت به مبدأ صفر برابر میانگین حسابی می‌باشد: $m_1 = \bar{x}$

۴- گشتاور مرتبه اول نسبت به میانگین برابر صفر می‌باشد: $\mu_1 = 0$

۵- گشتاورهای آماری را می‌توان طبق روابطی به هم تبدیل کرد:

الف) رابطه تبدیل بین گشتاورهای عمومی به گشتاورهای مرکزی $\mu_n = (\mu - \mu_1)^n$

ب) رابطه تبدیل بین گشتاورهای عمومی به گشتاورهای اولیه $m_n = (\mu + a)^n$

ج) رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاورهای مرکزی $m_n = (m - m_1)^n$

د) رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاورهای عمومی $\mu_n = (m - a)^n$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

مجموعه اقتصاد

۱- ضریب تغییرات (coefficient of variation) عدد ۵ برابر است با: (اقتصاد ۷۴)

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) ۰

۲- کدامیک از روابط زیر بین میانگین حسابی $(\bar{x})$، میانگین هندسی $(\bar{x}_G)$ و میانگین هارمونیک $(\bar{x}_H)$ برقرار است؟ (اقتصاد ۷۴)

۱) $\bar{X}_H < \bar{X}_G < \bar{X}$ ۲) $\bar{X}_G < \bar{X} < \bar{X}_H$ ۳) $\bar{X}_G < \bar{X}_H < \bar{X}$ ۴) $\bar{X} < \bar{X}_G < \bar{X}_H$

۳- سه ماشین که به تولید یک کالا مشغولند، اولی یک کالا را در ۲، دومی در ۳ و سومی در ۶ دقیقه تولید می‌کنند. اگر سه ماشین با هم کار کنند بطور متوسط یک کالا در چند دقیقه تولید می‌شود؟ (اقتصاد ۷۴)

۱) ۳/۶۷ ۲) ۳/۳ ۳) ۳ ۴) ۳/۱

۴- در صورتیکه انحراف معیار ۱۲ عدد مساوی ۲/۴ باشد و به هر یک از اعداد این توزیع، عدد ۴ را اضافه کنیم، انحراف معیار جدید چقدر خواهد شد؟- (اقتصاد ۷۴)

۱) $۲/۴\sqrt{۴}$ ۲) ۹/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۲/۴

۵- قیمت سهام یک کارخانه از ۱۰۰ ریال در ۱۳۷۰ به ۱۶۰۰ ریال در سال ۱۳۷۴ رسیده است. متوسط نرخ افزایش قیمت سهام در این دوره چقدر است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) ٪۱۰۰ ۲) ٪۲۰۰ ۳) ٪۱۰ ۴) ٪۲۰

۶- میانگین یک جامعه آماری یک بار با استفاده از داده‌های خام μ_1 و بار دیگر با استفاده از جدول توزیع فراوانی μ_2 محاسبه شده است. کدامیک از موارد زیر معمولاً صادق است؟

۱) $\mu_1 = \mu_2$ ۲) $\mu_1 > \mu_2$ ۳) $\mu_1 \neq \mu_2$ ۴) $\mu_1 < \mu_2$

۷- برای محاسبه متوسط نرخ رشد تولید ناخالص ملی در پنج سال گذشته،از کدام شاخص استفاده می‌شود؟ (اقتصاد۷۷)

۱) میانگین حسابی ساده ۲) میانگین حسابی موزون

۳) میانگین هارمونیک (هم سازه) ۴) میانگین هندسی

۸- چارک سوم حقوق در یک سازمان ۶۵ هزار تومان است. یعنی سه چهارم کارکنان ..... هزار تومان حقوق می‌گیرند؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) تا ۶۵ ۲) ۶۵

۳) بیشتر از ۶۵ ۴) ۶۵ هزار تومان و بقیه کارکنان کمتر از ۶۵

۹- قیمت کالایی در سال گذشته ٪۲۰ کاهش و امسال ٪۲۰ افزایش داشته است. متوسط نرخ رشد قیمت این کالا در این دو سال چیست؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) صفر ۲) $\sqrt{۰/۹۶}$ ۳) $(۰/۹۶)^{۱/۲} - ۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\log ۰/۸ - \log ۰/۰۲)$

۱۰- در جامعه‌ای به حجم $N = ۵۰$ برای صفت متغیر x کمیت‌های زیر به دست آمده است: (اقتصاد ۷۸)

$\sum x_i = ۲۵۰ \ , \ \sum x_i^۲ = ۲۵۰۰$

ضریب تغییرات صفت x کدام است؟

۱) $CV = ٪۲۵$ ۲) $CV = ٪۵۰$ ۳) $CV = ٪۷۵$ ۴) $CV = ٪۱۰۰$

۱۱- میانگین وانحراف معیار حقوق در یک سازمان به ترتیب ۵۰ هزار تومان و ۲۰ هزار تومان است، اگر حقوق در این سازمان ۲۵٪ افزایش یابند، ضریب تغییرات حقوق چه خواهد شد؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) نصف خواهد شد ۲) تغییر نخواهد کرد. ۳) چهار برابر خواهد شد ۴) ۲۵ درصد افزایش خواهد یافت.

۱۲- واریانس نمونه متشکل از سه عدد ۵۶۷۹۲۱۲۴، ۵۶۷۹۲۱۱۲۰ و ۵۶۷۹۲۱۱۲۲ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۲۵۱۲۴}{۳}$ ۴) ۲۵۱۱۲

۱۳- کدام گزینه یکی از خواص مهم مشخصه میانگین می‌باشد؟ (اقتصاد ۷۹)

۱) برای هر توزیع، میانگین حسابی از نما کوچکتر است.

۲) در هر توزیع، حاصل جمع قدرمطلق انحرافات مقادیر متغیر از میانگین به حداقل می‌رسد.

۳) در هر توزیع، مجموع مجذورات تفاضل‌های مقادیر از میانگین به حداقل می‌رسد.

۴) در هر توزیع، مجموع توان سوم انحرافات مقادیر متغیر از میانگین حسابی به حداقل می‌رسد.

۱۴- در صورتیکه به بزرگترین عدد یک سری داده مقدار ثابتی افزوده می‌شود، این افزایش بر کدام معیار تأثیر نمی‌گذارد؟ (اقتصاد ۸۰)

۱) ضریب پراکندگی ۲) میانه ۳) میانگین ۴) واریانس

۱۵- اگر واریانس ۱۰ مشاهده برابر ۵۰ باشد و مشاهدات را در ۴ ضرب و با ۷ جمع کنیم، واریانس جدید برابر است با: (اقتصاد ۸۰)

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۲۸ ۳) ۸۰۰ ۴) ۹۱۲۰

۱۶- جدول توزیع فراوانی زیر را در نظر بگیرید. اگر $N = ۲۸, \mu = ۲$ باشد، مقادیر b,a عبارتند از: (اقتصاد ۸۱)

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
F_i	۳	a	۱۰	b	۳

۱) a = b = ۶ ۲) a = ۵ , b = ۷ ۳) a = b = ۷ ۴) a = ۴ , b = ۸

۱۷- اتومبیلی ۶۰ کیلومتر اول از مسافتی را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت و ۶۰ کیلومتر دوم را با سرعت ۱۰۰ کیلومتردر ساعت طی کرده است. برای محاسبه سرعت متوسط اتومبیل، کدامیک از میانگین‌های زیر مناسب است؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) حسابی ۲) موزون ۳) همساز (هارمونیک) ۴) هندسی

۱۸- میانگین نمرات آمار و واریانس دو کلاس به صورت زیر است: (اقتصاد ۸۱)

کلاس	۱	۲
تعداد دانشجو N_i	۲۰	۳۰
میانگین نمرات μ_i	۱۵	۱۰
واریانس نمرات σ_i^2	۱۷	۱۲

میانگین و واریانس نمرات کل دانشجویان دو کلاس چقدر است؟

۱) ۱۲/۵ و ۲۰ ۲) ۱۲ و ۲۰ ۳) ۱۲/۵ و ۳۵ ۴) ۱۲ و ۳۵

۱۹- برای تعیین آنکه در ۳۰ روز گذشته، به نسبت، قیمت دلار از ثبات بیشتری برخوردار بوده است یا یورو، استفاده از کدام شاخص آماری مناسبتر است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) انحراف متوسط ۲) ضریب پراکندگی ۳) ضریب چولگی ۴) واریانس

۲۰- فرض کنید شاخص قیمت خرده فروشی از ۲۰۰ در سال ۱۳۷۸ به ۴۵۰ در سال ۱۳۸۰ رسیده است. متوسط نرخ تورم سالانه در این فاصله زمانی چقدر بوده است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) ۵۰٪ ۲) ۶۲/۵٪ ۳) ۱۲۵٪ ۴) ۱۵۰٪

۲۱- برای مقادیر متغیر تصادفی x که به شرح زیر است: (اقتصاد ۸۳)

x : ۶۰,۴۰,۶۰,۸۰

۱) فقط میانگین حسابی و میانه با هم برابرند. ۲) فقط میانگین حسابی و نما با هم برابرند.

۳) میانگین حسابی، میانه و نما با هم برابرند. ۴) فقط میانه و نما با هم برابرند.

۲۲- اطلاعات جمع‌آوری شده براساس نظرسنجی از مشتریان یک بانک در مورد ساعت مناسب شروع به کار بانک‌ها در محدوده زمانی ساعت ۷ تا ۹ صبح در دسترس است. کدام شاخص یا شاخص مرکزی برای تصمیم‌گیری مناسب است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) میانگین و میانه ۲) میانه و نما ۳) میانگین ۴) نما

۲۳- در یک بررسی آماری در خصوص نمرات هوش دانش آموزان یک منطقه آموزش و پرورش کمیت‌های زیر بدست آمده است: (اقتصاد ۸۳)

$Q_1 = ۸۰$ (چارک اول) $\bar{x} = ۱۲۰$ (میانگین حسابی)

$Q_3 = ۱۴۰$ (چارک سوم) $Md = ۱۱۰$ (میانه)

$s = ۲۰$ (انحراف معیار) $Mo = ۱۰۷$ (نما)

کدامیک از موارد زیر درست است؟

۱) نمرات نیمی از دانش‌آموزان بین ۸۰ تا ۱۴۰ می‌باشد.

۲) نمرات نیمی از دانش‌آموزان کمتر از ۱۲۰ است.

۳) نمرات ۷۵ درصد از دانش‌آموزان بیش از ۱۴۰ می‌باشد.

۴) نمرات بیشتر دانش‌آموزان ۱۴۰ و بیشتر است.

۲۴- وضعیت تغییرات (C.V.) متغیر x برابر ۰/۲ است. اگر هر یک از مقادیر متغیر تصادفی x را به $a = ۱۰$ تقسیم کنیم، ضریب تغییرات چه مقدار خواهد شد؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) A' ۲) $(C.V.) = ۰/۲$ ۳) $(C.V.) = ۰/۰۴$ ۴) $(C.V.) = ۲$

۲۵- اگر میانگین مقادیر X برابر ۱۰ و میانگین مقادیر مجذورات X برابر ۱۰۰۰ باشد، واریانس مقادیر X چقدر است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) ۶۰۰ ۲) ۷۰۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۹۰۰

۲۶- اگر در جامعه‌ای که دارای ۱۰ مشاهده است $\sum x = ۴۰$, $\sum x^2 = ۲۰۰$ باشد، ضریب پراکندگی چقدر است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۷- در یک جدول توزیع فراوانی که شامل ۱۰۰ مشاهده است، میانگین ۶ و $\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 = ۵۰۰۰$ است. واریانس این مشاهدات چقدر است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۱۴ ۳) ۴۴ ۴) ۴۹

مجموعه حسابداری

۲۸- واریانس داده‌ها با جدول فراوانی روبه‌رو کدام است؟ (حسابداری ۷۸)

X	-۱	۰	۱	۲
F_i	۲	۳	۴	۱

۱) ۰/۷۶ ۲) ۰/۷۸ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

۲۹- میانگین ۲۰ داده آماری ۱۵ و واریانس آنها برابر ۲/۲۵ است. درصد ضریب تغییرات آنها چقدر است؟ (حسابداری ۷۸)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۳۰- اگر میانگین داده‌های $2x_1 - 3 , 2x_2 - 3 , ..., 2x_{20} - 3$ برابر ۲۹ باشد، آنگاه $\sum x_i$ کدام خواهد بود؟ (حسابداری ۷۸)

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۳۱- چارک سوم جدول زیر کدام است؟ (حسابداری ۷۸)

cL	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۳
F_i	۱۰	۳۰	۲۰

۱) ۶/۸ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰/۵

۳۲- ضریب تغییرات برای مقایسه تغییرات دو جامعه در حالت زیر بکار می‌رود: (حسابداری ۷۸)

۱) میانگین‌های مختلف داشته باشند.

۲) دارای مقادیر منفی باشند.

۳) دارای دامنه تغییرات یکسان باشند.

۴) دارای میانگین‌های مختلف باشند و یا با واحدهای اندازه‌گیری مختلف اندازه‌گیری شده باشند.

۳۳- در یک توزیع متمایل به راست، کدام گزینه صحیح است؟ (حسابداری ۷۸)

۱) $\mu_x > Md > Mo$ ۲) $\mu_x > Mo < Md$ ۳) $Mo > Md > \mu_x$ ۴) $Md > Mo < \mu_x$

۳۴- خاصیت مهم میانه (Median) برای داده‌های آماری عبارتست از مجموع: (حسابداری ۷۹)

۱) انحرافات از میانه صفر است.

۲) مجذور انحرافات از میانه حداقل است.

۳) قدر مطلق انحرافات از میانه صفر است.

۴) قدر مطلق انحرافات از میانه، از مجموع قدر مطلق انحرافات از هر عدد دیگری کمتر است.

۳۵- اگر $N = 10 , \sum_{i=1}^{10} X_i = 60 , \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 400$ باشد، ضریب پراکندگی چقدر است؟ (حسابداری ۷۹)

۱) ۰/۳۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۷

۳۶- کدام پارامتر پراکندگی برای توزیع فراوانی زیر مناسبتر است؟ (حسابداری ۸۰)

حدود طبقات	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰ و بیشتر
فراوانی	۲۵	۳۵	۳۰	۱۰

۱) انحراف چارکی ۲) انحراف معیار ۳) ضریب تغییرات ۴) انحراف متوسط از میانگین

۳۷- با فرض اینکه داشته باشیم $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3 , \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 6$، ضریب تغییرات کدام است؟ (حسابداری۸۰)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۳۸- در جدول توزیع فراوانی زیر مقدار مد و میانه به ترتیب (از چپ به راست) کدام است؟ (حسابداری ۸۰)

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
فراوانی	۱۰	۳۰	۱۰	۲۵	۲۵

۱) (۰/۵۰و۰) ۲) (۱/۵و۰) ۳) (۰/۵۰ و ۲۵) ۴) (۲۵و۳۰)

۳۹- جمعیت خانوادهای یک روستا به صورت زیر است: (حسابداری ۸۲)

جمعیت خانواده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
تعداد	۵	۱۰	۴۰	۲۵	۱۵	۵	۱۰۰

میانه جمعیت خانواده ها، چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۳۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۴۰- اگر μ_x میانگین $x_1, x_2, ..., x_N$ باشد، واریانس مشاهدات $\left(-\frac{x_1}{2}+3\right), \left(-\frac{x_2}{2}+3\right), ..., \left(-\frac{x_N}{2}+3\right)$ کدام است؟ (حسابداری ۸۱)

۱) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2$ ۲) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2+3$ ۳) $\frac{1}{4}\sigma_x^2+3$ ۴) X

۴۱- تعداد کارکنان کارخانه‌ای طی ۴ سال متوالی عبارتند از: ۱۵۰،۱۶۰،۱۸۰،۱۹۰ متوسط رشد سالانه تعداد کارکنان چند درصد است؟ (حسابداری ۸۲)

۱) ٪۵/۵ ۲) ٪۶/۰۸ ۳) ٪۷/۴۰ ۴) ٪۸/۲۰

۴۲- کدامیک از پارامترهای زیر بیشتر تحت تأثیر انحرافات بزرگ است؟

۱) واریانس ۲) نیم دامنه ۳) انحراف چارکی ۴) انحرف متوسط از میانگین

۴۳- میانگین قد دانش آموزان مدرسه‌ای ۱۲۰ سانتی متر با واریانس ۱۰۰ است. اگر هر فرد ٪۱۴ قدش در سال آینده بلند شود، میانگین و واریانس قد آنها در سال آینده چقدر خواهد بود؟ (از راست به چپ) (حسابداری ۸۲)

۱) ۱۲۰ و ۱۰۰ ۲) ۱۱۴ و ۱۲۰ ۳) ۱۱۴ و ۱۳۶/۸ ۴) ۱۳۶/۸ و ۱۲۹/۹۶

۴۴- میانه داده‌های جدول زیر کدام است؟ (حسابداری ۸۳)

P	۵	۱۲	۱۵	۲۰
f_i	۷	۸	۱۲	۴

۱) ۱۰ ۲) ۱۳/۵ ۳) ۱۵ ۴) هیچکدام

۴۵- اگر ۸۰ – ۸۹ , ۹۰ – ۹۹ دو طبقه متوالی از یک جدول طبقه‌بندی باشند، فاصله طبقات کدام است؟ (حسابداری ۸۳)

۱) ۱۰ ۲) ۹/۵-۱۰ ۳) ۹/۵ ۴) ۹

۴۶- با فرض در اختیار داشتن $\sum_{j=1}^{N}|x_j-a|$ به شرط آنکه a میانه باشد، همواره حاصل این عبارت: (حسابداری ۸۳)

۱) حداقل است. ۲) حداکثر است.

۳) (حداکثر +حداقل) $\frac{1}{2}$است. ۴) مقداری بین حداقل و حداکثر است.

۴۷- میانگین هندسی اعداد a,b و ۱۲ و ۹ و ۱۲/۵ و ۶ برابر $\frac{9}{2}$ است، میانگین هندسی b,a کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{27}{20}$ ۲) $\frac{27}{40}$ ۳) $\frac{81}{40}$ ۴) $\frac{81}{80}$

۴۸- در جدول مقابل ، چارک سوم کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

حد و دسته	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶
فراوانی	۹	۱۵	۱۸	۱۰

۱) ۲۰/۳ ۲) ۲۰/۶ ۳) ۲۱/۳ ۴) ۲۱/۷

۴۹- در ۱۰۰ داده آماری $\sum_{i=1}^{100}x_i^2=400$, $\sum_{i=1}^{100}x_i=120$ است، مقدار $\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2$ کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

۱) ۶۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۹۶ ۴) ۲۵۶

۵۰- در جدول مقابل، تعداد میانگین $\mu=15/5+a$ است، عدد a کدام است؟ (حسابداری ۸۴)

حد و دسته	۸-۱۱	۱۱-۱۴	۱۴-۱۷	۱۷-۲۰	۲۰-۲۳
فراوانی	۴	۱۰	۱۸	۱۲	۶

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۳۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۲

۵۱- نمره استاندارد شده دانشجویی در درس اقتصاد خرد برابر ۰/۸ و در درس آمار برابر ۰/۵ است. اگر نمرات درس اقتصاد خرد ۱۰٪ و نمرات درس آمار ۲۰٪ افزایش داده شوند، نمرات استاندارد شده وی بترتیب در درس اقتصاد خردو آمار چقدر خواهد شد؟ (حسابداری ۸۴)

۱) ۰/۸۸ و ۰/۶ ۲) ۰/۸ و ۰/۵ ۳) ۰/۷۳ و ۰/۴۲ ۴) ۰/۹ و ۰/۷

مجموعه مدیریت

۵۲- سرمایه شرکتی در سال ۱۳۶۴، ۲ میلیون تومان، درسال ۱۳۶۵، ۴ میلیون تومان و در سال ۱۳۶۶، ۳۲ میلیون تومان بوده است. بطورمتوسط این شرکت هر سال نسبت به سال قبل چند برابر سود داشته است؟ (مدیریت ۷۵)

۱) ۳/۸۴ ۲) ۴ ۳) $\frac{۳۸}{۳}$ ۴) $(۲۵۶)^{\frac{۱}{۳}}$

۵۳- اگر واریانس متغیر تصادفی x برابر ۴ باشد پس واریانس ۲x-۳ برابر است با :(مدیریت۷۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۵۴- اگر میانگین و واریانس x به ترتیب ۳ و ۹ باشد میانگین و انحراف معیار $Y=\frac{۱}{۲}X+۱$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) $\sigma=۲/۵ , \mu=۱/۵$ ۲) $\sigma=۱/۵ , \mu=۱/۵$ ۳) $\sigma=۴/۵ , \mu=۲/۵$ ۴) $\sigma=۱/۵ , \mu=۲/۵$

۵۵- اگر واریانس ۵ عدد برابر ۱۴ و $\Sigma x_i^۲ = ۳۹۰$ باشد میانگین اعداد برابر است با: (مدیریت ۷۸)

۱) ۵/۱۲ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۵۶ ۴) ۱/۶

۵۶- اگر $\Sigma x_i^۲ = ۵۰۰ , \Sigma x_i = ۲۰۰ , N = ۱۰۰$ باشد مقدار ضریب تغییرات کدام است؟ (مدیریت ۷۸)

۱) ۰/۵۰ ۲) ۰/۹۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۷- جدول طبقه‌بندی زیر داده شده است: (مدیریت ۷۷)

فاصله طبقاتی cL	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰
(فراوانی) cL	۱۰	۳۰	۲۰

مقدار چارک سوم کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰/۵ ۳) ۳۲/۵ ۴) ۴۵

۵۸- چارک اول جدول زیر کدام است؟ (مدیریت ۷۸)

حدود طبقات	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۳
فراوانی مطلق	۱۰	۳۰	۲۰

۱) ۵ ۲) ۶/۱۷ ۳) ۹/۵ ۴) ۱۰

۵۹- اگر سه اتومبیل مسیر ۶۰ کیلومتری بین دو منطقه را به ترتیب با سرعت ۱۲۰، ۶۰، ۹۰ کیلومتر در ساعت طی نماید میانگین سرعت این سه اتومبیل برابر با چند کیلومتر در ساعت است؟ (مدیریت ۷۹)

۱) تقریباً ۸۳ ۲) تقریباً ۸۶ ۳) تقریباً ۹۰ ۴) ۹۰

۶۰- میانگین سن یک گروه ۱۲ سال و ضریب تغییرات سن آنان ۲۰ درصد است. انحراف معیار سن آنان چقدر است؟ (مدیریت۷۹)

۱) ۰/۶ ۲) ۲/۴ ۳) ۶۰ ۴) ۲۴۰

۶۱- با فرض در اختیار داشتن $\Sigma_{i=1}^{N}|Y_i - a|$ به شرط آنکه a میانه باشد همواره حاصل این عبارت ..... است. (مدیریت ۸۰)

۱) حداقل ۲) حداکثر ۳) مقداری بین حداقل و حداکثر ۴) نا مشخص

۶۲- کدام نمودار برای نمایش مشاهدات کمی طبقه‌بندی نشده بکار می‌رود؟ (مدیریت ۸۱)

۱) پاره تو ۲) چند ضلعی ۳) ریشه و برگ ۴) بافت نگار

۶۳- در توزیع زیر مد کدام است؟ (مدیریت ۸۲)

CL	۳-۵	۶-۸	۹-۱۱	جمع
F_i	۴	۲۰	۱۲	۳۶

۱) ۶/۳۳ ۲) ۶/۵۳ ۳) ۷/۵ ۴) ۲۰

۶۴- میانگین و انحراف معیار حقوق کارکنان در یک بنگاه به ترتیب ۸۰ هزار تومان و ۲۰ هزار تومان است. اگر حقوق در این بنگاه ۱۲/۵ درصد افزایش یابد ضریب تغییرات چقدر خواهد شد؟ (مدیریت ۸۲)

۱) ۱۲/۵ درصد ۲) ۲۰ درصد ۳) ۲۵ درصد ۴) ۴۰ درصد

۶۵- خاصیت مهم میانه آن است که: (مدیریت ۸۲)

۱) مجموع انحراف از میانه صفر است . ۲) تعداد انحرافات از میانه حداقل است
۳) مجذور انحرافات از میانه حداقل است. ۴) مجموع قدر مطلق انحراف از میانه حداقل است

۶۶- اتومبیلی مسیری را با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت رفته و $\frac{1}{3}$ مسیر را با سرعت ۸۰ کیلومتر و باقی مانده را با سرعت ۱۲۰ کیلومتر برگشته است. متوسط سرعت چگونه است؟ (مدیریت ۸۲)

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱/۴ ۴) ۱۰۲/۸

۶۷- اگر N_i تعداد جامعه آماری $i\times$، μ_i و σ_i^2 بترتیب میانگین و واریانس باشد، واریانس کل این جدول کدام است؟ (مدیریت ۸۲)

N_i	۱۰۰	۲۰۰	۷۰۰
μ_i	۸۰	۹۰	۱۰۰
σ_i^2	۱۶۰۰	۲۵۰۰	۲۵۰۰

۱) ۲۲۰۰ ۲) ۲۲۳۳/۳ ۳) ۲۴۱۰ ۴) ۲۴۵۴

۶۸- راننده اتومبیلی $\frac{1}{3}$ مسافت مورد نظر را با سرعت ثابت $60\frac{km}{h}$ و بقیه مسافت را با سرعت $80\frac{km}{h}$ رفته است. سرعت متوسط در این مسافت چند کیلومتر بر ساعت است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۷۰ ۲) ۷۱/۵ ۳) ۷۲ ۴) ۷۳/۳۳

۶۹- در ۵۰ داده آماری میانه $Md=12$, $\sum_{i=1}^{50} x_i = 550$ است، اگر $\sum_{i=1}^{50}|x_i-12| = A$, $\sum_{i=1}^{50}|x_i-11| = B$ آنگاه: (مدیریت ۸۴)

۱) $A<B$ ۲) $A=B$ ۳) $A>B$ ۴) $A=B-1$

۷۰- در جدول داده‌های آماری، مد (Mo) کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

حدود دسته	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴	۲۴-۲۷
فراوانی	۱۸	۲۳	۳۴	۲۵

۱) ۲۱/۹۰ ۲) ۲۲/۶۵ ۳) ۲۲/۸۵ ۴) ۲۳/۱۵

۷۱- در جدول داده‌های سوال قبل، مقدار میانگین $\mu = 22/5 - b$ است. عدد b کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۰/۸۶ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۱/۰۲ ۴) ۱/۱۲

۷۲- در ۸۰ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۵ و ۲ محاسبه شده‌اند. اگر به هر یک از داده‌های موجود یک واحد افزوده شود، درصد ضریب پراکندگی داده‌های جدید کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) ۲۵ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۷۳- کدام دسته از فنون آماری زیر بر فرض آزاد از توزیع بنا شده‌اند؟ (مدیریت ۸۲)

۱) پارامتریک ۲) ناپارامتریک ۳) توصیفی ۴) استنباطی

۷۴- کدام مقیاس برای اندازه‌گیری از ویژگی‌های مهمتری برخوردار است؟ (حسابداری ۸۳) (حسابداری ۸۴)

۱) نسبی ۲) اسمی ۳) رتبه‌ای ۴) فاصله‌ای

۷۵- در یک تحقیقات، افراد جامعه به طبقات کم درآمد، متوسط و پردرآمد تقسیم‌بندی شده‌اند. کدام نوع مقیاس اندازه‌گیری متغیرها مورد بحث است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) اسمی ۲) ترتیبی ۳) فاصله‌ای ۴) نسبتی

۷۶- فرض کنید دهک ششم حقوق کارکنان در یک موسسه برابر با ۱۳۵ هزار تومان است. این بدان معنی است که حقوق دریافتی ۴۰ درصد کارکنان:

۱) بیشتر از ۱۳۵ هزار تومان است. ۲) درست برابر با ۱۳۵ هزار تومان است

۳) کمتر یا مساوی ۱۳۵ هزار تومان است ۴) ۱۳۵ هزار تومان و بقیه کارکنان بیشتر از ۱۳۵ هزار تومان است.

۷۷- در جامعه‌ای با حجم $N=20$ کمیت‌های زیر محاسبه شده‌اند ضریب چولگی توزیع (α_3) چقدر است؟

$$\sum(x_i-\mu)^2=2000 \qquad \sum(x_i-\mu)^3=-328$$

۱) ۰/۰۳۲۸ ۲) ۰/۰۱۶۴ ۳) -۰/۰۱۶۴ ۴) -۰/۰۳۲۸

۷۸- نرخ رشد تولیدات یک کارخانه تولیدی طی دو سال گذشته به‌ترتیب ۸۰٪ و ۲۰٪- بوده است. متوسط نرخ رشد تولید سالانه این کارخانه چقدر است؟

۱) ٪۲۰ ۲) ٪۳۰ ۳) ٪۵۰ ۴) ٪۶۰

۷۹- در بررسی اثر بخشی یک دوره آموزشی مدیریت، از یک گروه گواه و یک گروه آزمایش استفاده شده است. گروه فرضیه‌های این نوع تحقیق چگونه‌اند؟

۱) همبسته ۲) مستقل ۳) جور شده ۴) توصیفی

۸۰- در یک کارگاه ۵ ماشین با سرعت ۴ دور در ثانیه و ۳ ماشین با سرعت ۶ دور در ثانیه کار می‌کند سرعت متوسط این ماشین‌ها چند دور در ثانیه است؟

۱) ۴/۸۵ ۲) ۴/۷۵ ۳) ۴/۶۳ ۴) ۴/۵۷

۸۱- در ۴۰ داده آماری مجموع داده‌ها برابر ۱۰۰ و مجموع مجذورات آن‌ها ۳۴۰ می‌باشد. ضریب پراکندگی کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۸۲- در داده‌های آماری طبقه‌بندی شده

حدود طبقه	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴	۲۴-۲۷	۲۷-۳۰
فراوانی	۷	۱۱	۱۷	۹	۶

مد کدام است؟

۱) ۲۱/۹ ۲) ۲۲/۱ ۳) ۲۲/۳ ۴) ۲۲/۵

۸۳- در یک توزیع آماری ضریب کشیدگی برابر ۰۸۰٪ - محاسبه شده است. پراکندگی این توزیع و منحنی آن چگونه است؟

۱) تقریباً نرمال ـ بلندتر از نرمال ۲) تقریباً نرمال ـ کوتاهتر از نرمال

۳) تفاوت اندکی با نرمال ـ کوتاهتر از نرمال ۴) تفاوت اندکی با نرمال ـ بلندتر از نرمال

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- گزینه ۴ صحیح است.

چون عدد ثابت است میانگین آن خود آن عدد و واریانس آن صفر است.

$$CV=\frac{\sigma}{\mu}\times ۱۰۰=\frac{۰}{۵}\times ۱۰۰=۰$$

۲- گزینه ۱ صحیح است.

همواره $\bar{X}_H<\bar{X}_G<\bar{X}$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از میانگین هارمونیک خواهیم داشت:

$$\bar{x}_H=\frac{n}{\sum\frac{۱}{x_i}}=\frac{۳}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}}=۳$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$y_i=x_i+۴ \Rightarrow \sigma_{y_i}=\sigma_{x_i}=۲/۴$$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$P_n=P_۰(۱+i)^n \Rightarrow P_{۱۳۷۴}=P_{۱۳۷۰}(۱+i)^۴ \Rightarrow ۱۶۰۰=۱۰۰(۱+i)^۴$$

$$\Rightarrow (۱+i)^۴=۱۶ \Rightarrow ۱+i=۲ \Rightarrow i=۱ \Rightarrow \%i=\%۱۰۰$$

۶- گزینه ۱ صحیح است.

۷- گزینه ۴ صحیح است.

۸- گزینه ۱ صحیح است.

همانطور که گفته شد چارک سوم بدین معناست که ۷۵٪ ($\frac{۳}{۴}$) داده‌ها کمتر از آن مقدار هستند.

۹- گزینه ۱ صحیح است.

۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu_x=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{۲۵۰}{۵۰}=۵$$

$$\sigma_x^۲=\frac{\sum x_i^۲}{N}-(\mu_x)^۲ \Rightarrow \sigma_x^۲=\frac{۲۵۰۰}{۵۰}-(۵)^۲ \Rightarrow \sigma_x^۲=۲۵ \Rightarrow \sigma_x=۵$$

$$C.V=\frac{\sigma_x}{\mu_x}\times ۱۰۰=\frac{۵}{۵}\times ۱۰۰ \Rightarrow CV=\%۱۰۰$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا ضریب تغییرات قبل از افزایش حقوق و سپس ضریب تغییرات پس از افزایش حقوق را محاسبه کرده و سپس آنها را با هم مقایسه می‌کنیم.

پیش از افزایش حقوق $\Rightarrow CV=\frac{\sigma_x}{\mu_x}\times ۱۰۰=\frac{۲۰}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۴۰$

پس از افزایش حقوق $\Rightarrow y_i=x_i+۰/۲۵\,x_i \Rightarrow \mu_{y_i}=\mu_{x_i}+۰/۲۵\mu_{xi} \Rightarrow \mu_{yi}=۵۰+۰/۲۵(۵۰)=۶۲/۵$

$$\sigma_{y_i}=\sigma_{x_i}+۰/۲۵\sigma_{x_i} \Rightarrow \sigma_{y_i}=۲۰+(۰/۲۵\times ۲۰)=۲۵$$

$$CV=\frac{۲۵}{۶۲/۵}\times ۱۰۰=\%۴۰$$

همانطور که مشخص است ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد.

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

همانطور که گفتیم با کسر کردن مقدار ثابتی از همه داده‌ها واریانس تغییری نخواهد کرد. پس اگر از هر سه داده عدد ۵۶۷۹۲۱۱۲۰ را کسر کنیم داده‌های جدید عبارتند از ۴، ۰ و ۲. پس واریانس این داده‌ها برابر با واریانس داده‌های اولیه است.

$$\mu_x = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۰+۴+۲}{۳} = ۲$$

$$V(x) = \frac{\sum (x_i - \mu_x)^۲}{N-۱} = \frac{(۰-۲)^۲ + (۲-۲)^۲ + (۴-۲)^۲}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\sum (x_i - \mu_x)^۲ = Min$$

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

۱۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$V(x_i) = ۵۰$$

$$y_i = ۴x_i + ۷ \Rightarrow \sigma^۲_{y_i} = ۴^۲ \sigma^۲_{x_i} \Rightarrow \sigma^۲_{y_i} = ۱۶ \times ۵۰ = ۸۰۰$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\mu = \frac{\sum x_i f_i}{N} \Rightarrow \frac{a + ۲۰ + ۳b + ۱۲}{۲۸} = ۲ \Rightarrow a + ۳b + ۳۲ = ۵۶ \Rightarrow a + ۳b = ۲۴$$

با جایگذاری چهار گزینه در رابطه بالا متوجه می‌شویم که گزینه ۱ درست است یعنی $a = b = ۶$.

۱۷- گزینه ۳ صحیح است.

قبلاً گفتیم که در این موارد (مقیاسهای ترکیبی) از میانگین هارمونیک استفاده می‌گردد.

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\mu = \frac{\sum N_i \mu_i}{N} = \frac{(۲۰ \times ۱۵) + (۳۰ \times ۱۰)}{۵۰} = ۱۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum N_i \sigma_i^۲}{N} + \frac{\sum N_i (\mu_i - \mu)^۲}{N} = \frac{(۲۰ \times ۱۷) + (۳۰ \times ۱۲)}{۵۰} + \frac{۲۰(۱۵-۱۲)^۲ + ۳۰(۱۰-۱۲)^۲}{۵۰} = ۲۰$$

۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

چون واحد اندازه‌گیری داده‌ها در جامعه آماری نامتجانس هستند از ضریب پراکندگی استفاده می‌کنیم.

۲۰- گزینه ۱ صحیح است.

گفتیم که برای محاسبه نرخ تورم سالیانه از میانگین هندسی استفاده می‌کنیم.

$$\bar{x}_G = \sqrt{\frac{P_{۱۳۷۹}}{P_{۱۳۷۸}} \cdot \frac{P_{۱۳۸۰}}{P_{۱۳۷۹}}} = \sqrt{\frac{P_{۱۳۸۰}}{P_{۱۳۷۸}}} = \sqrt{\frac{۴۵۰}{۲۰۰}} = ۱/۵$$

۲۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$x_i = ۶۰, ۴۰, ۶۰, ۸۰$$

$$\mu_x = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۴۰+۶۰+۶۰+۸۰}{۴} = ۶۰$$

$$\text{شماره میانه} = \frac{n+۱}{۲} = \frac{۴+۱}{۲} = ۲/۵ \Rightarrow \text{میانه}(md) = \frac{x_۲ + x_۳}{۲} = \frac{۶۰+۶۰}{۲} = ۶۰$$

$$Mo = ۶۰$$

میانگین حسابی ، میانه و نما با هم برابرند.

۲۲- گزینه ۴ صحیح است.

چون نظرسنجی ابست برای تصمیم‌گیری ساعتی را انتخاب می‌کنیم که مدنظر اغلب مشتریان بوده است پس از مد (نما) استفاده می‌کنیم.

۲۳- گزینه ۱ صحیح است.

۵۰٪ داده‌ها بین چارک اول و چارک سوم قرار دارند.

۲۴- گزینه ۲ صحیح است.

ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند چون اگر هر یک از مقادیر متغیر تصادفی را بر ۱۰ تقسیم کنیم میانگین و واریانس نیز بر ۱۰ تقسیم می‌شوند.

$$\sigma_2=\frac{1}{10}\sigma_1 ,\mu_2=\frac{1}{10}\mu_1 \Rightarrow CV=\frac{\sigma_2}{\mu_2}\times 100 \overset{\text{جدید}}{\Rightarrow} CV=\frac{\frac{1}{10}\sigma_1}{\frac{1}{10}\mu_1}\times 100=\frac{\sigma_1}{\mu_1}\times 100=CV \quad \text{قدیم}$$

۲۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu_x=10 \qquad \sigma_x^2=\frac{\sum x_i^2}{N}-\mu_x^2 \Rightarrow \sigma_x^2=1000-(10)^2 \Rightarrow \sigma_x^2=900$$

$$\frac{\sum x_i^2}{N}=1000$$

۲۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases}\mu=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{40}{10}=4\\ \sigma^2=\frac{4\times 2}{8}-(\frac{4x}{8})^2=20-16=4 \qquad \sigma=2\end{cases}$$

$$C.V=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0/5$$

۲۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{100} f_i x_i^2=5000 \rightarrow \sigma^2=\frac{\sum f_i x_i^2}{N}-(\frac{\sum f_i x_i}{N})^2=\frac{5000}{100}-(6)^2=14\\ \mu=\sum_{i=1}^{100}\frac{f_i x_i}{N}=6\\ N=100\end{cases}$$

۲۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sum F_i x_i=-2+0+4+2=4$$

$$\sum F_i x_i^2=2+0+4+4=10$$

$$\sigma^2=\frac{\sum x_i^2 F_i}{N}-\left(\frac{\sum x_i F_i}{N}\right)^2 \Rightarrow \sigma^2=\frac{10}{10}-\left(\frac{4}{10}\right)^2=1-0/16=0/84$$

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$V(x)=2/25 \Rightarrow \sigma_x=1/5$$

$$CV=\frac{\sigma_x}{\mu_x}\times 100=\frac{1/5}{15}\times 100=\%10$$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$(2x_1-3)+(2x_2-3)+...+(2x_{20}-3)=\sum_{i=1}^{20}2x_i-3=2\sum_{i=1}^{20}x_i-3$$

$$\mu_x = \frac{۲\sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i - \frac{۳}{۲})}{۲۰} = ۲۹ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i - \frac{۳}{۲}) = ۲۹۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۲۰} x_i - ۲۰(\frac{۳}{۲}) = ۲۹۰$$

$$\sum_{i=۱}^{۲۰} x_i = ۳۲۰$$

۳۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$N = ۶۰ \Rightarrow \frac{۳N}{۴} = ۴۵$$

CL	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۳
F_i	۱۰	۳۰	۲۰
FC_i	۱۰	۴۰	۶۰

فراوانی مطلق را حساب می‌کنیم و سپس محل چارک سوم را پیدا می‌کنیم.پس چارک سوم در طبقه سوم قرار دارد. حالا مقدار چارک سوم را محاسبه می‌کنیم.

$$Q_۳ = L_i + \left(\frac{\frac{۳N}{۴} - FC_{i-۱}}{F_i}\right) I$$

$$Q_۳ = ۹/۵ + \left(\frac{۴۵-۴۰}{۲۰}\right) \times ۴ \Rightarrow Q_۳ = ۹/۵ + ۱ \Rightarrow Q_۳ = ۱۰/۵$$

۳۲-گزینه ۴ صحیح است.

۳۳- گزینه ۳ صحیح است.

۳۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sum |x_i - Md| = \min$$

۳۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۶۰}{۱۰} = ۶$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum x_i^۲}{N} - \mu^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۴۰۰}{۱۰} - (۶)^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow \sigma = ۲$$

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \times ۱۰۰ = \frac{۲}{۶} \times ۱۰۰ \Rightarrow CV = ۰/۳۳$$

۳۶- گزینه ۱ صحیح است.

چون دارای تعداد کمی اطلاعات از ۶۰ و بیشتر می‌باشد، انحراف چارکی مناسب‌ترین پارامتر پراکندگی برای این توزیع فراوانی است.

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=۱}^{۳} x_i}{N} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

$$\sigma_x^۲ = \frac{\sum x_i^۲}{N} - \mu^۲ = \frac{۶}{۳} - (۱)^۲ = ۱ \Rightarrow \sigma_x = ۱$$

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۱} \times ۱۰۰ = \%۱۰۰ = ۱$$

۳۸- گزینه ۲ صحیح است.

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
	۱۰	۳۰	۱۰	۲۵	۲۵
FC_i	۱۰	۴۰	۵۰	۷۵	۱۰۰

$$\text{محل میانه} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۵۰/۵$$

$$\text{(میانه)}\ Md = \frac{x_{۵۰} + x_{۵۱}}{۲} = \frac{۱+۲}{۲} = ۱/۵$$

زیرا عدد صفر بیشترین فراوانی را دارد. $mo = ۰$

۳۹- گزینه ۱ صحیح است.

جمعیت خانواده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
تعداد (F_i)	۵	۱۰	۴۰	۲۵	۱۵	۵	۱۰۰
FC_i	۵	۱۵	۵۵	۸۰	۹۵	۱۰۰	-

$$\text{محل میانه} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۵۰/۵$$

$$md = \frac{x_{۵۰} + x_{۵۱}}{۲} = \frac{۳+۳}{۲} = ۳$$

۴۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$y_i = -\frac{x_i}{۲} + ۳$$

$$V(y) = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ V(x) \Rightarrow V(y) = \frac{۱}{۴} V(x) = \frac{۱}{۴}\sigma_x^۲$$

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا رشد سال دوم نسبت به اول، سال سوم نسبت به دوم و سال چهارم نسبت به سوم را محاسبه کرده و سپس از میانگین هندسی استفاده می‌کنیم.

$$\text{رشد سال دوم نسبت به سال اول}\quad x_۱ = \frac{۱۶۰}{۱۵۰} = ۱/۰۶$$

$$\text{رشد سال سوم نسبت به سال دوم}\quad x_۲ = \frac{۱۸۰}{۱۶۰} = ۱/۱۲۵$$

$$\text{رشد سال چهارم نسبت به سال سوم}\quad x_۳ = \frac{۱۹۰}{۱۸۰} = ۱/۰۵$$

$$\bar{x}_G = \sqrt[۳]{۱/۰۶ \times ۱/۱۲۵ \times ۱/۰۵} \simeq ۱/۰۸۲$$

$$۱/۰۸۲ - ۱ = ۰/۰۸۲ = \%\ ۸/۲۰$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

۴۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu_x = ۱۲۰ \qquad \mu_y = ۱/۱۴\,\mu_x \Rightarrow \mu_y = ۱/۱۴(۱۲۰) = ۱۳۶/۸$$

$$\sigma_x^۲ = ۱۰۰ \qquad \sigma_y^۲ = (۱/۱۴)^۲\sigma_x^۲ \Rightarrow \sigma_y^۲ = ۱/۲۹۹۶ \times ۱۰۰ = ۱۲۹/۹۶$$

$$y_i = ۱/۱۴\, x_i$$

۴۴- گزینه ۳ صحیح است.

x_i	۵	۱۲	۱۵	۲۰
F_i	۶	۸	۱۲	۴
FC_i	۶	۱۴	۲۶	۳۰

$$\text{محل میانه} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳۰}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱۵/۵$$

$$Md = \frac{x_{۱۵} + x_{۱۶}}{۲} = \frac{۱۵+۱۵}{۲} = ۱۵$$

۴۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{matrix} ۸۰-۸۹ \\ ۹۰-۹۹ \end{matrix} \rightarrow \text{فاصله طبقات} = ۹۰-۸۰ = ۱۰$$

۴۶- گزینه ۱ صحیح است.

قبلاً گفتیم مجموع قدر مطلق‌های تفاوت‌های داده‌های مختلف از میانه حداقل مقدار (min) است.

۴۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\bar{x}_G = \sqrt[۶]{۶ \times ۱۲/۵ \times ۹ \times ۱۲ \times a \times b} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \sqrt[۶]{۸۱۰۰ab} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۸۱۰۰ab = \left(\frac{۹}{۲}\right)^۶$$

$$ab = \frac{۹^۶}{۲^۶ \times ۸۱۰۰} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{۹^۳}{۲^۳ \times ۹۰}$$

$$\text{میانگین هندسی} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{۸۱}{۸۰} \qquad b,a$$

۴۸- گزینه ۳ صحیح است.

CL	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶
F_i	۹	۱۵	۱۸	۱۰
FC_i	۹	۲۴	۴۲	۵۲

پس چارک سوم در دسته سوم است.

$$\text{محل چارک سوم} = \frac{۳ \times ۵۲}{۴} = ۳۹$$

$$Q_r = L_i + \left(\frac{\frac{aN}{۴} - FC_{i-۱}}{F_i}\right) \times I$$

$$Q_r = ۱۸ + \left(\frac{۳۹-۲۴}{۱۸}\right) \times ۴ \Rightarrow Q_r = ۲۱/۳$$

۴۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i}{N} = \frac{۱۲۰}{۱۰۰} = ۱/۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i^۲}{N} - \mu^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۴۰}{۱۰۰} - (۱/۲)^۲ = ۴ - ۱/۴۴ = ۲/۵۶$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۰۰} (x_i - \mu)^۲}{N} \Rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{۱۰۰} (x_i - \mu)^۲}{۱۰۰} = ۲/۵۶ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۰۰} (x_i - \mu)^۲ = ۲۵۶$$

۵۰- گزینه ۲ صحیح است.

در هر دسته میانگین آن را پیدا کرده و بجای آن دسته قرار می‌دهیم.

x_i	۹/۵	۱۲/۵	۱۵/۵	۱۸/۵	۲۱/۵
F_i	۴	۱۰	۱۸	۱۲	۶

$$\mu=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}=\frac{(۹/۵\times ۴)+...+(۲۱/۵\times ۶)}{۵۰}=۱۵/۸۶$$

$$\mu=۱۵/۵+a \Rightarrow ۱۵/۵+a=۱۵/۸۶ \Rightarrow \quad a=۰/۳۶$$

راه حل دوم:

F_i	۴	۱۰	۱۸	۱۲	۶
نماینده x_i	۹/۵	۱۲/۵	۱۵/۵	۱۸/۵	۲۱/۵
$y_i=x_i-۱۵/۵$	-۶	-۳	۰	۳	۶

$$\mu_y=\frac{(-۶\times ۴)+(-۳\times ۱۰)+(۰\times ۱۸)+(۳\times ۱۲)+(۶\times ۶)}{۵۰}=\frac{۱۸}{۵۰}=۰/۳۶$$

$$\mu_x=۰/۳۶+۱۵/۵ \Rightarrow a=۰/۳۶$$

۵۱- گزینه ۳ صحیح است.

۵۲- گزینه ۲ صحیح است.

اگر سال اول را سال پایه فرض کنیم و میزان نسبت افزایش نسبت به سال قبل را محاسبه کنیم می توان با استفاده از میانگین هندسی میانگین نسبت افزایش را محاسبه کرد.

$$x_۱=\frac{a_۱}{a_۰}=\frac{۴}{۲}=۲, x_۲=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۳۲}{۴}=۸$$

$$\mu_G=\sqrt{x_۱.x_۲}=\sqrt{۲\times ۸}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۵۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma^۲_{ax-b}=a\sigma^۲_x \Rightarrow \sigma^۲_{۲x-۲}=۴\sigma^۲_x=۴\times ۴=۱۶$$

۵۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$Y=\frac{۱}{۲}X+۱ \Rightarrow \begin{cases} \mu_y=\frac{۱}{۲}\mu_x+۱=\frac{۱}{۲}\times ۳+۱=۲/۵ \\ \sigma^۲_y=\frac{۱}{۴}\sigma^۲_x=\frac{۱}{۴}\times ۹=۲/۲۵ \Rightarrow \sigma_y=۱/۵ \end{cases}$$

۵۵- فاقد پاسخ صحیح است

$$\sigma^۲_x=\frac{\Sigma x^۲_i}{n}-\mu^۲_x \Rightarrow ۱۴=\frac{۳۹۰}{۵}-\mu^۲_x \Rightarrow ۵\mu^۲_x=۳۹۰-۷۰ \Rightarrow ۵\mu^۲_x=۳۲۰$$

$$\Rightarrow \mu^۲_x=۶۴ \Rightarrow \mu_x=۸$$

۵۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_x=\frac{\Sigma x_i}{N}=\frac{۲۰۰}{۱۰۰}=۲ \\ \sigma^۲_x=\frac{\Sigma x_i^۲}{N}-\mu^۲_x=\frac{۵۰۰}{۱۰۰}-۴=۱ \Rightarrow \sigma_x=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow C.V=\frac{\sigma_X}{\mu_X}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۵۷- گزینه ۳ صحیح است.

CL	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰
F_i	۱۰	۳۰	۲۰
FC_i	۱۰	۴۰	۶۰

پس چارک سوم در طبقه سوم قرار دارد.

محل چارک سوم $=\frac{۳N}{۴}=\frac{۳(۶۰)}{۴}=۴۵$

$$Q_۳ = L_i + \left(\frac{\frac{۳N}{۴} - FC_{i-۱}}{F_i}\right) I$$

$$Q_۳ = ۳۰ + \left(\frac{۴۵-۴۰}{۲۰}\right) \times ۱۰ \Rightarrow Q_۳ = ۳۲/۵$$

۵۸- گزینه ۲ صحیح است.

CL	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۲
F_i	۱۰	۳۰	۲۰
FC_i	۱۰	۴۰	۶۰

پس چارک اول در طبقه دوم قرار دارد.

محل چارک اول $= \frac{N}{۴} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵$

$$Q_۱ = L_i + \left(\frac{\frac{N}{۴} - FC_{i-۱}}{F_i}\right) I$$

$$Q_۱ = ۵/۵ + \left(\frac{۱۵-۱۰}{۳۰}\right) \times ۴ \quad \Rightarrow \quad Q_۱ = ۶/۱۷$$

۵۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\mu_G = \frac{N}{\Sigma \frac{۱}{x_i}} = \frac{۳}{\frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۹۰}} = \frac{۳}{\frac{۳+۶+۴}{۳۶۰}} = \frac{۳۶۰ \times ۳}{۱۳} \approx ۸۳$$

۶۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$C.V = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{\sigma_x}{۱۲} \Rightarrow \sigma_x = ۲/۴$$

۶۱-گزینه ۱ صحیح است.

همواره مجموع قدر مطلق تفاضل داده‌های یک مجموعه از میانه آنها کمتر از مجموع قدر مطلق تفاضل داده از هر عبارت دیگری است.

۶۲- گزینه ۲ صحیح است.

۶۳- گزینه ۳ صحیح است.

همانطور که در جدول ملاحظه می‌گردد مد (نما) در طبقه دوم قرار دارد.

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_۱}{d_۱ + d_۲}\right) I \Rightarrow Mo = ۵/۵ + \left(\frac{۱۶}{۱۶+۸}\right) \times ۳ = ۷/۵$$

۶۴-گزینه ۳ صحیح است.

زیرا در نمودار ریشه و برگ مقادیر داده‌ها به طور کامل نمایش داده شده و هیچ یک از داده‌ها حذف نمی‌شوند .

$$y_i = ۱/۱۲۵x_i \Rightarrow \begin{cases} \mu_y = ۱/۱۲۵\mu_x = ۹۰۰۰۰ \\ \sigma_y = ۱/۱۲۵\delta_x = ۲۲۵۰۰ \end{cases} \Rightarrow C.V = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \%۲۵$$

➢**روش دوم:** چون میزان تغییرات σ, μ در این مسأله یکسان است $(\sigma_Y = ۱/۱۲۵\delta_x, \sigma_y = ۱/۱۲۵\mu_x)$ بنا بر این ضریب تغییرات نسبت به قبل تغییر نمی‌کند بنا بر این:

$$C.V = \frac{\sigma_y}{\mu_y} = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{۲۰۰۰۰}{۸۰۰۰۰} = \%۲۵$$

۶۵-گزینه ۴ صحیح است.

قدر مطلق انحراف داده‌های جامعه از میانه از قدر مطلق تفاضل این داده‌ها از هر عدد دیگری همواره کمتر است.

$$\Sigma|x_i - Md| \le \Sigma|x_i - a|$$

۶۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\mu_H = \frac{N = \Sigma w_i}{\Sigma \frac{w_i}{x_i}} = \frac{۶}{\frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۱}{۸۰} + \frac{۲}{۱۲۰}} = \frac{۶}{\frac{۱۷۱}{۱۲۰۰}} = ۱۰۱/۴$$

۶۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu = \frac{\sum N_i \mu_i}{\sum N_i} = \frac{(۱۰۰\times۸۰)+(۲۰۰\times۹۰)+(۷۰۰\times۱۰۰)}{۱۰۰+۲۰۰+۷۰۰} = \frac{۹۶۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۹۶$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum N_i \sigma_i^۲}{\sum N_i} + \frac{\sum N_i (\mu_i - \mu)^۲}{N} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{(۱۰۰\times۱۶۰۰)+(۲۰۰\times۲۵۰۰)+(۷۰۰\times۲۵۰۰)}{۷۰۰+۲۰۰+۱۰۰} +$$

$$\frac{۱۰۰(۸۰-۹۶)^۲ + ۲۰۰(۹۰-۹۶)^۲ + ۷۰۰(۱۰۰-۹۶)^۲}{۷۰۰+۲۰۰+۱۰۰} \Rightarrow \sigma^۲ = ۲۴۵۴$$

۶۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{x}_H = \frac{F_۱ + F_۲}{\frac{F_۱}{x_۱} + \frac{F_۲}{x_۲}} \Rightarrow \bar{x}_H = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۶۰۰} + \frac{۲}{۸۰}} \Rightarrow \bar{x}_H = ۷۲ \ \frac{km}{h}$$

۶۹- گزینه ۱ صحیح است.

گفتیم حاصل جمع قدر مطلق اختلاف داده‌ها از میانه نسبت به هر عدد دیگری نظیر a کوچکتر است. پس:

$$\sum|x_i - Md| < \sum|x_i - a|$$

۷۰-گزینه ۲ صحیح است.

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_۱}{d_۱ + d_۲}\right)\times C = ۲۱ + \left(\frac{۱۱}{۱۱+۹}\right)\times ۳ = ۲۱ + ۱/۶۵ = ۲۲/۶۵$$

۷۱-گزینه ۳ صحیح است.

x_i	۱۶/۵	۱۹/۵	۲۲/۵	۲۵/۵
F_i	۱۸	۲۳	۳۴	۲۵

$$\mu = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{۲۹۷ + ۴۴۸/۵ + ۷۶۵ + ۶۳۷/۵}{۱۰۰} = ۲۱/۴۸$$

$$\mu = ۲۲/۵ - b \Rightarrow ۲۱/۴۸ = ۲۲/۵ - b \Rightarrow b = ۲۲/۵ - ۲۱/۴۸ = ۱/۰۲$$

راه حل دوم:

x_i	۱۶/۵	۱۹/۵	۲۲/۵	۲۵/۵
F_i	۱۸	۲۳	۳۴	۲۵
$yi = xi - ۲۲/۵$	-۶	-۳	۰	۳

$$\mu_g = \frac{(-۶\times۱۸)+(-۳\times۲۳)+(۰\times۳۴)+(۲۵\times۳)}{۱۰۰} = -۱/۰۲$$

$$\mu_x = -۱/۰/۲ + ۲۲/۵ \Rightarrow b = ۱/۰۲$$

۷۲-گزینه ۲ صحیح است.

از آنجا که به هر داده ۱ واحد اضافه شده است، میانگین نیز یک واحد افزایش می‌یابد اما انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

$$\sigma = ۲ \quad \bar{x} = ۵ + ۱ = ۶$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times ۱۰۰=\frac{۲}{۶}\times ۱۰۰\simeq ۳۳$$

۷۳- گزینه ۲ صحیح است.

۷۴- گزینه ۱ صحیح است.

۷۵- گزینه ۲ صحیح است.

۷۶- گزینه ۱ صحیح است.

با فرض آن‌که دهک ششم حقوق کارکنان ۱۳۵ هزار تومان است پس ۰/۶۰ کارمندان کمتر یا مساوی ۱۳۵ هزار حقوق می‌گیرند و ۴۰٪ کارمندان بیشتر از ۱۳۵ هزار تومان حقوق می‌گیرند.

۷۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\mu)^۲}{N}=\frac{۲۰۰۰}{۲۰}=۱۰۰\rightarrow\sigma=۱۰$$

$$N=۲۰$$

$$\text{ضریب چولگی}=\frac{\frac{\sum(x_i-\mu)^۳}{N}}{\sigma^۳}=\frac{\frac{-۳۲۸}{۱۰}}{۱۰^۳}=-\%۳۲۸$$

۷۸- گزینه ۱ صحیح است.

$x=$ تولیدات در سال اول

$x+۰/۸x=۱/۸x=$ تولیدات در سال دوم

$۱/۸x-(۱/۸x)\times ۰/۲۰=۱/۴۴x=$ تولیدات در سال سوم

$$\bar{x}_G=\sqrt[۲]{\frac{\text{سال دوم}}{\text{سال اول}}\times\frac{\text{سال سوم}}{\text{سال دوم}}}=\sqrt{\frac{۱/۸x}{x}\times\frac{۱/۴۴x}{۱/۸x}}=۱/۲\ \text{برابر}\Rightarrow(۱/۲-۱)\times ۱۰۰=٪۲۰$$

۷۹- گزینه ۲ صحیح است.

نمونه‌های دو مجموعه باید از هم مستقل باشند.

۸۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{میانگین هارمونیک}\ \bar{x}_H=\frac{۵+۳}{\frac{۵}{۴}+\frac{۳}{۶}}=\frac{۲۱}{۱۲}=۴/۵۷$$

۸۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\mu=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{۱۰۰}{۴۰}=۲/۵$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^۲=\frac{۳۴۰}{۴۰}-\left(\frac{۱۰۰}{۴۰}\right)^۲=۲/۲۵\rightarrow\sigma=۱/۵$$

$$\text{ضریب پراکندگی}\ CV=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{۱/۵}{۲/۵}=۰/۶$$

۸۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{مقدار مد در طبقه ۲۴-۲۱ می‌باشد.}\ Mo=۲۱+\frac{(۱۷-۱۱)}{(۱۷-۱۱)+(۱۷-۹)}\times ۳=۲۲/۲۸\sim ۲۲/۳$$

۸۳- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به آن که ضریب کشیدگی مقدار منفی است بنابراین از نرمال کوتاهتر است و چون $|E|=۰/۰۸\leq ۰/۱$ پس تقریباً نرمال است.

فصل دوم

احتمال

۱- فاکتوریل

منظور از فاکتوریل یک عدد طبیعی مانند n عبارتست از حاصلضرب آن عدد در تمام اعداد طبیعی ما قبل از آن تا ۱. به عبارت دیگر !n به صورت زیر می‌باشد:

$$n! = n(n-۱)(n-۲)...\times ۲\times ۱$$

$$n! = n(n-۱)! \qquad n! = n(n-۱)(n-۲)! \quad , \quad ....$$

نکته: فاکتوریل عدد صفر، برابر یک است ۰ یعنی: $۱! = ۱ \ , \ ۰! = ۱$

۲- مفاهیم مرتبط با احتمال

احتمال را شانس وقوع پیشامد خاصی گویند و برابر است با نسبت دفعاتی که پیشامد خاصی در تکرارهای زیاد رخ می‌دهد.

به طور کلی احتمال به دو دسته عینی و ذهنی تقسیم می‌شود. احتمال عینی به نظر افراد مختلف وابسته نیست و احتمال وقوع از قبل مشخص است مانند احتمال آمدن عدد ۶ در پرتاب یک تاس ولی احتمال ذهنی به عقاید اشخاص و افرادی که آن را ارزیابی می‌کنند وابسته است مانند احتمال پیروزی یک تیم فوتبال در یک مسابقه خاص.

نکته: در علم آمار با احتمال عینی سر و کار داریم نه احتمال ذهنی.

۱-۲- آزمایش: در احتمال به هر فعالیتی که نتیجه آن از قبل مشخص نیست، آزمایش می‌گویند.

۲-۲- فضای نمونه: مجموعه همه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گفته و آنرا با حرف S نمایش می‌دهند. فضای نمونه را از دو جنبه تقسیم‌بندی می‌کنند.

الف- فضای نمونه محدود و نامحدود:

در فضای نمونه محدود تعداد اعضاء پایان‌پذیر (متناهی) است مانند فضای نمونه پرتاب یک تاس $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ درحالیکه در فضای نمونه نامحدود تعداد اعضاء پایان ناپذیر (نامتناهی) است. مانند فضای نمونه یافتن اولین کالای معیوب در خط تولید $S = \{۱,۲,۳,...\}$

ب- فضای نمونه پیوسته و گسسته:

تعداد اعضا در فضای نمونه گسسته یا محدود می‌باشد و یا در صورت نامحدود بودن شمارش‌پذیر می‌باشد. مانند فضای نمونه ۶ بار پرتاب یک سکه یا فضای نمونه پرتاب تاس و یا فضای نمونه یافتن اولین کالای معیوب در خط تولید. در حالیکه در فضای نمونه پیوسته تعداد اعضا شمارش‌پذیر نمی‌باشد. مانند فضای نمونه عمر یک دستگاه که حداکثر عمر مفید آن ۲۵۰۰۰ ساعت است. و یا فضای نمونه مربوط به مدت زمانی که یک کارگر برای تولید یک قطعه صرف می‌کند.

۳-۲- پدیده‌های قطعی و تصادفی

فعالیت‌ها و یا پدیده‌هایی که نتیجه آنها را پیش از وقوع می‌توان بطور قطعی تعیین کرد، پدیده‌های قطعی نامیده می‌شوند و پدیده‌هایی که نمی‌توان نتیجه آنها را پیش از وقوع بطور قطعی تعیین کرد، پدیده‌های تصادفی نامیده می‌شوند.

نکته: تعداد اعضای فضای نمونه را در هر آزمایش با $n(s)$ نشان می‌دهند.

نکته: اگر یک آزمایش تصادفی متشکل از a عضو بوده و آنرا b بار تکرار نماییم فضای نمونه آن برابر است با:

$n(s)=a^b$

۴-۲- پیشامد (حادثه): در نظریه احتمال به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه یک پیشامد اطلاق می‌گردد.

۵-۲- پیامدهای مقدماتی هم‌شانس: زمانیکه امکان وقوع هرپیامد با امکان وقوع پیامد دیگر یکسان باشد به‌عبارت دیگر در آزمایش نوعی تقارن وجود داشته باشد، فضای نمونه دارای پیامدهای مقدماتی هم‌شانس است. مانند پیامدهای پرتاب یک سکه یا یک تاس.

۶-۲- احتمال وقوع یک پیشامد: احتمال وقوع یک پیشامد خاص مانند A عبارتست از تعداد اعضای پیشامد A تقسیم بر تعداد اعضای فضای نمونه. احتمال وقوع یک پیشامد را با $P(A)$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$۰\le P(A)\le ۱$$

نکته: اگر پیشامدهای مقدماتی هم شانس باشند احتمال وقوع پیشامد A از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد A}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

۱- احتمال کلاسیک

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

۲- احتمال هندسی

$$P(A)=\frac{\text{طول، سطح یا حجم مساعد}}{\text{طول، سطح یا حجم کل}}$$

۳- احتمال آماری

در آزمایشاتی که پیامدهای مقدماتی هم شانس نمی‌باشند:

$$\text{فراوانی نسبی پیشامد A}=\frac{\text{تعداد دفعاتی که A در N تکرار آزمایش روی می‌دهد.}}{N}$$

حوادث از نقطه نظر احتمال وقوع عبارتند از:

۱) غیر ممکن: $P(A)=۰$

۲) تصادفی: $۰\le P(A)\le ۱ \Leftarrow ۰<P(A)<۱$

۳) یقینی (حتمی): $P(A)=۱$

مثال: در بین ۳۷۰ نفر از مدیران یک صنعت، ۱۲۱ نفر آنها در یک آزمون نمره کمتر از میانگین به دست آورده‌اند. اگر یک مدیر را به صورت تصادفی انتخاب کنیم احتمال اینکه نمره بالاتر از میانگین کسب کرده باشد چقدر است؟

$n(S)=۳۷۰$

$A=$ مدیرانی که در آزمون نمره بالاتر از میانگین گرفته‌اند $\Rightarrow n(A)=۳۷۰-۱۲۱=۲۴۹$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴۹}{۳۷۰}=۰/۶۷$$

نکته: در صورتی می‌توان از فراوانی نسبی به عنوان مبنای احتمال استفاده کرد که تعداد تکرارهای آزمایش (N) به سمت بی‌نهایت میل کند پس:

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}(\text{فراوانی نسبی پیشامد A در N تکرار})=\text{Lim}f_i$$

۳- قواعد شمارش

۱-۳- اصل اساسی شمارش (قاعده ضرب): اگر عملی دارای k مرحله باشد، مرحله اول به $n_۱$ طریق، مرحله دوم به $n_۲$ طریق، مرحله سوم به $n_۳$ طریق و .... انجام شود، آنگاه عمل مزبور به $n_۱.n_۲.n_۳.....$ طریق ممکن انجام می‌شود.

مثال: مسیر ساری به تهران را به دو طریق، تهران به اصفهان را به چهار طریق و اصفهان به شیراز را به سه طریق می‌توان طی نمود. مسیر ساری به شیراز را به چند طریق می‌توان طی کرد.

$۲\times۴\times۳=۲۴$ طریق

۲-۳- اصل جمع:

اگر عمل a وابسته به انجام یکی از اعمال a_1 یا a_2 یا .... باشد و عمل a_1 را به n_1 طریق و عمل a_2 را به n_2 طریق و ... بتوانیم انجام دهیم، آنگاه عمل a را به $n_1+n_2+...$ طریق ممکن می‌توان انجام داد.

مثال: در یک رستوران ۳ نوع نوشابه، ۲ نوع دوغ و ۳ نوع نوشیدنی دیگر در کنار غذا وجود دارد. اگر بخواهیم از یک نوشیدنی استفاده کنیم، چند انتخاب پیش‌رو داریم.

$۳+۲+۳=۸$ انتخاب

نکته: اگر بخواهیم n دسته عنصر متمایز که شامل n_1 عنصر مختلف از دسته اول، n_2 عنصر مختلف از دسته دوم و ... و n_k عنصر مختلف از دسته k ام کنارهم قرار گیرند، تعداد راههای مختلفی که برای این کار وجود دارد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$n_1!n_2!....n_k!k!$

مثال: ۳ کتاب اقتصاد، ۴ کتاب مدیریت و ۴ کتاب حسابداری را به چند طریق می‌توان در یک قفسه به نحوی قرار داد که کتابهای از یک خانواده درکنار هم قرار گیرند.

$n_1=۳$ $n_2=۴$

$n_2=۴$ $k=۳$ $۳!\times۴!\times۴!\times۳!=۲۰۷۳۶$

۳-۳- جایگشت (ترتیب):

تعداد جایگشت های n شی متمایز در کنار هم را با رابطه روبه‌رو تعیین می‌کنند:

$P_n=n!=n(n-۱)(n-۲)...\times۲\times۱$

جایگشت n شی را با P_n نمایش می‌دهند. در جایگشت ترتیب قرار گرفتن اعضا و افراد در کنار هم باعث ایجاد اختلاف می‌گردد.

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد ۵ حرفی با ۳ حرف c,b,a و ۲ رقم ۱و۲ ایجاد کرد.

$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

نکته: اگر بخواهیم r شی از n شی متمایز در جایگشت همواره در کنار هم باشند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$r!(n-r+۱)!$

مثال: از بین ۶ کارمند یک شرکت، ۲ نفر خانم هستند. به چند طریق می‌توان نام این ۵کارمند را زیر هم.نوشت به نحوی که نام ۲ کارمند زن در کنار یکدیگر نباشد؟

$r=۲\ ,\ n=۶$

نکته: در جاسوئیچی‌ها و تسبیح‌های nتایی، چون می‌توان آن‌ها را برگرداند، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{(n-۱)!}{۲}$$

برای حل این مثال ابتدا جایگشت قرار گرفتن نام این ۶ کارمند در زیر هم را محاسبه می‌کنیم که برابر است با:

$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$

حال اگر بخواهیم نام ۲ کارمند زن در کنار هم قرار گیرد این کار را می‌توان به ۲۴۰ طریق انجام داد که بدین صورت محاسبه شده است:

$r!(n-r+۱)!=۲!(۶-۲+۱)!=۲!\times۵!=۲۴۰$

اکنون اگر بخواهیم نام ۲ کارمند زن در کنار هم نباشد، این عمل را می‌توان به ۴۸۰ طریق ممکن انجام داد.

$۷۲۰-۲۴۰=۴۸۰$

۴-۳- جایگشت با تکرار:

تعداد جایگشت n شی که n_1 تای آنها از نوع اول، n_2 تای آنها از نوع دوم، .... و n_k تای آنها از نوع kام می‌باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$n_1+n_2+...+n_k=n$

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

مثال: اگر برای چراغانی یک ردیف، ۳ لامپ سبز، ۲ لامپ آبی و ۴ لامپ قرمز داشته باشیم، به چند حالت می‌توان ردیف درست کرد.

$$۴+۳+۲=۹ \qquad \binom{۹}{۴,۳,۲}=\frac{۹!}{۴!۳!۲!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۳\times۲\times۲}=۱۲۶۰$$

۵-۳- جایگشت دایره‌ای:

تعداد جایگشت های n شی متمایز که بر روی یک دایره مرتب شده‌اند از رابطه $(n-۱)!$ بدست می‌آید.

مثال: ۵ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند به نحویکه دو نفر از آنها حتماً درکنار هم باشند.

چون آن دو نفر در کنار هم قرار می‌گیرند هر دوی آنها را یک نفر حساب می‌کنیم. پس با استفاده از رابطه جایگشت دایره‌ای خواهیم داشت:

$$(۴-۱)!=۳!=۶$$

اما از آنجا که آن دو نفر هم به دو طریق می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند پاسخ مساله عبارتست از:

$$۲\times۶=۱۲$$

نکته: اگر n شی و m شی را بخواهیم به صورت یک در میان بر روی محیط یک دایره بچینیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$m!(n-۱)!$$

نکته:

اگر $m=n \Rightarrow ۲m!n!$

$m=n+۱ \Rightarrow m!n!$

مثال: ۵ نفر با پیراهن زرد و ۵ نفر با پیراهن قرمز به چند طریق می‌توانند به صورت یک در میان دور یک میز دایره‌ایی قرار گیرند؟

$$\left.\begin{matrix} m=۵ \\ n=۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow m!(n-۱)!=۵!(۵-۱)!=۲۸۸۰$$

نکته: اگر بخواهیم m و n شی متمایز را به صورت یک در میان در کنار هم قرار دهیم و $m=n$ باشد از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$۲\times m!\times n!$$

نکته: اگر بخواهیم m و n شی متمایز را به صورت یک در میان در کنار هم قرار دهیم و $m=n+۱$ باشد از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$m!\times n!$$

نکات مهم بسط چند جمله‌ای:

۱- فرمول کلی:

$$(a+b)^n=C_n^۰a^nb^۰+C_n^۱a^{n-۱}b+\ldots+C_n^na^۰b^n$$

$$(x_۱+\ldots x_K)^n=\sum\binom{n}{n_۱,\ldots n_k}x_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}\ldots x_k^{nk}$$

۲- جمله عمومی (جمله $P+۱$ ام):

$$C_n^Pa^{n-P}b^P$$

۳- اگر در فرمول کلی به جای $a=b=۱$ قرار دهیم تساوی زیر به دست می‌آید:

$$C_n^۰+C_n^۱+C_n^۲+\ldots+C_n=۲^n$$

تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی:

اگر در فرمول کلی به جای $a=۱$ و $b=-۱$ قرار دهیم، تساوی زیر به دست می‌آید:

$$C_n^۰+C_n^۱+C_n^۲-C_n^۳+\ldots=۰ \Rightarrow C_n^۰+C_n^۲+\ldots=C_n^۱+C_n^۳+\ldots$$

تعداد جملات بسط برابر است با: $\binom{n+k-۱}{n}$ یا $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

برای محاسبه مجموع ضرایب بسط یک چند جمله‌ای می‌توان به‌جای مجهولات عدد یک قرار دارد.

- **نکته:** به‌طور کلی در مسائلی که تعویض در ترتیب اشیاء در نتیجه حامل تغییری ایجاد نکند از ترکیب استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از ترتیب به عنوان مثال در مسائلی مانند: انتخاب چند نماینده از بین چند نفر، انتخاب چند شی از میان اشیاء

مختلف، مخلوط نمودن زنگ‌های مختلف به منظور ایجاد رنگ‌های جدید و ... از ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶-۳- جایگشت n شی از n شی:

برای تعیین تعداد جایگشت های n شی از n شی، به تعداد اشیاء (عناصر) خانه در کنار هم رسم کرده و تعداد حالتهایی را که در هر خانه می‌توان قرار گیرد را می‌نویسیم. در اینجا با دو حالت روبه‌رو می‌شویم:

الف) اگر تکرار مجاز باشد، هیچیک از اشیاء برای خانه بعد حذف نمی‌شود.

ب) اگر تکرار غیرمجاز باشد، هر خانه‌ای که پر شود یکی از اشیاء کم می‌گردد.

مثال: با حروف کلمه «مراقب» چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت، در صورتیکه:

الف) تکرار حروف مجاز باشد.

ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

برای حل قسمت الف داریم:

۵	۵	۵	۵	۵

$= ۵^۵ = ۳۱۲۵$

ب)

۵	۴	۳	۲	۱

$= ۵! = ۱۲۰$

مثال: با ارقام ۰,۷,۶,۵,۴ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که بر پنج قابل قسمت باشد در صورتیکه تکرار ارقام مجاز نباشد.

حل: برای اینکه عدد پنج رقمی حاصل بر ۵ قابل قسمت باشد باید آخرین رقم سمت راست ۰ یا ۵ باشد. پس در این حالت خواهیم داشت:

الف- رقم سمت راست صفر باشد.

۴	۳	۲	۱	۱

$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$

ب- رقم سمت راست پنج باشد.

۳	۳	۲	۱	۱

$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۱۸$

در حالت دوم که رقم سمت راست ۵ است چون اولین رقم نمی‌تواند ۰ باشد در اولین خانه تنها ۳ رقم می‌تواند قرار گیرد. پس در مجموع خواهیم داشت:

عدد پنج رقمی $۲۴ + ۱۸ = ۴۲$

۷-۳- ترتیب (تبدیل)

تعداد جایگشت‌های r شی از n شی را ترتیب r از n می‌نامند و برای محاسبه آن از فرمول زیر استفاده می‌کنند:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad n \geq r$$

مثال: می‌خواهیم ازبین ۶ نفر دو نفر را به عنوان رئیس و نایب رئیس انتخاب کنیم، به چند طریق این عمل امکانپذیر است؟

$$P_n^r = P_۶^۲ = \frac{۶!}{(۶-۲)!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} = ۳۰$$

مثال: با ارقام ۲و۵و۷و۳و۶و۴ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت در صورتیکه تکرار ارقام مجاز نباشد.

۴	۴	۳	۳

$= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۳ = ۱۸۰$

نکته: در ترتیب و تبدیل، طرز قرار گرفتن اشیاء در کنار هم (ترتیب قرار گرفتن آنها) اهمیت فراوانی دارد به نحویکه مثلاً ab با ba متفاوت است و دو ترکیب مختلف را تشکیل می‌دهند.

نکته: تعداد جایگشت‌های r شی از n شی در شرایطی که بخواهیم m شی در آن حضور نداشته باشد از طریق فرمول زیر بدست می‌آید:

$$P^{r}_{n-m}=\frac{(n-m)!}{(n-m-r)!}$$

نکته:
- تعداد ترتیب ناسازگار n شی متمایز $\Leftarrow n!\frac{\sum(-1)^n}{k!}$
- ترتیب‌های ناسازگار
- تعداد ترتیب ناسازگار r شی از n شی متمایز $C^{r}_{n}\times r!\frac{\sum(-1)^n}{k!}$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به نحویکه فاقد رقم ۵ باشد.

$$r=3\ ,\ n=5\ ,\ m=1 \qquad P^{3}_{5-1}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$$

نکته: تعداد جایگشت های r شی از n شی در شرایطی که بخواهیم شی بخصوصی در همه آنها بکار رفته باشد، از طریق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r.P^{r-1}_{n-1}=r.\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

مثال: با حروف e,d,c,b,a-چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت بطوریکه شامل حرف b باشد.

$$n=5\ ,\ r=4$$

$$r.P^{r-1}_{n-1}=4\times\frac{(5-1)!}{(5-4)!}=4\times4!=96$$

۸-۳- ترکیب

تعداد انتخابهای r شی از n شی را در شرایطی که ترتیب قرارگرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد، ترکیب r شی از n شی می‌نامند و برای محاسبه ترکیب r شی از n شی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$C^{r}_{n}=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\qquad n\geq r$$

نکته: تفاوت ترکیب با ترتیب و تبدیل در این است که در ترتیب و تبدیل، نحوه قرار گرفتن اشیاء در کنار هم اهمیت دارد در شرایطی که در ترکیب، ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم اهمیتی ندارد.

مثال: اگر بخواهیم ۴ توپ را از بین ۷ توپ شماره دار انتخاب کنیم (ترتیب انتخاب مهم نیست) چند راه خواهیم داشت:

$$C^{4}_{7}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\,3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$$

قواعد مربوط به ترکیب:

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ ۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ ۳) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ۴) $\binom{n}{r}=\frac{p(n,r)}{r!}$

نکته: ۱) انتخاب r شی از n شی بدون جایگذاری $C^{r}_{n}=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

۲) انتخاب r شی از n شی با جایگذاری $C^{r}_{n}=n^{r}$

۳) انتخاب r شی از n شی بدون جایگذاری و با ترتیب $p^{r}_{n}=\frac{n!}{(n-r)!}$

نکته: تعداد ترکیبات r شی از n شی متمایز که فاقد m شی بخصوص هستند، از طریق فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$C^{r}_{n-m}=\frac{(n-m)!}{r!(n-m-r)!}$$

مثال: از بین ۱۵ نفر فوتبالیست می‌خواهیم یک تیم ۱۱ نفری انتخاب کنیم به نحویکه ۳ بازیکن خاص درون تیم قرار نگیرند. این امر به چند طریق امکانپذیر است.

$n=۱۵\ ,\ r=۱۱\ ,\ m=۳$

$C^{r}_{n-m}=C^{۱۱}_{۱۲}=۱۲$

نکته: تعداد ترکیبات r شی از n شی متمایز که همه آنها شامل m شی بخصوص باشند از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$C^{r-m}_{n-m}=\frac{(n-m)!}{(r-m)!(n-r)!}$$

مثال: از بین ۶ کارگر و ۲ سرپرست به چند طریق می‌توان یک تیم ۵ نفره تشکیل داد که شامل ۲ سرپرست باشد.

$n=۶+۲=۸\ ,\ r=۵\ ,\ m=۲$

$$C^{r-m}_{n-m}=C^{۵-۲}_{۸-۲}=C^{۳}_{۶}=\frac{۶!}{۳!\times ۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۶}=۲۰$$

نکات مهم احتمال:

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

- A و B مستقل: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$
- A و B ناسازگار: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- احتمال شرط: $\begin{cases}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B|A).P(A)\\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A|B).P(B)\end{cases}$

۲) $\begin{cases}(A\cup B)'=(A'\cap B')\\ (A'\cup B')'=(A\cap B)\end{cases}\ ,\ \begin{cases}(A\cap B)'=(A'\cup B')\\ (A'\cap B')'=(A\cup B)\end{cases}$

۳) $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ احتمال وقوع فقط A  $(A-B)$

$P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$ احتمال وقوع فقط B  $(B-A)$

$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cap B')+P(B\cap A')$

احتمال وقوع فقط یک حادثه بین A و B یا تفاضل متقارن  $\Rightarrow (A\ \Delta\ B)$

$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$ اگر A و B دو حادثه باشند اگر $\Rightarrow$

٤- قواعد احتمال

۱) برای هر پیشامد دلخواه A داریم: $۰\le P(A)\le ۱$

۲) مجموع احتمالهای رخ دادن تعداد برآمدهای فضای نمونه s برابر یک است: $\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)=P(S)=۱$

۳) $P(\phi)=۰$

۴) اگر حادثه A باعث وقوع حادثه B گردد، خواهیم داشت:

$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$

۵) اگر حادثه A باعث وقوع حادثه B و حادثه B نیز باعث وقوع حادثه A شود در این صورت:

$A=B\Rightarrow P(A)=P(B)$

۶) اگر مجموعه A' متمم مجموعه A باشد:

$$P(A')=۱-P(A)\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}$$

۷) اگر A, B دو پیشامد درفضای نمونه S باشند، احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهند ازطریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

در اینصورت به دو پیشامد B, A، دو پیشامد سازگار می‌گوییم. $\Leftrightarrow (P(A \cap B) \neq ۰)$

مثال: احتمال اینکه یک نفر در امتحان کنکور در رشته اقتصاد قبول شود ۰/۵۲ و احتمال اینکه در رشته حسابداری قبول شود ۰/۳۹ و احتمال اینکه در هر دو رشته قبول شود ۰/۱۳ است. اگر فردی به صورت تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه دست کم در یکی از دو رشته قبول شود، چقدر است؟

$A:$ پیشامد قبولی در رشته اقتصاد $\Rightarrow P(A) = ۰/۵۲$

$,p(A \cap B) = ۰/۱۳$

$B:$ پیشامد قبولی در رشته حسابداری $\Rightarrow P(B) = ۰/۳۹$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = ۰/۵۲ + ۰/۳۹ - ۰/۱۳ = ۰/۷۸$

۵- پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد B, A را ناسازگار می‌گویند اگر هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند.

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = P(\phi) = ۰$

بنابراین برای دو پیشامد ناسازگار داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

نکته: اگر $A_۱, A_۲, ...$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار در فضای نمونه S باشند خواهیم داشت:

$P(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ ...) = P(A_۱) + P(A_۲) + P(A_۳) + ...$

مثال: در بین ۱۰ بیمار، ۴ نفر دارای گروه خونی o، ۴ نفر دارای گروه خونی A و ۲ نفر دارای گروه خونی AB هستند. اگر یک نفر از این بیماران را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آنکه گروه خونی او A یا AB باشد چقدر است؟

$A =$ پیشامد گروه خونی A $\Rightarrow P(A) = ۰/۴$

$B =$ پیشامد گروه خونی AB $\Rightarrow P(B) = ۰/۲$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = ۰/۴ + ۰/۲ = ۰/۶$

B, A ناسازگارند.

٦- پیشامدهای مستقل:

دو پیشامد B, A را در صورتی مستقل می‌نامند که وقوع یا عدم وقوع یکی از آنها، تأثیری در وقوع یا عدم وقوع دیگری نداشته باشد. برای دو پیشامد مستقل B, A داریم:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

اگر بین B, A رابطه فوق برقرار نباشد، به B, A دو پیشامد وابسته می‌گوییم.

$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

نکته: بطور کلی بین پیشامدهای مستقل $A_۱, A_۲, ..., A_n$ رابطه زیر برقرار است:

$P(A_۱ \cap A_۲ \cap ... \cap A_n) = P(A_۱) \cap P(A_۲) ... P(A_n) \Leftrightarrow$ مستقلند $A_۱ ... A_n$

مثال: کیسه‌ای محتوی ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سبز است و کیسه دیگر محتوی ۳ مهره قرمز و ۹ مهره سبز است. از هر کیسه مهره‌ای بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر دو مهره قرمز باشد چقدر است؟

$A =$ پیشامد آنکه مهره بیرون آمده از کیسه اول قرمز باشد $\Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۹}$

$B =$ پیشامد آنکه مهره بیرون آمده از کیسه دوم قرمز باشد $\Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۲}$

چون پیشامدهای $B; A$ مستقل هستند.

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۵}{۳۶}$

نکته: برای دو پیشامد سازگار و مستقل رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$

نکته:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(A).P(B)\\P(A\cap C)=P(A).P(C)\\P(B\cap C)=P(B).P(C)\end{array}\right\}\ (۱)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)\ \ (۲)$$

* هرگاه رابطه (۱) و (۲) همزمان برقرار باشند سه پیشامد A و B و C مستقل هستند.
* هرگاه فقط رابطه (۹) برقرار باشد سه پیشامد A و B و C دو به دو مستقل هستند.

مثال: احتمال اینکه یک نفر در یک آزمون قبول شود ۰/۷ و احتمال آنکه فرد دیگری در همان آزمون قبول شود، ۰/۷۵ می‌باشد. احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در این آزمون قبول شود چقدر است؟

A = پیشامد قبول شدن نفر اول در آزمون $\Rightarrow P(A)=۰/۷$

B = پیشامد قبول شدن نفر دوم در آزمون $\Rightarrow P(B)=۰/۷۵$

A,B مستقلند $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ در نتیجه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=۰/۷+۰/۷۵-(۰/۷\times ۰/۷۵)\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۹۲۵$$

نکته: در دو حادثه مستقل A,B هرگاه احتمال وقوع یکی از حوادث صفر شود آن‌گاه دو حادثه ناسازگارند.

A,B مستقل $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)\xrightarrow[\text{یا } P(B)]{P(A)}P(A\cap B)=۰\Leftrightarrow$ ناسازگاری B,A

۷- احتمال شرطی

اگر پیشامدی مانند A به پیشامد دیگری مانند B مربوط باشد و بدانیم که پیشامد B اتفاق افتاده است، احتمال وقوع پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال: در آزمایش پرتاب دو سکه، احتمال اینکه هر دو سکه شیر بیاید به شرطی که بدانیم یکی از آنها قطعاً شیر آمده است چقدر است؟

حل: اگر شیر را با H و خط را با T نشان دهیم. A عبارتست از پیشامد اینکه هر دو سکه شیر بیاید و B پیشامد اینکه یکی از سکه‌ها شیر آمده باشد.

$$P(B)=\{(H,T),(T,H),(T,T),(H,H)\}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۴}$$

$$P(A)=\{(H,H)\}=\frac{۱}{۳}$$

چون B,A دو پیشامد مستقل هستند خواهیم داشت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{۳}$$

نکته: هرگاه B,A دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، خواهیم داشت:

$$۱)P(A|A')=۰\ ,\ P(A|A')=۰\ ,\ \ ۲)P(A|A)=۱$$

$$۳)P(A|B)\le P(B)$$

نکته: اگر B,A دو پیشامد ناسازگار باشند خواهیم داشت:

$$A\cap B=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=0 \Rightarrow P(A|B)=0,\quad P(B|A)=0$$

نکته: اگر B,A دو پیشامد مستقل باشند خواهیم داشت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow P(A|B)=P(A)$$

نکته: مکمل احتمال وقوع حادثه A به شرط وقوع حادثه B عبارتست از: $P(A'|B)=1-p(A|B)$

قانون ضرب احتمالات:

با توجه به اینکه احتمال A به شرط B از رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ بدست می‌آید، بنابراین خواهیم داشت:

$$P(A\cap B)=P(A|B).P(B) \quad , \quad P(A\cap B)=P(B|A).P(A)$$

بطور کلی خواهیم داشت:

الف) برای ۳ مجموعه C,B,A خواهیم داشت:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|(A\cap B))$$

ب) برای n مجموعه $A_n,\dots,A_2,A_1$ خواهیم داشت:

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\cap A_2\dots\cap A_{n-1})$$

۸- قضیه بیز

اگر B,A دو پیشامد باشند، احتمال وقوع پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B را می‌توان طبق قضیه بیز به صورت زیر محاسبه نمود:

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

نکته مهم: با توجه به قضیه بیز به طور کلی خواهیم داشت:

اگر $A_1,A_2,\dots,A_k$ بیانگر k پیشامد ناسازگار باشند که می‌توانند پیشامد B را ایجاد کنند آنگاه احتمال اینکه A_i عامل وقوع پیشامد B باشد برابر است با:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\dots+P(A_k)P(B|A_k)}$$

مثال: اگر بدانیم ۶۰٪ اتومبیل‌های موجود در یک شهر پیکان و ۴۰٪ بقیه از انواع دیگر خودروها باشد، و ۵۰٪ ماشینهای پیکان و ۳۰٪ سایر اتومبیل‌ها نقص فنی داشته باشند، اگر ماشینی را که بطور تصادفی انتخاب کرده‌ایم نقص فنی داشته باشد، احتمال پیکان بودن آن چقدر است؟

B: پیشامد معیوب بودن اتومبیل

A_1: پیشامد پیکان بودن اتومبیل $\Rightarrow P(A_1)=\%60$

A_2: پیشامد آنکه اتومبیل پیکان نباشد $\Rightarrow P(A_2)=\%40$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2).P(B|A_2)}$$

$$P(A_1|B)=\frac{\%60\times\%50}{\%60\times\%50+\%40\times\%30}=\frac{0/3}{0/3+0/12}=\frac{0/3}{0/42}=0/71$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

مجموعه اقتصاد

۱- ۳ دانشجوی کارشناسی ارشد و ۲ دانشجوی کارشناسی به تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند. احتمال آنکه دانشجویان کارشناسی در کنار هم قرار گیرند چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۲- در میان n محصول، ۳ عدد آنها غیراستاندارد است، اگر احتمال انتخاب ۲ محصول غیراستاندارد $\frac{1}{2}$ باشد، تعداد محصولات (n) چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $n=4$ ۲) $n=6$ ۳) $n=8$ ۴) $n=10$

۳- سه نفر هر یک به یک هدف تیر می‌اندازند، احتمال اینکه تیر هر یک به هدف اصابت کند، به ترتیب برابر $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ است. احتمال اینکه حداقل یک تیر به هدف اصابت کند چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) $\frac{12}{60}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۴- در ساختن یک نوع کالا مشخص گردیده که ۱۰٪ آنها غیراستاندارد می‌باشد، از محصولات تولید شده، تعداد دو واحد محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه حداقل یکی از محصولات استاندارد باشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۹۹ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۸۱

۵- اگر $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ باشد و B,A از هم مستقل باشند، آنگاه $P(A'\cup B')$ برابر است با: (اقتصاد – ۷۸)

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{7}{15}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{14}{15}$

۶- سکه‌ای را در نظر بگیرید که در آن احتمال آمدن خط (T) برابر ۰/۸ و احتمال آمدن شیر (H) برابر ۰/۲ باشد، در دو بار پرتاب این سکه می‌توان گفت: (اقتصاد – ۷۸)

۱) احتمال حادثه در «HT یا TH» برابر ۰/۵ است.

۲) احتمال آمدن حداقل یک شیر ۰/۳۶ است.

۳) احتمال TH از HT متفاوت است.

۴) کمیت انتظاری دو خط در ۱۰۰ بار تکرار این آزمایش تجربی تصادفی کمتر از ۵۰ است.

۷- فروشگاه‌های C,B,A به ترتیب ۲۰۰، ۷۵ و ۱۲۵ نفر کارمند دارند، از این تعداد به ترتیب ۵۰٪ و ۶۰٪ و ۷۰٪ زن هستند. اگر امکان استعفا بین کارمندان یکسان باشد و یک کارمند زن استعفا دهد، احتمال اینکه از کارمندان فروشگاه C باشد چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) $P(H_i|A)=0/193$ ۲) $P(H_i|A)=0/257$

۳) $P(H_i|A)=0/376$ ۴) $P(H_i|A)=0/634$

۸- احتمال اینکه مسافری به هواپیما نرسد، ۰/۱ است، اگر شرکت هواپیمایی تعداد ۴۰۰ بلیط فروخته باشد، احتمال اینکه تعداد ۱۵ نفر به هواپیما نرسند، چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۹- شرط استقلال سه واقعه C,B,A تعریف شده در یک فضای نمونه از یکدیگر چیست؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

۲) $P(B\cap C)=P(B).P(C)$ $P(A\cap C)=P(A).P(C)$ $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

۳) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ $P(A\cap C)=P(A).P(C)$ $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$ $P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۴) یکی از دو شرط ۱ یا ۲ جاری باشد.

۱۰- اگر برای دو پیشامد B,A داشته باشیم $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A|B)=\frac{1}{3}$, $P(B|A')=\frac{1}{4}$ مقدار $P(B)$ برابر است با: (اقتصاد – ۷۹)

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۱- فرض اینکه احتمال آمدن برف در امروز ۰/۲ و فردا ۰/۲۲ باشد. احتمال برف آمدن فردا به شرط آنکه امروز برف بیاید، ۰/۷ است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آنکه امروز برف نیاید، چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۷۸ ۴) ۰/۹

۱۲- یک شرکت تولیدی لامپهایی می‌سازد که ۲۰٪ آنها درجه یک، ۳۰٪ آنها درجه دو و بقیه درجه سه است. ۳ لامپ از محصولات این شرکت را بطور-تصادفی انتخاب کرده ایم، احتمال اینکه این نمونه حاوی ۱ لامپ درجه یک، ۱ لامپ درجه ۲ و ۱ لامپ درجه سه باشد، چیست؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) ٪۳ ۲) ٪۹ ۳) ٪۱۸ ۴) ٪۲۸

۱۳- در یک تیراندازی، احتمال اینکه شخص A به هدف بزند، ۰/۳ و احتمال اینکه شخص B به هدف بزند، برابر ۰/۵ است. هر دو نفر به هدف تیراندازی می‌کنند. احتمال اینکه فقط یک نفر به هدف بزند چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶۵

۱۴- برای دو حادثه مستقل B,A، $P(A)=0/2$, $P(B)=0/4$ بدست آمده است. احتمال اجتماع دو حادثه B,A چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۶۳ ۴) ۰/۸

۱۵- از ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها غیراستاندارد است، ۳ لامپ را بطور تصادفی با جایگذاری انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه هیچ کدام غیراستاندارد نباشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) $\frac{1}{17}$ ۲) $\frac{24}{91}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ۴) $\frac{7}{9}$

۱۶- از کیسه‌ای که شامل ۵ گلوله سفید و ۳ گلوله سیاه می‌باشد، پشت سرهم به ترتیب یک گلوله سیاه و دو گلوله سفید بیرون آورده شده است. احتمال اینکه از ۳ گلوله فوق یک گلوله سفید بیرون آوریم، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۷- از بین ۱۰ پزشک که ۳ نفر آنها متخصص هستند، ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه در بین این سه نفر حداقل یک متخصص انتخاب شود برابر است با: (اقتصاد – ۸۰)

۱) $\frac{7}{24}$ ۲) $\frac{4}{10}$ ۳) $\frac{6}{10}$ ۴) $\frac{17}{24}$

۱۸- در کارخانه‌ای ۳ خط تولید ۱، ۲و ۳ وجود دارد که به ترتیب ۲۰٪، ۳۰٪ و ۵۰٪ کل تولید کارخانه را بدست می‌دهند. درصد کالاهای زیر استاندارد این خطوط تولید به ترتیب ۱۵، ۱۰ و ۲ می‌باشد. فرض کنید کالایی که از کل تولید برگزیده شده، زیر استاندارد است. احتمال اینکه کالا متعلق به خط تولید ۱باشد، کدام است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{15}{27}$

۱۹- اگر احتمال به ثمر رسیدن طرحهای اقتصادی ۰/۵۵ باشد، احتمال به ثمر رسیدن ۴ طرح از ۵ طرح اقتصادی چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۲۱ ۳) ۰/۴۴ ۴) ۰/۸

۲۰- احتمال اینکه یک مساله ریاضی را حسن حل کند، ۰/۴ و احتمال اینکه حسین حل کند، ۰/۵ است. احتمال اینکه مساله حل شود برابر است با: (اقتصاد – ۸۱)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۲۱- یک شرکت حفاری نفت فقط امکانات لازم برای حفر دو چاه را دارد. اگر در حفر اولین چاه به نفت برسد، کار را تمام می‌کند وگرنه چاه دوم را حفر می‌کند. اگر احتمال اینکه در حفر هر چاه به نتیجه برسد، ۰/۲ باشد، احتمال شرکت حفاری به نتیجه برسد، کدام است؟ (حفر چاه‌ها بطور مستقل از هم صورت می‌گیرد) (اقتصاد – ۸۱)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۳۶

۲۲- فرض کنید ۵ مهره آبی و ۴ مهره سفید در کیسه اول و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سفید در کیسه دوم باشد. اگر مهره‌ای به تصادف از کیسه اول به دوم انتقال یابدو سپس از کیسه دوم یک مهره انتخاب شود، احتمال آبی بودن آن چیست؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴۱}{۹۰}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۲۳- اگر در یک آسانسور، احتمال خرابی زنجیر ۰/۱ و احتمال خرابی موتور ۰/۳ باشد و احتمال خرابی زنجیر یا موتور ۰/۳۵ باشد، احتمال خرابی زنجیر و موتور را حساب کنید؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۷۵

۲۴- اگر دو حادثه x مستقل باشند، $P(A)=۰/۵$, $P(A\cup B)=۰/۶۵$ باشد، احتمال حادثه B چقدراست؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲۵

۲۵- احتمال به صدا درآمدن هریک از سه آژیر خطر مستقلی که در یک فروشگاه نصب شده‌اند، به هنگام آتش‌سوزی برابر ۰/۹۵ است. احتمال آنکه به هنگام بروز آتش‌سوزی، حداقل یکی از سه آژیر خطر به صدا درآید، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۱۵ ۲) $۰/۹۵^۳$ ۳) $۱-(۰/۰۵)^۳$ ۴) $۱-(۰/۹۵)^۳$

۲۶- در کارخانه‌ای ۶۰ درصد محصولات توسط شیفت صبح و ۴۰ درصد محصولات توسط شیفت عصر تولید می‌شود. ۵٪ تولیدات شیفت صبح و ۱۰٪ تولیدات شیفت عصر معیوبند. اگر محصولی که به تصادف انتخاب شده است، معیوب تشخیص داده شود، احتمال اینکه این محصول توسط شیفت صبح تولید شده باشد، چقدر است؟(اقتصاد – ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۲۷- در کارخانه‌ای احتمال اینکه ۲٪ محصولات معیوب باشد ۰/۵، ۴ درصد معیوب باشد، ۰/۳ و ۲ درصد معیوب باشد، ۰/۲ است. اگر یک محصول به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه سالم باشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۹۷۴ ۲) ۰/۹۶۶ ۳) ۰/۹۵۲ ۴) ۰/۹۴۶

۲۸- یک سیستم مخابراتی از ۴ جزء تشکیل شده است که هر کدام بطور مستقل با احتمال ۹۰٪ کار می‌کنند. کل سیستم فعال خواهد بود اگر حداقل نیمی از اجزاء آن کار کند. احتمال آنکه سیستم کار نکند چقدر است؟(اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۰۰۳۷ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۱۹ ۴) ۰/۹۹۶۳

۲۹- اگر دوپیشامد B,A مستقل از هم و غیرتهی باشند، آنگاه کدامیک از عبارات زیر همواره صحیح است؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ۲) $P(A'|B')=P(A')$

۳) $P(A|B)=۰$ ۴) $P(A'|B)=P(A|B')$

۳۰- در ساختن یک نوع کالا، مشخص گردیده که ۱۰ درصد آنها غیراستاندارد می‌باشد، از محصولات تولید شده تعداد دو واحد محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یکی از محصولات استاندارد باشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۸۱ ۴) ۰/۹۹

۳۱- جعبه A شامل ۳ مهره سفید رنگ و ۳ مهره سبز رنگ است. جعبه B شامل ۶ مهره سفید رنگ و ۵ مهره سبزرنگ است. یک مهره بطور تصادفی از جعبه A به جعبه B منتقل می‌شود و سپس یک مهره از جعبه B به طور تصادفی انتخاب می‌شود. احتمال اینکه این مهره به رنگ سبز باشد، برابر است با: (اقتصاد – ۸۳)

۱) $\frac{۶}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۶}{۱۲}$ ۴) $\frac{۸}{۱۲}$

۳۲- بررسی‌ها نشان می‌دهد از هر ۱۰ دانشجوی مشاهده شده در محوطه خوابگاه‌های دانشجویی یک نفر غیرساکن است. اگر ۴ نفر به تصادف انتخاب شوند. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها غیرساکن باشد چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) ۰/۶۵۶ ۲) ۰/۰۶۵ ۳) ۰/۵۹۲ ۴) ۰/۳۴۴

۳۳- احتمال وجود نقص در فرآیند شکل دهی، پخت و لعاب دادن سرامیک‌های تولیدی کارخانه کبیر به ترتیب ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۱ است. احتمال اینکه سرامیک تولیدی حداقل یک نقص داشته باشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳۴- در مراجعه به رئیس هر شرکت تجاری، پرسشگر براساس اینکه عدد تصادفی توسط وی فرد باشد این سوال را مطرح می‌کند که آیا در نیمه اول سال متولد شده‌اید و اگر زوج باشد می‌پرسد، که مالیات قانونی خویش را پرداخت کرده‌اید؟ وی در مراجعه به ۵۰ شرکت در مجموع ۲۰ پاسخ بله دریافت داشته است.چه نسبتی از شرکتها مالیات قانونی خویش را پرداخت کرده‌اند ؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

مجموعه حسابداری

۳۵- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت (تکرار ارقام مجاز است)؟ (حسابداری - ۷۷)

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۵۰

۳۶- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده، کمتر از ۵ باشد کدام است؟ (حسابداری - ۷۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۳۷- از بین ۵ کارمند حسابدار و ۳ کارمند تحویل دار به چند طریق می‌توان یک گروه سه نفری انتخاب کرد، بطوریکه رئیس گروه، حسابدار انتخاب شود؟ (حسابداری - ۷۷)

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

۳۸- احتمال آنکه دستگاهی بدون عیب کار کند $\frac{۹}{۱۰}$ و احتمال آنکه ارقام بطور صحیح به آن داده شود، برابر $\frac{۵}{۶}$ است، احتمال اینکه دستگاه بدون عیب کار کند یا ارقام بطور صحیح به آن داده باشد، کدام است؟ (حسابداری - ۷۷)

۱) $\frac{۴۵}{۶۰}$ ۲) $\frac{۵۴}{۶۰}$ ۳) $\frac{۵۷}{۶۰}$ ۴) $\frac{۵۹}{۶۰}$

۳۹- اگر $P(A|B)=\frac{۳}{۴}$, $P(B)=\frac{۲}{۳}$، آنگاه احتمال وقوع پیشامد $A\cap B$، چند درصد است؟ (حسابداری - ۷۷)

۱) ۲۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۴۰- احتمال اینکه نوع بخصوصی ماشین، در ماه اول عملکرد خود دچار خرابی شود، ۱۰٪ می‌باشد. اگر شرکت از این نوع ماشین دو تا در اختیار داشته باشد، احتمال اینکه در پایان ماه اول دقیقاً یک ماشین از کار افتاده باشد، برابر است با: (حسابداری - ۷۷)

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۸۱

۴۱- اگر $P(A)=۰/۴$, $P(A\cup B)=۰/۶$, $P(A\cap B)=۰/۱$ باشد، مقدار $P(B)$ چقدر است؟ (حسابداری – ۷۸)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۳

۴۲- اگر $P(A)=P(B)=۰/۴$, $P(G|A)=P(G|B)=۰/۱$ باشد، مقدار $P(G)$ چقدر است؟ (حسابداری - ۷۸)

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۹

۴۳- یک شرکت نفت در حال حفاری چاه‌هایی در دریای شمال و دریای مدیترانه است. احتمال یافتن نفت در دریای شمال ۰/۸ و در دریای مدیترانه ۰/۶ است. احتمال آنکه فقط یکی از این دو چاه به نفت برسد، چقدر است؟ (حسابداری – ۷۹)

۱) ۰/۴۴ ۲) ۰/۵۷ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۹۲

۴۴- احتمال اصابت موشکی به یک جنگنده ۰/۲ است. با اصابت یک موشک، جنگنده سقوط می‌کند. احتمال اینکه در پرتاب چهارمین موشک، جنگنده سقوط کند، چقدر است؟ (حسابداری – ۷۹)

۱) ۰/۰۰۱۶ ۲) ۰/۱۰۲۴ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴۰۹۶

۴۵- به چند طریق می‌توان ۹ اسباب بازی را بین ۴ بچه تقسیم کرد به شرط آنکه به کوچکترین بچه ۳ اسباب بازی و به هر کدام از بچه‌های دیگر ۲ اسباب بازی برسد؟ (حسابداری – ۸۰)

۱) ۲۷ ۲) ۱۰۸ ۳) ۵۶۷۴ ۴) ۷۵۶۰

۴۶- احتمال اشتباه ثبت شده هر یک از اسناد شرکت ۰/۱۰ است. احتمال آنکه، سومین سندی که حسابرسان بررسی می‌کنند، اولین سند اشتباه باشد، چقدر است؟ (حسابداری – ۸۰)

۱) ۰/۰۸۱ ۲) ۰/۱۰ ۳) ۰/۹۰ ۴) ۰/۲۴۳

۴۷- شرکتی ۸۰۰ کارمند دارد. ۲۰٪ از کارمندان دارای درجات دانشگاهی هستند ولی نیمی از آنها در سمت‌های غیر مدیریتی کار می‌کنند. ۳۰٪ از کارمندان بدون درجات دانشگاهی در سمت‌های مدیریتی قرار دارند. اگر یکی از کارمندان که بطور تصادفی انتخاب شده است، مدیر باشد، احتمال اینکه دانشگاهی باشد، چقدر است؟ (حسابداری – ۸۱)

۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۲۹ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۴۲

۴۸- اگر $P(A)=۰/۳۰$, $P(B)=۰/۵۰$, $P(A|B)=۰/۳۰$ باشد، می‌توان گفت که B,A هر دو: (حسابداری – ۸۱)

۱) مستقل هستند. ۲) وابسته هستند. ۳) ناسازگار هستند. ۴) حادثه شرطی هستند.

۴۹- اگر ۹ نفر در مسابقه‌ای شرکت کنند، به چند طریق می‌توان جوایز اول، دوم و سوم را اعطا نمود؟ (حسابداری – ۸۱)

۱) ۲۵۲ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۹۲۰ ۴) ۷۵۶

۵۰- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سبز و ۵ مهره سفید وجود دارد. اگر سه مهره به تصادف (به صورت با جاگذاری) از این جعبه انتخاب شود، احتمال آنکه مهره‌ها همرنگ نباشد، چقدر است؟ (حسابداری – ۸۲)

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۶ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۳۰

۵۱- سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کارکردن هر یک از آنها ۰/۹۰ است. اگر اجزا به صورت موازی قرار گرفته باشند و مستقل از همدیگر کار کنند، احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟ (حسابداری – ۸۲)

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۸۱ ۳) ۰/۹۰ ۴) ۰/۹۹

۵۲- اگر احتمال داشتن فرزند پسر و دختر مساوی باشد، چند درصد خانواده‌هایی که ۲ فرزند دارند یک فرزند دختر و یک فرزند پسر دارند؟ (حسابداری – ۸۳)

۱) ٪۲۵ ۲) ٪۵۰ ۳) ٪۷۵ ۴) ٪۱۰۰

۵۳- در خانواده‌ای احتمال داشتن فرزند دختر و پسر مساوی است.احتمال اینکه خانواده‌ای که ۳ فرزند دارد، حداقل یک پسر داشته باشد، چقدر است؟ (حسابداری – ۸۳)

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) ۱

۵۴- از ۹ عدد کالای یکسان موجود در یک کارتن، ۳ عدد معیوب است. ۴ کالا بطور تصادفی از بین آنها برداشته می‌شود، با کدام احتمال لااقل سه کالای برداشته شده سالم است؟ (حسابداری – ۸۴)

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴۲}$

۵۵- در یک خانواده دو فرزندی می‌دانیم که یکی از فرزندان پسر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان دختر است؟ (حسابداری – ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مجموعه مدیریت

۵۶- احتمال اینکه هر پرتاب بازیکنی به هدف اصابت کند، ۰/۸ است. احتمال اینکه اولین پرتابی که به هدف می‌خورد سومین پرتاب وی باشد، چقدر است؟ (مدیریت – ۷۹)

۱) ۰/۰۳۲ ۲) ۰/۲۰۴۸ ۳) ۰/۲۳۱ ۴) ۰/۳۲۱

۵۷- پنج کارمند را در اطاق‌های ۲ و ۳ نفره به تصادف جای می‌دهیم، احتمال اینکه دو نفر مورد نظر از آنان در یک اطاق جای نداشته باشند کدام است؟ (مدیریت – ۸۴)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۵۸- دو تاس را بطور متوالی پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد تاس دوم حداقل ۲ واحد از عدد تاس اول بیشتر باشد، کدام است؟ (مدیریت – ۸۴)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۵۹- اگر $P(A|B)=۰/۲, P(B)=۰/۵=P(A)=۰/۴$ باشد $P(A\cap B)$ کدام است ؟(سراسری ۷۵)

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱۰ ۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۳۰

۶۰- اطلاعات روبه رو داده شده است: احتمال $P(B_۲|A)$ کدام است ؟ (سراسری ۷۵)

$P(B_۱)=۰/۲ \quad P(A|B_۱)=۰/۰۱$

$P(B_۲)=۰/۳ \quad P(A|B_۲)=۰/۰۲$

$P(B_۳)=۰/۵ \quad P(A|B_۳)=۰/۰۵$

۱) $\frac{۲}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۱- اگر $P(B|A)=0/1 , P(B)=0/6 , P(A)=0/4$ باشد $P(A|B)$ کدام است ؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰/۰۱۵۳ ۲) ۰/۰۴۰ ۳) ۰/۰۵۰ ۴) ۰/۰۶۶۷

۶۲- اگر $P(A|B)=0/1, P(B)=0/4, P(A)=0/5$ باشد. $P(A\cup B)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۶۳- دو تلفنچی شماره ۱ و ۲ به ترتیب ۴۰٪ و ۶۰٪ تلفن‌های شرکت را وصل می‌کنند. تلفنچی شماره ۱ در ۲٪ موارد و شماره ۲ در ۵٪ موارد دچار خطا در وصل کردن تلفن می‌شوند. چند درصد تلفن‌های شرکت اشتباه وصل می‌شوند؟ (مدیریت – ۷۶)

۱) ۰/۰۲۷ ۲) ۰/۰۳۸ ۳) ۰/۰۷ ۴) ۰/۱۰۷

۶۴- ۶۰٪ تلفن‌های شرکت توسط تلفنچی A و مابقی توسط تلفنچی B وصل می‌شود. شخص A از هر ۵۰ تلفنی یکی و شخص B از هر ۲۰ تا یکی را اشتباه وصل می‌کند. شکایتی در خصوص اشتباه وصل شدن تلفن رسیده است. احتمال اینکه شخص A آن را وصل کرده باشد چه قدر است(سراسری ۷۷)

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۱۲ ۳) ۰/۳۷۵ ۴) ۰/۶۲۵

۶۵- انباشته‌ای حاوی ۱۲ کالا است که ۴ واحد آن غیر استاندارد است. سه کالا بطور تصادفی از انباشته انتخاب شده است. احتمال اینکه هر سه غیر استاندارد باشند چه قدر است ؟ (مدیریت - ۷۷)

۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{1}{55}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۶۶- چهار حرف بطور تصادفی از کلمه RANDOMLY انتخاب می‌شود. احتمال اینکه ۴ حرف انتخاب شده جزء حروف بی صدا باشد برابر است با ..... (سراسری ۷۸)

۱) $\frac{6}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{3}{14}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۶۷- اگر $P(A\cap B)=0/06$, $P(B)=0/2P(A)=0/3$ باشند رویدادهای A , B چگونه‌اند ؟ (مدیریت - ۷۸)

۱) مکمل ۲) مستقل ۳) ناسازگار ۴) وابسته

۶۸- اگر $P(E|A)=P(E|B)=0/10$, $P(B)=0/40$, $P(A)=0/20$ باشد مقدار $P(E)$ چه قدر است ؟ (مدیریت - ۷۸)

۱) ۰/۲۰ ۲) ۰/۱۰ ۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۷

۶۹- از بین ۱۰ نفری که متقاضی استخدام هستند ۳ نفر قادر به انجام آن هستند. دو نفر بطور تصادفی انتخاب می‌شوند احتمال اینکه هر دو قادر به انجام کار باشند چقدر است؟

۱) $\frac{21}{45}$ ۲) $\frac{7}{45}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۷۰- یک شرکت نفتی آزمایشات خود را در منطقه دنبال می‌کند. مدیران شرکت شانس وجود نفت در منطقه اول را ۰/۶ و در منطقه دوم ۰/۸ می‌باشد. احتمال اینکه فقط در یک منطقه نفت وجود داشته باشد کدام است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۸٪ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۴۴ ۴) ۰/۴۸

۷۱- از ۱۰ محصول تولیدی به وسیله یک ماشین ۳ واحد آن معیوب است. یک نمونه تصادفی ۲ تایی از محصولات این ماشین انتخاب شده است احتمال اینکه هیچکدام سالم نباشند چقدر است ؟ (سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) $\frac{49}{90}$ ۳) $\frac{9}{100}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۷۲- اگر ۹ نفر در یک مسابقه شرکت کنند به چند طریق ممکن جوایز اول و دوم و سوم را می‌توانید دریافت کنید؟ (مدیریت - ۷۹)

۱) ۸۴ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۳۵ ۴) ۳۰۲۴

۷۳- اگر $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(A'\cap B)=\frac{1}{3}$ باشد مقدار $P(B|A')$ چه قدر است؟ (۷۹)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{4}{35}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۷۴- فرض کنید دو تاس به همراه سکه‌ای پرتاب شود درخت این آزمایش چند شاخه خواهد داشت؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱۴ ۲) ۳۸ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۷۵- احتمال زنده ماندن یک زن و شوهر در ۲۰ سال آینده به ترتیب $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ است احتمال اینکه در این مدت دست کم یکی از آنها زنده بماند چه قدر است ؟ (مدیریت - ۸۰)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{8}{10}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۷۶- اگر $P(A)=0/3$, $P(B)=0/4$, $P(E^C|B)=0/8$ باشد احتمال E چه قدر است؟ (مدیریت - ۸۰)

۱) ۰/۱۱ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۳۵

۷۷- اگر $P(A)=0/3$, $P(B)=0/1$, A , B مستقل باشند $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ برابر است با (مدیریت - ۸۱)

۱) ۰/۴۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۶ ۴) ۰/۶۶۷

۷۸- در صورتی که در محموله‌ای که دوازده واحد کالا وجود دارد چهار تای آن معیوب باشد، اگر دو واحد کالا به تصادف از آن انتخاب شود احتمال اینکه هر دو واحد کالا سالم باشد چه میزان می‌شود؟ (مدیریت - ۸۱)

۱) $\frac{۱۴}{۳۳}$ ۲) $\frac{۵۶}{۳۳}$ ۳) $\frac{۲۴}{۵۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۱۲۰}$

۷۹- به چند طریق می‌توان ۹ نفر کارمند را در یک اتاق ۴ نفره، یک اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۲ نفره چیدمان کرد؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۱۴۰۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴

۸۰- سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه هیچ کدام از شماره‌های ظاهر شده یکسان نباشند چه قدر است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲۰}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۲۱۶}$

۸۱- از بین ۵ ورزشکار دو و میدانی، سه نفر را برای شرکت در سه رشته دو و میدانی مسابقات سراسری انتخاب می‌کنیم. هر ورزشکار می‌تواند در هر سه رشته شرکت کند. تعداد کل حالات ممکن این انتخاب‌ها عبارت است از:

۱) ۱۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۴۳

۸۲- فرض کنید $P(E)=0/7$ ، $P(F)=0/6$ و حوادث E و F مستقل باشند آنگاه $P(E'\cup F)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۷۲

۸۳- در ۵ بار پرتاب یک سکه سالم، در چند حالت می‌توان ۲ شیر را مشاهده کرد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۸۴- شخصی در جیب خود سه سکه دارد که ۲ تای آن معمولی و دیگری هر دو روی آن خط است، یکی از سکه‌ها را به تصادف از جیب خود در آورد و پرتاب می‌کند نتیجه خط است. احتمال این که هر دو روی سکه خط باشد. چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۸۵- پنج رقم ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم، احتمال اینکه عدد پنج رقمی حاصل زوج باشد، کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۸۶- با استفاده از حروف کلمه «باز رمان» چند کلمه سه حرفی می‌توان یافت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۳۵

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

رشته علوم اقتصادی

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$n(S)=۵!$$
$$n(A)=r!(n-r+۱)!=۲!(۵-۲+۱)!=۲\times ۴!$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times ۴!}{۵!}=۰/۴$$

۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{۳}{n}\times\frac{۲}{n-۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۶}{n(n-۱)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n(n-۱)=۱۲\Rightarrow n=۴$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$A\rightarrow$ پیشامد اینکه تیر نفر اول به هدف بخورد $\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A')=\frac{۲}{۳}$

$B\rightarrow$ پیشامد اینکه تیر نفر دوم به هدف بخورد $\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(B')=\frac{۳}{۴}$

$C\rightarrow$ پیشامد اینکه تیر نفر سوم به هدف بخورد $\Rightarrow P(C)=\frac{۱}{۵}\Rightarrow P(C')=\frac{۴}{۵}$

P (هیچ تیری به هدف اصابت نکند) $=P(A'\cap B'\cap C')=P(A').P(B').P(C')=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲}{۵}$

P (حداقل یک تیر به هدف اصابت کند) $=۱-$ P (هیچ تیری به هدف اصابت نکند) $=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

P (هیچ کدام از محصولات استاندارد نباشد) $=۰/۱۰\times۰/۱۰=۰/۰۱$

P (حداقل یکی از محصولات استاندارد باشد) $=۱-۰/۰۱=۰/۹۹$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=۱-P(A\cap B)=۱-[P(A).P(B)]=۱-\left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۱۴}{۱۵}$$

۶- گزینه ۲ صحیح است.

$P(T)=۰/۸$ P (حداقل یک شیر بیاید) $=۱-$ P (هر دو خط بیاید) $=۱-(۰/۸\times۰/۸)=۰/۳۶$

$P(H)=۰/۲$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

از قضیه بیز استفاده می‌کنیم:

تعداد کل کارمندان $۲۰۰+۷۵+۱۲۵=۴۰۰$

$$P(H_۳|A)=\frac{\frac{۱۲۵}{۴۰۰}\times۰/۷}{\frac{۲۰۰}{۴۰۰}\times۰/۵+\frac{۷۵}{۴۰۰}\times۰/۶+\frac{۱۲۵}{۴۰۰}\times۰/۷}=\frac{۸۷۵}{۲۳۲۵}=۰/۳۷۶$$

۸-گزینه۴ صحیح است.

جواب ندارد

۹- گزینه ۳ صحیح است.

سه پیشامد C,B,A را دو به دو مستقل گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$1)\begin{cases}P(A\cap B)=P(A).P(B)\\P(A\cap C)=P(A).P(C)\\P(B\cap C)=P(B).P(C)\end{cases}\qquad 2)\ P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(A'|B)=1-P(A|B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}\Rightarrow\frac{P(B\cap A')}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{1}{8}$$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{\frac{1}{8}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{16}$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است.

A: پیشامد اینکه امروز برف بیاید $\qquad P(B|A)=0/7\Rightarrow P(B'|A')=?$

B: پیشامد اینکه فردا برف بیاید

$$P(A)=0/2\Rightarrow P(A')=1-0/2=0/8\qquad P(B)=0/22$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow 0/7=\frac{P(B\cap A)}{0/2}\Rightarrow P(B\cap A)=0/14$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=0/2+0/22-0/14=0/28$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)\Rightarrow P(A'\cap B')=1-0/28=0/72$$

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}\Rightarrow P(B'|A')=\frac{0/72}{0/8}\Rightarrow P(B'|A')=0/9$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)=0/2\times0/3\times0/5=0/03$$

از آنجا انتخاب ۱ نمونه شامل ۱ لامپ درجه یک، ۱ لامپ درجه ۲ و ۱ لامپ درجه ۳ به ۶ طریق امکانپذیر است بنابراین احتمال این نمونه برابر است با: $(3!=6)$ $\qquad 6\times0/03=0/18$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

P(فقط یک نفر به هدف بزند) $=P$(فقط فرد A بزند) $+P$(فقط فرد B بزند) $=P(A\cap B')+P(B\cap A')$

$=P(A)P(B')+P(B')P(A)=0/3\times0/5+0/5\times0/7=0/5\Leftarrow$ چون A و B مستقلند

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

$P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=0/2\times0/4=0/08$ (A و B مستقل)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=0/2+0/4-0/08=0/52$$

۱۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$P=\frac{10}{15}\times\frac{10}{15}\times\frac{10}{15}=\frac{8}{27}$$

۱۶- گزینه ۲ صحیح است.

چون دو گلوله سفید و یک گلوله سیاه بیرون آورده شده است پس در کیسه ۳ گلوله سفید و ۲ گلوله سیاه موجود می‌باشد. در نتیجه احتمال بیرون آوردن یک گلوله سفید $\frac{3}{5}$ است.

۱۷- گزینه ۴ صحیح است.

P(حداقل یک متخصص انتخاب شود) = ۱ − P (متخصص انتخاب نشود)

$$P(\text{متخصص انتخاب نشود}) = \frac{C_{۷}^{۳}}{C_{۱۰}^{۳}} = \frac{\frac{۷!}{۳!\times ۴!}}{\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}} = \frac{۳۵}{\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۶}} = \frac{۷}{۲۴}$$

$$P(\text{حداقل یک متخصص انتخاب شود}) = ۱ - \frac{۷}{۲۴} = \frac{۱۷}{۲۴}$$

۱۸- گزینه ۳ صحیح است.

از قضیه بیز استفاده می‌کنیم:

$$P = \frac{۰/۲\times ۰/۱۵}{۰/۲\times ۰/۱۵ + ۰/۳\times ۰/۱ + ۰/۵\times ۰/۰۲} = \frac{۰/۰۳}{۰/۰۷} = \frac{۳}{۷}$$

۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

تعداد حالات انتخاب ۴ طرح از ۵ طرح $= C_{۵}^{۴} = ۵$

احتمال به ثمر رسیدن ۴ طرح $= (۰/۵۵)^{۴}(۰/۴۵)$

$\Rightarrow$ احتمال به ثمر رسیدن ۴ طرح از ۵ طرح $= ۵(۰/۵۵)^{۴}(۰/۴۵) = ۰/۲۱$

۲۰- گزینه ۲ صحیح است.

A : پیشامد حل مساله توسط حسن $\Rightarrow P(A) = ۰/۴$

B : پیشامد حل مساله توسط حسین $\Rightarrow P(B) = ۰/۵$

B, A مستقلند.

$$P(\text{حل مساله}) = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = ۰/۴ + ۰/۵ - [۰/۴\times ۰/۵]$$

$$P(A\cup B) = ۰/۷$$

۲۱- گزینه ۴ صحیح است.

P(حفاری به نتیجه برسد) = P(حفاری اول به نتیجه برسد) + P(حفاری اول به نتیجه نرسد ولی حفاری دوم به نتیجه برسد)

$$= ۰/۲ + (۰/۸\times ۰/۲) = ۰/۳۶$$

$$= ۰/۲ + (۰/۸)(۰/۲) = ۰/۳۶$$

۲۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A') = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$$

$$P(B) = \left(\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}\right) + \left(\frac{۵}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}\right) = \frac{۴۱}{۹۰}$$

۲۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow \text{پیشامد خرابی زنجیر} \Rightarrow P(A) = ۰/۱ \\ B \rightarrow \text{پیشامد خرابی موتور} \Rightarrow P(B) = ۰/۳ \\ \qquad\qquad P(A\cup B) = ۰/۳۵ \end{array}\right\} P(A\cap B) = ?$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۳۵ = ۰/۱ + ۰/۳ - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = ۰/۰۵$$

۲۴- گزینه ۱ صحیح است.

$P(A\cap B) = P(A).P(B) \Leftarrow$ B, A مستقلند

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \Rightarrow ۰/۶۵ = ۰/۵ + P(B) - ۰/۵P(B)$$

$$۰/۵P(B) = ۰/۱۵ \Rightarrow P(B) = ۰/۳۰$$

۲۵- گزینه ۳ صحیح است.

پیشامد به صدا درآمدن حداقل یکی از سه آژیر : A

پیشامد آنکه هیچ آژیری به صدا درنیاید: A' $\Rightarrow P(A')=۰/۵\times۰/۵\times۰/۵=۰/۱۲۵$

$P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۱۲۵=۰/۸۷۵=۱-(۰/۵)^{۳}$

۲۶- گزینه ۴ صحیح است.

با استفاده از قضیه بیز داریم:

محصولات تولید شیفت صبح : A محصولات معیوب : d

محصولات تولید شیفت عصر : B

$$P(A|d)=\frac{۰/۶\times۰/۰۵}{۰/۶\times۰/۰۵+۰/۴\times۰/۱}=\frac{۳}{۷}$$

۲۷- گزینه ۲ صحیح است.

پیشامد اینکه محصول معیوب باشد : A

$P(A)=(۰/۰۲\times۰/۵)+(۰/۰۴\times۰/۳)+(۰/۰۶\times۰/۲)=۰/۰۳۴$

P (محصول سالم باشد) $=P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۳۴=۰/۹۶۶$

۲۸- گزینه ۱ صحیح است.

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\bar{A}).P(\bar{B})}{P(\bar{B})}=P(\bar{A})$$

چون B,A مستقل از هم می‌باشند پس B',A' هم مستقلند.

۳۰- گزینه ۴ صحیح است.

پیشامد اینکه هر دو محصول غیراستاندارد باشد : A $\Rightarrow P(A)=۰/۱\times۰/۱=۰/۰۱$

P (حداقل یکی از دو محصول استاندارد باشد) $=P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۱=۰/۹۹$

۳۱- گزینه ۲ صحیح است.

P (مهره انتخابی از جعبه B سبز باشد) $=\left(\frac{۳}{۶}\times\frac{۵}{۱۲}\right)+\left(\frac{۳}{۶}\times\frac{۶}{۱۲}\right)=\frac{۱۱}{۲۴}$

۳۲- گزینه ۴ صحیح است.

هر ۴ نفر ساکن باشند : A $\Rightarrow P(A)=۰/۹\times۰/۹\times۰/۹\times۰/۹=۰/۶۵۶۱$

P (حداقل یک نفر غیرساکن باشد) $=P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۶۵۶۱\simeq۰/۳۴۴$

۳۳- گزینه ۳ صحیح است.

پیشامد وجود نقص در فرآیند شکل دهی : A $\Rightarrow P(A)=۰/۲$

پیشامد وجود نقص در فرآیند پخت : B $\Rightarrow P(B)=۰/۳$

پیشامد وجود نقص در فرآیند لعاب دادن : C $\Rightarrow P(C)=۰/۱$

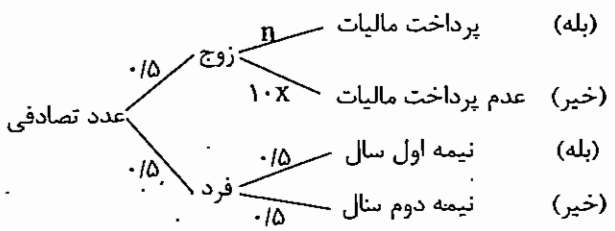
$p(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

$P(A\cap B)=۰/۲\times۰/۳=۰/۰۶$ $P(A\cap C)=۰/۲\times۰/۱=۰/۰۲$ $P(B\cap C)=۰/۳\times۰/۱=۰/۰۳$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=۰/۲\times۰/۳\times۰/۱=۰/۰۰۶$

$\Rightarrow P(A\cup B\cup C)=۰/۲+۰/۳+۰/۱-۰/۰۶-۰/۰۲-۰/۰۳+۰/۰۰۶\Rightarrow P(A\cup B\cup C)=۰/۴۹۶$

۳۴- گزینه ۱ صحیح است.



P(بله) = P(عدد تصادفی زوج) × P(پرداخت مالیات) + P(عدد تصادفی فرد) × P (نیمه اول سال)

$$\frac{۲}{۵}=۰/۵\times x+۰/۵\times ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵x=۰/۴-۰/۲۵ \Rightarrow x=۰/۳$$

۳۵- گزینه ۴ صحیح است.

۵	۵	۵	۲

$۵\times ۵\times ۵\times ۲=۲۵۰$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$n(S)=a^b=۶^۲=۳۶$$

A : پیشامد آنکه مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۵ باشد

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\} \Rightarrow n(A)=۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$C_۵^۱\times C_۷^۲=۵\times\frac{۷!}{۵!\times ۲!}=۵\times ۲۱=۱۰۵$$

۳۸- گزینه ۴ صحیح است.

A : دستگاه بطور صحیح کار کند $P(A)=\frac{۹}{۱۰}$

B : ارقام بطور صحیح داده شود $P(B)=\frac{۵}{۶}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ A , B مستقلند

$$P(A\cup B)=\frac{۹}{۱۰}+\frac{۵}{۶}-\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۵}{۶}=\frac{۵۹}{۶۰}$$

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\,P(B)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}=\%۵۰$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

P(دقیقاً یک ماشین از کار بیفتد) = P(ماشین اول کار کند ولی ماشین دوم از کار بیفتد)

+ P(ماشین اول از کار بیفتد ولی ماشین دوم کار کند) = ۰/۹×۰/۱+۰/۱×۰/۹=۰/۱۸

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۶=۰/۴+P(B)-۰/۱ \Rightarrow P(B)=۰/۳$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(G)=P(G\cap A)+P(G\cap B) \Rightarrow P(G)=P(A)P(G|A)+P(B)P(G|B)$$

$$P(G)=(۰/۴)(۰/۱)+(۰/۴)(۰/۱)=۰/۰۸$$

۴۳- گزینه ۱ صحیح است.

A : یافتن نفت در دریای شمال $\Rightarrow P(A)=۰/۸$ B : یافتن نفت در دریای مدیترانه $\Rightarrow P(B)=۰/۶$

P (یکی از دو چاه تنها به نفت برسد) $=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cap B')+p(B\cap A')$

$=(۰/۸\times ۰/۴)+(۰/۶\times ۰/۲)=۰/۴۴$

۴۴- گزینه ۲ صحیح است.

P (سقوط جنگنده در پرتاب چهارم) $=۰/۸\times ۰/۸\times ۰/۸\times ۰/۲=۰/۱۰۲۴$

۴۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{9!}{3!2!2!2!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{2\times2\times2}=7560$$

۴۶- گزینه ۱ صحیح است.

P (سومین سند بررسی شده اولین اشتباه باشد) $=0/9\times0/9\times0/10=0/081$

۴۷- گزینه ۲ صحیح است.

از قضیه بیز استفاده می‌کنیم:

$$P=\frac{0/2\times0/5}{(0/2\times0/5)+(0/8\times0/3)}=\frac{0/1}{0/34}=0/29$$

۴۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

B,A زمانی‌که مستقل باشند: $P(A|B)=P(A)\ ,\ P(B|A)=P(B)$

۴۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow P_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!}=5/4$$

۵۰- گزینه ۳ صحیح است.

P(همرنگ نباشند)=P(قرمز)×P(سبز)×P(سفید)×3! $=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}\times6=0/18$

3! تعداد حالات انتخاب ۳ مهره غیرهمرنگ

۵۱- گزینه ۴ صحیح است.

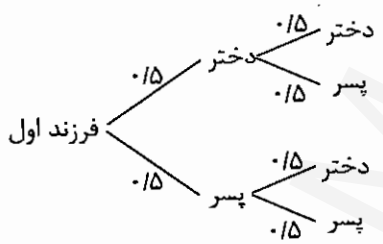
A: پیشامد کار کردن جزء اول $P(A)=0/9$

B: پیشامد کار کردن جزء دوم $P(B)=0/9$ B,A مستقل می‌باشند

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-(P(A)P(B))$$

$$P(A\cup B)=0/9+0/9-(0/9\times0/9)=0/99$$

۵۲- گزینه ۲ صحیح است.



P (یک دختر و یک پسر) $=(0/5\times0/5)+(0/5\times0/5)=\%50$

۵۳- گزینه ۳ صحیح است.

A: پیشامد آنکه هیچ یک از ۳ فرزند پسر نباشد $\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

P (حداقل یک پسر باشد) $=P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

۵۴- گزینه ؟ صحیح است.

۵۵- گزینه ۲ صحیح است.

A = حداقل یک پسر = { (پ و پ) و (پ و د) و (د، پ) } $\Rightarrow n(A)=3$

B = حداقل یک دختر = { (د، د) و (پ و د) و (د، پ) } $\Rightarrow n(B)=3$

$A\cap B=$ { (پ و د) و (د و پ) } $\Rightarrow n(A\cap B)=2$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{2}{3}$$

۵۶- گزینه ۱ صحیح است.

$P(\text{اصابت به هدف}) = ۰/۸ \Rightarrow P(\text{عدم اصابت به هدف}) = ۰/۲$

$P(\text{سومین پرتاب به هدف اصابت کند}) = ۰/۲ \times ۰/۲ \times ۰/۸ = ۰/۰۳۲$

۵۷- گزینه ۴ صحیح است.

پنج فرد را E,D,C,B,A و آن دو فرد مورد نظر را B,A در نظر می‌گیریم.

$P(\text{در یک اتاق نباشند } B,A) = ۱ - P(\text{در یک اتاق باشند } B,A) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$

$n(S) = \frac{۵!}{۳!۲!} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ کلیه حالات

اتاق دو تخته	اتاق ۳ تخته
DE	ABC
CE	ABD
CD	ABE
AB	CDE

حالت‌هایی که B,A در یک اتاق هستند.

۵۸- گزینه ۲ صحیح است.

$n(S) = a^b = ۶^۲ = ۳۶$

$A = \{(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۶)\}$

$n(A) = ۱۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$

۵۹- گزینه ۲ صحیح است.

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۵ \times ۰/۲ = ۰/۱۰$

۶۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(B_۲|A) = \frac{P(A \cap B_۲)}{P(A)} = \frac{P(B_۲)P(A|B_۲)}{P(B_۱)P(A|B_۱) + ... + P(B_۳)P(A|B_۳)} =$$

$$\frac{۰/۳ \times ۰/۲}{۰/۲ \times ۰/۰۱ + ۰/۳ \times ۰/۰۲ + ۰/۵ \times ۰/۰۵} = \frac{۰/۰۰۶}{۰/۰۳۳} = \frac{۲}{۱۱}$$

۶۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{۰/۴ \times ۰/۱}{۰/۶} = \frac{۰/۰۴}{۰/۶} = ۰/۰۶۶۷$$

۶۲- گزینه ۲ صحیح است.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۴ + ۰/۵ - ۰/۰۴ = ۰/۸۶$

$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = ۰/۴ \times ۰/۱ = ۰/۰۴$

۶۳- گزینه ۲ صحیح است.

A: وصل اشتباه تلفن

B_I: کار فرد i

$A \Rightarrow P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) = ۰/۴ \times \%۲ + ۰/۶ \times \%۵ = ۰/۰۳۸$

۶۴- گزینه ۳ صحیح است.

وصل اشتباه تلفن: $A \Rightarrow P(B_۱|A) = \frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)} = \frac{۰/۰۱۲}{۰/۰۳۲} = ۰/۳۷۵$

$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) = ۰/۶ \times ۰/۰۲ + ۰/۴ \times ۰/۰۵ = ۰/۰۳۲$

۶۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۴!}{۳!۱!}}{\frac{۱۲!}{۹!۳!}}=\frac{۴}{\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}}=\frac{۱}{۵۵}$$

➢**یادآوری** : این رابطه در واقع همان رابطه توزیع فوق هندسی است.

۶۶- گزینه ۳ صحیح است.

تعداد حروف بی صدا ۶ تا است بنابراین:

$$\Rightarrow P(A)=\frac{\binom{۶}{۴}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!\times۲}}{\frac{۸\times۷\times۵\times۶\times۴!}{۴!\times۴\times۳\times۲}}=\frac{۱۵}{۷۰}=\frac{۳}{۱۴}$$

۶۷- گزینه ۲ صحیح است.

$P(A)P(B)=۰/۳\times۰/۲=۰/۰۶=P(A|B)\Rightarrow$ مستقل هستند B , A

۶۸-گزینه ۳ صحیح است.

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)=۰/۲\times۰/۱+۰/۴\times۰/۱=۰/۰۲+۰/۰۴=۰/۰۶$$

۶۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{\frac{۳!}{۲!۱!}}{\frac{۱۰!}{۸!۲!}}=\frac{۳}{\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!\times۲!}}=\frac{۳}{۴۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

۷۰-گزینه ۳ صحیح است.

با فرض اینکه پیشامد کشف در دو منطقه مستقل است خواهیم داشت:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$ چون فقط کشف نفت در یک منطقه و نه در هر دو منطقه مد نظر است بنـابراین خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=۰/۶+۰/۸-۲(۰/۴۸)=۰/۴۴$$

۷۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{\frac{۳!}{۲!۱!}}{\frac{۱۰!}{۲!۸!}}=\frac{۳}{\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۸!}}=\frac{۱}{۱۵}$$

۷۲- گزینه ۲ صحیح است.

رتبه اول	رتبه دوم	رتبه سوم
9	8	7

اصل شمارش ⟶ $۹\times۸\times۷=۵۰۴$

۷۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

۷۴- گزینه ۳ صحیح است.

پرتاب هر تاس ۶ حالت دارد و پرتاب هر سکه ۲ حالت وجود دارد بنابراین $۶^۲ \times ۲ = ۷۲$

۷۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۶+۵-۳}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۱۰}$$

۷۶-گزینه ۱ صحیح است.

$$P(E' | B) = ۱ - P(E | B) \Rightarrow ۰/۸ = ۱ - P(E | B) \Rightarrow P(E | B) = ۰/۲$$

$$P(E) = P(A)P(E | A) + P(B)P(E | B) = ۰/۳ \times ۰/۱ + ۰/۴ \times ۰/۲ = ۰/۱۱$$

۷۷- گزینه۳ صحیح است.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P[(A \cup B)'] = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - ۰/۴۴ = ۰/۵۶$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ + ۰/۲ - ۰/۳ \times ۰/۲ = ۰/۴۴$$

۷۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(A) = \frac{\binom{۸}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}} = \frac{\frac{۸!}{۶!۲!}}{\frac{۱۲!}{۱۰!۲!}} = \frac{\frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۲}}{\frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰!}{۱۰! \times ۲!}} = \frac{۲۸}{۶۶} = \frac{۱۴}{۳۳}$$

۷۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$\binom{۹}{۴,۳,۲} = \frac{۹!}{۴!۳!۲!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۵ \times ۶}{۳ \times ۲ \times ۲} = ۱۲۶۰$$

۸۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶^۳} = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$$

۸۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$\binom{۵}{۳} \times ۳! = ۶۰$$

چون هر کدام می‌توانند در هر سه رشته شرکت کنند !۳ تعداد حالات قرار گرفتن در ۳ رشته می‌باشد.

۸۲- گزینه ۴ صحیح است.

هرگاه حوادث E و F مستقل باشند آن‌گاه حوادث (E,F') و (E',F) و (E',F') هم مستقل‌اند.

$F,E' \rightarrow P(E' \cap F), P(E') \times P(F)$ مستقل

$$P(E) = ۰/۷, P(E') = ۰/۳, P(F) = ۰/۶$$

$$P(E' \cup F), P(E') + P(F) - P(E' \cap F) = ۰/۳ + ۰/۶ - ۰/۳ \times ۰/۶ = ۰/۷۲$$

۸۳- گزینه ۲ صحیح است.

در ۵ بار پرتاب یک سکه سالم انتخاب $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ تعداد حالات مختلف ظاهر شدن ۲ شیر می‌باشد.

۸۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$P\,(\text{سکه خط ظاهر شده ۲ سکه دو رو خط}) = \frac{\frac{۱}{۳} \times ۱}{\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \times ۱} = \frac{۱}{۲}$$

۸۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$P\,(\text{زوج بودن}) = \frac{\frac{۴!}{۳!}}{\frac{۵!}{۲!۳!}} = \frac{۴}{۱۰} = ۰/۴$$

۸۶- گزینه ۴ صحیح است.

تعداد تمام حالات قرار گرفتن ارقام در کنار هم $\Rightarrow \frac{۵!}{۳!۲!}$ تعداد اعداد ۵ رقمی زوج با ارقام ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ $\Rightarrow \frac{۴!}{۳!}$

فصل سوم

توابع احتمال گسسته

۱- متغیر تصادفی:

متغیر تصادفی در واقع میان اعضای نمونه و اعداد ارتباط برقرار می‌کند. در واقع به هر یک از اعضای فضای نمونه، یک عدد حقیقی اختصاص می‌دهد. به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است که دامنه آن فضای نمونه و حوزه آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌باشد. متغیر تصادفی بر دو نوع است:

الف) متغیر تصادفی گسسته:

به متغیری گفته می‌شود که اعداد حوزه آن از مجموعه محدود و یا مجموعه نامحدود شمارش پذیر تشکیل می‌شود و به ازای هر متغیر یک احتمال وجود دارد.

تعریف دیگر: متغیر تصادفی x که روی فضای نمونه گسسته تعریف شود را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم یعنی مقادیری که x می‌تواند بگیرد نقاط متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر است.

ب) متغیر تصادفی پیوسته:

به متغیری گفته می‌شود که اعداد حوزه آن از مجموعه شمارش ناپذیر تشکیل می‌شود. به عبارت دیگر اعداد حوزه آن، مجموعه اعداد حقیقی و یا قسمتی از مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

در این فصل، متغیرهای تصادفی گسسته و توابع احتمال مربوط به آنها را مورد بررسی قرار داده و در فصل بعد به بررسی متغیرهای تصادفی پیوسته و توابع احتمال مربوط به آنها می‌پردازیم.

مثال: اگر ما سکه‌ای را ۲ بار پرتاب کنیم و متغیر تصادفی x را تعداد دفعاتی که سکه رو بیاید تعریف کنیم، مقدار x را بدست آورید.

حل: رو با H و پشت با T نمایش داده شده است:

$$S=\{(T,T),(T,H),(H,T),(H,H)\}$$

اعضای فضای نمونه	(T,T)	(T,H)	(H,T)	(H,H)
x	۰	۱	۱	۲

$$x=\{۰,۱,۲\}$$

۲- تابع احتمال (توزیع احتمال)

به تابعی گفته می‌شود که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر متغیر تصادفی را مشخص کرد. تابع احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته تفاوت دارد.

در واقع دامنه تابع احتمال مقادیر متغیر تصادفی و برد (حوزه) آن احتمالات مربوط به هر متغیر تصادفی است.

تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته را چنین تعریف می‌کنند:

$$f(x)=p(X=x)$$

نکته ۱: تابع احتمال غیرمنفی است. $f(x_i)\geq ۰$

نکته ۲: مجموع احتمالات باید برابر یک باشد.

مثال: در مثال پرتاب دو سکه، تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی x را بدست آورید.

حل:

x_i	۰	۱	۲
$p(X=x_i)$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵

۳- تابع توزیع احتمال (تابع احتمال تجمعی cdf):

تابع توزیع احتمال تابعی است که به ازای جمیع مقادیر متغیر تصادفی x، احتمال وقوع مقداری کوچکتر یا مساوی با x را نمایش می‌دهد. تابع توزیع را به صورت $f(x)$ یا $p(X\le x)$ نمایش می‌دهند.

تابع توزیع احتمال در شرایطی که x یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع f باشد عبارتست از:

$$F(x)=p(X\le x)=\sum_{x_i\le x} f(x_i)$$

نکته: یک عبارت زمانی می‌توان تابع احتمال باشد که:

الف) $0\le p(X=x_i)\le 1$

ب) $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=F(x_n)=1$

مثال: مقدار k راچنان تعیین کنید که تابع زیر، تابع احتمال باشد:

$f(x)=kx \qquad x=0,1,2,3,4$

حل:

$$\begin{cases} 0\le f(x_i)\le 1 \Rightarrow k>0 \\ \sum f(x_i)=1 \Rightarrow 0+k+2k+3k+4k=1 \Rightarrow 10k=1 \Rightarrow k=0/1 \end{cases}$$

نکته: تابع احتمال همانند فراوانی نسبی و تابع توزیع احتمال همانند فراوانی نسبی تجمعی عمل می‌کند.

مثال: جدول زیر اطلاعات مربوط به غیبت کارکنان یک سازمان در طول یک ماه را نشان می‌دهد.

تعداد روزها	تعداد غیبت
۵	۰
۱۱	۱
۷	۲
۴	۳
۳	۴
۳۰	جمع

الف) تابع احتمال را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع احتمال را تعیین کنید.

ج) احتمال اینکه در یک روز ماه تعداد کارمندان غایب سازمان بیش از دو نفر نباشند را محاسبه کنید.

الف) تابع احتمال:

x (تعداد غیبت)	۰	۱	۲	۳	۴
$p(X=x)$	۰/۳۷	۰/۲۳	۰/۱۳	۰/۱۰	۰/۱۷

ب) تابع توزیع احتمال:

x	۰	۱	۲	۳	۴
$F(x)=P(X\le x)$	۰/۵۴	۰/۷۷	۰/۹۰	۱	۰/۱۷

$P(x\le 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=0/77$

٤- امید ریاضی

امید ریاضی در واقع همان میانگین موزون می‌باشد که احتمالات در آن نقش وزنها (ضرایب) را بازی می‌کنند. امید ریاضی متغیر تصادفی x را با $E(x)$ نمایش می‌دهند و برای متغیر تصادفی گسسته x با تابع احتمال $f(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود ($f(x)$ همان $p(X=x)$ است):

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

خواص امید ریاضی: با توجه به تعریف $E(x)$، اگر b,a مقادیر ثابتی باشند، خواهیم داشت:

۱) $E(a)=a$

۲) $E(ax)=aE(x)$

۳) $E(ax\pm b)=aE(x)\pm b$

۴) $Ea(x^2+bx+c)=a(E(x^2)+bE(x)+c)$

امید ریاضی هر تابعی از متغیر تصادفی x مانند $g(x)$ را در صورتیکه x متغیر تصادفی گسسته باشد به صورت زیر محاسبه می‌کنند: $E(g(x))=\sum g(x)f(x)$

مثال: تابع احتمال زیر را برای متغیر تصادفی گسسته x در نظر بگیرید.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۰/۱۵	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۰

مطلوبست محاسبه مقادیر زیر:

الف) $E(x)$ ب) $E(-3x+2)$ ج) $E(x-2)^2$ د) $E[x-E(x)]^2$

حل: الف

$$E(x)=\sum x.f(x)=(-1\times 0/15)+(0\times 0/10)+(1\times 0/25)+(2\times 0/30)+(3\times 0/20)$$

$$E(x)=1/30$$

$$E(-3x+2)=-3E(x)+2=-3(1/30)+2=-1/90$$

$$E(x-2)^2=E(x^2-4x+4)=E(x^2)-4E(x)+4$$

برای محاسبه عبارت فوق باید $E(x^2)$ را محاسبه نماییم.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۰/۱۵	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۰
$x^2f(x)$	۰/۱۵	۰	۰/۲۵	۱/۲۰	۱/۸۰

$$E(x^2)=\sum x^2.f(x)=3/4$$

$$E(x-2)^2=E(x^2)-4E(x)+4=3/4-4(1/30)+4=2/2$$

$$E[x-E(x)]^2=E[x-1/30]^2=E(x^2-2/6x+1/69)=E(x^2)-2/6E(x)+1/69$$

$$=3/4-2/6(1/30)+1/69=1/71$$

۵- واریانس (var)

واریانس متغیر تصادفی x، میزان پراکندگی را اطراف امید ریاضی نشان می‌دهد. واریانس را با $V(x)$ یا σ_x^2 نشان می‌دهند. برای متغیر تصادفی گسسته x با تابع احتمال $f(x)$، واریانس از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2 f(x)$$

$$\sigma_x^2=E(x-\mu)^2=E(x^2)-\mu^2$$

و یا از طریق رابطه روبه‌رو

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f(x_i)-[E(x)]^2-[E(x)]^2$$

نکته: اگر از واریانس جذر بگیریم، انحراف معیار متغیر تصادفی x بدست می‌آید که آن را با $SD(x)$ نمایش می‌دهند.

$$SD(x)=\sqrt{V(x)}$$

خواص واریانس: برای هر عدد ثابت a و b خواهیم داشت:

$$1)\ V(a)=0$$
$$2)\ V(ax)=a^2V(x)$$
$$3)\ V(ax\pm b)=a^2V(x)$$

مثال: توزیع احتمال زیر را در نظر گرفته و مقادیر زیر را محاسبه نمایید.

الف) $var(x)$ ب) $var(-3x-4)$

x	-۲	۰	۲	۳
$f(x)$	۰/۱۵	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۶۵

x	-۲	۰	۲	۴
$f(x)$	۰/۱۵	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۶۵
$x^2f(x)$	۰/۶۰	۰	۰/۴۰	۱۰/۴

حل:

الف)

$$E(x^2)=\sum x^2f(x)=11/4$$
$$E(x)=\sum xf(x)=(-2\times 0/15)+0+(2\times 0/10)+(4\times 0/65)=2/5$$
$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2 \Rightarrow V(x)=11/4-(2/5)^2 \Rightarrow V(x)=5/15$$

ب)

$$var(-3x-4)=-3\,var(x)=(-3)^2\times 5/15 \Rightarrow var(-3x\times -4)=46/35$$

۶- توزیع توام یا تابع احتمال توام

دو متغیر تصادفی گسسته Y,X را در نظر بگیرید بطوریکه X مقادیر x_i (i از ۱ تا N) و Y مقادیر y_i (j از ۱ تا k) را در بر می‌گیرد. در این صورت برای زوجهای (x_i,y_j) تابع احتمال توام Y,X وجود دارد که با $f(x_i,y_i)$ نمایش داده می‌شود و برابر با احتمال متناظر با رخداد توام هر دو متغیر تصادفی می‌باشد. به عبارت دیگر تابع احتمال توام برای دو متغیر تصادفی Y,X، احتمال رخ دادن دو رویداد را توأماً نشان می‌دهد.

در مورد متغیر تصادفی گسسته Y,X نیز توزیع توام گسسته به صورت یک جدول یا فرمول شامل فهرست تمامی مقادیر ممکن Y,X همراه با احتمال آنها می‌باشد و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$p(X=x_i,Y=y_j)=f(x_i,y_j)$$

نکته: در مورد تابع توزیع توام نیز دو شرط صادق است:

۱) $f_i(x_i,y_j)\geq 0$ ۲) $\sum_x\sum_y f(x_i,y_j)=1$

مثال: توزیع احتمال توام زیر را در نظر گرفته و این موارد را محاسبه کنید:

y \ x	۰	۱	۲
۱	۰/۱۷	۰/۱۳	۰/۰۹
۲	۰/۰۴	۰/۲۱	۰/۰۵
۵	۰/۱۶	۰/۰۷	۰/۰۸

الف) $p(y\geq 2)$ ب) $p(x\leq y)$ ج) $p(x=5,y=2)$

حل: الف)

$$p(y \geq ۲) = p(x=۱, y=۲) + p(x=۲, y=۲) + p(x=۵, y=۲)$$
$$p(y \geq ۲) = ۰/۰۹ + ۰/۰۵ + ۰/۰۸ = ۰/۲۲$$

ب)

$$p(x \leq y) = p(x=۱, y=۱) + p(x=۱, y=۲) + p(x=۲, y=۲)$$
$$p(x \leq y) = ۰/۱۳ + ۰/۰۹ + ۰/۰۵ = ۰/۲۷$$

ج)

$$p(x=۵\ ,\ y=۲) = ۰/۰۸$$

۷- توزیع حاشیه‌ای

اگر تابع احتمال توام دو متغیر Y,X را در دست داشته باشیم، می‌توانیم تابع احتمال جداگانه‌ای را برای هر یک از متغیرهای تصادفی محاسبه کنیم. در مورد متغیرهای تصادفی گسسته Y,X، اگر g تابع احتمال متغیر تصادفی X باشد، به g توزیع حاشیه‌ای x می‌گویند.

$$g(x_i) = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i, y_i)$$

یعنی $g(x_i)$ عبارتست از مجموع مقادیر سطر iام.
اگر h تابع احتمال متغیر تصادفی Y باشد:

$$h(y_j) = \sum_{j=۱}^{m} f(x_i, y_j)$$

یعنی $h(y_j)$ عبارتست از مجموع مقادیر ستون jام. به h توزیع حاشیه‌ای y گفته می‌شود.

نکته مهم: اگر Y,X دو متغیر تصادفی گسسته و دارای تابع توزیع احتمال باشند:

$$۱)\ E(X) = \sum_{i=۱}^{n} x_i.g(x_i) \qquad V(X) = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲.g(x_i) - [E(x)]^۲$$
$$۲)\ E(Y) = \sum_{j=۱}^{m} y_i.h(y_j) \qquad V(Y) = \sum_{j=۱}^{m} y_j^۲.h(y_j) - [E(y)]^۲$$

مثال: تابع توزیع احتمال دو متغیر تصادفی Y,X داده شده است. با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه نمایید.

y \ x	۰	۱	۲
-۱	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۴۰
۳	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۰

الف) $E(Y), E(X)$ ب) $V(Y), V(X)$ ج) $E(۲X+۳Y)$

حل: برای حل این مساله، ابتدا باید توزیع‌های حاشیه‌ای Y,X را پیدا کنیم:

x \ Y	۰	۱	۲	g(x)
-۱	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۴۰	۰/۷۵
۳	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۲۵
h(Y)	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۵۰	۱

الف)

$$E(X) = \sum x_i.g(x_i) = (-۱ \times ۰/۷۵) + (۳ \times ۰/۲۵) = ۰$$
$$E(Y) = \sum y_j.h(y_j) = (۰ \times ۰/۲۵) + (۱ \times ۰/۲۵) + (۲ \times ۰/۵۰) = ۱/۲۵$$

ب)

$$V(X)=\sum x_i^2 g(x_i)-[E(X)]^2=(1\times 0/75)+(9\times 0/25)-0=3$$
$$V(Y)=\sum y_j^2 h(y_j)-[E(Y)]^2=(0\times 0/25)+(1\times 0/25)+(4\times 0/50)-(1/25)^2$$
$$V(Y)=0/6875$$

ج)

$$E(2X+3Y)=2E(X)+3E(Y)=2(0)+3(1/25)=3/75$$

نکته: اگر x و y مستقل از هم باشند آنگاه:

$$\text{x و y مستقلند} \Leftrightarrow \begin{cases} E[x|y]=E(x) \\ E[y|x]=E(y) \end{cases}$$

$$\text{x و y مستقلند} \Rightarrow E(x.y)=E(x)E(y)$$

۸- استقلال دو متغیر تصادفی

اگر Y,X دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توام $f(x_i,y_j)$ باشند، Y,X مستقل از یکدیگرند، اگر و فقط اگر برای هر مقدار در تابع توزیع توام داشته باشیم:

$$f(x_i,y_j)=g(x_i).h(y_j)$$

نکته: تنها در صورتیکه برای یکی از مقادیر در جدول توزیع توام رابطه فوق برقرار نباشد، دیگر دو متغیر تصادفی Y,X تصادفی نمی باشند.

مثال: جدول توزیع احتمال توام دو متغیر Y,X را در مثال قبل درنظر بگیرید. آیا $Y;X$ مستقل از هم می‌باشند؟
متغیر Y,X در مثال قبل مستقل نمی باشند چون تنها کافی است یک مورد پیدا کنیم که این رابطه برقرار نباشد:

$$(0/75)(0/25)\neq 0/20$$

۹- تابع احتمال شرطی (توزیع شرطی توام)

اگر دو متغیر وابسته داشته باشیم، توزیع هر یک از متغیرهای تصادفی با این شرط که متغیر تصادفی دیگر مقدار ثابتی داشته باشد، توزیع شرطی نامیده می‌شود.

اگر Y,X دو متغیر تصادفی گسسته باشند، خواهیم داشت:

$$1)\ f(X|Y=y_j)=p(X=x_i|Y=y_j)=\frac{f(x_i,y_j)}{h(y_j)}$$

$$2)\ f(Y|X=x_i)=p(Y=y_j|X=x_i)=\frac{f(x_i,y_j)}{g(x_i)}$$

رابطه اول تعریف تابع احتمال شرطی X به شرط $y=y_j$ و رابطه دوم تعریف تابع احتمال شرطی Y به شرط $X=x_i$ می‌باشد.

نکته: اگر Y,X دو متغیر تصادفی گسسته مستقل باشند، خواهیم داشت:

$$1)\ f(X|Y=y_j)=g(x_i) \qquad 2)\ f(Y|X=x_i)=h(y_j)$$

نکته: برای محاسبه امید ریاضی و واریانس تابع احتمال شرطی در روابط مربوطه به جای تابع احتمال از تابع احتمال شرطی استفاده می‌کنیم:

$$1)\ E(X|Y=y_j)=\sum x.f(X|Y=y_j)=\frac{\sum x.f(x_i,y_j)}{h(y_j)}$$

$$2)\ E(Y|X=x_i)=\sum y.f(Y|X=x_i)=\frac{\sum y.f(x_i,y_j)}{g(x_i)}$$

مثال: جدول توزیع احتمال مثال قبل را در نظر گرفته و مقادیر زیر را محاسبه کنید:

X \ Y	۰	۱	۲	g(x)
-۱	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۴۰	۰/۷۵
۳	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۲۵
h(y)	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۵۰	۱

الف) $p(X=۳|Y=۰)$ ب) $p(Y=۲|X=-۱)$ ج) $E(X|Y=۱)$ د) $E(Y|X=۳)$

الف) Y,X وابسته‌اند:

$$p(X=۳|Y=۰)=\frac{f(۳,۰)}{h(۰)}=\frac{۰/۰۵}{۰/۲۵}=۰/۲۰$$

ب)

$$p(Y=۲|X=-۱)=\frac{f(-۱,۲)}{g(-۱)}=\frac{۰/۴۰}{۰/۷۵}=۰/۵۳$$

ج)

$$E(X|Y=۱)=\frac{\sum x.f(x_i,y_j)}{h(y_j)}=\frac{(۰/۱۵\times۱)+(۰/۱۰\times۳)}{۰/۲۵}=۱/۸$$

د)

$$E(Y|X=۳)=\frac{\sum y.f(x_i,y_j)}{g(x_i)}=\frac{(۰\times۰/۰۵)+(۱\times۰/۱۰)+(۲\times۰/۱۰)}{۰/۲۵}=۱/۲$$

۱۰- کوواریانس

کوواریانس در واقع امید ریاضی تغییرات دو متغیر بر حسب میانگین شان می‌باشد. در واقع با کوواریانس نوع رابطه دو متغیر تصادفی و شدت رابطه بین آنها تعیین می‌شود. برای محاسبه کوواریانس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$\sigma_{xy}=cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ یا $cov(X,Y)=E\left[(X-E(x))(Y-E(Y))\right]$ که در رابطه فوق اگر Y,X دو متغیر گسسته باشند:

$$E(X,Y)=\sum_i\sum_j x_i y_j f(x_i,y_j)$$

مقدار کوواریانس بدست آمده بیانگر ۳ حالت مختلف رابطه Y,X می‌باشد:

الف) اگر $cov(X,Y)>۰$ باشد، تغییرات Y,X هم جهت می‌باشد یعنی با افزایش یک متغیر، دیگری نیز افزایش می‌یابد و با کاهش یک متغیر، دیگری نیز کاهش می‌یابد.

ب) اگر $cov(X,Y)<۰$ باشد، آنگاه با افزایش یک متغیر، متغیر دیگر کاهش می‌یابد و برعکس با کاهش یک متغیر، متغیر دیگر افزایش می‌یابد.

ج) اگر $cov(X,Y)=۰$ باشد، نشان دهنده آن است که دو متغیر Y,X وابستگی خطی ندارند.

نکته مهم: اگر دو متغیر Y,X مستقل باشند یعنی به ازای هر x_i,y_j رابطه $f(x_i,y_j)=g(x_i).h(y_j)$ برقرار باشد، آنگاه $cov(X,Y)=۰$ خواهد بود ولی عکس آن برقرار نمی باشد یعنی ممکن است $cov(X,Y)=۰$ شود ولی دو متغیر مستقل نباشند.

نکته: اگر Y,X دو متغیر تصادفی باشند: (c,b,a اعداد ثابت هستند)

$$۱)E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$
$$۲)V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm ۲cov(X,Y)$$
$$۳)E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$$
$$۴)V(aX+bY+c)=a^۲V(X)+b^۲V(Y)+۲abcov(X,Y)$$

نکته: اگر Y,X دو متغیر تصادفی مستقل باشند در آنصورت $cov(X,Y)=۰$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(aX+bY+c)=a^{۲}V(X)+b^{۲}V(Y)$$

مثال: توزیع احتمال توام دو متغیر Y,X به صورت زیر است:

x \ y	۱	۲	۳	g(x)
۰	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۳۸
۱	۰/۳۵	۰/۱۴	۰/۱۳	۰/۶۲
h(y)	۰/۵۲	۰/۲۶	۰/۲۲	۱

کوواریانس دو متغیر Y,X را محاسبه نموده و ارتباط این دو متغیر را بیان کنید.

حل:

برای محاسبه $cov(X,Y)$ ابتدا $E(XY),E(Y),E(X)$ را بطور جداگانه محاسبه نماییم.

$$E(X)=\sum x.g(x)=(۰\times۰/۳۸)+(۱\times۰/۶۲)=۰/۶۲$$

$$E(Y)=\sum y.h(y)=(۱\times۰/۵۲)+(۲\times۰/۲۶)+(۳\times۰/۲۲)=۱/۷$$

$$E(XY)=\sum xy.f(x,y)=(۰\times۱\times۰/۱۷)+(۰\times۲\times۰/۱۲)+(۰\times۳\times۰/۰۹)+(۱\times۱\times۰/۳۵)$$
$$+(۱\times۲\times۰/۱۴)+(۱\times۳\times۰/۱۳)=۱/۰۲$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)\Rightarrow cov(X,Y)=۱/۰۲-(۰/۶۲)(۱/۷)=-۰/۰۳۴$$

چون $cov(X,Y)<۰$ می‌باشد در نتیجه Y,X با هم رابطه معکوس دارند.

نکته: اگر Y,X دو متغیر تصادفی باشند، خواهیم داشت:

$$cov(aX+c\ ,\ bY+d)=ab\ cov(X,Y)$$ (d,c,b,a اعداد ثابت)

مثال: در مثال قبل مقدار $cov(۲X-۳,۵Y+۱)$ را محاسبه نمایید.

$$cov(۲X-۳,۵Y+۱)=۲\times۵\times cov(X,Y)=۲\times۵\times-۰/۰۳۴=-۰/۳۴$$

۱۱- ضریب همبستگی

به منظور تعیین شدت همبستگی بین دو متغیر Y,X از ضریب همبستگی استفاده می‌کنیم و نحوه محاسبه آن به شکل زیر است: (ضریب همبستگی را با r نشان می‌دهیم)

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

نکته: اگر $r=۱$ باشد همبستگی بین دو متغیر کامل و مستقیم است.

اگر $r=-۱$ باشد همبستگی بین دو متغیر کامل و معکوس است.

اگر $r=۰$ باشد، بین دو متغیر همبستگی خطی وجود ندارد.

اگر $۰<r<۱$ باشد، همبستگی بین دو متغیر ناقص و مستقیم است.

اگر $-۱<r<۰$ باشد، همبستگی بین دو متغیر ناقص و معکوس است.

همبستگی:

تحلیل همبستگی، ابزاری است که به وسیله آن می‌توان درجه‌ای، یک متغیر به متغیری دیگر، از نظر خطی مرتبط است را اندازه‌گیری و برای تعیین میزان ارتباط دو متغیر استفاده می‌شود. در همبستگی درباره دو معیار ضریب همبستگی و ضریب تعیین بحث می‌شود.

ضریب همبستگی Correlation Coefficient

ضریب همبستگی درجه وابستگی بین دو متغیر را اندازه‌گیری می‌کند.

نکته: ضریب همبستگی برای داده‌های آماری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{Cov(x,y)}{\sigma x \sigma y}=\frac{\frac{\sum x_i y_i}{n}-\left[\frac{\sum x_i}{n}\right]\left[\frac{\sum y_i}{n}\right]}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y_i^2}{n}-\left(\frac{\sum y_i^2}{n}\right)^2\right)}}$$

خواص ضریب همبستگی:

$x.y \Rightarrow r=0$ مستقل

$r=0$ < x و y مستقل / x و y رابطه خطی ندارند

$r_{x,x}=1$

$r_{x,a}=0$

$r_{x,y}=r_{y,x}$

مثال: اگر Y,X دو متغیر تصادفی با توزیع زیر باشند، نوع همبستگی بین دو متغیر را توضیح دهید.

x \ y	۰	۱	g(x)
۳	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۳۵
۵	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۱۵
۶	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۵۰
h(y)	۰/۵۵	۰/۴۵	۱

حل:

$$E(X)=\sum x_i g(x_i)=(3\times 0/35)+(5\times 0/15)+(6\times 0/50)=4/8$$

$$E(Y)=\sum y_j h(y_j)=(0\times 0/55)+(1\times 0/45)=0/45$$

$$E(XY)=\sum xy.f(x_i,y_j)=(3\times 0\times 0/15)+(3\times 1\times 0/20)+\ldots+(6\times 1\times 0/20)=2/05$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2/05-(4/8)(0/45)=-0/11$$

$$V(X)=\sum x_i^2.g(x_i)-[E(X)]^2=(9\times 0/35)+(25\times 0/15)+(36\times 0/50)-(4/8)^2$$

$$V(X)=24/9-23/04=1/86 \Rightarrow \sigma_x=1/36$$

$$V(Y)=\sum y_j^2.h(y_j)-[E(Y)]^2=(0\times 0/55)+(1\times 0/45)-(0/45)^2=0/24$$

$$\sigma_r=0/49$$

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}=\frac{-0/11}{1/36\times 0/49}=-0/16$$

$-1<r<0$ می‌باشد پس همبستگی بین X,Y از نوع ناقص و معکوس است.

ضریب تعیین

- ضریب تعیین، بیان‌کننده نسبت درصد تغییرات تابعی یعنی y به وسیله تغییرات متغیر یعنی x می‌باشد.
- ضریب تعیین معلوم می‌کند که چند درصد از تغییرات y ناشی از تغییرات x است.

ضریب تعیین R^2 با معلوم بودن ضریب همبستگی r برابر است با: $R^2=r^2$

نکته: قوت ارتباط توسط ضریب تعیین مشخص می‌شود.

۱۲- توزیع‌های احتمالی گسسته:

مهمترین توزیع‌های احتمالی گسسته را می‌توان به این شرح نام برد: توزیع برنولی، توزیع دوجمله‌ای، توزیع چندجمله‌ای، توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع هندسی، توزیع فوق هندسی و توزیع پواسون که اکنون به تشریح هر یک می‌پردازیم:

۱۳- توزیع برنولی:

آزمایش‌هایی که فضای نمونه آنها دو عنصر داشته باشد (یعنی دو پیامد در هر آزمایش وجود داشته باشد) که یکی را موفقیت (p) و دیگری را شکست $(q=1-p)$ می‌نامند و احتمال وقوع هر یک از پیامدها در هر آزمایش ثابت و آزمایش‌ها مستقل از هم باشند، را آزمایش برنولی می‌گویند.

به عبارت دیگر آزمایشی برنولی می‌باشد که ویژگیهای زیر را داشته باشد:

۱- دو پیامد در هر آزمایش مورد انتظار باشد که یکی وقوع پیامد مورد نظر (موفقیت) و دیگری عدم وقوع پیامد مورد نظر (شکست) باشد که موفقیت را با یک و عدم موفقیت را با صفر نمایش می‌دهند.

۲- احتمال موفقیت و شکست در هر آزمایش ثابت باشد و همواره داشته باشیم: $p+q=1$

۳- آزمایش‌ها از یکدیگر مستقل باشند.

به توزیع تعداد موفقیت‌های (۰ یا ۱) توزیع برنولی گفته می‌شود و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$P(X=x)=p^x q^{1-x} \qquad x=0,1$$

امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع برنولی از روابط زیر بدست می‌آید:

$$E(X)=p \qquad V(X)=pq$$

$M_X(t)=q+pe^t$ تابع مولد گشتاور

مثال: سکه سالمی را یکبار پرتاب می‌کنیم، اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد شیر ظاهر شده باشد، تابع توزیع احتمال X رابدست آورده و میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور آن را محاسبه کنید؟

$$p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2} \qquad P(X=x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \qquad x=0,1$$

$$E(X)=p=\frac{1}{2} \qquad V(X)=pq=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$M_X(t)=q+pe^t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t$$

۱۴- توزیع دوجمله‌ای

اگر در n آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p، متغیر تصادفی X را به عنوان تعداد موفقیت‌ها تعریف کنیم، توزیع احتمال X را توزیع دوجمله‌ای می‌گویند که در آن X مقادیری از ۰ تا n را دربرمی‌گیرد.

توزیع احتمال دوجمله‌ای که در آن p احتمال موفقیت و X بیانگر تعداد موفقیت‌ها در n بار آزمایش باشد، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,\dots,n$$

لازم بذکر است توزیع دو جمله‌ای دارای دو پارامتر p,n می‌باشد.

امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$E(X)=np$$

$$V(X)=npq$$

$$M_X(t)=\left(q+pe^t\right)^n$$

مثال: احتمال اینکه در یک پرتاب پنالتی یک بسکتبالیست، توپ وارد سبد شود ۰/۸ است، اگر ۱۲ بار پرتاب پنالتی صورت گیرد، احتمال اینکه دقیقاً ۹ بار توپ وارد سبد شود را محاسبه کرده، میانگین و واریانس پرتابهای گل شده را محاسبه نمایید؟

$p=۰/۸ \quad \Rightarrow \quad q=۰/۲$

$n=۱۲ \ , \ x=۹ \ \Rightarrow P(X=۹)=\binom{۱۲}{۹}(۰/۸)^{۹}(۰/۲)^{۳}=۰/۲۳۵$

$E(X)=np=۱۲(۰/۸)=۹/۶$

$V(X)=npq=۱۲(۰/۸)(۰/۲)=۱/۹۲$

$M_X(t)=(q+pe^t)^n=(۰/۲+۰/۸e^t)^{۱۲}$

نکته: یک پیروزی بیشتر $(n+۱)p$ محتمل‌ترین تعداد وقوع پیروزی $(n+۱)p-۱$ یک شکست کمتر

۱۵- توزیع چندجمله‌ای

اگر آزمایشی بیش از دو پیامد داشته باشد و در عین حال احتمال هر پیامد در آزمایش‌های مختلف ثابت و آزمایش‌ها مستقل از هم باشند، توزیع این آزمایش را توزیع چندجمله‌ای می‌گویند مانند پرتاب یک تاس که ۶ پیامد مختلف دارد یا یک مسابقه فوتبال که ۳ پیامد مختلف (برد، مساوی و باخت) دارد.

نکته: تفاوت توزیع دو جمله‌ای با توزیع چندجمله‌ای تنها در تعداد نتایج ممکن است به نحوی که در توزیع دوجمله‌ای تنها دو پیامد ممکن داریم (موفقیت و شکست) ولی در توزیع چندجمله‌ای بیش از دو پیامد ممکن داریم.

در یک توزیع چندجمله‌ای اگر آزمایشی را n بار به صورت مستقل انجام دهیم و هر آزمایش شامل k پیامد باشد. که احتمال وقوع هر پیامد در هر آزمایش به ترتیب $P_۱, P_۲, ..., P_k$ باشد به نحویکه $\sum_{i=۱}^{k} P_i = P_۱ + P_۲ + ... + P_k = ۱$ باشد، دراین صورت احتمال وقوع $x_۱$ بار از پیامد ۱، $x_۲$ بار از پیامد۲ و ...و x_k بار از پیامد k به طوریکه $x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n$ باشد برابر خواهد بود با:

$$P(X_۱ = x_۱, X_۲ = x_۲, ..., X_k = x_k) = \binom{n}{x_۱, ..., x_k} P_۱^{x_۱}.P_۲^{x_۲}....P_k^{x_k}$$

مثال: کارخانه‌ای دارای ۴ نوع محصول درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳ و درجه ۴ می‌باشد. احتمال اینکه محصول نهایی ازدرجه ۱ تا ۴ باشد به ترتیب برابر ۰/۲، ۰/۴، ۰/۳ و ۰/۱ می‌باشد. ۱۵ محصول نهایی این کارخانه را انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه در این ۱۵ محصول ۶ محصول درجه ۱، ۳ محصول درجه ۲، ۵ محصول درجه ۳ و ۱ محصول درجه ۴ داشته باشیم را محاسبه کنید.

$n=۱۵$

$$P(X_۱=۶, X_۲=۳, X_۳=۵, X_۴=۱)=\frac{۱۵!}{۶!۳!۵!۱!}(۰/۲)^{۶}(۰/۴)^{۳}(۰/۳)^{۵}(۰/۱)^{۱}=۰/۰۰۲$$

۱۶- توزیع دوجمله‌ای منفی

در این توزیع در واقع احتمال اینکه k امین موفقیت در x امین آزمایش برنولی رخ دهد را بررسی و تعیین می‌کنیم. مثلاً احتمال اینکه هفتمین فردی که یک تست را حل می‌کند دومین فردی باشد که جواب غلط می‌دهد.

در توزیع دو جمله‌ای منفی نیز آزمایش‌ها مستقل از یکدیگر صورت می‌گیرند و هر آزمایش دو نتیجه موفقیت و یا شکست دارد و احتمال موفقیت در همه آزمایش‌ها ثابت است.

به توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع پاسکال یا توزیع زمان انتظار نیز می‌گویند و رابطه آن به صورت زیر است:

$$P(X=x)=\binom{x-۱}{k-۱}p^k q^{x-k} \qquad x \geq k \quad x=k, k+۱, ...$$

در این رابطه، k تعداد موفقیت در x آزمایش برنولی و p احتمال موفقیت در هر آزمایش است. (p,k) پارامترهای توزیع دوجمله‌ای منفی هستند).

مثال: اگر بدانیم احتمال اینکه فردی شایعه‌ای را باور کند ۰/۶ است، احتمال اینکه ششمین فردی که شایعه‌ای را می‌شنود، سومین نفری باشد که آن را باور می‌کند چقدر است؟

$$P(X=۶)=\binom{۵}{۲}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۳}=۰/۱۳۸$$

امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای منفی از طریق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$E(X)=\frac{k}{p}$$

$$V(X)=\frac{kq}{p^{۲}}$$

$$M_X(t)=\left(\frac{pe^t}{۱-qe^t}\right)^k$$

مثال: تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده این باشد که سومین باری که عدد ۲ ظاهر می‌شود در پرتاب نهم باشد، تابع مولد گشتاور X را محاسبه نمایید.

$$x=۹ \quad k=۳ \quad , \; p=\frac{۱}{۶} \Rightarrow q=\frac{۵}{۶}$$

$$M_X(t)=\left(\frac{\frac{۱}{۶}e^t}{۱-\frac{۵}{۶}e^t}\right)^{۳}$$

۱۷- توزیع هندسی

اگر درتوزیع دوجمله‌ای منفی $k=۱$ باشد، نوع توزیع را توزیع هندسی می‌نامیم. به عبارت دیگر در توزیع هندسی می‌خواهیم احتمال اولین موفقیت را در x امین آزمایش تعیین کنیم. این توزیع دارای همه ویژگیهای توزیع دوجمله‌ای منفی است با این تفاوت که آزمایش‌ها را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به اولین موفقیت برسیم. احتمال اینکه اولین موفقیت در آزمایش x ام رخ دهد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P(X=x)=pq^{x-۱} \qquad x=۱,۲,...$$

توزیع هندسی تنها دارای یک پارامتر p می‌باشد و میانگین، واریانس و تابع مولد و گشتاور آن از روابط زیر بدست می‌آید:

$$E(X)=\frac{۱}{p}$$

$$V(X)=\frac{q}{p^{۲}}$$

$$M_X(t)=\frac{pe^t}{۱-qe^t}$$

مثال: اگر راننده‌ای از چراغ قرمز عبور کند، پلیس راهنمایی به احتمال ۰/۹ متوجه تخلف او می‌شود. احتمال اینکه چهارمین فردی که از چراغ قرمز عبور می‌کند اولین فردی باشد که پلیس متوجه تخلف او می‌شود را محاسبه کنید؟

$$P=۰/۹ \Rightarrow q=۰/۱ \quad , \quad x=۴$$

$$P(X=۴)=(۰/۹)(۰/۱)^{۳}=۰/۰۰۰۹$$

۱۸- توزیع فوق هندسی

هرگاه بخواهیم احتمال اینکه اگر از بین N شی که kتای آن مطلوب ماست n شی را انتخاب کنیم بطوریکه x تای آن مطلوب ما باشد را بدست آوریم، در واقع با توزیع فوق هندسی سر و کار داریم. در واقع در توزیع فوق هندسی جامعه N عضوی ما را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، بخش اول شامل k عضو می‌باشد که ما می‌خواهیم از بین آن x عضو را انتخاب کنیم و بخش دوم شامل N-k عضو که ما می‌خواهیم از بین آن n-x. عضو را انتخاب کنیم.

توزیع فوق هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=0,1,\dots,k$$

نکته: تفاوت بین توزیع فوق هندسی و توزیع دوجمله‌ای در این است که اولاً در توزیع دوجمله‌ای ما حجم جامعه (N) را نداریم ولی در توزیع فوق هندسی داریم. ثانیاً در توزیع دوجمله‌ای احتمال موفقیت در هر بار تکرار آزمایش ثابت است. (p) ولی در توزیع فوق هندسی چون انتخاب نمونه بدون جاگذاری صورت می‌گیرد احتمال موفقیت در هر بار تکرار آزمایش تغییر می‌کند. $\left(\frac{k}{N},\frac{k-1}{N-1}+\dots\right)$

امید ریاضی و واریانس توزیع فوق هندسی از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X)=\frac{nk}{N}$$

$$V(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

مثال: از بین کارمندان یک شرکت که دارای ۵ زن و ۹ مرد می‌باشد می‌خواهیم یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم. احتمال اینکه ۳ نفر از اعضای این تیم مرد باشند را محاسبه کنید؟

$$N=14 \quad x=3 \qquad P(X=9)=\frac{\binom{9}{3}\binom{5}{1}}{\binom{14}{4}}=0/419$$

$$n=4 \qquad k=9$$

نکته: هرگاه در توزیع فوق هندسی N بزرگ و n کوچک باشد بطوریکه $\frac{n}{N}<0/05$ باشد، آنگاه احتمال حادثه به طور تقریبی، توسط توزیع دوجمله‌ای محاسبه می‌شود.

۱۹- توزیع پواسون

در توزیع دوجمله‌ای وقتی n بزرگ شود محاسبات کار ساده‌ای نخواهد بود. در اینگونه مواقع یعنی هنگامی که n به سمت بی نهایت و P به سمت صفر میل کند و np تقریباً ثابت بماند، از توزیع پواسون استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,\dots$$

در توزیع پواسون λ پارامتر توزیع می‌باشد و برابر است با: $\lambda=np$

در توزیع پواسون، متغیر تصادفی X بیانگر رخدادهای تصادفی پواسون در یک فاصله زمانی یا مکانی معین است و λ تعداد موفقیت در هر فاصله زمانی یا مکانی می‌باشد.

مثال: به طور متوسط در هر ساعت ۵ مشتری وارد مغازه‌ای می‌شوند. احتمال اینکه در دو ساعت آینده ۱۲ مشتری وارد مغازه شوند را محاسبه نمایید؟

۱ ساعت	مشتری ۵	$x=12$
۲ ساعت	$\lambda=10$	

$$P(X=12)=\frac{e^{-10}\times(10)^{12}}{12!}=0/094$$

نکته: به طور کلی در مواقعی که $n\geq 20$ و $P\leq 0/05$ باشد، توزیع پواسون تقریب خوبی از توزیع دوجمله‌ای است. و زمانیکه $n\geq 100$, $np\leq 10$ باشد تقریبی بسیار عالی خواهد بود.

مثال: درتولید انبوه کالای خاصی، احتمال اینکه کالای معیوب شود ۰/۰۰۲ است، اگر امروز ۱۰۰۰ کالا تولید شود، احتمال اینکه ۵ کالای معیوب تولید شود چقدر می‌باشد؟

$\lambda = nP = ۱۰۰۰ \times ۰/۰۰۲ = ۲$

$P(X=۵) = \frac{e^{-۲} \times ۲^۵}{۵!} = \frac{۴}{۱۵} e^{-۲}$

امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع پواسون از طریق روابط زیر محاسبه می‌شود:

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - ۱)}$

نکته: در واقع در بین توزیع‌های گسسته و پیوسته رایج، تنها توزیع پواسون است که میانگین و واریانس آن با هم برابر است.

نکته: در توزیع پواسون یک عدد صحیح است که در رابطه رو به رو صدق می‌کند: $\lambda - ۱ \le Mo \le \lambda$

در حل مسائل e برابر ۲/۷۱۸ در نظر گرفته شود..

توزیع‌های مهم گسسته:

۱- توزیع یکنواخت:

اگر یک متغیر تصادفی بتواند n مقدار مختلف را با احتمال‌های یکسان اختیار کند دارای توزیع یکنواخت گسسته است.

نکته: در حالت خاص برای متغیر تصادفی با توزیع دنباله‌ای از n عدد طبیعی که از شروع می‌شوند داریم:

$\mu = \frac{n+۱}{۲}$ $\qquad \sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲}$

۲- توزیع برنولی:

۲ نتیجه دارد پیروزی و شکست.

$q + p = ۱$

$f(x) = p^x q^{۱-x}$ $\qquad \mu = p \qquad \sigma^۲ = pq$

۳- توزیع دو جمله‌ای (بینم):

$x \sim Bin(n\ ,\ p)$

اگر یک آزمایش برنولی را با احتمال پیروزی p، n بار به طور مستقل تکرار کنیم.

$f_x(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = ۰, ۱, \ldots n$

$\mu = np \qquad \sigma^۲ = npq$

۴- توزیع چند جمله‌ای

۵- توزیع دو جمله‌ای منفی:

اگر یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به r امین موفقیت دست یابیم.

$F(x) = \binom{x-۱}{r-۱} P^r (۱-P)^{x-r}$

$\mu = \frac{r}{P} \qquad \sigma^۲ = \frac{rq}{P^۲}$

۶- توزیع هندسی:

اگر یک آزمایش برنولی را با احتمال موفقیت P، به‌طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به اولین موفقیت دست یابیم.

$f(x) = pq^{x-۱} \qquad x = ۱, ۲, \ldots n$

$\mu = \frac{۱}{p} \qquad \sigma^۲ = \frac{q}{p^۲}$

۷- توزیع فوق هندسی:

نکته: تقریب دو جمله‌ای به فوق هندسی:

آنگاه می‌توانیم به جای فوق هندسی از دو جمله‌ای استفاده کنیم $\Rightarrow$ $\frac{r}{N} < ۰/۰۵$ اگر

$$\Rightarrow P = \frac{k}{N} \qquad q = ۱ - \frac{k}{N} \qquad \mu = nP$$

$$\sigma^۲ = \frac{N-n}{N-۱} \times n \times P \times q$$

نکته: به $\frac{N-n}{N-۱}$ ضریب تصحیح توزیع فوق هندسی می‌گوییم که با عدد (۱) است آن دقیقاً به توزیع دو جمله‌ای می‌رسیم.

۸- توزیع پواسون:

آزمایش پواسون آزمایشی است که تعداد وقایع (تعداد پیروزی‌های) را در یک فاصله زمانی یا مکانی به دست می‌دهد.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- با توجه به جدول توزیع مشترک، مقدار $P(X=۲|Y=۰)$ چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

y \ X	۱	۲
۰	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$
۲	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۵

۲- اگر متغیر x دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، متغیر $Y=X-\frac{\mu}{\sigma}$ به ترتیب دارای چه میانگین و انحراف معیاری خواهد بود: (اقتصاد – ۷۷)

۱) $۱,\mu$ ۲) ۰و۱ ۳) $\sigma,\mu\left(۱-\frac{۱}{s}\right)$ ۴) $\sigma,\mu\left(\frac{۱}{\sigma}+۱\right)$

۳- کدام یک از موارد زیر برای $V(X-Y)$ صحیح است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) $V(X)+V(Y)-۲cov(X,Y)$ ۲) $V(X)-V(Y)+cov(X,Y)$

۳) $V(X)+V(Y)+۲cov(X,Y)$ ۴) $V(X)+V(Y)-cov(X,Y)$

۴- سکه‌ای ۱۰۰ بار پرتاب شده است و تعداد خط‌های مشاهده شده متفاوت از کمیت انتظاری آن بوده است.در تفسیر این نتیجه می‌توان گفت که: (اقتصاد – ۷۸)

۱) الزاماً نباید برابر کمیت مورد، انتظار باشد.

۲) تفاوت به دلیل تغییرات در شرایط نمونه گیری بوده است.

۳) سکه به جامعه سکه‌های سالم تعلق نداشته است.

۴) با سکه بدون تورش (نااریب) نیست و یا درست پرتاب نشده است.

۵- اگر $E(X)=۱۰$, $E(x^۲)=۱۰۹$ باشد، واریانس $\left(\frac{X-۴}{۳}\right)$ برابر است با: (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۶- اگر $u=\frac{X-E(X)}{\sigma_x}$ و $V=\frac{Y-E(Y)}{\sigma_y}$ باشد، واریانس $(u+V)$ کدام است؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) ۲ ۲) $۲+cov(u,V)$ ۳) $۱+۲cov(u,V)$ ۴) $۲+۲V_{xy}$

۷- در رابطه با دو متغیر تصادفی X و Y کدامیک از گزینه‌های زیر غلط است؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) اگر $cov(X,Y)=۰$ باشد، دو متغیر X و Y از لحاظ آماری مستقل از هم می‌باشند.

۲) اگر $P(X\cap Y)=P(X).P(Y)$ باشد، X و Y از لحاظ آماری مستقل از هم می‌باشند.

۳) اگر $cov(X,Y)=۰$ باشد، وابستگی خطی بین X و Y وجود ندارند.

۴) $cov(X,Y)$ برابر $E(XY)-E(X)E(Y)$ است.

۸- چنانچه $w=a+bx$ و $z=c+dy$ باشد، $cov(z,w)$ بر حسب x و y عبارت است از: (اقتصاد- ۷۸)

۱) $(c+d)(a+b)cov(x,y)$ ۲) $bd\,cov(x,y)$

۳) $(ac+bd)cov(x,y)$ ۴) $cov(x,y)$

۹- توزیع احتمال‌های متغیر تصادفی X توسط جدول زیر بیان شده است:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	$\sum$
P(x)	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۱۰	=۱

توزیع متغیر Y که برطبق $y = x^2$ از متغیر تصادفی X تبعیت می‌کند، کدام است؟ (اقتصاد- ۷۹)

۱)

y	۰	۱	۴	۹	۱۶	$\sum$
P(y)	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۳۵	۰/۳۰	۰/۱۰	=۱

۲)

y	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	$\sum$
P(y)	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۱۰	=۱

۳)

y	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	$\sum$
P(y)	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۱۰	=۱

۴)

y	-۲	-۱	۰	۳	۴	$\sum$
P(y)	۰/۳۵	۰/۲۰	۰/۰۵	۰/۳۰	۰/۱۰	=۱

۱۰- اگر واریانس تعداد مراجعین به بانک در ساعت خاصی از روز ۴ نفر باشند، احتمال اینکه در ربع اول ساعت کسی به بانک مراجعه نکند، چقدر است؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) $\frac{1}{e^2}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e^{-4} ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

۱۱- اگر متغیر تصادفی X تعداد غلط‌هایی باشد که ماشین‌نویس در یک صفحه تایپ می‌کند، توزیع احتمال آن چیست؟ (اقتصاد- ۷۹)

۱) پواسون ۲) دوجمله‌ای ۳) فوق هندسی ۴) یکنواخت

۱۲- در یک توزیع پواسون $\frac{P(X=0)}{P(X=1)} = \frac{1}{3}$ است، میانگین این توزیع برابر است با: (اقتصاد- ۷۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $E(X) = 3$ و $E(Y) = 2$ باشند، کدامیک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ (اقتصاد-۸۰)

۱) $CoV(X,Y) = 0$ ۲) $E(X+Y) = 5$ ۳) $E(XY) = 6$ ۴) هر سه صحیح است

۱۴- در کدامیک از موارد زیر توزیع پواسون تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای است؟ (اقتصاد- ۸۰)

۱) $P = 0/04 , n = 25$ ۲) $P = 0/28 , n = 50$ ۳) $P = 0/58 , n = 60$ ۴) $P = 0/93 , n = 150$

۱۵- در یک توزیع دوجمله‌ای میانگین برابر ۵ و واریانس برابر $\frac{15}{4}$ است، مقدار $P(X=0)$ در این توزیع برابر است با: (اقتصاد- ۸۰)

۱) $(\frac{1}{4})^{20}$ ۲) $(\frac{1}{2})^{10}$ ۳) $(\frac{1}{4})^{10}$ ۴) $(\frac{3}{4})^{20}$

۱۶- در مورد دو متغیر تصادفی X و Y و صحت رابطهٔ امید ریاضی $E(\frac{X}{Y}) = \frac{E(X)}{E(Y)}$ می‌توان گفت: (اقتصاد-۸۱)

۱) وقتی صادق است که X و Y مستقل باشند.

۲) وقتی صادق است که X و Y کوواریانس صفر داشته باشد.

۳) وقتی صادق است که ناهمبسته باشند.

۴) هیچ وقت صادق نیست.

۱۷- توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y توسط جدول زیر بیان شده است. میانگین شرطی Y برحسب $X=۶$ کدام است؟ (اقتصاد- ۸۱)

X \ Y	۲	۳	۴	۵	
۴	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۲۰
۶	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۰۵	۰/۵۰
۸	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۳۰
	۰/۲۰	/۰۳۵	۰/۳۳	۰/۱۲	۱

۱) ۴/۲ ۲) ۳/۸ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

۱۸- جدول توزیع احتمال مشترک زیر را در نظر بگیرید. کوواریانس X و Y برابر است با: (اقتصاد- ۸۱)

Y \ X	-۱	۰
-۱	۰/۱۵	۰/۱۵
۱	۰/۳۵	۰/۳۵

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۰/۵ ۴) ۱

۱۹- اگر در توزیع دوجمله‌ای $n=۲۰$, $P=۰/۳$ باشد، نمودار تابع احتمال آن به چه شکلی خواهد بود؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) یک نمایی ۲) چوله به راست ۳) چوله به چپ ۴) متقارن

۲۰- در یک توزیع پواسون اگر $P(X=۱)=P(X=۲)$ باشد، آنگاه مقدار $P(X=۰)$ برابر است با: (اقتصاد- ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲e^{-۲}$ ۳) $e^{-۱}$ ۴) $e^{-۲}$

۲۱- احتمال اینکه در ۲ بار تیراندازی، حداقل یک تیر به هدف بخورد مساوی ۰/۸۴ است، احتمال اصابت تیر به هدف در هر بار چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۴۲

۲۲- یک شرکت بیمه، بیمه نامه‌ای می‌نویسد که اگر در طول سال پیشامد A اتفاق افتد، بایستی مبلغ یک میلیون ریال به بیمه شونده پرداخت نماید. شرکت بیمه برآورد کرده است که احتمال روی دادن پیشامد A در طول یکسال برابر با ۰/۱ است. چنانچه شرکت بیمه بخواهد متوسط سودش از فروش این بیمه نامه‌ها ۱۰۰ هزار ریال باشد، کدامیک از مقادیر زیر را به عنوان حق بیمه (مبلغی که بیمه شونده به شرکت بیمه می‌پردازد) انتخاب خواهد کرد؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) ۱۰۰۰۰۰ ریال ۲) ۲۰۰۰۰۰ریال ۳) ۵۰۰۰۰۰ ریال ۴) ۹۰۰۰۰۰ ریال

۲۳- اگر میانگین و انحراف معیار x برابر ۲ باشد، میانگین $x^۲$ برابر است با: (اقتصاد- ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۴- جعبه‌ای حاوی ۷ فیوز است که سه تای آنها سالم است. سه فیوز به تصادف و بدون جاگذاری انتخاب می‌شوند، احتمال آنکه دقیقاً ۲ تای آنها سالم باشد، چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) $\frac{۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۵- مسافران هواپیما به صورت تصادفی و به تعداد ۵ نفر در هر دقیقه وارد فرودگاه می‌شوند. احتمال اینکه در دقیقه خاصی هیچ مسافری به فرودگاه وارد نشود، چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) $(۲/۷۱۸)^۵$ ۲) $\frac{۵}{(۲/۷۱۸)^۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲/۷۱۸}$ ۴) $(۲/۷۱۸)^{-۵}$

۲۶- در صورتیکه $X=-1,0,1$ برای $P(X)=\frac{|x|+1}{5}$ تابع احتمال متغیر تصادفی ناپیوسته X باشد، آنگاه امید ریاضی و واریانس X به ترتیب از راست به چپ برابر چیست؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $\frac{4}{5},0$ ۲) $\frac{1}{5},1$ ۳) $\frac{2}{5},0$ ۴) $\frac{4}{25},\frac{4}{5}$

۲۷- توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی ناپیوسته (X,Y) به شرح جدول زیر می‌باشد:

X \ Y	-۳	۲	۴
۱	۰/۱	۰/۲	۰/۲
۳	۰/۳	۰/۱	۰/۱

به نظر شما $P(X=3|Y=-3)$ برابر است با: (اقتصاد- ۸۳)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۸- اگر در یک توزیع دوجمله‌ای میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۲۰ و ۲ باشد، احتمال $P(X=0)$ کدام است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $(0/2)^x$ ۲) $(0/2)^n$ ۳) $(0/8)^n$ ۴) $(0/8)^{n-x}$

۲۹- تابع احتمال توام (مشترک) زیر را در نظر بگیرید.

X \ Y	۰	۱۰
-۲	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
۲	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

کوواریانس x و y عبارت است از: (اقتصاد- ۸۴)

۱) $-\frac{10}{3}$ ۲) $-\frac{20}{3}$ ۳) -۵ ۴) صفر

۳۰- شانه تخم‌مرغ‌های ۶ تایی به قیمت ۶۰۰ تومان و شانه‌های تاریخ گذشته آن به قیمت ۴۰۰ تومان عرضه می‌شود. اگر تابع احتمال تخم‌مرغ سالم در شانه تاریخ گذشته به صورت زیر باشد، احتمال آنکه خرید آن مقرون به صرفه باشد، چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۴)

$$\begin{cases} f(x)=\binom{6}{x}\frac{1}{64} & x=0,1,\dots,6 \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\frac{7}{64}$ ۲) $\frac{16}{64}$ ۳) $\frac{28}{64}$ ۴) $\frac{39}{64}$

۳۱- اگر کمیت تصادفی x به صورت مقابل توزیع شده باشد:

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{9} & x=1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

میانگین و واریانس آن برابر است با: (اقتصاد- ۸۴)

۱) $V(x)=\frac{81}{12}, E(x)=\frac{9}{2}$ ۲) $V(x)=\frac{20}{3}, E(x)=5$

۳) $V(x)=\frac{12}{3}, E(x)=5$ ۴) $V(x)=\frac{9}{12}, E(x)=\frac{71}{10}$

مجموعه حسابداری

۳۲- جدول احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x_i	۰	۱	۲	۳
P_i	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	a

امید ریاضی X کدام است؟ (حسابداری- ۷۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

۳۳- در یک خانواده ۳ فرزندی، احتمال اینکه حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد، کدام است؟ (حسابداری- ۷۷)

۱) $\frac{۴}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۲}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۳۴- در جعبه‌ای ۳۶ ابزار خوب و ۹ ابزار معیوب وجود دارد، با کدام احتمال می‌توان ۲ ابزار خوب به طور تصادفی از آن جعبه برداشت؟ (حسابداری- ۷۷)

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۱۱}$ ۳) $\frac{۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۳۵- در توزیع دوجمله‌ای $n = ۷۲$ و احتمال وقوع حالت مساعد $q = \frac{۱}{۳}$ است، انحراف معیار کدام است؟ (حسابدارای- ۷۷)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

۳۶- اگر $\sigma_x^۲ = \frac{۱}{۲}$, $\sigma_y^۲ = \frac{۲}{۳}$, $\sigma_{x+y}^۲ = \frac{۵}{۶}$ باشد، مقدار کوواریانس کدام است؟ (حسابداری- ۷۸)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۷- احتمال اصابت یک موشک به یک جنگنده ۰/۳ است، با اصابت یک موشک، جنگنده سقوط خواهد کرد. احتمال اینکه در پنجمین پرتاب موشک، جنگنده سقوط کند، چقدر است؟ (حسابداری- ۷۸)

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۰۵ ۳) ۰/۰۷۲ ۴) ۰/۰۸۱

۳۸- چنانچه در یک توزیع دوجمله‌ای $n = ۵$ و $P = \frac{۱}{۴}$ (احتمال موفقیت) باشد، احتمال ۳ موفقیت برابر است با: (حسابداری- ۷۹)

۱) ۰/۰۸۷۹ ۲) ۰/۰۸۸۴ ۳) ۰/۸۸۴ ۴) ۰/۸۷۹

۳۹- تعداد قطعات معیوب در هر روز بر روی یک ماشین از توزیع پواسون برخوردار است و دارای متوسط ۵ قطعه معیوب در روز است. احتمال اینکه در یک روز هیچ قطعه معیوبی تولید نشود، چقدر است؟ (حسابداری- ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۵}e^{-\frac{۱}{۵}}$ ۲) $۵e^{۵}$ ۳) $e^{-۵}$ ۴) $۵e^{-۵}$

۴۰- با توجه به جدول احتمال توام زیر، احتمال A به شرط B چقدر است؟ (حسابداری- ۸۰)

	B	$\bar{B}$
A	?	۰/۲۰
$\bar{A}$	۰/۱۰	۰/۵۰

۱) ۰/۰۴۰ ۲) ۰/۲۰ ۳) ۰/۳۳۳ ۴) ۰/۶۶۷

۴۱- مقدار کوواریانس تابع احتمال توام زیر چقدر است؟ (حسابداری- ۸۰)

X \ Y	۰	۱
-۱	۰/۳۰	۰/۳۰
۰	۰/۳۰	۰/۱۰

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۰/۳۰ ۴) -۰/۰۶

۴۲- متغیر تصادفی X دارای میانگین ۵ و واریانس ۹ می‌باشد. میانگین و واریانس $\frac{X-5}{3}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (حسابداری- ۸۰)

۱) ۰ و ۱ ۲) ۱ و ۰ ۳) ۵ و ۳ ۴) ۵ و ۹

۴۳- در صورتیکه یک توزیع دوجمله‌ای دارای ۱۰۰ تکرار باشد و احتمال موفقیت در هر تکرار ۰/۰۱ باشد، بهترین توزیع برای تقریب احتمال‌های آن کدام است؟ (حسابداری- ۸۰)

۱) نمایی ۲) نرمال ۳) پواسون ۴) یکنواخت

۴۴- اگر $\sigma_x^2=\frac{1}{2}$ و $\sigma_y^2=\frac{2}{3}$ و $\sigma_{x+y}^2=\frac{5}{6}$ باشد، آنگاه در خصوص کوواریانس کدام عبارت صحیح است؟ (حسابداری- ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۴۵- احتمال اینکه فردی از چراغ قرمز عبور کند و پلیس متوجه نشود، ۰/۴۰ است. احتمال اینکه در حین عبور از چهارمین چراغ قرمز جریمه شود، چقدر است؟ (حسابداری- ۸۱)

۱) ۰/۰۳۸۴ ۲) ۰/۰۸۶۴ ۳) ۰/۲۱۶ ۴) ۰/۶۰

۴۶- از یک جامعه ۴۰۰۰ نفره یک نمونه تصادفی ۴۰ تایی انتخاب شده است. در این حالت تابع احتمال متغیر تصادفی x کدام است؟ (حسابداری- ۸۱)

۱) هندسی ۲) دوجمله‌ای
۳) فوق هندسی ۴) هم فوق هندسی و هم دوجمله‌ای

۴۷- احتمال اینکه هر پرتاب بازیکنی به هدف بخورد ۰/۸۰ است. احتمال اینکه سومین پرتابی که به هدف می‌خورد، پنجمین پرتاب وی باشد، چقدر است؟ (حسابداری- ۸۲)

۱) ۰/۱۲۳ ۲) ۰/۵۱۲ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۹۹۱

۴۸- اگر $E(x)=2$ و $E(y)=1$ و X و Y مستقل باشند، کدام مورد صحیح است؟(حسابداری- ۸۳)

۱) $cov(x,y)=0$ ۲) $E(xy)=2$ ۳) $E(x+y)=3$ ۴) موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح است.

۴۹- متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال زیر است. اگر امید ریاضی X برابر ۳/۴ باشد، x_3 چقدر است؟ (حسابداری- ۸۳)

x	۳	۲	x_3	جمع
f(x)	۰/۲	۰/۵	P_3	۱

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۳

۵۰- بطور متوسط با توزیع پواسون در هر ساعت دوازده اتومبیل برای زدن بنزین مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه در ۱۵ دقیقه ۳ اتومبیل مراجعه کنند، چقدر است؟ (حسابداری- ۸۳)

۱) e^{-2} ۲) e^{-12} ۳) $12e^{-3}$ ۴) $4/5e^{-3}$

۵۱- به ازای کدام مقدار α، جدول مقابل می‌تواند توزیع احتمال متغیر تصادفی X باشد؟ (حسابداری- ۸۴)

x	۰	۱	۲	۳
f(X=x)	۰/۱	۰/۲۶	α	$3\alpha-1$

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۴۱ ۳) ۰/۴۴ ۴) ۰/۵۶

۵۲- دو متغیر تصادفی x و y با توزیع توام جدول مقابل داده شده است. $E(x,y)$ کدام است؟ (حسابداری- ۸۴)

y \ x	-۱	۰	۱
۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۲	۰/۲۵	۰/۱۵	۰

۱) -۰/۳ ۲) -۰/۲ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۳

مجموعه مدیریت

۵۳- انباشته‌ای حاوی ۱۲ کالاست که ۴ واحد آن غیراستاندارد است. ۳ کالا به طور تصادفی انتخاب شده است. احتمال اینکه کالاهای انتخاب شده غیراستاندارد باشند، چقدر است؟ (مدیریت- ۷۷)

۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{1}{55}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۴- از بین ۱۰ نفری که متقاضی استخدام هستند، ۳ نفر قادر به انجام دادن آن هستند. ۲ نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر دو قادر به انجام دادن کار باشند، چقدر است؟ (مدیریت- ۷۸)

۱) $\frac{21}{45}$ ۲) $\frac{7}{45}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۵۵- در صورتیکه در محموله‌ای که ۱۲ کالا دارد، ۴ تای آن معیوب باشد، اگر دو کالا به تصادف از آن انتخاب شود، احتمال اینکه هر دو واحد کالا سالم باشد، چه میزان می‌شود؟ (مدیریت- ۸۱)

۱) $\frac{14}{33}$ ۲) $\frac{56}{33}$ ۳) $\frac{24}{55}$ ۴) $\frac{18}{120}$

۵۶- اگر $cov(x,y)=10$ و $\sigma_x=5$, $\sigma_y=3$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟ (مدیریت- ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) هیچکدام

۵۷- در تابع احتمال مقابل امید ریاضی $(2x-1)$ کدام است؟ (مدیریت- ۸۴)

x	۰	۱	۲	۳
f(x)	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۱

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۱/۸

۵۸- به ازای کدام مقدار a تابع $f(X=x)=\frac{1}{100}[2(10-x)+a]$ و $x=1,2,\dots,10$ یک تابع احتمال است؟ (مدیریت- ۸۴)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۹- احتمال اینکه هر پرتاب بازیکنی به هدف اصابت کند $\frac{2}{3}$ است، احتمال اینکه سومین پرتابی که به هدف اصابت می‌کند پنجمین پرتاب وی باشد، چقدر است؟ (مدیریت- ۸۴)

۱) $\frac{16}{81}$ ۲) $\frac{8}{81}$ ۳) $\frac{16}{27}$ ۴) $\frac{8}{27}$

۶۰- ده درصد تولیدات کارخانه معیوبند احتمال اینکه سومین کالای کنترل شده اولین کالای معیوب باشد چقدر است؟ (سراسری ۷۵)

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۸۱ ۳) ۰/۱۰ ۴) ۰/۸۱۷

۶۱- تابع احتمال زیر تعریف شده است: کدام است؟ (سراسری ۷۵)

X_1	-۱	۰	۱	۲
$f(x_i)$	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۱

$E(x^2)$

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۲- اگر $Cov(x,y)=1$, $\delta_y^2=1$, $\delta_x^2=1$ باشد δ_{x+y}^2 برابر ..... خواهد بود (مدیریت - ۷۵)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۳- یک دستگاه مکانیکی بطور متوسط دوبار در سال نیاز به تعمیر پیدا می‌کند. احتمال اینکه در هر ۶ ماه حداقل یکبار تعمیر شود چقدر است (مدیریت - ۷۵)

۱) $1-e^{-1}$ ۲) $1-e^{-2}$ ۳) e^{-1} ۴) e^{-12}

۶۴- کارشناسان یک شرکت بیمه اظهار می‌دارند که از هر یکصد نفر که بیمه می‌شوند پانزده نفر از آنان زودتر از موعد فوت می‌کند احتمال اینکه از سه نفر انتخاب شده یک نفر آنها فوت زودتر از موعد نماید چه مقدار است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰/۲۷ ۲) ۰/۳۱ ۳) ۰/۳۳ ۴) ۰/۴۱

۶۵- یک دستگاه مکانیکی به طور متوسط ۲۴ بار در سال نیاز به تعمیر دارد احتمال اینکه در ماه حداقل یکبار تعمیر شود چقدر است (مدیریت - ۷۶)

۱) $1-e^{-2}$ ۲) $1-e^{-24}$ ۳) e^{-2} ۴) e^{-24}

۶۶- اگر x , y متغیرهای تصادفی با توزیع توام زیاد باشند کوواریانس x , y چه مقدار است ؟ (مدیریت - ۷۶)

X \ Y	۳	۷
۲	۰	$\frac{1}{3}$
۵	$\frac{3}{2}$	۰

۱) ۳/۱۵
۲) -۲/۶۷
۳) ۲/۶۵
۴) ۳/۱۵

۶۷- با در نظر گرفتن جدول احتمال توام زیر احتمال وقوع B به شرط A برابر است با : (سراسری ۷۷)

	B	B′
A	۰/۱	۰/۳
A′	۰/۵	۰/۱

۱) ۰/۱۶۷ ۲) ۰/۲۰۰ ۳) ۰/۲۴۰ ۴) ۰/۲۵۰

۶۸- بطور متوسط ۶ ماشین در دقیقه از یک جاده می‌کند عرض جاده به اندازه یک اتومبیل است شخصی بدون توجه به عبور ماشین‌ها عرض جاده را در ده ثانیه می‌پیماید. احتمال سالم ماند او چقدر است ؟ (مدیریت - ۷۷)

۱) e^{-1} ۲) $1-e^{-1}$ ۳) 4^{-6} ۴) $1-e^{-6}$

۶۹- تابع احتمالی زیر در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است ؟ (مدیریت - ۷۷)

X \ Y	۳	۷
-۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

۱) دارای ارتباط مثبت هستند
۲) دارای ارتباط غیرخطی هست
۳) دارای ارتباط منفی هستند
۴) دو متغیر مستقل‌اند.

۷۰- واریانس‌های متغیر تصادفی Y,X هر دو ۵۰ است اگر Y,X مستقل باشند انحراف معیار (Y − X) عبارتست از: (سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

۷۱- اگر $x \sim Bin(8/03)$ (توزیع دو جمله‌ای) و $P(X=2)=0/294$ باشد $P(X=3)$ برابر است با :(مدیریت - ۷۹)

۱) ۰/۱۲۶ ۲) ۰/۵۰۴ ۳) ۰/۰۶۳ ۴) ۰/۲۵۴

۷۲- احتمال اینکه هر پرتاب بازیکنی به هدف اصابت کند ۰/۸ است احتمال اینکه اولین پرتاب که به هدف می‌خورد سومین پرتاب باشد چقدر است؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۰/۰۳۲ ۲) ۰/۲۰۴۸ ۳) ۰/۲۳۱ ۴) ۰/۳۲۱

۷۳- نسبت خرابی کالا در یک کارخانه برابر ۰/۰۱ است احتمال آنکه در ۱۰۰ کالا حداکثر یک کالای خراب وجود داشته باشد چقدر است ؟(مدیریت - ۷۹)

۱) e^{2} ۲) e^{-2} ۳) $2e$ ۴) $2e^{-1}$

۷۴- به طور متوسط ۳۰ مشتری در ساعت به یک شعبه بانک طبق فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه در هر نیم ساعت یک مشتری مراجعه کند چقدر است ؟(سراسری ۸۰)

۱) $۱۵e^{-۳۰}$ ۲) $۱۵e^{-۱۵}$ ۳) $۳۰e^{-۳۰}$ ۴) $۶۰e^{-۳}$

۷۵- متغییر تصادفی x دارای توزیع دو جمله‌ای $B(۱۰,\frac{۱}{۳})$ است. در این صورت واریانس متغیر تصادفی $y = x/۱۰$ برابر است با :(سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹۰}$

۷۶- بر اساس تجربه مشخص شده است که یک تلفنچی ۴ درصد از تلفنها را اشتباه وصل می‌کند. اگر روزی ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد، احتمال اینکه بیش از یک شماره را اشتباه وصل کرده باشد کدام است؟ (مدیریت - ۸۱)

۱) $۶e^{-۶}$ ۲) $۱-۷e^{-۶}$ ۳) $۱-e^{-۶}$ ۴) $۱-۵e^{-۶}$

۷۷- مشتری‌های یک مغازه مطابق یک فرایند پواسون با میانگین ۲۰ نفر در ساعت برای خرید به مغازه مراجعه می‌کنند احتمال اینکه مغازه دار مجبور شود بیش از ۵ دقیقه برای مراجعه اولین مشتری منتظر بماند چقدر است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $e^{-\frac{۵}{۳}}$ ۲) $e^{-۲۰}$ ۳) $۱-e^{-\frac{۵}{۳}}$ ۴) $۱-e^{-۲۰}$

۷۸- اظهارنظر حسابرسان راجع به حساب‌های شرکت ممکن است قبول، مردود و مشروط باشد. در سال پیش ۳/۲، ۰/۰، ۰/۵ نظرها به ترتیب قبول، مردود و مشروط بوده است. شش شرکت به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. میانگین و واریانس شرکت‌های مشروط به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (مدیریت - ۸۲)

۱) (۱/۲ و ۱/۲) ۲) (۱/۸ و ۱/۲) ۳) (۳ و ۱/۵) ۴) (۳ و ۳)

۷۹- جدول بازده زیر را در نظر بگیرید (مدیریت - ۸۲)

براساس روش EMV (ارزش مورد انتظار پولی) گزینه مناسب کدام است؟

۱) $a_۳$ ۲) $a_۲$ ۳) $a_۱$ ۴) $a_۲, a_۱$

گزینه ها	حالت طبیعی		
	$P(S_۱)=۰/۲$	$P(S_۲)=۰/۳$	$P(S_۳)=۰/۵$
$a_۱$	۳۵۰	۹۰۰	۱۸۸۰
$a_۲$	-۲۰۰	۱۲۰۰	۱۶۰۰
$a_۳$	-۵۰۰	۷۰۰	۲۵۰۰

۸۰- احتمال اصابت موشکی به یک جنگنده ۰/۳ است. با اصابت یک موشک، جنگنده سقوط می‌کند. احتمال اینکه در پرتاب پنجمین موشک جنگنده سقوط کند چقدر است؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۰/۰۰۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۰۵۵ ۴) ۰/۰۷۲

۸۱- متغیر تصادفی x می‌تواند یکی از سه مقدار ۵ و ۴ و $x_۳$ را انتخاب کند که احتمال آنها به ترتیب $P_۳, ۰/۵, ۰/۲$ است. اگر میانگین متغیر تصادفی x برابر ۶ باشد مقدار $x_۳$ چقدر است؟ (مدیریت - ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۸۲- اگر x یک متغیر تصادفی و x یک مقدار ثابت باشد آنگاه:

۱) $COV(x,x)=[E(x)]^۲, COV(x,a)=a^۲COV(x)$

۲) $COV(x,x)=E(x^۲), COV(x,a)=a^۲s^۲x$

۳) $COV(x,x)=\sigma^۲x, COV(x,a)=aCOV(x)$

۴) $COV(x,x)=\sigma^۲x, COV(x,a)=۰$

۸۳- اگر در هر سال به طور متوسط دو زلزله اتفاق بیافتد آنگاه تعداد زلزله‌هایی که در فاصله زمانی ۱۰ سال اتفاق می‌افتد دارای کدام تابع احتمال است؟

۱) $\frac{e^{-5}5^x}{x!}$ ۲) $\frac{e^{-5}5^x}{5!}$ ۳) $\frac{e^{-20}20^x}{20!}$ ۴) $\frac{e^{-20}20^x}{x!}$

۸۴- در یک توزیع دو جمله‌ای میانگین برابر ۶ و انحراف معیار برابر ۲ است. مقدار $P(x>0)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $(\frac{1}{3})^{18}$ ۳) $1-(\frac{1}{3})^{18}$ ۴) $1-(\frac{2}{3})^{18}$

۸۵- دو متغیر مستقل x و y تابع احتمال مقابل داده شده‌اند، α کدام است؟

x \ y	۱	۲	۳	f(y)
۰	۰/۱۲	۰/۲	۰/۰۸	۰/۴
۲	۰/۱۸	α	β	α+β+۰/۱۸
f(x)	۰/۳	۰/۲+α	۰/۰۸+β	

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

۸۶- در یک توزیع پاسکال احتمال شکست ۰/۶ است. اگر x تعداد آزمایش‌های برنولی در این توزیع باشد، $E(x)$ برای پیشامد دوازدهمین موفقیت کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۸۷- در یک شرکت ۵۰ درصد کارکنان تحصیلات کارشناسی، ۴۰ درصد تحصیلات کاردانی و ۱۰ درصد تحصیلات متوسطه دارند، اگر ۶ نفر به طور تصادفی از بین آنان انتخاب شود با کدام احتمال مقطع تحصیلات آن‌ها ۳ کارشناسی، ۲ کاردانی و ۱ نفر متوسطه است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

۸۸- اگر $COV(x,y)=0$ باشد، کدام بیان برای رابطه y,x صحیح است؟

۱) رابطه خطی ۲) رابطه غیرخطی ۳) رابطه غیرخطی یا مستقل ۴) الزاماً مستقل

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(X=۲|Y=۰)=\frac{P(X=۲,Y=۰)}{P(Y=۰)}=\frac{\frac{۲}{۸}}{\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۸}}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(X-\frac{\mu}{\sigma_x})=\mu-\frac{\mu}{\sigma_x}=\mu(۱-\frac{۱}{\sigma_x})$$

$$V(X-\frac{\mu}{\sigma_x})=V(X)=\sigma^۲\Rightarrow\sigma_Y=\sigma$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

۴- گزینه ۱ صحیح است.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$V(\frac{X-۴}{۳})=\frac{۱}{۹}V(X)=\frac{۱}{۹}\left[E(X^۲)-(E(X)^۲)\right]$$

$$=\frac{۱}{۹}\left[۱۰۹-۱۰۰\right]$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$V(u+V)=V(u)+V(V)+۲cov(u,V)=۱+۱+۲cov(u,V)$$

$$=۲+۲V_{x,y}$$

۷- گزینه ۱ صحیح است.

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$cov(z,w)=E(z-E(z))(w-E(w))$$

$$=E\left[c+dy-(c+dE(y))\right]\left[a+bx-(a+bE(x))\right]$$

$$=E\left[d(y-E(y))\right]\left[b(x-E(x))\right]$$

$$=bdE(y-E(y))(x-E(x))=bdCoV(x,y)$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

چون $y=x^۲$ است بنابراین حوادث $x=-۱,x=۱$ با حادثه $y=۱$ هم ارز می‌باشند.

$$P(Y=۱)=P(X=۱)+P(X=-۱)=۰/۱۵+۰/۰۵=۰/۲$$

و به همین شکل حوادث $x=۲,x=-۲$ نیز با حادثه $y=۴$ هم ارزند.

$$P(Y=۴)=P(X=-۲)+P(X=۲)=۰/۳۰+۰/۰۵=۰/۳۵$$

$$P(Y=۰)=P(X=۰)=۰/۰۵$$

$$P(Y=۹)=P(X=۳)=۰/۳۰$$

$$P(Y=۱۶)=P(X=۴)=۰/۱$$

۱۰- گزینه ۲ صحیح است.

$V(X)=۴ \Rightarrow E(X)=۴$

۴ نفر ۱ ساعت

$\lambda=۱$ $\frac{۱}{۴}$ ساعت

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X=۰)=\frac{۱^۰.e^{-۱}}{۰!}=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$$

۱۱- گزینه ۱ صحیح است.

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{P(X=۰)}{P(X=۱)}=\frac{\frac{\lambda^۰.e^{-\lambda}}{۰!}}{\frac{\lambda.e^{-\lambda}}{۱!}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{e^{-\lambda}}{\lambda e^{-\lambda}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\lambda=۳$$

$$E(x)=\lambda=۳$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=۳+۲=۵$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=۳\times۲=۶$$

$$cov(X,Y)=۰$$

۱۴- گزینه ۱ صحیح است.

زمانیکه $np<۵$ باشد، توزیع پواسون تقریب مناسبی برای توزیع دوجمله‌ای است.

$$n=۲۵\ ,\ P=۰/۰۴\Rightarrow np=۲۵\times۰/۰۴=۱<۵$$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu=np=۵$$

$$V=\sigma^۲=npq\Rightarrow\sigma^۲=۵q=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow q=\frac{\frac{۱۵}{۴}}{۵}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow p=۱-\frac{۳}{۴}\Rightarrow p=\frac{۱}{۴}$$

$$\mu=np=۵\Rightarrow\frac{۱}{۴}n=۵\Rightarrow n=۲۰$$

$$P(X=۰)=\binom{۲۰}{۰}(\frac{۱}{۴})^۰(\frac{۳}{۴})^{۲۰}=(\frac{۳}{۴})^{۲۰}$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

اگر X و Y از هم مستقل باشند آنگاه X و $\frac{۱}{Y}$ هم مستقل هستند، در نتیجه:

$$E(\frac{X}{Y})=E(X.\frac{۱}{Y})=E(X)E(\frac{۱}{Y})=E(X).\frac{۱}{E(Y)}=\frac{E(X)}{E(Y)}$$

۱۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(Y|X=۶)=\frac{(۲\times۰/۰۵)+(۳\times۰/۲۰)+(۴\times۰/۲۰)+(۵\times۰/۰۵)}{۰/۵۰}=\frac{۱/۷۵}{۰/۵۰}=۳/۵$$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(X)=(-۱\times ۰/۵۰)+(۰\times ۰/۵۰)=-۰/۵۰$$
$$E(Y)=(-۱\times ۰/۳۰)+(۱\times ۰/۷۰)=۰/۴۰$$
$$E(XY)=(-۱\times -۱\times ۰/۱۵)+(-۱\times ۰\times ۰/۱۵)+(۱\times -۱\times ۰/۳۵)+(۱\times ۰\times ۰/۳۵)=-۰/۲۰$$
$$E(x,y)=-۰/۲۰$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-۰/۲-(-۰/۵)(۰/۴)=۰$$

۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

بطور کلی اگر در توزیع دوجمله‌ای $P>۰/۵$ باشد، نمودار احتمال مربوطه چوله به سمت چپ و اگر $P<۰/۵$ باشد، نمودار احتمال مربوطه چوله به راست و اگر $P=۰/۵$ باشد، نمودار احتمال مربوطه متقارن خواهد بود.

۲۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(X=۱)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda}{۱!}=e^{-\lambda}.\lambda$$
$$P(X=۲)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{۲}}{۲!}=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{۲}}{۲}$$
$$P(X=۱)=P(X=۲)\Rightarrow e^{-\lambda}.\lambda=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{۲}}{۲}\Rightarrow ۲\lambda=\lambda^{۲}\Rightarrow \lambda^{۲}-۲\lambda=۰$$
$$\lambda=۰\ ,\qquad \lambda=۲$$
$$P(X=۰)=\frac{e^{-۲}.۲^{۰}}{۰!}=e^{-۲}$$

۲۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\binom{۲}{۱}P(۱-P)+\binom{۲}{۲}P^{۲}(۱-P)^{۰}=۰/۸۴\Rightarrow ۲P(۱-P)+P^{۲}=۰/۸۴$$
$$۲P-۲P^{۲}+P^{۲}=۰/۸۴\Rightarrow ۲P-P^{۲}=۰/۸۴\Rightarrow P^{۲}-۲P+۰/۸۴=۰$$
$$P=\frac{۱\mp\sqrt{۱-۰/۸۴}}{۱}=۱-۰/۴=۰/۶$$

۲۲- گزینه ۲ صحیح است.

سود = حق بیمه -(میانگین پرداخت خسارت)

۱۰۰۰۰۰ = حق بیمه -(۰/۱×۱۰۰۰۰۰۰) ⇒ حق بیمه = ۲۰۰۰۰۰

۲۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(X)=\mu=۲$$
$$V(X)=\sigma_X^{۲}=۴$$
$$V(X)=E(X^{۲})-(E(X))^{۲}\Rightarrow ۴=E(X^{۲})-۴\Rightarrow E(X^{۲})=۸$$

۲۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷-۳}{۳-۲}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۳\times ۴}{\frac{۷!}{۳!۴!}}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

۲۵- گزینه ۴ صحیح است.

از توزیع پواسون استفاده می‌کنیم.

$$\lambda = ۵ \ , \ X = ۰$$

$$P(X=۰) = \frac{e^{-۵}.۵^{۰}}{۰!} = e^{-۵} = (۲/۷۱۸)^{-۵}$$

۲۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(X) = \sum x.g(x) = (-۱ \times \frac{۱+۱}{۵}) + (۰ \times \frac{۰+۱}{۵}) + (۱ \times \frac{۱+۱}{۵})$$

$$E(X) = ۰$$

$$E(X^{۲}) = \sum x^{۲}.g(x) = ((-۱)^{۲} \times \frac{۱+۱}{۵}) + (۰ \times \frac{۰+۱}{۵}) + (۱^{۲} \times \frac{۱+۱}{۵}) = \frac{۴}{۵}$$

$$V(X) = E(X^{۲}) - (E(X))^{۲} \Rightarrow V(X) = \frac{۴}{۵} - (۰)^{۲} = \frac{۴}{۵}$$

۲۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(X=۳|Y=-۳) = \frac{۰/۳}{۰/۱+۰/۳} = \frac{۳}{۴}$$

۲۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(X) = \mu = np = ۲۰$$

$$V(X) = npq = ۴ \Rightarrow ۲۰q = ۴ \Rightarrow q = \frac{۱}{۵} \Rightarrow p = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

$$P(X=۰) = \binom{n}{۰}(۰/۸)^{۰}(۰/۲)^{n-۰} = (۰/۲)^{n}$$

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(x) = \sum x.g(x) = (-۲ \times \frac{۱}{۲}) + (۲ \times \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$E(y) = \sum y.h(y) = (۰ \times \frac{۱}{۲}) + (۱۰ \times \frac{۱}{۲}) = ۵$$

$$E(xy) = \sum xy.f(x,y) = (-۲ \times ۰ \times \frac{۱}{۶}) + (-۲ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۳}) + (۲ \times ۰ \times \frac{۱}{۳}) + (۲ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۶})$$

$$E(xy) = -\frac{۱۰}{۳}$$

$$cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = -\frac{۱۰}{۳} - (۰ \times ۵) = -\frac{۱۰}{۳}$$

۳۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(X>۴) = P(X=۵) + P(X=۶) = \binom{۶}{۵}\frac{۱}{۶۴} + \binom{۶}{۶}\frac{۱}{۶۴} = \frac{۷}{۶۴}$$

۳۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(x) = \sum x f(x) = (۱ \times \frac{۱}{۹}) + (۲ \times \frac{۱}{۹}) + \cdots + (۹ \times \frac{۱}{۹}) = (۱+۲+\cdots+۹) \times \frac{۱}{۹} = ۴۵ \times \frac{۱}{۹} = ۵$$

$$E(x^{۲}) = \sum x^{۲} f(x) = (۱ \times \frac{۱}{۹}) + (۴ \times \frac{۱}{۹}) + \cdots + (۸۱ \times \frac{۱}{۹}) = (۱^{۲} + ۲^{۲} + \cdots + ۹^{۲}) \times \frac{۱}{۹} = ۲۸۵ \times \frac{۱}{۹} = \frac{۹۵}{۳}$$

$$V(X) = E(X^{۲}) - (E(X))^{۲} = \frac{۹۵}{۳} - ۵^{۲} = \frac{۲۰}{۳}$$

مجموعه حسابداری

۳۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(X)=\sum x.P_x=0(\frac{1}{6})+1(\frac{1}{4})+2(\frac{1}{3})+3a=\frac{11}{12}+3a$$

چون باید جمع احتمال‌ها برابر یک باشد، یعنی:

$$\sum P(x)=1\Rightarrow\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$E(X)=\frac{11}{12}+3(\frac{1}{4})=\frac{5}{3}$$

۳۳- گزینه ۱ صحیح است.

از توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$

۳۴- گزینه ۲ صحیح است.

از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم.

$$P(X=2)=\frac{\binom{36}{2}\binom{9}{0}}{\binom{45}{2}}=\frac{\frac{36!}{34!2!}}{\frac{45!}{43!2!}}=\frac{36\times 35}{45\times 44}=\frac{7}{11}$$

۳۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$q=\frac{1}{3}\Rightarrow P=\frac{2}{3}$$

$$V(x)=npq=72(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})=16\qquad \sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{16}=4$$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\sigma^2_{x+y}=\sigma^2_x+\sigma^2_y+2cov(x,y)\Rightarrow\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+2cov(x,y)$$

$$2cov(x,y)=\frac{-1}{3}\Rightarrow cov(x,y)=\frac{-1}{6}$$

۳۷- گزینه ۳ صحیح است.

از توزیع هندسی استفاده می‌کنیم.

$$P(X)=pq^{x-1}=P(5)\Rightarrow(0/3)(0/7)^4=0/072$$

۳۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$n=5\quad,\quad p=\frac{1}{4}\Rightarrow q=\frac{3}{4}$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\Rightarrow P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=0/0879$$

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

از توزیع پواسون استفاده می‌کنیم.

$$\lambda=5$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-5}\times 5^0}{0!}=e^{-5}$$

۴۰- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$$P(A\cap B)=۱-(۰/۲+۰/۱+۰/۵)=۰/۲$$

$$P(A|B)=\frac{۰/۲}{۰/۳}=۰/۶۶۷$$

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

X / Y	۰	۱	g(x)
−۱	۰/۳۰	۰/۳۰	۰/۶۰
۰	۰/۳۰	۰/۱۰	۰/۴۰
h(y)	۰/۶۰	۰/۴۰	۱

$$E(X)=\sum x.g(x)=(-۱\times ۰/۶)+(۰\times ۰/۴)=-۰/۶$$

$$E(Y)=\sum y.h(y)=(۰\times ۰/۶)+(۱\times ۰/۴)=۰/۴$$

$$E(XY)=\sum x\,yf(x,y)=(۰\times -۱\times ۰/۳۰)+(۱\times -۱\times ۰/۳۰)+(۰\times ۰X۰/۳۰)+(۰\times ۱\times ۰/۱۰)$$

$$E(xY)=-۰/۳$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-۰/۳-(-۰/۶)(۰/۴)=-۰/۰۶$$

۴۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$E\left(\frac{x-۵}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}E(X)-\frac{۵}{۳}=\frac{۱}{۳}(۵)-\frac{۵}{۳}=۰$$

$$V\left(\frac{x-۵}{۳}\right)=\frac{۱}{۹}V(X)=\frac{۱}{۹}\times ۹=۱$$

۴۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$n=۱۰۰\ ,\ p=۰/۰۱\rightarrow np=۱۰۰\times ۰/۰۱=۱<۵\Rightarrow$$

بهترین تقریب برای توزیع دوجمله‌ای، پواسون است.

۴۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma^۲_{X+Y}=\sigma^۲_X+\sigma^۲_Y+۲cov(X,Y)\Rightarrow\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}+۲cov(X,Y)$$

$$۲cov(X,Y)=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow cov(X,Y)=\frac{-۱}{۶}$$

۴۵- گزینه ۱ صحیح است.

از توزیع هندسی استفاده می‌کنیم.

$$p=۰/۶\ ,\ q=۰/۴\ ,\ x=۴\quad P(X=x)=pq^{x-۱}$$

$$P(X=۴)=(۰/۶)(۰/۴)^۳=۰/۰۳۸۴$$

۴۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{n}{N}=\frac{۴۰}{۴۰۰۰}=۰/۰۱<۰/۰۵$$

۴۷- گزینه ۱ صحیح است.

از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$P(X=x)=\binom{x-۱}{k-۱}p^kq^{x-k}\quad p=۰/۸\ ,\ x=۵\ ,\ k=۳$$

$$P(X=۵)=\binom{۴}{۲}(۰/۸)^۳(۰/۲)^۲=۶\times ۰/۵۱۲\times ۰/۰۴=۰/۱۲۳$$

۴۸- گزینه ۴ صحیح است.

x و y مستقلند.

$$E(xy)=E(x)E(y)=۲\times۱=۲$$
$$E(x+y)=E(x)+E(y)=۲+۱=۳$$
$$cov(x,y)=E(x,y)-E(x)E(y)=۲-(۲)(۱)=۰$$

۴۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\sum f(x)=۱\Rightarrow ۰/۲+۰/۵+p_۳=۱\Rightarrow \boxed{p_۳=۰/۳}$$
$$E(X)=۳(۰/۲)+۲(۰/۵)+x_۳(۰/۳)=۳/۴\Rightarrow ۰/۳x_۳=۱/۸\Rightarrow \boxed{x_۳=۶}$$

۵۰- گزینه ۴ صحیح است.

۶۰ دقیقه — اتومبیل ۱۲

۱۵ دقیقه — $\lambda=\frac{۱۵\times۱۲}{۶۰}=۳$

$$p(X=۳)=\frac{e^{-۳}.۳^۳}{۳!}=\frac{۹}{۲}e^{-۳}=۴/۵e^{-۳}$$

۵۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum f(X=x)=۱\Rightarrow ۰/۱+۰/۲۶+\alpha+۳\alpha-۱=۱\Rightarrow ۴\alpha=۱/۶۴\Rightarrow \boxed{\alpha=۰/۴۱}$$

۵۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(xy)=\sum xy.f(x,y)\Rightarrow E(xy)=(-۱\times۱\times۰/۱)+(-۱\times۲\times۰/۲۵)+...+(۱\times۲\times۰)=-۰/۳$$

مجموعه مدیریت

۵۳- گزینه ۲ صحیح است.

از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم.

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=۳\ ,\ k=۴\ \ n=۳\ \ ,N=۱۲$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۸}{۰}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۴}{\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}}=\frac{۴}{۲۲۰}=\frac{۱}{۵۵}$$

۵۴- گزینه ۴ صحیح است.

از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم.

$$x=۲,\ k=۳,\ N=۱۰\ ,\ n=۲\quad P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۳\times۱}{\frac{۱۰\times۹}{۲}}=\frac{۱}{۱۵}$$

۵۵- گزینه ۱ صحیح است.

از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم.

$$n=۲\ ,\ N=۱۲\ ,\ x=۲\ ,\ k=۸$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۸}{۲}\binom{۱۲-۸}{۲-۲}}{\binom{۱۲}{۲}}=\frac{\frac{۸\times۷}{۲}\times\frac{۴}{۴}}{\frac{۱۲\times۱۱}{۲}}=\frac{۴\times۷}{۶۶}=\frac{۱۴}{۳۳}$$

۵۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$r_{xy}=\frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{۱۰}{۵\times۳}=\frac{۲}{۳}$$

۵۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(X)=(۰\times۰/۲)+(۱\times۰/۳)+(۲\times۰/۴)+(۳\times۰/۱)$$
$$E(X)=۱/۴\Rightarrow E(۲x-۱)=۲E(x)-۱\Rightarrow E(۲x-۱)=۲(۱/۴-۱)=۱/۸$$

۵۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}f(X=x_i)=۱\Rightarrow f(X=۱)+f(X=۲)+...+f(X=۱۰)=۱$$
$$\frac{۱}{۱۰۰}(۱۸+a)+\frac{۱}{۱۰۰}(۱۶+a)+...+\frac{۱}{۱۰۰}(۰+a)=۱\Rightarrow\frac{۱}{۱۰۰}(۱۸+۱۶+۱۴+...+۰+۱۰a)=۱$$
$$\frac{۱}{۱۰۰}(۹۰+۱۰a)=۱\Rightarrow ۰/۹+۰/۱a=۱\Rightarrow ۰/۱a=۰/۱\Rightarrow a=۱$$

۵۹- گزینه ۱ صحیح است.

از توزیع دو جمله‌ای منفی استفاده می‌کنیم.

$$p=\frac{۲}{۳}\Rightarrow q=\frac{۱}{۳}\ ,\ x=۵\ ,\ k=۳$$
$$P(X=x)=\binom{x-۱}{k-۱}p^kq^{x-k}$$
$$P(X=۵)=\binom{۴}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=۶\times\frac{۸}{۲۷}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱۶}{۸۱}$$

۶۰-گزینه ۲ صحیح است.

$$P(X=x)=Pq^{X-۱}\Rightarrow P(X=۳)=۰/۱(۰/۹)^۲=۰/۰۸۱$$
$$P=۰/۱\Rightarrow q=۱-p=۰/۹$$

۶۱-گزینه ۳ صحیح است.

$X^۲$	۱	۰	۱	٤
$f(X)$	۰/۳	۰/۳	۰/۳	۰/۱

$\Rightarrow$

$$E(X^۲)=\Sigma x^۲f(x)=۱\times۰/۳\times۰/۳+۱\times۰/۳+۴\times۰/۱=۱$$

۶۲-گزینه ۱ صحیح است.

$$\delta^۲_{x+y}=\delta^۲_x+\delta^۲_y-۲Cov(x,y)\Rightarrow\delta^۲_{x+y}=۱+۱-۲=۰$$

یادآوری: $\delta^۲_{ax+by}=a^۲\delta^۲_x+b^۲\delta^۲_y-۲ab\sigma_{xy}$

۶۳- گزینه ۱ صحیح است.

همانطور که گفتیم تعداد رخدادهای یک واقعه در یک بازه زمانی از توزیع پواسون تبعیت می‌کند بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda_t=۲\times\frac{۶}{۱۲}=۱$$
$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda t}\lambda^x t}{x!}$$
$$P(x\geq۱)=۱-P(x=۰)=۱-\frac{e^{-۱}\times۱^۰}{۱}=۱-e^{-۱}$$

۶۴- گزینه ۳ صحیح است.

توزیع دو جمله‌ای $=p(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\Rightarrow p(x=۱)=\binom{۳}{۱}۰/۱۵\times۰/۸۵^۲=۰/۳۳$

p = احتمال فوت زودرس $=۰/۱۵\Rightarrow q=۱-p=۰/۸۵$

۷۹- گزینه ۱ صحیح است.

EMV در واقع همان امید ریاضی است ($E(x)$) می‌باشد بنابراین:

$$E(a_1)=0/2\times 350+0/3\times 900+0/5\times 1880=1280$$
$$E(a_2)=0/2\times(-200)+0/3\times 1200+0/5\times 1600=1120$$
$$E(a_3)=0/2\times(-500)+0/3\times 700+0/5\times 2500=1360$$

طرح a_3 گزینه بهینه خواهد بود

۸۰- گزینه ۴ صحیح است.

توزیع هندسی : $P(X=x)=pq^{x-1}\Rightarrow P(X=5)=0/3\times 0/7^4=0/072$

$x=5, P=0/3, q=1-p=0/7$

۸۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$P_3+0/5+0/2=1\Rightarrow P_3=0/3$$
$$E(X)=6\Rightarrow E(X)=\Sigma x_i P(x_i)=5\times 0/2+4\times 0/5+x_3\times 0/3=3+0/3x_3=6\Rightarrow x_3=10$$

۸۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$COV(x,x)=E(x,y)-E(x)E(y)$$
$$\begin{cases} COV(x,x)=E(x,x)-E(x)E(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\sigma^2 x \\ COV(x,a)=E(x,a)-E(x)E(a)=aE(x)-aE(x)=0 \end{cases}$$

۸۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} \lambda=2\rightarrow \lambda=20 \text{ در ۱۰ سال} \\ f(x)=\dfrac{e^{-20}20^x}{x!} \end{cases}$$

۸۴- گزینه ۴ صحیح است.

توزیع دوجمله‌ای $\begin{cases} E(x)=np=6 \\ \sigma x=\sqrt{npq}=2\rightarrow \sigma^2=\underbrace{np}_{6}q=4\rightarrow q=\dfrac{2}{3},\ p=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \dfrac{1}{3}\Rightarrow n=6, n=18 \end{cases}$

$$p(x>0)=1-p(x=0)=1-\binom{n}{0}p^0q^{n-0}=1-q^n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$$

۸۵- گزینه ۴ صحیح است.

باید برای نقاط جدول داشته باشیم:

$$f(x=2,y=0)=f(x=2)\times f(y=0)\Rightarrow 0/2=(0/2+\alpha)\times 0/4$$
$$0/2=0/08+0/4\alpha$$
$$0/12=0/4\alpha\Rightarrow \boxed{\alpha=0/3}$$

۸۶- گزینه ۴ صحیح است.

$r=12$

شکست $=q=0/6$ $\qquad E(x)=\dfrac{r}{p}=\dfrac{12}{0/4}=30$

پیروزی $=p=0/4$

۸۷- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به در نظر گرفتن توزیع چند جمله‌ای احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{6!}{3!2!1!}(0/5)^3(0/4)^2(0/1)^1=0/12$$

۸۸- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به آن که کوواریانس x و y جهت و نوع ارتباط x و y را از نظر خطی یا غیرخطی بودن بررسی می‌کند همیشه روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \text{(۱) x و y مستقل} \\ \text{(۳) x و y ارتباط غیرخطی} \end{cases} \qquad COV(x,y)=0$$

در صورتیکه هر یک از شرایط (۱) یا (۲) برقرار باشد، $COV(x,y)$ برابر صفر خواهد بود.

فصل چهارم

توابع احتمال پیوسته

۱- متغیر تصادفی پیوسته

همانطور که گفتیم، متغیر تصادفی پیوسته به متغیری گفته می‌شود که اعداد حوزهٔ آن از مجموعه شمارش ناپذیر تشکیل می‌شود. مانند طول عمر یک لامپ

۲- تابع احتمال

تابع احتمال متغیر تصادفی پیوسته، دارای دو شرط زیر می‌باشد:

۱) $f(x) \geq ۰$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱$

نکته: در توابع احتمال پیوسته: ۳) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

نکته: $P(a \leq x < b) = \cancel{P(x = a)} + P(a < x < b) + \cancel{P(x = b)} = P(a < x < b)$

نکته: در توابع چگالی احتمال پیوسته، احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته، دقیقاً یک مقدار معینی بگیرد، برابر صفر است.

$x = a \Rightarrow P(x = a) = ۰$

نکته: اگر تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت چند ضابطه‌ای باشد، لازم است مجموع حالت‌های کل زیر منحنی ضابطه‌ها برابر یک شود.

مثال: متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع احتمال به صورت زیر می‌باشد. مقدار k را پیدا کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{۲}x^۳ & ۰ < x < ۳ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_۰^۳ \frac{k}{۲}x^۳dx = ۱ \Rightarrow \frac{k}{۸}x^۴\Big]_۰^۳ = ۱ \Rightarrow \frac{k}{۸}(۸۱ - ۰) = ۱$$

$$\Rightarrow k = \frac{۸}{۸۱}$$

نحوه بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته y که از متغیر تصادفی پیوسته x تبعیت می‌کند:

نکته: محاسبه $x = g(y)$ با استفاده از $y = f(x)$، یعنی با استفاده از رابطه $y = f(x)$، x را بر حسب y بدست آوریم.

نکته:

$$f(y) = |g'(y)|f(g(y)) \Rightarrow \begin{array}{l} y = g(x) \to x = g(y) \\ f(y) = |g'(y)| \times f_x(g(y)) \end{array}$$

۳- تابع توزیع احتمال (تابع احتمال تجمعی):

$$x = ۲, k = ۳, N = ۱۰, n = ۲ \quad P(X = ۲) = \frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۳ \times ۱}{\frac{۱۰ \times ۹}{۲}} = \frac{۱}{۱۵}$$

در تابع توزیع احتمال که آن را با $F(x)$ نشان می‌دهیم، احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته X، کوچکتر یا مساوی x باشد را محاسبه کنید:

$$F(x)=P(x\le x)=\int_{\text{حد پایین}}^{x} f_x(t)$$

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

٤- خواص تابع توزیع احتمال پیوسته

۱- تابع توزیع پیوسته همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

۲- تابع توزیع همواره صعودی است.

$$a<b\Rightarrow F(a)\le F(b)$$

۳- احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته X، مقداری بین a و b بگیرد را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز محاسبه نمود:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

۴- با توجه به تعریف تابع توزیع، خواهیم داشت: $F(-\infty)=0 \qquad F(+\infty)=1$

مثال: متغیر تصادفی پیوستهِ X دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد $P(X<2)$ را محاسبه کنید؟

$$f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<1\\ 2x & 1\le x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(x<2)=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(2x)dx=-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1+x^2\Big]_1^2=(\frac{1}{2}-0)+(4-1)=\frac{7}{2}$$

۵- امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته

امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته به صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x)dx$$

نکته: امید شرطی $\Leftarrow$ امید شرطی y به شرطی که $X=x$ باشد.

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{f(x,y)}{f_x(x)}dy$$

اگر امید شرطی x به شرط $Y=y$

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{f(x,y)}{f_y(y)}dx$$

٦- واریانس متغیر تصادفی پیوسته

واریانس متغیر تصادفی پیوسته نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left[x-E(x)\right]^2f(x)dx$$

نکته: واریانس متغیر تصادفی پیوسته را از طریق رابطهٔ زیر نیز می‌توان محاسبه نمود:

$$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\mu^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]^2\,f(x)dx$$

مثال: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2} & 1\le x\le 4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X را محاسبه کنید.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^4x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\int_1^4\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2\Big]_1^4=\left[\left(\frac{1}{3}\times 64-\frac{1}{4}\times 16\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{52}{3}-\frac{1}{12}=\frac{207}{12}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\mu^2=\int_1^4 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{207}{12}\right)^2$$

$$=\int_1^4\left(x^3-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\left(\frac{207}{12}\right)^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3\Big]_1^4-\left(\frac{207}{12}\right)^2$$

$$=\left[\left(\frac{256}{4}-\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left(\frac{207}{12}\right)^2=\frac{639}{12}-\frac{42849}{144}=-244/3$$

۷- میانه، مد و چارک‌ها

الف – اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد، آنگاه میانه از طریق رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{me}f(x)dx=\int_{me}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$$

همچنین میانه را می‌توان به صورت زیر نیز محاسبه نمود:

$$F(x)=\frac{1}{2}$$

ب – برای محاسبه مُد برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی $f(x)$، باید مشتق تابع چگالی را برابر صفر قرار دهیم:

$$f'(x)=0\Rightarrow x=Mo$$

ج – برای محاسبه چارک اول و سوم نیز در مورد متغیر تصادفی پیوسته X می‌توان تابع توزیع را به ترتیب برابر $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ قرار داد:

$$F(x)=\frac{1}{4}\Rightarrow x=Q_1$$

$$F(x)=\frac{3}{4}\Rightarrow x=Q_3$$

۸- تابع احتمال توأم یا توزیع توأم پیوسته

اگر X و Y در متغیر تصادفی پیوسته باشند، تابع احتمال (تابع چگالی) توأم X و Y دارای دو شرط زیر می‌باشد:

۱) $f(x,y)\geq 0$ ۲) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

و تابع توزیع توأم X و Y نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x,y)=p(X<x,Y<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

مثال: تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y)=\frac{xy^2+2x}{6}\qquad 0<x<2\qquad 0<y<3$$

تابع توزیع X و Y را بدست آورید.

$$F(x,y)=p(X<x,Y<y)=\int_0^x\int_0^y\frac{xy^2+2x}{6}dxdy$$

$$=\int_0^x\frac{\frac{1}{3}xy^3+2xy}{6}\Bigg]_0^y dx=\int_0^x\frac{\frac{1}{3}xy^3+2xy}{6}dx$$

$$=\frac{\frac{1}{6}x^2y^3+x^2y}{6}\Bigg]_0^x=\frac{x^2y^3+6x^2y}{36}$$

- اکنون پس از آشنایی با متغیرهای تصادفی پیوسته، با چند توزیع پیوسته مهم آشنا می‌شویم:

۹- توزیع یکنواخت

ساده‌ترین توزیع در بین توزیع‌ها، توزیع یکنواخت می‌باشد. تابع چگالی و تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته X که دارای توزیع یکنواخت است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a\le x\le b$$

$$F(x)=P(X<x)=\frac{x-a}{b-a}$$

نکته: امید ریاضی و واریانس توزیع یکنواخت به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

نکته: $\mu_x(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)^t}$

$$E(x)=\frac{a+b}{2}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال: متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی یکنواخت به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2\le x\le 5\\ 0 & \text{درغیر اینصورت}\end{cases}$$

الف – تابع توزیع را پیدا کنید.

ب – میانگین و واریانس این توزیع را محاسبه کنید.

الف –

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{2}^{x}\frac{1}{3}dx$$

$$=\frac{1}{3}x\Big]_{2}^{x}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(x-2)$$

علاوه بر روش فوق می‌توان طبق فرمول ذکر شده فوق نیز تابع توزیع را محاسبه نمود:

$$F(x)=\frac{x-2}{5-2}=\frac{x-2}{3}$$

ب -

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{7}{2}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{9}{12}$$

۱۰- توزیع نمایی

متغیر تصادفی X را دارای توزیع نمایی می‌گوییم، هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{درغیر اینصورت}\end{cases}$$

همچنین تابع توزیع متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی نمایی است، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$F(x)=P(X<x)=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$$

نکته: اگر تعداد موفقیت‌ها یا ورودی‌ها دارای توزیع پواسون باشد، زمان بین موفقیت‌ها یا زمان بین دو ورودی متوالی دارای توزیع نمایی است. فاصله زمانی بین دو رخداد پواسون متغیری تصادفی است که آن را متغیر تصادفی نمایی می‌گوییم.

نکته: امید ریاضی و واریانس تابع نمایی از طریق روابط زیر بدست می‌آید:

$$\beta=E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$\beta^2=V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

λ متوسط تعداد اتفاقات در واحد زمانی است. $\mu_x(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\frac{1}{1-\beta t}$

مثال: زمان مورد نیاز برای ساخت یک قطعه الکترونیکی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=0/25$ تبعیت می‌کند. امید ریاضی و واریانس تولید این قطعه الکترونیکی را بدست آورید.

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0/25}=4$$

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(0/25)^2}=16$$

علاوه بر توزیع یکنواخت و توزیع نمایی توزیع‌های پیوسته مهم دیگری نیز وجود دارند که عبارتند از: توزیع نرمال، توزیع کای مربع (χ^2)، توزیع t و توزیع فیشر (F). در فصل بعد با توزیع نرمال و در فصل‌های آتی با کاربردهای توزیع‌های t استیودنت، فیشر و کای مربع بیشتر آشنا می‌شوید.

نکته: تابع مولد گشتاور: تابع مولد گشتاور مرتبه t ام متغیر تصادفی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_x(t)=\mu_x=E(e^{tx}) \qquad t\in R$$

متغیر تصادفی پیوسته $=E(e^{tx})=\mu_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)dx$

نکته: مشتق اول تابع مولد گشتاور امید ریاضی است. $\Rightarrow E(x)=\mu'_x(t=0)$

نکته: توزیع حاشیه‌ای: اگر x و y پیوسته باشند $\Leftarrow$

$$\begin{cases} \text{توزیع حاشیه‌ای } x=f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \\ \text{توزیع حاشیه‌ای } y=f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \end{cases}$$

۱۱- توزیع گاما:

اگر r توزیع نمایی را به صورت مستقل در نظر بگیریم. آنگاه به توزیع گاما می‌رسیم:

$$f(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(r)}\ (\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x} \qquad 0\le x<\infty$$

$$E(x)=\frac{r}{\lambda}$$

$$\sigma^2=\frac{r}{\lambda^2}$$

اگر $r=1$ قرار دهیم دقیقاً به توزیع نمایی می‌رسیم. $\mu_x(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^r$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- تابع چگالی یک متغیر تصادفی به صورت زیر است: (اقتصاد – ۷۳)

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$E(X)$ برابر است با:

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

۲- تابع توزیع $F(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5\right)$ در دامنه $0\le x\le 3$ تعریف شده است. نما (مُد) آن برابراست با: (افتصاد-۷۳)

۱) ۰/۶ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت X به صورت زیر بیان شده است؟

$$\varphi(x)=\frac{2x+3}{18}\qquad 0<x<3$$

تابع توزیع کمیت تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد – ۷۳)

۱) $F_x(x)=\frac{2x^2+3x}{18}$ ۲) $F_x(x)=\frac{x^2+3x}{18}$

۳) $F_x(x)=\frac{x^2}{18}$ ۴) $F_x(x)=\frac{x+3x^2}{18}$

۴- X به عنوان یک متغیر تصادفی معرف طول عمر لامپی است که بین صفر تا ۱۶۰ ساعت کار می‌کند. احتمال اینکه این لامپ دقیقاً ۸۰ ساعت کار کند برابر است با: (اقتصاد – ۷۵)

۱) صفر

۲) ۰/۵

۳) این احتمال را تا زمانیکه تابع چگالی X مشخص نباشد، نمی توان محاسبه کرد.

۴) این احتمال را تا زمانیکه میانگین و واریانس X مشخص نباشد، نمی توان محاسبه کرد.

۵- تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است؟

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{63}\qquad 3<x<6$$

تابع توزیع کمیت Y که بر طبق رابطهٔ $y=-x$ از X تبعیت دارد، کدام است؟ (اقتصاد – ۷۵)

۱) $F(y)=\frac{y^2}{63}$ و $-6<y<-3$ ۲) $F(y)=\frac{y^2-6}{63}$ و $-6<y<-3$

۳) $F(y)=\frac{y^2-3}{63}$ و $-6<y<-3$ ۴) $F(y)=\frac{-y^2}{63}$ و $-6<y<-3$

۶- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{12} & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

می باشد، تابع توزیع متغیر تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد – ۷۶)

۱) $F(x)=\frac{x^2+1}{12}$ ۲) $F(x)=\frac{x^2+x}{12}$ ۳) $F(x)=\frac{x^2+1}{12}$ ۴) $F(x)=\frac{x^2+1}{12}$

۷- اگر تابع چگالی احتمال‌ها برای متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، تابع تجمعی احتمال آن (تابع توزیع کمیت تصادفی X) کدام است؟ (اقتصاد – ۷۶)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & 1\le x\le 3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

۱) $F(x)=1$ ۲) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-x-\frac{1}{4}$ ۳) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ ۴) $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

۸- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است:

$$\rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ k-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x\end{cases}$$

مقدار k چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۶)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹- تابع توزیع مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر بیان شده است:

$$F(x,y)=\frac{2x^2y+3xy^2}{78}$$

تابع چگالی مشترک دو متغیر تصادفی X و Y کدام است؟ (اقتصاد – ۷۶)

۱) $f(x,y)=\frac{4y+6xy}{78}$ ۲) $f(x,y)=\frac{2xy+3x}{78}$ ۳) $f(x,y)=\frac{4xy+3y}{78}$ ۴) $f(x,y)=\frac{2x+3y}{39}$

۱۰- تابع توزیع (توزیع تجمعی احتمال) کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$F(x)=\frac{x^2+3x}{10} \qquad 0<x<2$$

امید ریاضی کمیت تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $E(X)=0/4$ ۲) $E(X)=1$ ۳) $E(X)=1/13$ ۴) $E(X)=1/5$

۱۱- تابع چگالی احتمال برای کمیت تصادفی X به صورت:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2x+5}{k} & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بیان شده است. پارامتر k کدام است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $k=6$ ۲) $k=12$ ۳) $k=20$ ۴) $k=24$

۱۲- تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$\varphi(x)=\frac{3x^2+4x}{42} \qquad 1<x<3$$

تابع توزیع کمیت تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) $F(x)=\frac{6x+4}{42}$ ۲) $F(x)=\frac{x^3+2x^2}{42}$ ۳) $F(x)=\frac{x^3+2x^2-3}{42}$ ۴) $F(x)=\frac{x^2+2x^3}{42}$

۱۳- کمیت تصادفی X توسط تابع توزیع (تابع تجمعی احتمال):

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

بیان شده است. احتمال اینکه در ۴ آزمایش مستقل x درست ۳ بار مقادیر خود را در فاصله (۰/۷۵ و ۰/۲۵) اختیار کند، کدام است؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۱۴- تابع تجمعی احتمال (تابع توزیع) کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2+x}{6} & 0\le x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X برابر است با: (اقتصاد – ۷۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{44}{36}$ ۳) $\frac{49}{36}$ ۴) $\frac{44}{13}$

۱۵- تابع توزیع تجمعی $F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2(3-x) & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ داده شده است. نما تابع توزیع مزبور برابر است با:

(اقتصاد – ۷۹)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶- تابع چگالی X به صورت $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{a} & 1\le x\le 5 \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$ است. بر اساس آن تابع چگالی $y=2-\frac{1}{5}x$ عبارتست از: (اقتصاد – ۷۹)

۱) $f(y)=\begin{cases} \dfrac{y}{9} & 1\le y\le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$

۲) $f(y)=\begin{cases} \dfrac{12+y}{8} & 1\le y\le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$

۳) $f(y)=\begin{cases} \dfrac{y}{12} & 1\le y\le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$

۴) $f(y)=\begin{cases} \dfrac{12+5y}{4} & 1\le y\le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$

۱۷- تابع چگالی احتمال $f(x)$ که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را توصیف می‌کند، کدام ویژگی را ندارد؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) به ازای هر نقطه مانند a، $P(X=a)\neq 0$

۲) $f(x)\ge 0$ تابع چگالی مثبت یا صفر است.

۳) مساحت کل زیر منحنی چگالی برابر یک است.

۴) سطح زیر منحنی چگالی بین a و b برابر است با $P(a<x<b)$

۱۸- تابع احتمال متغیر تصادفی به صورت زیر داده شده است. مقدار k کدام است؟ (اقتصاد – ۸۰)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{k} & 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۹- تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است: (اقتصاد – ۸۱)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{12} & 0\le x\le 3 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

امید ریاضی X کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶۶ ۳) ۱/۷۳ ۴) ۱/۸۷۵

۲۰- اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت $f(x)=\begin{cases} k(1-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$ باشد، $E(X)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۱- چگالی احتمال‌های کمیت تصادفی X توسط تابع زیر بیان شده است:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{900}x & 0\le x\le 30 \\ 0 & x \ \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

احتمال اینکه متغیر تصادفی مقدار خود را در فاصله (۱۰ و ۵) اختیار کند، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) $\frac{65}{900}$ ۲) $\frac{70}{900}$ ۳) $\frac{75}{900}$ ۴) $\frac{92}{900}$

۲۲- تابع توزیع (تجمعی احتمال) متغیر تصادفی X به قرار زیر است:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{11}{25}x^2-2x & 0<x\le 5 \\ 1 & 5<x \end{cases}$$

تابع چگالی متغیر تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) $f(x)=\frac{11}{25}x-2$ ۲) $f(x)=\frac{11}{75}x^3-x^2$ ۳) $f(x)=\frac{11}{50}x+2$ ۴) $f(x)=\frac{22}{25}x-2$

۲۳- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x به صورت زیر داده شده است. احتمال $P(1\le x\le 3)$ چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۴)

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2 \\ f(x)=0 & x \ \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{8}{4}$

مجموعه حسابداری

۲۴- به ازای کدام مقدار k، تابع

$$\varphi(x)=\begin{cases} ke^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی X خواهد بود؟ (حسابداری – ۷۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۵- متغیر تصادفی X در دامنه $[0,1]$ به صورت: $\varphi(x)=f(x)=ax^2$ تعریف شده است. مقدار a برای اینکه تابع فوق یک تابع چگالی احتمال‌ها باشد، کدام است؟ (حسابداری – ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶- یک توزیع احتمالی دارای چگالی $f(x)=1$ است. اگر حد پایین توزیع ۳/۴ باشد، میانه توزیع چقدر است؟ (حسابداری – ۷۹)

۱) ۳/۷ ۲) ۳/۹ ۳) ۴ ۴) ۶/۸

۲۷- اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت: (حسابداری – ۷۹)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{جای دیگر} \\ 3x^2 & 0<x<1 \end{cases}$$

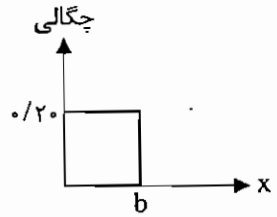
تعریف گردد، احتمال آنکه $0<x<\frac{1}{2}$ قرار گیرد، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- اگر چگالی $\left\{f(x)=\frac{1}{8} \mid -3\le x\le 5\right\}$ تعریف شده باشد، $E(X)$ کدام است؟ (حسابداری – ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۲۹- فرض کنید در شکل زیر متغیر تصادفی X بزرگ توزیع یکنواخت دارد، c را به نحوی پیدا کنید که $P(x\le c)=0/6$ باشد. (حسابداری – ۸۱)



۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۳۰- توزیع زمان منتهی به سوختن نوعی لامپ نمایی با میانگین ۳ سال است. اگر شرکت سازنده آنها را برای اولین سال استفاده بیمه کند، برای چند درصد لامپ‌ها باید خسارت بپردازد؟ (حسابداری – ۸۲)

۱) ٪۴/۹۸ ۲) ٪۲۸/۳ ۳) ٪۷۱/۷ ۴) ٪۹۵/۰۲

۳۱- در تابع چگالی زیر صدک ۸۰ چقدر است؟ (حسابداری – ۸۲)

$$\left(f(x)=\frac{1}{8}x, 0<x<4\right)$$

۱) ۲/۳۸ ۲) ۳/۲۰ ۳) ۳/۵۸ ۴) ۱۲/۸۲

۳۲- تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت $f(x)=\begin{cases} 6x(1-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$ است. $P\left(x>\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟ (حسابداری – ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

ج – مجموعه مدیریت

۳۳- متغیر تصادفی X در دامنه (۰،۱) برای $f(x)=cx^2$ تعریف شده است. مقدار c برای اینکه تابع فوق یک تابع چگالی احتمال‌ها باشد، کدام است؟ (مدیریت – ۷۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- تابع چگالی $\left\{f(x)=e^{-x} \mid x\ge 0\right\}$ تعریف شده است. امید ریاضی x کدام است؟ (مدیریت – ۷۴)

۱) e^{-1} ۲) -1 ۳) e ۴) ۱

۳۵- اگر $f(x)=\frac{1}{16}x$ در دامنه (۰،۲) تعریف شده باشد تابع توزیع تراکمی آن برابر است با: (سراسری ۷۵)

۱) $\frac{1}{16}x$ ۲) $\frac{1}{32}x$ ۳) $\frac{1}{32}x^2-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}$

۳۶- تابع چگالی $\{f(x)=kx^2 \mid 0\le x\le 3\}$ تعریف شده است مقدار k را پیدا کنید ؟(سراسری ۷۶)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{27}$

۳۷- تابع $f(x)=kx$ در دامنه (۶ و ۲) تعریف شده است. مقدار k را به گونه ای بیابید که تابع مورد نظر یک تابع چگالی احتمال (تابع احتمال) باشد؟(سراسری ۷۷)

۱) $1/32$ ۲) $1/16$ ۳) $2/15$ ۴) $2/13$

۳۸- میانگین متغیر تصادفی x با این تابع چگالی چقدر است؟(سراسری ۷۸) $\{f(x)=\frac{2}{3} \mid -1\le x\le \frac{1}{2}\}$

۱) $-3/4$ ۲) $-1/4$ ۳) $1/4$ ۴) $3/4$

۳۹- اگر $\{f(x)=0/20 \mid 0\le x\le b\}$ باشد مقدار c را چنان پیدا کنید که $P(x\le C)=0/6$ باشد؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰- متغیر تصادفی X با تابع $\{f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k \mid 0\le x\le 1\}$ تعریف شده است.مقدار k چقدر است؟(سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱- تابع احتمال چگالی x به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{c^2} & 0\le x\le c\\ 0\end{cases}$ است. C چه مقدار باشد تا اینکه $\sigma_x^2=2$ گردد (مدیریت ۸۱)

۱) $c=2$ ۲) $c=4$ ۳) $c=6$ ۴) $c=9$

۴۲- برای $\{f(x)=e^{-x} \mid x\ge 0\}$ احتمال اینکه X مقداری بین ۱ تا ۳ را بگیرد چقدر است؟(سراسری ۸۳)

۱) ۰/۱۳۵۳ ۲) ۰/۲۳۲۵ ۳) ۰/۳۱۸۱ ۴) ۰/۴۶۵۰

۴۳- واریانس متغیر تصادفی x با چگالی $\{f(x)=\frac{2}{3} \mid -1<x<\frac{1}{2}\}$ کدام است؟(۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۴۴- اگر $f(y)=3y^2$ برای $0\le y\le 2$ و در بقیه نقاط $f(y)=0$ باشد، برای مقادیری از $f(y)$ که در آن تابع چگالی معنی‌دار و معتبر باشد مقدار C کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{8}{3}$

۴۵- تابع چگالی مربوط به طول عمر یک قطعه الکترونیکی به صورت زیر می‌باشد، میانگین طول عمر این قطعه چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2} & x>10\\ 0 & x\le 10\end{cases}$$

۱) ∞ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲۰

۴۶- اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}(4x-x^2) & 1<x<4\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$ باشد، $P(x>2)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت – ۸۵)

۱) $\frac{16}{27}$ ۲) $\frac{14}{27}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(X)=\int_0^1 x.f(x)dx=\int_0^1 12x^2(1-x)dx=\int_0^1\left(12x^3-12x^4\right)dx=3x^4-\frac{12}{5}x^5\Big]_0^1=\frac{3}{5}-0=0/6$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x)=F'(x)=-\frac{3x^2}{9}+2x=0$$

$$f'(x)=-\frac{6x}{9}+2=0\Rightarrow x=3=mo$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=\varphi(x)=\frac{2x+3}{18}\qquad 0<x<3$$

$$F_X(x)=\int_0^x\varphi(x)dx=\int_0^x\frac{2x+3}{18}dx=\frac{x^2+3x}{18}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

چون متغیر تصادفی (طول عمر لامپ) پیوسته است و همانطور که گفته شد در متغیر تصادفی پیوسته احتمال اینکه مقدار برابر با یک عدد ثابت باشد، صفر است. یعنی: $P(X=80)=0$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$y=f(x)=-x\Rightarrow x=g(y)=-y$$

$$F(y)=\varphi(g(y))\times|g'(y)|\Rightarrow F(y)=\frac{y^2}{63}\times|-1|$$

$$\Rightarrow F(y)=\frac{y^2}{63}\quad -6<y<-3$$

۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{12} & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$F(x)=P(X<x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{2x+1}{12}dx=\frac{x^2+x}{12}$$

۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & 1\le x\le 3\\ 0 & \text{سایر مقادیر } x\end{cases}$$

$$F(x)=P(X<x)=\int_1^x f(x)dx=\int_1^x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\Big]_1^x=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

۸- گزینه ۳ صحیح است.

$f(x)$ یا $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۱} xdx + \int_{۱}^{۲}(k-x)dx = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}\Big]_{۰}^{۱} + \left(kx - \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\Big]_{۱}^{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} + \left(۲k - ۲ - k + \frac{۱}{۲}\right) = ۱$$

$$k - ۱ = ۱ \Rightarrow k = ۲$$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

برای محاسبه تابع چگالی مشترک X و Y، از تابع توزیع مشترک آنها ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$f(x,y) = \frac{d^{۲}F(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{۲x^{۲} + ۶xy}{۷۸}\right) = \frac{۴x + ۶y}{۷۸} = \frac{۲x + ۳y}{۳۹}$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = F'(x) = \frac{۲x + ۳}{۱۰} \qquad ۰ < x < ۲$$

$$E(X) = \int_{۰}^{۲} xf(x)dx = \int_{۰}^{۲} \frac{۲x^{۲} + ۳x}{۱۰}dx = \frac{\frac{۲}{۳}x^{۲} + \frac{۳}{۲}x^{۲}}{۱۰}\Bigg]_{۰}^{۲} = ۱/۱۳$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۳} \frac{۲x + ۵}{k}dx = ۱ \Rightarrow \frac{x^{۲} + ۵x}{k}\Bigg]_{۰}^{۳} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴}{k} = ۱ \Rightarrow k = ۲۴$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$F(x) = P(X < x) = \int_{۱}^{x} \frac{۳x^{۲} + ۴x}{۴۲}dx = \frac{x^{۳} + ۲x^{۲}}{۴۲}\Bigg]_{۱}^{x} = \frac{x^{۳} + ۲x^{۲}}{۴۲} - \frac{۳}{۴۲} = \frac{x^{۳} + ۲x^{۲} - ۳}{۴۲}$$

۱۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(۰/۲۵ < x < ۰/۷۵) = F(۰/۷۵) - F(۰/۲۵) = (۰/۷۵)^{۲} - (۰/۲۵)^{۲} = ۰/۵$$

$$\Rightarrow p = ۰/۵ \Rightarrow q = ۰/۵$$

$$f_x(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \Rightarrow f(۳) = \binom{۴}{۳}(۰/۵)^{۳}(۰/۵) = ۰/۲۵$$

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) = F'(x) = \frac{۲x + ۱}{۶} \qquad ۰ \le x \le ۲$$

$$E(X) = \int_{۰}^{۲} xf(x)dx = \int_{۰}^{۲} \frac{۲x^{۲} + x}{۶}dx = \frac{\frac{۲}{۳}x^{۳} + \frac{۱}{۲}x^{۲}}{۶}\Bigg]_{۰}^{۲} = \frac{۲۲}{۱۸} = \frac{۴۴}{۳۶}$$

۱۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = mo$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{۶x - ۳x^{۲}}{۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۶ - ۶x}{۲} = ۰ \Rightarrow x = mo = ۱$$

۱۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۱}^{۵} \frac{x+۲}{a}dx = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a}\left(\frac{x^۲}{۲}+۲x\right)\Bigg]_{۱}^{۵} = ۱$$

$$\frac{۲۰}{a} = ۱ \Rightarrow a = ۲۰ \Rightarrow f(x) = \frac{x+۲}{۲۰}$$

$$x = g(y) = ۱۰ - ۵y$$

$$f(y) = f(g(y)) \times |g'(y)| = \frac{۱۰-۵y+۲}{۲۰} \times ۵ = \frac{۱۲-۵y}{۴}$$

۱۷- گزینه ۱ صحیح است.

۱۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۴} \frac{x}{k}dx = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲k}\Bigg]_{۰}^{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{k} = ۱ \Rightarrow k = ۸$$

۱۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{۳} \frac{۲x^۲+x}{۱۲}dx = \frac{\frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲}{۱۲}\Bigg]_{۰}^{۳}$$

$$E(X) = \frac{۴۵}{۲۴} = ۱/۸۷۵$$

۲۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{۱} kx(۱-x)dx = \frac{k}{۲}x^۲ - \frac{k}{۳}x^۳\Bigg]_{۰}^{۱} = \frac{k}{۶}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۱} (k-kx)dx = ۱ \Rightarrow kx - \frac{k}{۲}x^۲\Bigg]_{۰}^{۱} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۲} = ۱ \Rightarrow k = ۲$$

$$E(X) = \frac{k}{۶} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(۵ < x < ۱۰) = \int_{۵}^{۱۰} \frac{۲}{۹۰۰}xdx = \frac{x^۲}{۹۰۰}\Bigg]_{۵}^{۱۰} = \frac{۱}{۹} - \frac{۲۵}{۹۰۰} = \frac{۷۵}{۹۰۰}$$

۲۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = F'(x) = \frac{۲۲}{۲۵}x - ۲$$

۲۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(۱ \le x \le ۳) = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{۲}xdx + \int_{۲}^{۳} ۰dx = \frac{۱}{۴}x^۲\Bigg]_{۱}^{۲} = \frac{۳}{۴}$$

مجموعه حسابداری

۲۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{۰}^{+\infty} ke^{-x}dx = ۱ \Rightarrow -ke^{-x}\Big]_{۰}^{+\infty} = ۱ \Rightarrow k = ۱$$

۲۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 ax^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{a}{3}x^3\Big]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \quad \Rightarrow a = 3$$

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = md \Rightarrow \int_{3/4}^{x} 1dx = \frac{1}{2} \Rightarrow x\Big]_{3/4}^{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x - 3/4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = md = 3/9$$

۲۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$P\left(0 < x < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = x^3\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

۲۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)f(x)dx = \int_{-3}^{5} \frac{1}{8}xdx = \frac{1}{16}x^2\Big]_{-3}^{5}$$

$$= \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

در توزیع یکنواخت داریم:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \Rightarrow 0/2 = \frac{1}{b-0} \Rightarrow b = \frac{1}{0/2} = 5$$

$$P(X \le c) = 0/6 \Rightarrow \int_0^c \frac{1}{5}dx = 0/6 \Rightarrow \frac{1}{5}x\Big]_0^c = 0/6 \Rightarrow \frac{1}{5}c = 0/6$$

$$c = \frac{0/6}{\frac{1}{5}} \Rightarrow c = 3$$

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

در توزیع نمایی داریم:

$$E(X) = 3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$P(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 1 - (2/718)^{-\frac{1}{3}} = 0/283 = \%28/3$$

۳۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$F(x) = 0/80 \Rightarrow x = P_{80} \text{ (صدک ۸۰)}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{8}xdx = \frac{1}{16}x^2\Big]_0^x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^2 = 0/80$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{0/80}{\frac{1}{16}} \Rightarrow x^2 = 12/8 \Rightarrow x = 3/58$$

۳۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1-x)dx = 3x^2 - 2x^3\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

مجموعه مدیریت

۳۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{1} cx^{2}dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{3}x^{3}\Big]_{0}^{1} = 1 \Rightarrow \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$$

۳۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = -e^{-x}\Big]_{0}^{+\infty} = 0 + 1 = +1$$

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow P(X \le x) = \int_{2}^{x} \frac{1}{16}xdx = \frac{1}{32}x^{2}\Big]_{2}^{x} = \frac{1}{32}x_{2} - \frac{1}{8}$$

۳۵-گزینه ۳ صحیح است.

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow P(X \le x) = \int_{2}^{x} \frac{1}{16}xdx = \frac{1}{32}x^{2}\Big]_{2}^{x} = \frac{1}{32}x^{2} - \frac{1}{8}$$

۳۶-گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{ویژگیهای تابع چگالی}\begin{cases} f(x) > 0 \qquad kx^{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \\ \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} kx^{2}dx = \int_{0}^{3} kx^{2}dx = \frac{k}{3}x^{3}\Big]_{0}^{3} = = 9k - 0 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9} \end{cases}$$

۳۷-گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{ویژگی تابع چگالی} = \begin{cases} f(x) > 0 \quad kx > 0 \Rightarrow k > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{2}^{6} kxdx = \frac{k}{2}x^{2}\Big]_{2}^{6} = 18k - 2k = 1 \Rightarrow 16k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16} \end{cases}$$

۳۸- گزینه ۲ صحیح است.

میانگین در واقع همان امید ریاضی است بنابراین:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \Rightarrow E(x) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}xdx = \frac{1}{3}x^{2}\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1-4}{12} = \frac{-1}{4}$$

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(x \le C) = \int_{-\infty}^{C} f_{(x)}d_{(x)} = \int_{0}^{C} 0/2dx = 0/2\Big]_{0}^{C} = 0/2C = 0/6 \Rightarrow C = 3$$

۴۰-گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1 \Rightarrow \int_{0}^{1}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k\right)dx = \int_{0}^{1}\frac{2}{3}xdx - \int_{0}^{1}\frac{1}{3}kdx = \frac{1}{3}x^{2} + \frac{1}{3}kx\Big]_{0}^{1} =$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k\right) - 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}k = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}k = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 2$$

۴۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \Rightarrow E(x) = \int_{0}^{C} \frac{2x^{2}}{c^{2}}dx = \frac{2}{3c^{2}}x^{3}\Big]_{0}^{C} = \frac{2c^{3}}{3c^{2}} = \frac{2}{3}c$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^{2} f(x) \qquad V(x) = \int_{0}^{C}\left(x - \frac{2}{3}c\right)^{2}\frac{2x}{c^{2}}dx$$

$$= \int_{0}^{C} \frac{2x^{3}}{c^{2}}dx - \int_{0}^{C} \frac{8x^{2}}{3c^{2}}dx + \int_{0}^{C} \frac{8x}{9}dx \Rightarrow V(x) = \left(\frac{x^{4}}{2c^{2}} - \frac{8x^{3}}{9c} + \frac{4x^{2}}{9}\right)\Big]_{0}^{c}$$

$$=\frac{c^{۲}}{۲}-\frac{۸c^{۲}}{۹}+\frac{۴c^{۲}}{۹}=\frac{۱}{۱۸}c^{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱۸}c^{۲}\Rightarrow ۲\Rightarrow c^{۲}=۳۶\Rightarrow c=۶$$

۴۲-گزینه ۳ صحیح است.

$$F(۱\le X\le ۳)=\int_{۱}^{۳}f(x)d_x=\int_{۱}^{۳}e^{-x}d_x=-e^{-x}\Big]_{۱}^{۳}=-e^{-۳}-(-e^{-۱})=e^{-۱}-e^{-۳}\approx ۰/۳۱۸$$

۴۳-گزینه ۲ صحیح است.

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\Rightarrow E(x)=\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۲}{۳}xdx=\frac{۱}{۳}x^{۲}\Big]_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۳}=-\frac{۳}{۱۲}=-\frac{۱}{۴}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(x))^{۲}f(x)dx\Rightarrow V(x)=\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}\left(x+\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\frac{۲}{۳}dx=\int\left(\frac{۲}{۳}x^{۲}+\frac{۱}{۲۴}+\frac{x}{۳}\right)dx\Rightarrow$$

$$V(x)=\frac{۲}{۹}x^{۳}+\frac{۱}{۲۴}x+\frac{x^{۲}}{۶}\Big]_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{۱}{۲۶}+\frac{۱}{۴۸}+\frac{۱}{۲۴}\right)-\left(\frac{-۲}{۹}-\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۳}{۱۶}$$

۴۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$f(y)=\begin{cases}۳y^{۲} & ۰\le y\le ۲\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

در هر تابع چگالی پیوسته انتگرال روی کل ناحیه (سطح زیر منحنی) برابر است.

$$\int_{۰}^{۲}۳y^{۲}dy=۱\rightarrow\left[\frac{۳y^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۲}=۱\rightarrow\frac{۸C}{۳}=۱\Rightarrow C=\frac{۳}{۸}$$

۴۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(x)=\int_{۱۰}^{\infty}xf(x)dx=\int_{۱۰}^{\infty}x\frac{۱}{x^{۲}}dx=[۱۰Lnx]_{۱۰}^{\infty}=\infty$$

۴۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(x>۲)\int_{۲}^{۴}\frac{۱}{۹}\left(۴x-x^{۲}\right)dx=\frac{۱}{۹}\left[\frac{۴x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{۲}^{۴}=\frac{۱}{۹}\times\frac{۱۶}{۳}=\frac{۱۶}{۲۷}$$

فصل پنجم

توزیع نرمال

مهمترین توزیع پیوسته، توزیع نرمال می‌باشد واین اهمیت به‌این دلیل است که اولاً بیشتر پدیده‌های طبیعی دارای توزیع نرمال می‌باشند و ثانیاًاینکه بسیاری از توزیع‌های غیر نرمال را نیز می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد که‌این موضوع را دراینده بررسی خواهیم کرد.

توزیع نرمال را چنین تعریف می‌کنیم:

متغیر تصادفی پیوسته X با میانگین μ و انحراف معیار σ دارای توزیع نرمال است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$\varphi_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

توزیع نرمال متغیر تصادفی X را به صورت $X\sim N(\mu,\sigma)$ نمایش می‌دهند که در آن σ انحراف معیار و μ میانگین توزیع می‌باشد. در واقع μ و σ^2 پارامترهای اصلی توزیع نرمال می‌باشند.

نکته: امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع نرمال از طریق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$E(X)=\mu$$

$$Var(X)=\sigma^2$$

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

۲- خواص توزیع نرمال

۱) توزیع نرمال نسبت به میانگین (خط $x=\mu$) دارای تقارن است.

۲) در توزیع نرمال، پارامترهای مرکزی با هم برابرند یعنی: $\mu=md=mo$

۳) مساحت زیر منحنی توزیع نرمال برابر یک است و در واقع مساحت هر طرف خط $x=\mu$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

۴) ماکزیمم مقدار منحنی توزیع نرمال به ازای $x=\mu$ به دست می‌آید و برابر است با: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

۵) شکل توزیع با تغییر مقدار μ تغییر نمی‌کند ولی تغییر σ^2 باعث تغییر شکل توزیع می‌شود.

۶) خط $X=M$ محور تقارن منحنی بوده (با توجه به برابری $\mu d=\mu$) در نتیجه:

$$P(x\le M)=P(x\ge M)=\frac{1}{2}$$

۷) در توزیع نرمال اندازه احتمال برای ۳ انحراف معیار حول میانگین به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

احتمال در فاصله ۱ انحراف معیار (σ) حول میانگین $P(M-\sigma\le x\le M+\sigma)=0/683\sim 0/68$

احتمال در فاصله ۲ انحراف معیار (2σ) حول میانگین $P(M-2\sigma\le x\le M+2\sigma)=0/9544\sim 0/95$

احتمال در فاصله ۳ انحراف معیار (3σ) حول میانگین $P(M-3\sigma\le x\le M+3\sigma)=0/997$

مثال: توزیع نمرات دانشجویان یک کلاس نرمال بوده و میانگین و واریانس آن به ترتیب ۱۴ و ۴ می‌باشد. اگر یکی از دانشجویان را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال‌اینکه نمره‌ی او بیش از ۱۴ باشد چقدر است؟

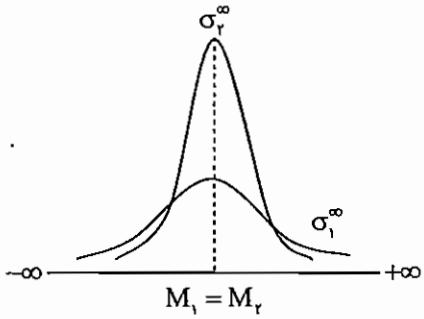
چون میانگین، خط تقارن توزیع نرمال است پس احتمال‌اینکه نمره‌ی دانشجوی انتخاب شده بیش از میانگین باشد برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

$$p(X > \mu) = \frac{۱}{۲}$$

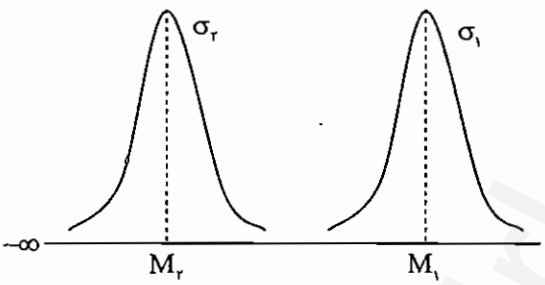
تأثیرات μ و $\delta^۲$ روی منحنی نرمال

در صورتیکه دو منحنی نرمال به فرم $N(\mu_۱, \sigma_۱^۲)$ و $N(\mu_۲, \sigma_۲^۲)$ را در نظر بگیریم.

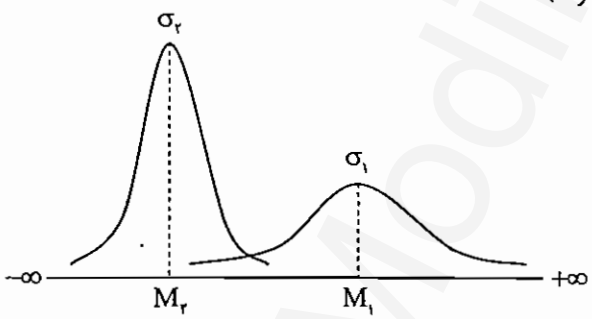
الف) $\sigma_۱ > \sigma_۲ , \mu_۱ = \mu_۲$ (میانگین‌ها برابر و انحراف معیارها متفاوت)



ب) $\sigma_۱ = \sigma_۲ , \mu_۱ > \mu_۲$ (میانگین‌ها متفاوت و انحراف معیارها برابر)



ج) $\sigma_۱ > \sigma_۲ , \mu_۱ > \mu_۲$ (میانگین‌ها متفاوت و انحراف معیارها متفاوت)



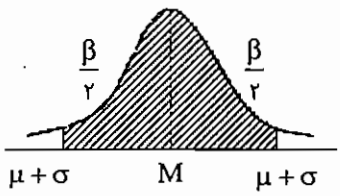
نتیجه‌گیری

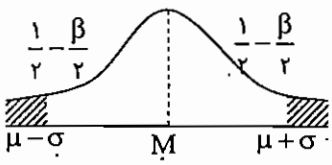
۱) افزایش میانگین منحنی را به سمت راست انتقال می‌دهد.

۲) افزایش انحراف معیار، ارتفاع منحنی را کوتاه‌تر می‌کند.

نکته: به ازاء هر نقطه α در صورتیکه $P(\mu - \alpha \le x \le \mu + \alpha) = \beta$ باشد به علت تقارن منحنی نسبت به خط $x = \mu$ خواهیم داشت:

$$P(\mu - \alpha \le x \le \mu) = P(\mu \le x \le \mu + \alpha) = \frac{\beta}{۲}$$

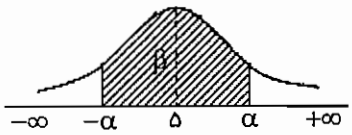




$$P(x \le \mu - \alpha) = P(x \ge \mu + \alpha) = \frac{۱}{۲} - \frac{\beta}{۲}$$

نکته: هرگاه x دارای توزیع نرمال $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد، هر ترکیب خطی از آن به صورت $y = bx + a$ باز هم نرمال خواهد بود. دراین حالت کافی است امید و واریانس y را محاسبه کنیم.

نکته: در صورتیکه $z \sim N(0,1)$ باشد، به علت تقارن منحنی نسبت به $z = 0$، روابط زیر با توجه به شکل زیر برقرار هستند.



$$P(-\alpha < z < \alpha) = \beta \rightarrow \begin{cases} P(-\alpha < z < 0) = P(0 < z < \alpha) = \frac{\beta}{2} \\ P(z < -\alpha) = P(z > \alpha) = \frac{1-\beta}{2} \\ P(z > -\alpha) = P(z < \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

۳- توزیع نرمال استاندارد

برای تبدیل توزیع نرمال به توزیع نرمال استاندارد، متغیر تصادفی Z را به صورت $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت تابع چگالی متغیر تصادفی Z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نکته: هر توزیع نرمال به فرم $z \sim N(0,1)$ با میانگین ۰ و واریانس ۱ نرمال استاندارد گفته می‌شود. $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$

که‌این توزیع را توزیع نرمال استاندارد می‌گویند.

نکته: در توزیع نرمال استاندارد، متغیر تصادفی Z دارای امید ریاضی (میانگین) صفر و واریانس یک می‌باشد و آن را به‌این صورت نمایش می‌دهند:

نکته: جدول توزیع نرمال استاندارد در اکثر کتب آمار موجود است که دراین جدول در واقع احتمال تجمعی متغیر تصادفی Z نمایش داده و تعیین شده است. دراین جدول، مقادیر به ازای $P(Z \le Z)$ تعیین شده است، به همین دلیل در صورتیکه بخواهیم احتمال سایر مقادیر را محاسبه کنیم می‌بایست آن ها را به صورت زیر تبدیل کنیم:

الف) $p(Z \ge z) = 1 - p(Z \le z)$

ب) $p(z_1 \le Z \le z_2) = p(Z \le z_2) - p(Z \le z_1)$

مثال: در یک کارخانه نوشابه‌سازی که میانگین وزن نوشابه ها ۴۰۰ گرم با انحراف معیار ۱۰ گرم می‌باشد، احتمال اینکه وزن شیشه نوشابه بین ۳۹۸/۵ تا ۴۰۲ گرم باشد چقدر است؟

$$p(398/5 \le x \le 402) = p(x \le 402) - p(x \le 398/5)$$

$$= p(z \le \frac{402-400}{10}) - p(z \le \frac{398/5-400}{10}) = p(z \le 0/2) - p(z \le -0/15)$$

$$= 0/5793 - 0/4404 = 0/1289$$

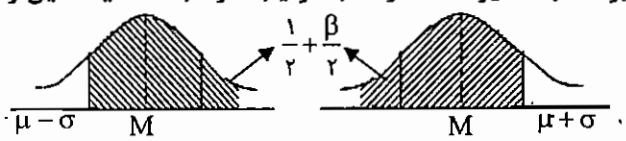
نکته: در بعضی مواقع، می‌خواهیم بدانیم چه مقدار از متغیر تصادفی با احتمال مشخص در یک فاصله قرار می‌گیرد، به عبارت دیگر احتمال را می‌دانیم و فاصله‌ای که می‌بایست متغیر تصادفی در آن قرار بگیرد را تعیین می‌کنیم. دراین حالت با توجه به احتمال، مقدار z یا فاصله‌ای که z در آن قرار دارد را بدست آورده و سپس با استفاده از رابطه‌ی $X = \mu + \sigma.z$ مقدار X را بدست می‌آوریم.

مثال: اگر بدانیم در یک بانک متوسط مدت زمانی که برای کار هر مشتری نیاز است، ۱۲۵ ثانیه با انحراف معیار ۱۰ ثانیه است، تعیین کنید کار ۹۰ درصد مشتریان کمتر از چه زمانی طول می‌کشد؟

$\mu = 125 \quad , \quad \sigma = 10$

$p(z \le z) = 0/90 \Rightarrow Z = 1/283 \Rightarrow X = \mu + \sigma z \Rightarrow x = 125 + 10 \times 1/283 = 137/83$ (ثانیه)

مثال: سن بازیکنان یک تیم فوتبال از توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ پیروی می‌کند. اگر سن دو نفر از بازیکنان‌این تیم ۲۶ و ۳۰ باشد و سن‌این دو بازیکن برحسب متغیر استاندارد z به ترتیب ۰ و ۱ باشد، میانگین و انحراف معیار جامعه را محاسبه نمایید؟



$$P(x \ge \mu - \alpha) = P(x \le \mu + \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow \quad ۰=\frac{۲۶-\mu}{\sigma}\Rightarrow \mu=۲۶$$

$$z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow \quad ۱=\frac{۳۰-\mu}{\sigma}\Rightarrow ۳۰-\mu=\sigma\Rightarrow \sigma=۳۰-۲۶\Rightarrow \sigma=۴$$

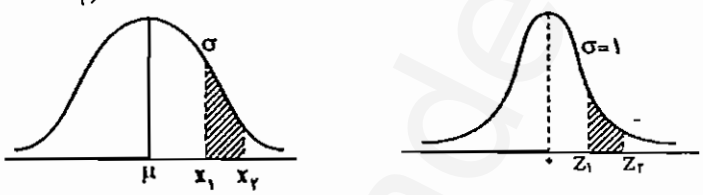
٤- محاسبه سطح زیر منحنی نرمال

در توزیع نرمال نیز همانند سایر توزیع‌های پیوسته، احتمال‌اینکه متغیر تصادفی X کمیتی بین $x_۲, x_۱$ را اختیار کند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(x_۱<X<x_۲)=\int_{x_۱}^{x_۲}\varphi(x)dx=\int_{x_۱}^{x_۲}\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

محاسبه انتگرال فوق مشکل و وقت‌گیر است. برای حل‌این مشکل ابتدا داده‌ها را استاندارد کرده و سطح زیر منحنی استاندارد را طبق جدول نرمال استاندارد محاسبه می‌نماییم.

$$p(x_۱<x<x_۲)=p(z_۱<z<z_۲)$$



مثال: توزیع نرمالی با میانگین ۱۵۰ و واریانس ۸۱ را در نظر بگیرید و مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف) $p(x>۱۳۰)$، ب) $p(۱۴۰<x<۱۸۰)$

الف)

$$p(x>۱۳۰)=p(z>\frac{۱۳۰-۱۵۰}{۹})=p(z>-۲/۲)=۱-p(z<-۲/۲۲)$$
$$=۱-۰/۰۱۳۲=۰/۹۸۶۸$$

ب)

$$p(۱۴۰<x<۱۸۰)=p\left(\frac{۱۴۰-۱۵۰}{۹}<z<\frac{۱۸۰-۱۵۰}{۹}\right)=p(-۱/۱۱<z<۳/۳۳)$$
$$=p(z<۳/۳۳)-p(z<-۱/۱۱)=۰/۹۹۹۵۷-۰/۱۳۳۵=۰/۸۶۶۰۷$$

٥- تقریب توزیع دوجمله‌ای توسط توزیع نرمال

اگر X یک متغیر تصادفی دارای توزیع دوجمله‌ای با میانگین $\mu=np$ و واریانس $\sigma^۲=npq$ باشد، زمانیکه n به سمت بی‌نهایت میل کند و احتمال موفقیت (P) نزدیک صفر یا یک باشد، دراین صورت می‌توان با تقریب مناسبی از توزیع نرمال استفاده کرد. بطور کلی می‌توان گفت که اگر np و nq هر دو بزرگتر از ۵ باشند، تقریب نرمال، تقریب خوبی خواهد بود و در مواردی که p به ۰/۵ نزدیک شود، تقریب نرمال حتی برای nهای کوچک نیز خوب است.

نکته مهم: اگر بخواهیم بوسیله توزیع نرمال، میزان توزیع دو جمله‌ای را تقریب بزنیم، پارامترهای تقریب نرمال عبارتند از:

$$\mu=np \quad , \quad \sigma=\sqrt{npq}$$

و توزیع دوجمله‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$X\sim N(np,\sqrt{npq})$$

نکته مهم: همانطور که گفته شد در توابع چگالی و توزیع‌های پیوسته مانند توزیع نرمال، احتمال وجود یک مقدار خاص $p(X=x)$ برابر صفر است. به همین دلیل برای استفاده از توزیع نرمال در تقریب توزیع دو جمله‌ای از تصحیح پیوستگی توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنند. در جدول زیر، کلیه حالات استفاده از تصحیح پیوستگی آمده است:

تابع احتمال (در توزیع نرمال)	تابع احتمال (در توزیع دو جمله‌ای)
$p(x-۰/۵ \le X \le x+۰/۵)$	$p(X=x)$
$p(X \le x+۰/۵)$	$p(X \le x)$
$p(X \le x-۰/۵)$	$p(X < x)$
$p(X \ge x-۰/۵)$	$p(X \ge x)$
$p(X \ge x+۰/۵)$	$p(X > x)$
$p(x-۰/۵ \le X \le x+۰/۵)$	$p(x_۱ \le X \le x_۲)$
$p(x+۰/۵ \le X \le x-۰/۵)$	$p(x_۱ < X < x_۲)$

مثال: متغیر تصادفی X که دارای توزیع دو جمله‌ای با $n=۳۰$, $p=۰/۳$ است را در نظر بگیرید، احتمال‌اینکه متغیر تصادفی X مقدار بیشتر از ۱۰ داشته باشد، چقدر است؟

$np=۹>۵$, $nq=۲۱>۵$ می‌باشد، پس توزیع نرمال تقریب مناسبی برای توزیع دو جمله‌ای خواهد بود.

$$\mu = np = ۳۰(۰/۳) = ۹$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{۳۰(۰/۳)(۰/۷)} = \sqrt{۶/۳} \simeq ۲/۵$$

$$p(X>۱۰) \xrightarrow{\text{تصحیح پیوستگی}} p(X \ge ۱۰/۵) = ۱-p(X \le ۱۰/۵) = ۱-p\left(z \le \frac{۱۰/۵-۹}{۲/۵}\right)$$

$$= ۱-p(z \le ۰/۶) = ۱-۰/۷۲۵۷ = ۰/۲۷۴۳$$

۶- تقریب توزیع پواسون توسط توزیع نرمال

در توزیع پواسون نیز اگر λ به اندازه‌ی کافی بزرگ شود، توزیع پواسون به توزیع نرمال نزدیک شده و توزیع نرمال تقریب خوبی از توزیع پواسون خواهد بود. بطور کلی اگر $\lambda \ge ۱۰$ باشد توزیع نرمال، تقریب خوبی برای پواسون خواهد بود که دراین صورت خواهیم داشت:

$$X \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

نکته مهم: برای محاسبه توزیع پواسون توسط توزیع نرمال نیز می‌بایست از تصحیح‌های پیوستگی همانند توزیع دو جمله‌ای استفاده کرد.

مثال: تعداد تلفن‌هایی که به پلیس ۱۱۰ زده می‌شود، از توزیع پواسون تبعیت می‌کند و برابر با ۲۵ تلفن در دقیقه می‌باشد. احتمال‌اینکه در یک دقیقه کمتر از ۱۸ تلفن به مرکز ۱۱۰ زده شود، چقدر است؟

چون $\lambda = ۲۵ > ۱۰$ می‌باشد، پس توزیع نرمال تقریب خوبی برای توزیع پواسون خواهد بود.

$$p(X<۱۸) \xrightarrow{\text{تصحیح پیوستگی}} p(X \le ۱۷/۵) = p\left(z \le \frac{۱۷/۵-۲۵}{۵}\right) = p(z \le -۲/۵) = ۰/۰۶۶۸$$

$$\lambda = \mu = ۲۵ \quad , \quad \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۷- قضیه حد مرکزی

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$, n متغیر تصادفی مستقل باشند، مشروط به آنکه n به اندازه کافی بزرگ باشد، دراین صورت متغیر تصادفی Y که $Y = X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ است، دارای توزیع نرمالی با پارامترهای زیر خواهد بود:

$$\mu_Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \quad , \quad \sigma_Y^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \sigma_{X_i}^۲$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- n کمیت تصادفی $x_1, x_2, ..., x_n$ مستقل از هم بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی $\mu = ۱۰۰$ و واریانس $\sigma^2 = ۳۶$ توزیع شده‌اند. امید ریاضی میانگین n کمیت تصادفی کدام است؟ (اقتصاد - ۷۱)

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰

۲-تابع مولد گشتاورهای کمیت تصادفی x به صورت زیر بدست آمده است:

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

تابع چگالی احتمال‌های کمیت تصادفی x کدام است؟ (اقتصاد - ۷۲)

۱) توزیع نمایی ۲) توزیع پوآسون ۳)توزیع گاما ۴) توزیع نرمال

۳- تابع مولد گشتاورها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر بدست آمده است:

$$M_x(t) = e^{۲۰t + ۵۰t^2}$$

ضریب تغییرات کمیت تصادفیّ x کدام است؟ (اقتصاد - ۷۲)

۱) ٪۲۰۰ ۲) ٪۲۰ ۳) ٪۵۰ ۴) ٪۱۰

۴- احتمال‌اینکه یک واحد محصول تولید شده توسط یک دستگاه اتوماتیک ناقص باشد، ۰/۱ است. از بین محصولات تولید شده $n = ۴۰۰$ واحد را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال‌اینکه ۶۵ واحد از محصولات ناقص باشد، چقدر است؟ (اقتصاد - ۷۴)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

۵- متغیر تصادفی x بر طبق قانون نرمال با $\mu = ۲۰$, $\sigma^2 = ۲۵$ توزیع شده است. احتمال‌اینکه کمیت تصادفی x مقادیری بیش از ۱۰ اختیار کند، چقدر است؟ (با فرض‌اینکه $F_x(-۲) = ۰/۰۲۲۸$ باشد) (اقتصاد - ۷۵)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۳۴۱۳ ۳) ۰/۶۵۸۷ ۴) ۰/۹۷۷۲

۶- معمولاً ۱۰٪ تولیدات کارخانه آلفا معیوب است. فروشگاهی ۱۰۰ عدد ازاین کالاها را خریداری می‌کند. احتمال‌اینکه حداکثر ۱۳ عدد معیوب باشد، تقریباً برابر است با: (اقتصاد - ۷۶)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۹۹

۷- وزن خالص قوطی‌های روغن کارخانه‌ای بر روی قوطی ۵۰۰ گرم نوشته شده است. در واقع وزن قوطی‌های روغن دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰۹/۸ گرم و انحراف معیار ۵ گرم است. چه نسبتی از قوطی ها کمتر از ۵۰۰ گرم وزن دارند؟ (اقتصاد - ۷۶)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۲۲۸ ۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۰۵

۸- احتمال‌اینکه محصول تولید شده توسط یک دستگاه اتومات استاندارد باشد، ۰/۸ است. از محصولات تولید شده با روش جای گذاری تعداد ۱۰۰ محصول را بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال تقریب‌اینکه تعداد محصولات استاندارد بیش از ۸۸ محصول باشد، چقدر است؟ (اقتصاد - ۷۷)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۹۷ ۴) ۰/۹۹

۹- اگر کمیت تصادفی x بر طبق قانون نرمال توزیع شده باشد، دراین صورت: (اقتصاد-۷۷)

۱) ٪۴۱۷ مشاهدات بین ۲ تا ۳ انحراف معیار بالای میانگین قرار دارند.

۲) ٪۵ از مشاهدات در ورای ۲ انحراف معیار بالای میانگین قرار دارند.

۳) ٪۲۰ از مشاهدات در فاصله بیشتر از یک انحراف معیار و کمتر از ۲ انحراف معیار در بالای میانگین‌اند.

۴) کمتر از ٪۱ مشاهدات در ورای ۳ انحراف معیار بالای میانگین قرار دارند.

۱۰- کمیت تصادفی x بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی ۲۰۰ و انحراف معیار ۵ توزیع شده است، قانون توزیع (تابع احتمال) کمیت تصادفی Y که بر طبق رابطهٔ $y = 2x + 10$ از کمیت x تبعیت کند، کدام است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $\varphi(Y) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-410)^2}{200}}$

۲) $\varphi(Y) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-410)^2}{100}}$

۳) $\varphi(Y) = \frac{1}{10\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(y-410)^2}{200}}$

۴) $\varphi(Y) = \frac{1}{5\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(y-410)^2}{200}}$

۱۱- احتمال‌اینکه لامپ تولید شده استاندارد باشد، ۰/۹ است. تعداد ۱۶۰۰ لامپ خریداری شده است، احتمال‌اینکه بیش از ۱۴۰۰ لامپ استاندارد باشد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰

۱۲- اگر متغیر z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، $P(2z \geq 0)$ چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) صفر

۱۳- با توجه به پارامترهای داده شده، احتمال مربوط به کدامیک از توزیع‌های دو جمله‌ای زیر را می‌توان با دقت بیشتر به صورت تقریب از توزیع نرمال بدست آورد؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) $n = 100 , P = 0/4$ ۲) $n = 1000 , P = 0/3$ ۳) $n = 5 , P = 0/9$ ۴) $n = 10 , P = 0/5$

۱۴- در یک توزیع نرمال با میانگین $\mu = 10$ و واریانس $\sigma^2 = 9$، احتمال‌اینکه $(x < 7)$ باشد، تقریباً چقدر است؟ (اقتصاد-۸۰)

۱) ۰/۶۸ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۵

۱۵- فرض کنید x دارای توزیع نرمال با میانگین۵۰ است. اگر $P(x \leq 62) = 0/9332$ و $z_{-0/668} = 1/5$ باشد، σ_x چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۶- مدت زمان انتظار درایستگاه تا آمدن اتوبوس دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و انحراف معیار ۵ دقیقه است. چه نسبتی از مسافران حداقل ۱۰ دقیقه در انتظار اتوبوس خواهند بود؟ (اقتصاد-۸۲)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۹۷۵

۱۷- متغیر تصادفی x بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی ۱۵۰ و واریانس ۶۴ توزیع شده است. اگر متغیر تصادفی Y بر اساس معادله $Y = \frac{1}{2}X + 25$ از متغیر X پیروی کند، آنگاه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y عبارت است از: (اقتصاد-۸۳)

۱) $f(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-100)^2}{32}}$

۲) $f(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-100)^2}{16}}$

۳) $f(y) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-150)^2}{64}}$

۴) $f(y) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-75)^2}{32}}$

۱۸- اگر میانگین هزینه مصرفی ماهیانه خانوارهای شهری ۲۱۰ هزار تومان با انحراف معیار ۴۰ هزار تومان باشد، چه نسبتی از خانوارها دارای هزینه مصرفی ۱۳۰ تا ۲۹۰ هزار تومان هستند؟ (اقتصاد-۸۳)

۱) ٪۶۸ ۲) ٪۹۵ ۳) حداقل ٪۸۹ ۴) حداقل ٪۷۵

۱۹- اگر توزیع نمرات دانشجویان در یک کلاس ۵۰ نفری تقریباً نرمال باشد و آنهایی که نمره‌ای کمتر از $\mu - \sigma$ گرفته‌اند مردود اعلام شوند، حدود چند نفر دراین کلاس مردود اعلام خواهند شد؟ (اقتصاد-۸۴)

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۰- مدت زمانیکه دانشجویان صرف پاسخگویی به سوالات یک آزمون خاص می‌کنند دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۰ و انحراف معیار ۱۰ دقیقه است. اگر ۱۰۰ دانشجو دراین آزمون شرکت کرده باشد، احتمال‌اینکه حداقل ۵۵ نفر بیش از ۶۰ دقیقه وقت صرف آزمون کرده باشند، چقدر است؟ (اقتصاد-۸۴)

۱) ۰/۳۴ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۵۵

مجموعه حسابداری

۲۱- توزیع کمیت تصادفی X نرمال بوده و میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۲۰ و ۴ باشد، $P(X \geq ۲۸)$ کدام است؟
(راهنمایی: $P(-۲ < z < ۲) = ۰/۹۵۴۴$) (حسابداری-۷۸)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۰۴۵۶ ۳) ۰/۴۷۷۲ ۴) ۰/۹۵۴۴

۲۲- میانگین توزیع نمرات دانشجویان یک دانشکده ۵۲ با انحراف معیار ۱۰ می‌باشد. احتمال‌اینکه نمرهٔ یکی از دانشجویان کمتر از ۷۲ باشد، چقدر است؟ (راهنمایی: $P(z \leq -۲) = ۰/۰۲۲۸$) (حسابداری-۷۹)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۷۹۳ ۴) ۰/۹۷۷۲

۲۳- اگر اندازه دو نفر از جامعه نرمالی ۱۳ و ۱۹ و اندازهٔاین دو بر حسب متغیر استاندارد، صفر و ۳ باشد، میانگین و انحراف معیار به ترتیب (از چپ به راست) کدامند؟ (حسابداری-۸۰) و (حسابداری-۸۳)

۱) ۱۹ و ۲ ۲) ۳ و ۶ ۳) ۲ و ۱۳ ۴) ۳ و ۱۹

۲۴- توزیع متغیر تصادفی X نرمال با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۱۰ است. اگر $P(X \geq x) = ۰/۰۴۹۵$ باشد، مقدار x چقدر است؟ (راهنمایی: $\int_{-۴}^{-۱/۶۵} f(z)dz = ۰/۰۲۵$) (حسابداری-۸۱)

۱) ۶۰ ۲) ۸۳/۵ ۳) ۱۱۶/۵ ۴) ۱۴۰

۲۵- عمر لامپ‌های تولید شده دارای توزیع نرمال بوده و ۹۲/۵٪ آنها بیش از ۲۱۶۰ ساعت کار می‌کنند. همچنین ۳/۹۲٪ عمری بیش از ۱۷۰۴۰ ساعت دارند. میانگین و انحراف معیار لامپ ها چقدر است؟ (حسابداری-۸۱)
$(z_۲ = ۱/۷۶, z_{۱} = -۱/۴۴)$

۱) $\mu = ۸۶۵۶, \sigma = ۴۸۵۰$ ۲) $\mu = ۹۸۴۰, \sigma = ۴۸۵۲$ ۳) $\mu = ۱۱۸۸۰, \sigma = ۴۶۲۱$ ۴) $\mu = ۸۸۵۶, \sigma = ۴۶۵۰$

۲۶- توزیع x نرمال با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۱۰ است. اگر $P(X \geq x) = ۰/۰۲۲۸$ باشد، مقدار x چقدر است؟
(راهنمایی: $\int_{-۴}^{-۲} f(z)dz = ۰/۰۲۲۸$) (حسابداری- ۸۲)

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

۲۷- توزیع نمرات ارزشیابی یک سازمان نرمال است. با میانگین ۱۴/۵ و انحراف معیار ۶، اگر یک نمونه ۲۵ نفری از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال میانگین نمرات ارزشیابی آنان بین ۱۶ و ۱۳ است؟ (حسابداری- ۸۴)
$\left(S_{۰}^{۱/۲۵} = ۰/۳۹۴۴\right)$

۱) ۰/۳۹۴۴ ۲) ۰/۶۰۵۶ ۳) ۰/۷۸۸۸ ۴) ۰/۸۹۴۴

مجموعه مدیریت

۲۸- احتمال‌اینکه واحد محصول ناقص باشد، ۰/۱ است. از بین محصولات تولید شده، تعداد $n = ۴۰۰$ واحد محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال‌اینکه تعداد ۶۵ واحد محصول ناقص باشد، چقدر است؟ (مدیریت- ۷۱)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۲۹- برای متغیر استاندارد z ، امید ریاضی (μ) و واریانس ($\sigma^۲$) کدامند؟ (مدیریت- ۷۲)

۱) (۱,۰) ۲) (۰,۱) ۳) (۰,۰) ۴) (۱,۱)

۳۰- فرض کنید X، دارای توزیع نرمال با میانگین ۴ و انحراف معیار ۳ باشد، اگر $Y = X - ۳$ باشد، احتمال Y بزرگتر از ۱، یعنی $p(Y \geq ۱)$ کدام است؟ (مدیریت- ۷۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۳۱- اگر اندازه ۲ نفر از جامعه نرمالی ۲۶ و ۳۸ باشد، در اندازه‌این دو نفر بر حسب z مساوی ۱- و ۳ باشد، میانگین و واریانس کدام است؟ (مدیریت- ۷۳)

۱) ۳۲ و ۳ ۲) ۴۱ و ۱ ۳) ۲۹ و ۹ ۴) ۳۲ و ۱۶

۳۲- اگر $Y_i = \frac{X_i - \mu_X}{\sigma_X}$ باشد، انحراف معیار Y کدام است؟ (مدیریت- ۷۳)

۱) $N\sigma_X$ ۲) σ_X ۳) صفر ۴) یک

۳۳- توزیع X نرمال است، اگر میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۲۰ و ۴ باشد، $p(X \geq ۲۸)$ کدام است؟ (راهنمایی: $I = \int_{-۲}^{۲} f(z)dz = ۰/۹۵۴۴$) (مدیریت- ۷۴)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۰۴۵۶ ۳) ۰/۴۷۷۲ ۴) ۰/۹۵۴۴

۳۴- توزیع نمرات دانشجویان یک دانشکده با میانگین ۱۴ و واریانس ۲/۲۵ یک توزیع نرمال است. اگر یک دانشجو از بین آنان به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال نمرهٔ بالاتر از ۱۷ خواهد داشت؟ ($S_۰^۲ = ۰/۴۷۷۲$) (مدیریت-۸۴)

۱) ۰/۲۸۸۶ ۲) ۰/۰۴۵۶ ۳) ۰/۰۱۱۴ ۴) ۰/۰۲۲۸

۳۵- در یک توزیع نرمال ۶/۹۴ درصد اقلام زیر ۳۵ و ۸۹/۰۷ درصد اقلام زیر ۶۳ می‌باشد میانگین و انحراف معیار آن تابع توزیع از راست به چپ عبارتند از :(سراسری ۷۵)

۱) ۱۰/۳۳ و ۵/۰۳ ۲) ۱۰/۳۳ و ۴/۹۳ ۳) ۴۹/۳ و ۱۰/۳۳ ۴) ۵۰/۳ و ۱۰/۳۳

✓راهنمایی : $(Zp = ۰/۰۶۹۴) = -۱/۴۸, (Zp = ۰/۸۹۰۷) = ۱/۲۳$

۳۶- توزیع X نرمال است و دارای میانگین ۵ و انحراف معیار ۲ است، اگر $y = x - ۲$ باشد $P(y \geq ۳)$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۰/۵۰

۳۷- اگر توزیع x نرمال با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۱۰ باشد و $P(X \leq a) = ۰/۰۶۶۸$ باشد مقدار a کدام است؟ (راهنمایی $\int_{-۵}^{۱/۵} f(z)dz = ۰/۹۳۳۲$) (سراسری ۷۷)

۱) ۵۰ ۲) ۸۵ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۵۰

۳۸- اگر $X \sim N(۵۰,۹)$ باشد مقدار X که با مقدار استانداردشده $Z = -۱/۲$ متناظر باشد برابر است با (سراسری ۷۸)

۱) ۴۶/۴ ۲) ۶۰/۸ ۳) ۳۹/۲ ۴) ۵۳/۶

۳۹- اگر $P(Z \leq -۲) = ۰/۰۲۲۸$ و X دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ و $P(X \geq ۵) = ۰/۹۷۷۲$ باشد، انحراف معیار X کدام است (سراسری ۷۸) (سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۴۰- فرض کنید توزیع عمر یخچالهای تولیدی یک کارخانه با میانگین ۳۰ و واریانس ۱۵ نرمال باشد. احتمال آنکه طول عمر یکی از یخچالها که به طور تصادفی انتخاب می‌شود کمتر از میانگین باشد چقدر است؟(سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

۴۱- توزیع x نرمال با انحراف معیار ۱۰ می‌باشد. اگر $P(X \geq ۱۰۰) = ۰/۹۷۵$ باشد، مقدار میانگین چقدر است؟ (راهنمایی $\int_{۱/۹۶}^{۴} f(z)dz = ۰/۰۲۵$) (سراسری ۸۱)

۱) ۶۰ ۲) ۸۰/۴ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۱۹/۶

۴۲- در یک توزیع نرمال با میانگین ۳۲ و واریانس ۴ تقریباً چند درصد داده‌ها بین دو عدد ۳۹ و ۲۶ قرار می‌گیرند؟ $\left(S_{-\infty}^{-۲} = ۰/۰۰۱۳\right)$

۱) ۸۹/۶ ۲) ۹۲/۳ ۳) ۹۵/۴ ۴) ۹۹/۷

۴۳- در یک توزیع پواسون با $\lambda = ۳۶$ تقریب توزیع نرمال در نظر می‌گیریم، عدد متناظر z برای داده $x = ۴۵$ کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

۴۴- فرض کنید z_1 تا z_k متغیرهای استاندارد صفر و یک باشند آنگاه توزیع $\sum_{i=1}^{k} zip^2$ کدام است؟

۱) کای مربع ۲) استیودنت ۳) فیشر ۴) نرمال

۴۵- اگر x دارای توزیع $N(\mu,100)$ باشد و داشته باشیم $P(x>124)=0/05$ و $Z_{0/05}=1/65$، آنگاه مقدار μ برابر است با:

۱) ۱۴۰/۰ ۲) ۱۲۱/۹ ۳) ۱۰۷/۵ ۴) ۱۰۴/۵

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(x)=\mu=۱۰۰$$

۲- گزینه ۴ صحیح است.

۳- گزینه ۳ صحیح است.

تابع مولد گشتاورها، مشابه تابع گشتاورهای توزیع نرمال است.

$$\left.\begin{array}{l} M_x(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^۲ t^۲}{۲}} \\ M_x(t)=e^{۲۰t+۵۰t^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu=۲۰ \quad , \quad \frac{\sigma^۲}{۲}=۵۰ \Rightarrow \sigma^۲=۱۰۰$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times ۱۰۰=\frac{۱۰}{۲۰}\times ۱۰۰=\%۵۰$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$\mu=np=۴۰۰(۰/۱)=۴۰$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{۴۰۰(۰/۱)(۰/۹)}=۶$$

$$P(X=۶۵)=P(۶۴/۵\le X\le ۶۵/۵)=P\left(\frac{۶۴/۵-۴۰}{۶}\le Z\le \frac{۶۵/۵-۴۰}{۶}\right)$$

$$=P(۴/۱\le Z\le ۴/۲۵)=۰$$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(X>۱۰)=P(Z>\frac{۱۰-۲۰}{۵})=P(Z>-۲)=۱-P(Z<-۲)=$$

$$۱-۰/۰۲۲۸=۰/۹۷۷۲$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

تقریب توزیع دو جمله‌ای به نرمال

$$\mu=np=۱۰۰(۰/۱)=۱۰$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{۱۰۰(۰/۱)(۰/۹)}=\sqrt{۹}=۳$$

$$P(X\le ۱۳)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{۱۳-۱۰}{۳}\right)=P(Z\le ۱)=۰/۸۴۱۳$$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(X<۵۰۰)=P(Z<\frac{۵۰۰-۵۰۹/۸}{۵})=P(Z<-۱/۹۶)=۰/۰۲۵$$

۸- گزینه ۱ صحیح است.

تقریب توزیع دو جمله‌ای به نرمال

$$\mu=np=۱۰۰(۰/۸)=۸۰$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{۱۰۰(۰/۸)(۰/۲)}=۴$$

$$P(X\ge ۸۸)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\ge\frac{۸۸-۸۰}{۴}\right)=P(Z\ge ۲)=۱-P(Z<۲)=۱-۰/۹۸=۰/۰۲$$

۹- گزینه ۴ صحیح است.

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(Y)=E(۲X+۱۰)=۲E(X)+۱۰=۲(۲۰۰)+۱۰=۴۱۰$$

$$Var(Y) = Var(۲X + ۱۰) = ۴Var(X) = ۴(۲۵) = ۱۰۰$$

$$\varphi(Y) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} = \frac{۱}{۱۰\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(y-۴۱۰)^۲}{۲۰۰}}$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است.

تقریب توزیع دو جمله‌ای توسط توزیع نرمال

$$\mu = np = ۱۶۰۰(۰/۹) = ۱۴۴۰$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{۱۶۰۰(۰/۹)(۰/۱)} = ۱۲$$

$$P(X \geq ۱۴۰۰) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{۱۴۰۰-۱۴۴۰}{۱۲}\right) = P(Z \geq -\frac{۴۰}{۱۲}) = P(Z \geq -۳/۳)$$

$$= ۱ - P(Z < -۳/۳) = ۱ - ۱ = ۰$$

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(۲z \geq ۰) = P(z \geq ۰) = ۰/۵$$

۱۳- گزینه ۲ صحیح است.

در توزیع دو جمله‌ای هر چقدر مقدار n بیشتر افزایش یابد، بهتر می‌توان از تقریب نرمال استفاده کرد.

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(x < ۷) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۷-۱۰}{۳}\right) = P(z < -۱) \simeq ۰/۱۶$$

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$z_\alpha = z_{۰/۰۶۶۸} = ۱/۵ \Rightarrow P(z > ۱/۵) = ۰/۰۶۶۸$$

$$P(z < ۱/۵) = ۱ - P(z > ۱/۵) = ۱ - ۰/۰۶۶۸ = ۰/۹۳۳۲$$

$$\Rightarrow P(z \leq ۱/۵) = P(x \leq ۶۲) \Rightarrow \frac{۶۲-۵۰}{\sigma} = ۱/۵ \Rightarrow \sigma = \frac{۱۲}{۱/۵} \Rightarrow \sigma = ۸$$

۱۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(x > ۱۰) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۱۰-۲۰}{۵}\right) = P(z > -۲) = ۱ - P(z < -۲)$$

$$= ۱ - ۰/۰۲۲۸ = ۰/۹۷۷۲ \simeq ۰/۹۷۵$$

۱۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(X) = ۱۵۰ \quad , \quad \sigma_x^۲ = ۶۴$$

$$E(Y) = E(\frac{۱}{۲}X + ۲۵) = \frac{۱}{۲}E(X) + ۲۵ = \frac{۱}{۲}(۱۵۰) + ۲۵ = ۱۰۰$$

$$Var(Y) = Var(\frac{۱}{۲}X + ۲۵) = \frac{۱}{۴}Var(X) = \frac{۱}{۴} \times ۶۴ = ۱۶$$

$$f(y) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(y-۱۰۰)^۲}{۳۲}}$$

۱۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu = ۲۱۰ \quad , \quad \sigma = ۴۰$$

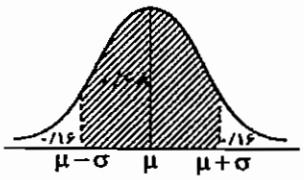
طبق قانون چه بی‌شف حداقل $۱-\frac{۱}{z^۲}$درصد مشاهدات در فاصله $\mu \pm \sigma z$ قرار می‌گیرند.

$$(۱۳۰, ۲۹۰) = ۲۱۰ \pm ۴۰ \times ۲ \Rightarrow z = ۲ \quad \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۳}{۴} = \%۷۵$$

۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

در توزیع نرمال، تقریباً ۳۲٪ مشاهدات، در خارج از فاصله $\mu \pm \sigma$ قرار می‌گیرند. پس ۱۶٪ مشاهدات پائین تر از $\mu - \sigma$ قرار می‌گیرند.

$۵۰ \times \%۱۶ = ۸$



۲۰- گزینه ۳ صحیح است.

$\mu = ۶۰ \quad , \quad \sigma = ۱۰ \qquad P =$ صرف بیش از ۶۰ دقیقه وقت برای آزمون $= ۰/۵$

$$P(x > ۵۵) = P\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}} > \frac{۵۵ - ۱۰۰(۰/۵)}{\sqrt{۱۰۰(۰/۵)(۰/۵)}}\right) = P(z > ۱) = ۰/۱۶$$

۲۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(x \geq ۲۸) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{۲۸ - ۲۰}{۴}\right) = P(z \geq ۲) = ۱ - P(z < ۲)$$

$$= ۱ - \left(۰/۵ + \frac{۰/۹۵۴۴}{۲}\right) = ۱ - ۰/۹۷۷۲ = ۰/۰۲۲۸$$

۲۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(x < ۷۲) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{۷۲ - ۵۲}{۱۰}\right) = P(z < ۲) = ۱ - P(z > ۲) =$$

$$۱ - ۰/۰۲۲۸ = ۰/۹۷۷۲$$

۲۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} ۰ = \dfrac{۱۳ - \mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = ۱۳ \\ ۳ = \dfrac{۱۹ - \mu}{\sigma} \Rightarrow ۱۹ - ۱۳ = ۳\sigma \Rightarrow \sigma = ۲ \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-۴}^{-۱/۶۵} f(z)dz = \int_{۱/۶۵}^{۴} f(z)dz = ۰/۰۴۹۵ \Rightarrow P(z \geq ۱/۶۵) = ۰/۰۴۹۵$$

$$P(X \geq x) = P(Z \geq ۱/۶۵) = ۰/۰۴۹۵$$

$$۱/۶۵ = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{x - ۱۰۰}{۱۰} = ۱/۶۵ \Rightarrow x - ۱۰۰ = ۱۶/۵ \Rightarrow x = ۱۱۶/۵$$

۲۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(X > ۲۱۶۰) = ۰/۹۲۵ \Rightarrow -۱/۴۴ = \frac{۲۱۶۰ - \mu}{\sigma}$$

$$P(X > ۱۷۰۴۰) = ۰/۰۳۹۲ \Rightarrow ۱/۷۶ = \frac{۱۷۰۴۰ - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu - ۱/۴۴ & \sigma = ۲۱۶۰ \\ \mu + ۱/۷۶ & \sigma = ۱۷۰۴۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳/۲\sigma = ۱۴۸۸۰ \Rightarrow \boxed{\sigma = ۴۶۵۰} \Rightarrow \mu = ۲۱۶۰ + ۱/۴۴\,\sigma \qquad \mu = ۸۸۵۶ \quad \sigma = ۴۶۵۰$$

$$\mu = ۲۱۶۰ + ۱/۴۴(۴۶۵۰) \Rightarrow \boxed{\mu = ۸۸۵۶}$$

۲۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\int_{-۴}^{-۲} f(z)dz = \int_{۲}^{۴} f(z)dz = ۰/۰۲۲۸ \Rightarrow P(z \geq ۲) = ۰/۰۲۲۸$$

$$P(X \geq x) = P(z \geq ۲) = ۰/۰۲۲۸$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow ۲ = \frac{x - ۱۰۰}{۱۰} \Rightarrow \boxed{x = ۱۲۰}$$

۲۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$z_1=\frac{x_1-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}=\frac{۱۳-۱۴/۵}{\frac{۶}{۵}}=-۱/۲۵$$

$$z_2=\frac{x_2-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}=\frac{۱۶-۱۴/۵}{\frac{۶}{۵}}=۱/۲۵$$

$$P(x_1<x<x_2)=P(z_1<z<z_2)=P(-۱/۲۵<z<۱/۲۵)=۲\times ۰/۳۹۴۴=۰/۷۸۸۸$$

۲۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\mu=np=۴۰۰(۰/۱)=۴۰$$

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{۴۰۰(۰/۱)(۰/۹)}=۶$$

$$P(x=۶۵)=P\left(۶۴/۵\le x\le ۶۵/۵\right)=P\left(\frac{۶۴/۵-۴۰}{۶}\le z\le\frac{۶۵/۵-۴۰}{۶}\right)$$

$$=P(۴/۱\le z\le ۴/۲۵)=۰$$

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

۳۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(Y)=E(X-۳)=E(X)-۳=۴-۳=۱$$

$$Var(Y)=Var(X-۳)=Var(X)=۹$$

$$P(Y\ge ۱)=P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\ge\frac{۱-۱}{۳}\right)=P(z\ge ۰)=۰/۵$$

۳۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}\Rightarrow -۱=\frac{۲۶-\mu}{\sigma}\Rightarrow\sigma=\mu-۲۶$$

$$z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}\Rightarrow ۳=\frac{۳۸-\mu}{\sigma}\Rightarrow\sigma=\frac{۳۸}{۳}-\frac{\mu}{۳}$$

$$\Rightarrow\mu-۲۶=\frac{۳۸}{۳}-\frac{\mu}{۳}\Rightarrow\mu+\frac{\mu}{۳}=\frac{۳۸}{۳}+۲۶$$

$$\frac{۴\mu}{۳}=\frac{۳۸+۷۸}{۳}\Rightarrow ۴\mu=۱۱۶\Rightarrow\boxed{\mu=۲۹}$$

$$\sigma=\mu-۲۶\Rightarrow\sigma=۲۹-۲۶\Rightarrow\boxed{\sigma=۳}$$

۳۲- گزینه ۴ صحیح است.

متغیر Y_i متغیر استاندارد شده است در نتیجه میانگین آن صفر و واریانس آن یک است.

۳۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$P(x\ge ۲۸)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\ge\frac{۲۸-۲۰}{۴}\right)=P(z\ge ۲)=۰/۵-\frac{۰/۹۵۴۴}{۲}=۰/۰۲۲۸$$

۳۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(x>۱۷)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{۱۷-۱۴}{\sqrt{۲/۲۵}}\right)=P(z>۲)=۱-P(z<۲)$$

$$=۱-(۰/۵+۰/۴۷۷۲)=۰/۰۲۲۸$$

۳۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(Z\le -۱/۴۸)=۰/۰۶۹۴=P(X\le ۳۵)\Rightarrow -۱/۴۸=\frac{۳۵-\mu}{\delta}$$

$$P(Z\le ۱/۲۳)=۰/۸۹۰۷=P(X\le ۶۳)\Rightarrow ۱/۲۳=\frac{۶۳-\mu}{\delta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳۵-\mu=-۱/۴۸\delta \Rightarrow \mu=۳۵+۱/۴۸\delta \\ ۶۳-\mu=۱/۲۳\delta \Rightarrow ۶۳-۳۵-۱/۴۸\delta=۱/۲۳۶ \Rightarrow ۲۸=۲/۷۱\delta \Rightarrow \delta=\frac{۲۸}{۲/۷۱}=۱۰/۳۳ \Rightarrow \mu=۵۰/۳ \end{cases}$$

۳۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$Y=x-۲ \Rightarrow \mu_y=\mu_x-۲=۵-۳=۲, \delta_y^۲=\delta_x^۲=۴ \Rightarrow \delta_y=۲$$

$$y=۳ \Rightarrow Z=\frac{y-\mu_y}{\delta_y}=\frac{۳-۳}{۲}=۰ \Rightarrow P(Z\geq ۰)=۰/۵$$

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

گزینه ۲، چون تابع توزیع Z دارای انحراف معیار یک است می‌توان ۵ − را در حکم ∞− درنظر گرفت بنابراین از آنجائیکه تابع کاملاً قرینه است.

$$\int_{-\infty}^{۱/۵} f(z)dz=۰/۹۳۳۲ \Rightarrow P(x\geq ۱/۵)=۰/۰۶۶۸$$

$$Z=\frac{X-\mu}{۶} \Rightarrow -۱/۵=\frac{a-۱۰۰}{۱۰} \Rightarrow -۱۵=a-۱۰۰ \Rightarrow a=۸۵$$

۳۸- گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۳ توزیع نرمال را به صورت $X\sim N(\mu_x,\delta_x)$ نمایش می‌دهند بنابراین داریم:

$$Z=\frac{X-\mu_x}{۶_x} \Rightarrow -۱/۲=\frac{X-۵۰}{۹} \Rightarrow -۱۰/۸=X-۵۰ \Rightarrow X=۵۰-۱۰/۸=۳۹/۲$$

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$P(X\leq ۵)=۱-P(X\geq ۵)=۰/۰۲۲۸=P(Z\leq -۲)$$

$$\Rightarrow Z=\frac{X-\mu_x}{\delta_x} \Rightarrow -۲=\frac{۵-۲۵}{\delta_x} \Rightarrow \delta_x=\frac{-۲۰}{-۲۰}=+۱۰$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

چون توزیع عمر یخچال ها نرمال است بنابراین نوع پراکندگی یکنواخت می‌باشد و احتمال اینکه طول عمر یخچال ها کمتر از می‌انگین باشد برابر $\frac{۱}{۲}$ است .

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

اگر ۴ را معادل ∞ بگیریم خواهیم داشت:

$$P(\geq ۱/۹۶)=۰/۰۲۵$$

$$\Rightarrow P(Z\leq -۱/۹۶)=۰/۰۲۵$$

$$P(X\leq ۱۰۰)=۱-P(X\geq ۱۰۰)=۰/۰۲۵=P(Z\leq -۱/۹۶)$$

$$\Rightarrow -۱/۹۶=\frac{۱۰۰-\mu_x}{۱۰} \Rightarrow ۱۰۰-\mu_x=-۱۹/۶ \Rightarrow \mu_x=۱۱۹/۶$$

۴۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$x\sim N(۳۲,۴) \rightarrow \begin{cases} \mu_x=۳۲ \\ \sigma^۲=۴ \rightarrow \sigma=۲ \end{cases}$$

$$P(۲۶<x<۳۸)=P(\frac{۲۶-۳۲}{۲}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{۳۸-۳۲}{۶})=P(-۳<z<۳)=۱-P(z<-۳)-P(z>۳)$$

$$\Rightarrow ۱-۰/۰۰۳۶=۰/۹۹۷۴\sim ۹۹/۷٪$$

۴۳- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{توزیع پواسون} \begin{cases} \mu=\lambda=۳۶ \\ \sigma^۲=\lambda=۳۶ \rightarrow \sigma=۶ \end{cases} \xrightarrow{\lambda=۱۰} x\sim N\begin{cases} \mu=۳۶ \\ \sigma=۶ \end{cases}$$

می‌دانیم در شرایطی که $\lambda > 1$ باشد، توزیع پواسون از تقریب نرمال استفاده می‌کند.

$$\begin{cases} z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{45-36}{6} = 1/5 \\ x = 45 \\ \mu = 36 \\ \sigma = 6 \end{cases}$$

۴۴- گزینه ۱ صحیح است.

الف) در صورتیکه z نرمال استاندارد باشد آنگاه $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$

ب) در صورتیکه z_i نرمال استاندارد باشد آنگاه $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$

۴۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} z_{./05} = 1/65 \rightarrow P(z > 1/65) = 0/05 \\ P(x > 124) = 0/05 \rightarrow P(\dfrac{x-\mu}{\sigma} > \dfrac{124-\mu}{10}) = 0/05 \rightarrow P(z > \dfrac{124-\mu}{10}) = 0/05 \\ \mu = ? \quad \sigma^2 = 100 \quad \sigma = 100 \\ \Rightarrow 1/65 = \dfrac{124-\mu}{10} \Rightarrow \mu = 107/5 \end{cases}$$

نکته: در توزیع z استاندارد با توجه به تقارن:

$$\left.\begin{cases} P(z > A) = P(z < \beta) \\ P(z < A) - P(z > \beta) \end{cases}\right\} \rightarrow A = -\beta$$

$$\left.\begin{matrix} P(z > A) = P(z > \beta) \\ P(z < A) = P(z < \beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \beta$$

فصل ششم

نمونه‌گیری و توزیع‌های نمونه‌گیری

تا پیش از این، ما با کل جامعه سر و کار داشتیم و شاخص‌هایی که محاسبه می‌کردیم در واقع مربوط به کل اعضای جامعه بود که به آن پارامتر گفته می‌شود و به بررسی مباحثی پرداختیم که به پارامترها مربوط می‌شد. از این به بعد در واقع بوسیله نمونه‌گیری به بررسی کل جامعه می‌پردازیم و شاخص‌های تعیین شده مربوط به هر نمونه می‌باشد.

به شاخص‌های بدست آمده از یک نمونه n تایی از جامعه، آمار می‌گویند ولی از آنجائیکه مقدار آماره‌ها تا حد زیادی به نمونه تعیین شده بستگی دارد، برای ایجاد یک ثبات و پایایی در مورد آماره‌ها از توزیع آمارها از توزیع آماره استفاده می‌شود.

توزیع آماره: تابع احتمالی است که از نمونه‌گیری مکرر حاصل شده و در شکل کاملتر به آن، توزیع نمونه‌گیری آماره می‌گویند.

دلایل نمونه‌گیری: ۱- هزینه ۲- به روز بودن ۳- درستی و صحت ۴- صرفه‌جویی در زمان ۵- آزمون تخریب‌کننده

نکته: اگر پارامتر را شاخص بدست آمده از طریق نمونه‌گیری بنامیم، به این شاخص در یک نمونه n تایی آماره می‌گوئیم. و آماره از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند.

۱- روش‌های نمونه‌گیری

۱-۱- نمونه‌گیری تصادفی ساده: در این روش، شانس انتخاب هر عنصر یکسان می‌باشد و از دو روش قرعه‌کشی و استفاده از جدول اعداد تصادفی استفاده می‌شود. نمونه‌گیری تصادفی ساده به دو نوع می‌باشد:

الف- نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری: در این روش هر یک از اعضای نمونه پس از انتخاب و یادداشت اندازهٔ آن مجدداً به جامعه بازگردانده می‌شود و این رویه تا انتخاب n امین نمونه ادامه پیدا می‌کند. در این روش نمونه‌گیری، شانس انتخاب هر یک از اعضای جامعه مساوی $\frac{1}{N}$ می‌باشد.

ب- نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری: در این روش هر یک از اعضای نمونه را که انتخاب می‌کنیم دیگر به جامعه بازگردانده نمی‌شود. در این روش احتمال انتخاب اعضای نمونه با هم تفاوت دارد. در واقع در این روش احتمال انتخاب شدن اولین عضو نمونه $\frac{1}{N}$، دومین عضو نمونه $\frac{1}{N-1}$,..... و احتمال انتخاب n اُمین عضو نمونه $\frac{1}{N-n+1}$ می‌باشد.

۱-۲- نمونه‌گیری منظم: در این روش نمونه‌گیری، پس از انتخاب اولین عضو نمونه، بقیه اعضاء با نظم خاصی انتخاب می‌شوند. بنابراین با انتخاب اولین عضو نمونه بصورت تصادفی، سایر اعضای نمونه معین خواهند شد. به عنوان مثال برای انتخاب ۶ نفر از بین ۳۶ نفر، نفر اول را به صورت تصادفی انتخاب کرده، و سایر اعضاء را به صورت ۶ در میان انتخاب می‌کنیم.

مزیت روش نمونه‌گیری منظم این است که اولاً ساده است. ثانیاً کم هزینه است. در ضمن نمونه‌گیری منظم برای جوامعی مناسب است که فهرست بندی شده‌اند و دارای نوعی ترتیب هستند.

۱-۳- نمونه‌گیری طبقه بندی شده (گروهی): در این روش ابتدا اعضای جامعه به صورت گروههای متجانس تقسیم شده و سپس با توجه به نسبت اعضای گروه به جامعه، اعضایی از هر گروه انتخاب می‌شود.

نکته: این نمونه‌گیری در جوامعی مورد استفاده قرار می‌گیرد که از نظر صفت مورد نظر ناهمگون است.

۱-۴- نمونه‌گیری خوشه‌ای: این روش معمولاً در مورد جوامع گسترده و بزرگ صورت می‌گیرد. در این روش، ابتدا کل جامعه به چند سارفات (خوشه) تقسیم شده و سپس اعضای نمونه از بین یک یا چند خوشه انتخاب می‌شود. (هر خوشه می‌تواند بیانگر ویژگی‌های کلی جامعه باشد)

۱- ۵- **نمونه‌گیری مرحله‌ای:** شکل توسعه یافته نمونه‌گیری خوشه‌ای است. در این حالت نمونه‌گیری از جامعه طی چند مرحله انجام می‌شود.

۲- توزیع‌های نمونه‌گیری

هر آماره‌ای دارای یک توزیع نمونه‌گیری (تابع احتمال) است. تابع احتمال یک آماره تابعی است که بر اساس نمونه‌های تصادفی n تایی که از جامعه آماری مکرراً انتخاب شده‌اند، بدست می‌آید. این تابع را توزیع نمونه‌گیری (توزیع نمونه‌ای) آماره می‌گویند.

نکته: $\bar{x}$ آمارهٔ μ_x , Md آمارهٔ S_x^2 آمارهٔ σ_x^2 می‌باشد. برای محاسبه $\bar{x}$, S_x^2 از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n} \qquad , \qquad S_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

در ادامه به بررسی توزیع‌های نمونه‌گیری می‌پردازم.

۳- توزیع نمونه‌ای میانگین

به توزیع احتمال میانگین کلیه نمونه‌های تصادفی که با حجم مشخص از یک جامعه می‌توان انتخاب کرد، توزیع نمونه‌ای میانگین یا توزیع $\bar{x}$ می‌گویند. بطور کلی تعیین رابطه بین میانگین و انحراف معیار جامعه و میانگین و انحراف معیار توزیع $\bar{x}$ به حجم جامعه و روش نمونه‌گیری (با جایگذاری و بدون جایگذاری) بستگی دارد:

الف) اگر تمام نمونه‌های تصادفی n تایی به روش با جایگذاری از یک جمعیت نامحدود با حجم N انتخاب شوند، رابطه بین میانگین و انحراف معیار جامعه با میانگین و انحراف معیار توزیع $\bar{x}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x \quad , \quad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ب) اگر نمونه‌های تصادفی n تایی همگی به روش بدون جایگذاری از یک جمعیت محدود با حجم N انتخاب شوند، رابطهٔ بین میانگین و انحراف معیار جامعه با میانگین و انحراف معیار توزیع $\bar{x}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x \quad , \quad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

نکته: جامعه محدود به جامعه‌ای گفته می‌شود که در آن نسبت حجم نمونه به حجم جامعه بزرگتر از ۵٪ شود. یعنی:

$$\frac{n}{N}>0/05$$

و جامعه نامحدود به جامعه‌ای گفته می‌شود که در آن، نسبت حجم نمونه به حجم جامعه کوچکتر از ۵٪ شود. یعنی:

$$\frac{n}{N}<0/05$$

نکته: ضریب $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ را ضریب تصحیح جامعه‌های محدود می‌گویند و در جوامع نامحدود $\left(\frac{n}{N}<0/05\right)$، این ضریب نادیده گرفته می‌شود.

مثال: داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

۲,۳,۴,۴,۶,۸,۹,۹,۱۱,۱۴

مطلوب است محاسبه میانگین و انحراف معیار نمونه‌های تصادفی ۳تایی که به روش بدون جایگزینی از جامعه فوق انتخاب می‌شوند.

جامعه محدود می‌باشد $\left(\frac{n}{N}=0/3>0/05\right)$

$$\mu_x=\frac{\sum X_i}{N}=\frac{2+3+\ldots+11+14}{10}=7$$

$$\sigma_x^2=\frac{\sum(x_i-\mu_x)^2}{N}=\frac{(2-7)^2+(3-7)^2+\ldots+(14-7)^2}{10}=13/4$$

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x=7$$

$$\sigma_{\bar{x}}^{2}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\Rightarrow\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sqrt{13/4}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{10-3}{10-1}}=1/86$$

٤- موارد نرمال بودن توزیع $\bar{X}$

اگر توزیع جامعه نرمال باشد، نمونه‌های انتخابی به هر حجمی که باشند دارای توزیع نرمال می‌باشند ولی اگر توزیع جامعه غیرنرمال باشد و یا اینکه نرمال یا غیر نرمال بودن آن نامشخص باشد، چنانچه حجم نمونه انتخابی بزرگتر از ۳۰ باشد $(n>30)$، توزیع $\bar{X}$ طبق قضیه حد مرکزی نرمال خواهد بود.

۵- قضیه حد مرکزی

اگر نمونه‌های تصادفی n تایی از یک جامعه غیر نرمال (یا با توزیع نامعلوم) با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 انتخاب شوند، به شرطی که n به اندازه کافی بزرگ باشد $(n\to\infty)$، توزیع $\bar{X}$ به سمت توزیع نرمال میل خواهد کرد و میانگین و انحراف معیار آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x \quad , \quad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad \bar{x}\sim N(\mu\,,\frac{\sigma^2 x}{n})$$

و هر چه حجم نمونه (n) بزرگتر شود، توزیع $\bar{X}$ بیشتر به نرمال نزدیک می‌شود.

نکته: صرف نظر از توزیع جامعهٔ آماری، حداقل حجم نمونه باید ۳۰ باشد تا توزیع $\bar{X}$ نرمال باشد.

نکته: اگر متغیر تصادفی $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال باشد، متغیر نرمال استاندارد آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \quad , \quad \mu_{\bar{x}}=\mu_x \quad , \quad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

٦- توزیع نمونه‌ای تفاضل میانگین در جامعه

اگر دو نمونه تصادفی مستقل به حجم n_1, n_2 از دو جامعه نامحدود با میانگین‌های μ_1, μ_2 و واریانس‌های σ_1^2, σ_2^2 انتخاب شوند، در اینصورت توزیع نمونه‌ای تفاضل میانگین‌ها $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ تقریباً دارای توزیع نرمال خواهد بود و میانگین و واریانس آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_{\bar{X}_1}-\mu_{\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

۷- توزیع نمونه‌ای نسبت موفقیت $(\bar{P})$

در یک آزمایش دو جمله‌ای با n بار تکرار، تعداد موفقیت‌ها (X) و نسبت موفقیت در نمونه $\left(\frac{X}{n}\right)$ در واقع در راستای نسبت موفقیت در جامعه (p) می‌باشد، بنابراین آمار متناظر با p (احتمال موفقیت در جامعه) را به صورت $\bar{P}=\frac{X}{n}$ تعریف می‌کنند.

یادآوری: در هر توزیع دو جمله‌ای که از n توزیع برنولی تشکیل شده است، هر گاه np و nq بزرگتر یا مساوی ۵ بودند، توزیع نرمال تقریب خوبی برای آن خواهد بود.

نکته مهم: در نمونه‌گیری از یک جامعه آماری محدود (بدون جایگذاری) در مورد توزیع نسبت موفقیت $(\bar{P})$ روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$E(\bar{P})=\mu_{\bar{P}}=P \qquad V(\bar{P})=\frac{P(1-P)}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

نکته: در اینجا نیز همانند توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$، اگر نمونه‌گیری از جامعه نامحدود (با جایگذاری) باشد، ضریب تصحیح $\frac{N-n}{N-1}$ حذف می شود یعنی خواهیم داشت:

$$E(\bar{P})=P \qquad V(\bar{P})=\frac{P(1-P)}{n}$$

مثال: ۶۰ درصد شرکت‌کنندگان کنکور سراسری دانشگاه‌ها دختر هستند. یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۲۲۰$ را انتخاب کرده‌ایم. مطلوب است محاسبه امید ریاضی و واریانس نسبت نمونه‌ای $\bar{P}$.

$$P = ۰/۶۰ \Rightarrow E(\bar{P}) = P = ۰/۶۰$$

$$\sigma^۲_{\bar{P}} = \frac{P(۱-P)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-۱} \Rightarrow \sigma^۲_{\bar{P}} = \frac{(۰/۶۰)(۰/۴۰)}{۲۲۰} = ۰/۰۰۱ \quad \text{جامعه‌ی نامحدود}$$

نکته: توزیع استاندارد شده‌ی $\bar{P}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z = \frac{\bar{P} - \mu_{\bar{P}}}{\sigma_{\bar{P}}} = \frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}}$$

۸- توزیع نمونه‌ای تفاضل دو نسبت موفقیت $(\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲)$

اگر از دو جامعه، دو نمونه تصادفی به حجم $n_۱, n_۲$ انتخاب کنیم و $X_۱, X_۲$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ تعداد موفقیت در دو جامعه باشند، $\bar{P}_۱ = \frac{X_۱}{n_۱}, \bar{P}_۲ = \frac{X_۲}{n_۲}$ خواهند بود و توزیع نمونه‌ای تفاضل دو نسبت موفقیت دارای میانگین و واریانس به ترتیب زیر خواهد بود:

$$E(\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲) = \mu_{\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲} = P_۱ - P_۲$$

$$V(\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲) = \sigma^۲_{\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲} = \frac{P_۱(۱-P_۱)}{n_۱} + \frac{P_۲(۱-P_۲)}{n_۲}$$

نکته: متغیر استاندارد شده $\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z = \frac{(\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲) - (P_۱ - P_۲)}{\sqrt{\frac{P_۱(۱-P_۱)}{n_۱} + \frac{P_۲(۱-P_۲)}{n_۲}}}$$

۹- توزیع نمونه‌ای واریانس

اگر از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، نمونه‌ای تصادفی به حجم n انتخاب کنیم، همانطور که قبلاً گفته شد، واریانس نمونه از رابطه‌ی $s^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲}{n-۱}$ بدست می‌آید و توزیع آمارهٔ $s^۲$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma^۲} \qquad \text{توزیع کای دو با درجه آزادی } n-۱$$

۱۰- توزیع نمونه‌ای نسبت واریانس $\left(\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲}\right)$

آمارهٔ $\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $d.f_۱ = n_۱ - ۱, d.f_۲ = n_۲ - ۱$ می‌باشد.

$$F = \frac{s_۱^۲ . \sigma_۲^۲}{s_۲^۲ . \sigma_۱^۲}$$

مثال: دو جامعه نرمال داریم که به ترتیب دارای واریانس‌های ۱۵ و ۴۱ هستند. دو نمونه تصادفی مستقل به حجم $n_۱ = ۱۳$, $n_۲ = ۲۰$ از این دو جامعه انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه نسبت واریانس نمونه اول به نمونه دوم کمتر از ۱ باشد، چقدر است؟

$$P\left(\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} < ۱\right) = P\left(\frac{s_۱^۲ . \sigma_۲^۲}{s_۲^۲ . \sigma_۱^۲} < ۱ \times \frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}\right) = P\left(F_{\alpha,۱۲,۱۹} < ۱ \times \frac{۴۱}{۱۵}\right) =$$

$$P\left(F_{\alpha,۱۲,۱۹} < ۲/۷۳\right) = ۰/۰۲۵$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- یک نمونه تصادفی ساده چگونه نمونه‌ای است؟ (اقتصاد- ۷۳)

۱) همه عناصر جامعه شانس مساوی در انتخاب شدن داشته باشند و همه نمونه‌های ممکن، هم شانس باشند.

۲) همه عناصر جامعه شانس مساوی داشته باشند که در نمونه انتخاب شوند.

۳) همه نمونه‌های ممکن هم شانس باشند.

۴) نماینده خوبی از کل جامعه آماری باشند.

۲- ضریب عامل تصحیح واریانس یعنی $\frac{N-n}{N-1}$ وقتی در محاسبه واریانس میانگین نمونه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد که نسبت $\frac{n}{N}$: (اقتصاد-۷۳)

۱) بزرگتر از ۱۰٪ باشد. ۲) کوچکتر از ۵٪ باشد. ۳) بزرگتر از ۵٪ باشد. ۴) کوچکتر از ۱۰٪ باشد.

۳- کدامیک از تعریف‌های زیر بیان مفهوم تابع نمونه‌ای (Statistic) می‌باشد؟ (اقتصاد- ۷۴)

۱) مجموعه‌ای از n کمیت تصادفی مستقل از هم $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را تابع نمونه‌ای می‌نامند.

۲) مجموعه‌ای از n کمیت تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را تابع نمونه‌ای می‌نامند.

۳) تابعی از متغیرهای نمونه را تابع نمونه‌ای می‌نامند.

۴) تابعی از پارامترهای قانون توزیع را تابع نمونه‌ای می‌نامند.

۴- در یک نمونه تصادفی بدون جایگذاری به حجم ۵۰ خانوار از یک جامعه روستایی که شامل ۲۵۰ خانوار می‌باشد، فقط ۸ خانوار دارای دوچرخه هستند، تعداد کل خانوارهایی که دارای دوچرخه هستند، عبارت است از: (اقتصاد-۷۴)

۱) ۵۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۰ ۴) ۴۰

۵- کمیت تصادفی X بر طبق قانون دو جمله‌ای به صورت:

$$P(x) = C_m^x p^x q^{m-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, m$$

توزیع شده است. از این جامعه نمونه‌ای به حجم n انتخاب می‌کنیم، تخمین پارامتر P کدام است؟ (اقتصاد- ۷۷)

۱) $P = \overline{nx}$ ۲) $P = \overline{x}$ ۳) $P = \frac{n}{\overline{x}}$ ۴) $P = \frac{\overline{x}}{n}$

۶- بین گزاره‌های زیر کدام گزاره نادرست است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) در نمونه‌گیری تصادفی از جامعهٔ دلخواه با میانگین μ و انحراف معیار σ، توزیع $\overline{X}$ به n بستگی ندارد.

۲) در نمونه‌گیری تصادفی از جامعهٔ دلخواه با میانگین μ و انحراف معیار σ، وقتی n بزرگ است توزیع $\overline{X}$ نرمال است.

۳) در نمونه‌گیری از جامعهٔ نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ، توزیع $\overline{X}$ نرمال است.

۴) در نمونه‌گیری از جامعهٔ نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ، توزیع $\overline{X}$ به حجم n بستگی ندارد.

۷- در یک شهر مخارج ماهیانه خانوارها دارای میانگین ۷۰ هزار تومان با انحراف معیار ۱۵ هزار تومان است. در یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از این خانوارها، احتمال اینکه میانگین مخارج بدست آمده کمتر از ۶۷ هزار تومان باشد، چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۱)

$P(0 < z < 2) = 0/4772 \qquad P(0 < z < 1) = 0/3413$

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۴۷

۸- اگر توزیع جامعه نرمال باشد، احتمال اینکه واریانس یک نمونه تصادفی ۹ تایی بیشتر از ۱/۵ برابر واریانس جامعه باشد، کدام است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) $P(\chi^2 > 20)$ ۲) $P(\chi^2 > 12)$ ۳) $P(\chi^2 > 13/5)$ ۴) $P(\chi^2 > 1/5)$

۹- اگر بخواهیم انحراف معیار میانگین نمونه‌ای ($\sigma_{\bar{x}}$) بر اساس حجم نمونه $n = ۶۴$ تایی از جامعه‌ای که دارای انحراف معیار ۶ است، به نصف کاهش یابد، حجم نمونه باید چند تا شود؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۸۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۲۰

۱۰- احتمال اینکه میانگین یک نمونه ۶۴ تایی از جامعه‌ای که دارای میانگین ۹۰ و انحراف معیار ۸ است، کمتر از ۸۸ باشد، چند درصد است؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷/۵

۱۱- در یک نمونه‌گیری تصادفی به حجم $n > ۱$ از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma_x^۲$، توزیع نمونه‌ای $(\bar{x} - \mu)$ کدامیک از موارد زیر می‌باشد؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) $(\bar{x} - \mu) \sim \chi^۲_{\alpha,(n-۱)}$ ۲) $(\bar{x} - \mu) \sim N(\mu, \sigma^۲_{(\bar{x}-\mu)})$ ۳) $(\bar{x} - \mu) \sim N\left(۰, \frac{\sigma^۲ x}{n}\right)$ ۴) $(\bar{x} - \mu) \sim N\left(۰, \frac{\sigma^۲ \bar{x}}{n}\right)$

۱۲- اگر بخواهیم نرخ بیکاری را در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$ و حداکثر حاشیه خطای $\alpha = ۰/۰۱$ برآورد کنیم، حجم نمونه لازم تقریباً چقدر باید باشد؟ (اقتصاد - ۸۵)

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۱۰/۰۰۰ ۴) ۴۰/۰۰۰

مجموعه حسابداری

۱۳- اگر $\bar{X}$ و $S_x^۲$ به ترتیب میانگین و واریانس یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۲۵$ باشد، برآورد نقطه‌ای انحراف معیار میانگین نمونه‌ها، کدام است؟ (حسابداری- ۷۸)

۱) $\frac{S_X}{۵}$ ۲) $\frac{S_X}{۲۵}$ ۳) $\frac{S_X^۲}{۲۴}$ ۴) $\frac{S_X^۲}{۲۵}$

۱۴- اگر آمارهٔ $\bar{P} = \frac{x}{n}$ بیانگر نسبت موفقیت در نمونه و پارامتر مربوط به آن مساوی ۰/۵۰ باشد، برای یک نمونه ۱۰۰ تایی مقدار انحراف معیار $\bar{P}$ چقدر است؟ (حسابداری- ۸۱)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵۰

مجموعه مدیریت

۱۵- اگر انحراف معیار جامعه ۱۲ و انحراف معیار کمیت $\bar{X}$، مساوی ۲ باشد، حجم نمونه را محاسبه کنید. (مدیریت-۷۲)

۱) ۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۶- توزیع میانگین‌های نمونه یک جامعه نامحدود با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۲ دارای واریانس ۱ خواهد بود، اگر تعداد نمونه عبارت باشد از: (مدیریت- ۷۴)

۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۳۳

۱۷- اگر $\bar{X}$ و $S_x^۲$ به ترتیب میانگین و واریانس یک نمونه ۳۶ تایی باشند، برآورد نقطه‌ای انحراف معیار میانگین نمونه‌ها، کدام است؟ (مدیریت- ۷۴)

۱) $\frac{S_X}{\sqrt{۳۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۶}S_X$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}S_X^۲$ ۴) $\frac{۱}{۵}S_X$

۱۸- انحراف معیار توزیع جامعه ۲۰ و انحراف معیار توزیع میانگین نمونه n تایی، ۲ می‌باشد، n چقدر است؟ (مدیریت-۸۱)

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

۱۹- صدا و سیما در نظر دارد که بر اساس یک نمونه‌گیری تصادفی، متوسط زمانی را که ساکنان منطقه بخصوصی روزانه صرف تماشای تلویزیون می‌کنند، برآوردکننده برآورد کلی آن است که متوسط زمان تماشای تلویزیون تحت تأثیر سن ساکنین منطقه است. کدامیک از روش‌های نمونه‌گیری برای این پژوهش مناسب است؟ (مدیریت-۸۱)

۱) خوشه‌ای ۲) نمونه‌گیری گروهی ۳) تصادفی ساده ۴) نمونه‌گیری با جایگذاری

۲۰- در یک جامعه آماری که از نظر صفت مورد نظر ناهمگون است، کدامیک از روش‌های نمونه‌گیری مناسب است؟
(مدیریت- ۸۳)

۱) سیستماتیک ۲) تصادفی ساده ۳) تصادفی گروهی ۴) هر سه مورد

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل ششم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۲ صحیح است.

۲- گزینه ۲ صحیح است.

۳- گزینه ۳ صحیح است.

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\bar{P}=\frac{x}{n}=\frac{۸}{۵۰}=۰/۱۶$$

تعداد کل خانوارهای دارای دوچرخه $=۲۵۰\times ۰/۱۶=۴۰$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

۶- گزینه ۱ صحیح است.

طبق قضیه حد مرکزی گزینه ۱ نادرست است.

۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{۶۷-۷۰}{\frac{۱۵}{\sqrt{۱۰۰}}}=-۲$$

$$P(\bar{X}<۶۷)=P(z<-۲)=P(z>۲)=۰/۰۲۲۸$$

$$P(۰<z<۲)=۰/۴۷۷۲\Rightarrow P(z>۲)=۰/۵-۰/۴۷۷۲=۰/۰۲۲۸$$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$P(s^۲>۱/۵\sigma^۲)=P\left(\frac{(n-۱)s^۲}{\sigma^۲}>۱/۵\times\frac{(۸)\sigma^۲}{\sigma^۲}\right)=P(\chi^۲>۱۲)$$

۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\frac{۶}{\sqrt{۶۴}}=\sigma_{\bar{x}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{۲}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{۳}{۸}=\frac{۶}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=۱۶\Rightarrow n=۲۵۶$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\mu_{\bar{X}}=\mu=۹۰$$

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}=\frac{۸}{\sqrt{۶۴}}=۱$$

$$P(\bar{X}<۸۸)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}<\frac{۸۸-۹۰}{۱}\right)=P(z<-۲)=۰/۰۲۲=\%۲/۲$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

۱۲- گزینه ۳صحیح است.

$$p=q=\frac{۱}{۲}\ \text{پیش فرض}\quad e=z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\rightarrow n=\frac{z^۲_{\frac{\alpha}{۲}}pq}{e^۲}=\frac{۴\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{(۰/۰۱)^۲}=۱۰/۰۰۰$$

۱۳- گزینه ۱ صحیح است.

چون واریانس نامعلوم است، از تخمین آن یعنی S_X^2 استفاده می‌کنیم.

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{n} = \frac{S_X^2}{25} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{S_X}{5}$$

۱۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0/5 \times 0/5}{100}} = \sqrt{\frac{0/25}{100}} = 0/05$$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{144}{n} \Rightarrow n = \frac{144}{4} \Rightarrow n = 36$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \Rightarrow 1 = \frac{4}{n} \Rightarrow n = 4$$

۱۷- گزینه ۲ صحیح است.

در صورت نامعلوم بودن واریانس، از تخمین آن یعنی S_X^2 استفاده می کنیم.

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{n} = \frac{S_X^2}{36} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S_X}{6}$$

۱۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$$

۱۹- گزینه ۱ صحیح است.

۲۰- گزینه ۳ صحیح است.

فصل هفتم

تخمین آماری پارامترهای جامعه

برآورد

به‌طور کلی برآورد پارامتر مجهول جامعه به دو بخش تقسیم می‌شود.

الف) برآورد نقطه‌ای　　ب) برآورد فاصله‌ای

الف) برآورد نقطه‌ای: هرگاه از مقدار آماره $(\hat{\theta})$ برای برآورد (تخمین) پارامتر (θ) استفاده کنیم، آنگاه برآورد نقطه‌ای آن پارامتر را به دست آورده‌ایم، در این حالت به مقدار این آماره برآورد نقطه‌ای پارامتر می‌گوئیم.

خواص مطلوب برای آماره‌ها (برآوردکننده‌های نقطه‌ای)

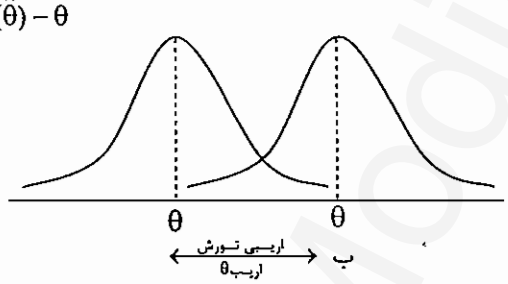
۱- نااریب (بدون تورش – ناتور)

هرگاه میانگین آماره $\hat{\theta}$ به‌طور دقیق بر θ (پارامتر) منطبق باشد آنگاه $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب خواهد بود.

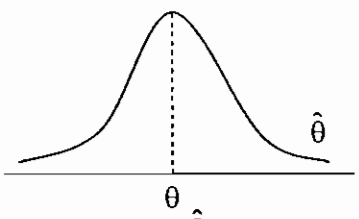
به عبارت دیگر: $E(\hat{\theta}) = \theta \longleftrightarrow \hat{\theta}$ برای θ نااریب است

اریبی (تورش): در صورتیکه $E(\hat{\theta})$ با θ متفاوت باشد $\hat{\theta}$ را اریب می‌نامیم و مقدار اریبی عبارتست از:

اریبی $= E(\hat{\theta}) - \theta$



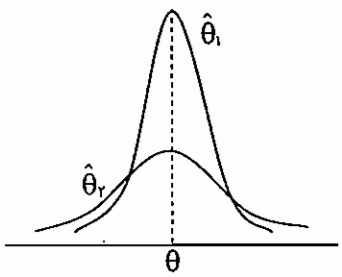
ب



الف $\hat{\theta}$ نااریب

اگر $E(\hat{\theta}) = \theta \Rightarrow$ مقدار اریب $= 0 \Rightarrow$ اریب $= E(\hat{\theta}) - \theta = 0$

۲- شرط کارائی برآوردکننده نااریب (حداقل واریانس):



$\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$ هر دو برآوردکننده‌های نااریب برای θ هستند.

ولی $\hat{\theta}_1$ از $\hat{\theta}_2$ کاراتر است چون واریانس کمتری دارد.

شرط کاراتر بودن $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$ این است که:

$\hat{\theta}_1$ از $\hat{\theta}_2$ کاراتر است $\longleftrightarrow Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$

۳- شرط سازگاری (پایداری)

آماره (برآوردکننده) $\hat{\theta}$ را برای پارامتر θ سازگار گوئیم هرگاه یکی از دو شرط برقرار باشد:

الف) در صورتیکه n به سمت ∞ میل کند واریانس آماره $\hat{\theta}$ به سمت ۰ میل کند $\leftarrow \lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$

ب) در صورتیکه n به سمت ∞ میل کند آماره $\hat{\theta}$ به سمت پارامتر θ میل کند $\leftarrow \lim_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta$

۴- حداقل میانگین مجذور خط (MSE)

در بین دو برآوردکننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر است که «حداقل معنای MSE» یا حداقل «مقدار میانگین مجذور خطا» را داشته باشد.

اگر برآوردکننده‌ها نااریب باشند $MSE = Var(\hat{\theta})$ خواهد بود و حداقل میانگین مجذور خطا مکان حداقل واریانس یعنی شرط کارایی خواهد بود.

$$MSE = E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + (\text{اریبی})^2 \xrightarrow{\hat{\theta}\ \text{نااریب}} MSE = Var(\hat{\theta})$$

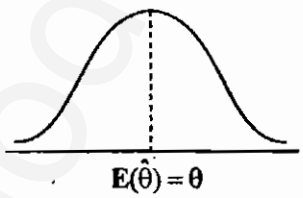
۱- ویژگی‌های برآوردکننده

همانطور که گفتیم در آمار استنباطی با استفاده از آماره‌های یک نمونه، پارامترهای جامعه را محاسبه کرده و در مورد آن تصمیم‌گیری می‌کنیم. واضح است که در یک توزیع پیوسته احتمال اینکه مثلاً $\bar{X}$ با میانگین جامعه مساوی شود تقریباً صفر می‌باشد. به همین دلیل برای استنباط یک پارامتر به وسیلهٔ آماره‌های یک نمونه‌گیری تصادفی از تخمین فاصله‌ای پارامتر استفاده می‌کنیم. اگر θ را پارامتر حقیقی و نامعلوم جامعه فرض کرده و برآورد کنندهٔ آن را با $\hat{\theta}$ نمایش دهیم، این برآوردکننده بهتر است بدون تورش (نااریب)، کارآ، دارای حداقل میانگین مجذور خطا و سازگار باشد.

۱-۱- بدون تورش (نااریب) بودن

اگر امید ریاضی $\hat{\theta}$ با مقدار θ برابر باشد، به $\hat{\theta}$ برآوردکننده نااریب (بدون تورش) $\hat{\theta}$ می‌گویند. در غیر اینصورت $\hat{\theta}$ را برآوردکننده اریب می‌نامند و مقدار اریب را از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنند:

$$\text{اریب} = E(\hat{\theta}) - \theta$$



نکته: آماره‌های نااریب مهم به شرح زیر هستند:

الف) نسبت جامعه P نسبت نمونه برای $\bar{P} \Rightarrow E(\bar{P}) = P$

ب) میانگین جامعه μ میانگین نمونه برای $\bar{x} \Rightarrow E(\bar{x}) = \mu$

ج) واریانس جامعه σ^2 واریانس نمونه برای $S^2 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$

د) میانگین جامعه μ برای (میانه) $Md \Rightarrow E(\mu d) = \mu$

نکته: به $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ برآورد کنندهٔ اریب و به $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ برآورد کنندهٔ نااریب می‌گویند.

۱-۲- کارآیی

در بین برآوردکننده‌های مختلف، برآوردکننده‌ای که واریانس کمتری داشته باشد کارآتر می‌باشد.

$$\text{کارآیی نسبی } \hat{\theta}_1 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_2 = \frac{\sigma^2\hat{\theta}_2}{\sigma^2\hat{\theta}_1} \begin{cases} >1 \rightarrow \hat{\theta}_1 \text{ از } \hat{\theta}_2 \text{ کاراتر} \\ <1 \rightarrow \hat{\theta}_2 \text{ از } \hat{\theta}_1 \text{ کاراتر} \end{cases}$$

۱-۳- حداقل میانگین مجذور خطا (MSE)

حداقل میانگین مجذور خطا هم نااریب بودن و هم واریانس را به طور مناسب مد نظر قرار می‌دهد.

$$MSE = E(\hat{\theta}-\theta)^2 = E(\hat{\theta})^2 - \theta^2$$

نکته: در جامعهٔ نرمال، میانگین و میانهٔ نمونهٔ هر دو برآوردکننده‌های نااریب از میانگین جامعه هستند، ولی چون واریانس میانگین نمونه از واریانس میانهٔ نمونه کمتر است، بنابراین میانگین نمونه کارآتر از میانه نمونه می‌باشد.

نکته:

$$\text{کارآیی نسبی } \hat{\theta}_1 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_2 = \frac{MSE(\hat{\theta}_2)}{MSE(\hat{\theta}_1)}$$

۱-۴- سازگاری

به برآوردکننده‌ای سازگار گفته می‌شود که وقتی که حجم نمونه به سمت بی نهایت میل کند، واریانس آن به سمت صفر میل نماید.

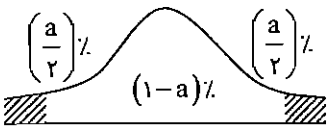
۲- تخمین فاصله‌ای

برآورد فاصله‌ای (فاصلهٔ اطمینان)

در برآورد فاصله‌ای با تعیین فاصله‌ای به نام فاصله اطمینان حدودی را مشخص می‌کنیم که با درصد اطمینان مشخصی $((1-\alpha)\%)$ یقین داریم پارامتر مجهول (θ) در آن فاصله قرار دارد.

هر فاصلهٔ اطمینان برای پارامتر θ، فاصله‌ای است به صورت $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ که با احتمال $(1-\alpha)\%$ پارامتر θ در آن قرار دارد، به عبارت دیگر:

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = (1-\alpha)\%$$



در این وضعیت:
- $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$: فاصله اطمینان
- $(1-\alpha)\%$: نسبت درجه اطمینان
- $\alpha\%$: درجه خطا

سطوح اطمینان $(1-\alpha)\%$ معمولاً به صورت ۹۰٪، ۹۵٪، ۹۹٪ در نظر گرفته می‌شود، در این صورت درجه خطای آن‌ها $\alpha\%$ به صورت ۱۰٪، ۵٪، ۱٪ خواهد بود.

مزیت برآورد فاصله‌ای به برآورد نقطه‌ای:

در برآورد فاصله‌ای به این علت که با تعیین یک فاصله به نام فاصله اطمینان درجه سمت و حدود خطا مشخص می‌شود دقت بیشتری نسبت به برآورد نقطه‌ای دارد.

به منظور تخمین پارامترهای جامعه، یک جفت عدد از آماره بدست می‌آید که به احتمال زیاد، پارامتر جامعه آماری در آن فاصله قرار دارد. به این فاصله، تخمین فاصله‌ای یا فاصله اطمینان برای پارامتر می‌گویند. عددی که حد بالای فاصله را می‌سازد، حد بالای اطمینان (UCL) و عدد کوچکی که حد پایین فاصله را می‌سازد، حد پایین اطمینان (LCL) نامیده می‌شود.

* بطور کلی تخمین فاصله‌ای، $\bar{X} \pm \varepsilon$ می‌باشد و ε مقدار ثابتی است که بوسیله آن UCL و LCL تعریف می‌شوند و دقت برآورد نامیده می‌شود.

نکته: فضای خارج $\bar{X} \pm \varepsilon$ را سطح خطا گفته و با α نمایش می‌دهند. بنابراین سطح اطمینان برابر است با $1-\alpha$ و از آنجایی که خطا می‌تواند در بالای UCL و پایین LCL رخ دهد، پس $\frac{\alpha}{2}$ درصد خطا پایین‌تر و $\frac{\alpha}{2}$ درصد خطا بالاتر از UCL رخ می‌دهد.

نکته: یک فاصله اطمینان خوب فاصله‌ای است که با کوچکترین عرض برآورد در برگیرندهٔ پارامتر جامعه باشد.

۳- تخمین فاصله‌ای میانگین جامعه (μ_x):

تخمین فاصله‌ای μ_x و یا مقدار ε تحت تأثیر سطح اطمینان و توزیع $\bar{X}$ است. توزیع $\bar{X}$ با شرایط زیر تعیین می‌شود:

۱- نوع توزیع جامعه آماری (نرمال یا غیر نرمال)

۲- کیفیت انحراف معیار جامعه (معلوم یا نامعلوم)

۳- اندازه نمونه (کوچک یا بزرگ)

ترکیبات مختلف از شرایط بالا حالات مختلفی را برای تخمین فاصله‌ای μ_x پدید می‌آورد که در ادامه در مورد آن‌ها صحبت می‌کنیم:

۳-۱) توزیع جامعه آماری نرمال و انحراف معیار آن معلوم

در این حالت تعداد اعضای نمونه هر اندازه باشد، توزیع $\overline{X}$ یک توزیع نرمال است و خواهیم داشت:

$$z=\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

داشتیم: $\mu_{\overline{x}}=\mu_x$ ، $\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$. لذا خواهیم داشت: $z=\frac{\overline{X}-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$

از طرف دیگر در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ درصد، نیمی از خطاها پایین‌تر و نیمی دیگر بالاتر از سطح اطمینان رخ می‌دهد که این سطح اطمینان متغیر تصادفی z را با $\pm z_{\frac{\alpha}{2}}$ نمایش می‌دهیم. در این حالت برای تعیین سطح اطمینان μ_x به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\le\mu_x\le\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

که در این رابطه $\overline{X}$ میانگین نمونه، σ_x انحراف معیار جامعه و n تعداد نمونه می‌باشد و برای تعیین $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ از جدول احتمال نرمال استاندارد استفاده می‌کنیم.

نکته مهم: مقدار $\varepsilon=Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ برابر است با فاصله‌ای از طرفین $\overline{X}$ که با احتمال $(1-\alpha)$ درصد، μ_x در آن فاصله قرار دارد.

مثال: در کارخانه تولید سس مایونز، وزن خالص سسهای تولیدی دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۲۴ گرم می‌باشد. به طور آزمایشی یک نمونه ۶۴ روزه از تولیدات را انتخاب کرده که میانگین وزن آن ۵۰۰ گرم بود. در سطح اطمینان ۹۰ درصد، میانگین واقعی وزن محصولات تولید شده چقدر خواهد بود؟

$$\alpha=\%10\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0/05}=1/645$$

$$\overline{X}=500\ ,\ \sigma_x=24 \qquad P(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\le\mu_x\le\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(500-1/645(\frac{24}{\sqrt{64}})\le\mu_x\le500+1/645(\frac{24}{\sqrt{64}})\right)=0/90$$

$$\Rightarrow P(495/065\le\mu_x\le504/935)=0/90$$

به عبارت دیگر با احتمال ۰/۹۰، میانگین وزن محصولات تولیدی شرکت بین ۴۹۵/۰۶۵ تا ۵۰۴/۹۳۵ می‌باشد.

۳-۲) توزیع جامعه آماری نرمال، انحراف معیار آن نامعلوم

در این حالت انحراف معیار نمونه (S_x) جایگزین انحراف معیار جامعه می‌شود و توزیع t استیودنت جایگزین توزیع نرمال می‌گردد و به صورت زیر می‌باشد:

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_x}{S_{\overline{X}}}$$

در اینجا نیز داریم: $S_{\overline{X}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_x}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

و برای تعیین سطح اطمینان μ_x از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.\frac{S_x}{\sqrt{n}}\le\mu_x\le\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.\frac{S_x}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

مثال: در شرکتی برای اینکه کیفیت کالای خود را تعیین کنند، در قسمت کنترل کیفیت، یک نمونه ۹ تایی از کالاها را انتخاب کرده‌اند و به کالاها از نمرهٔ ۱ تا ۲۰ امتیاز داده شده است، که مقادیر زیر بدست آمده است. در سطح اطمینان ۹۵٪، میانگین امتیاز کنترل کیفیت محصولات شرکت در چه فاصله‌ای قرار دارد.

$X = ۶,۱۱,۱۲,۱۴,۱۵,۱۶,۷,۱۸,۱۸$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۱۱۷}{۹} = ۱۳ \qquad S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^۲}{n-۱}} = \sqrt{\frac{۱۵۴}{۸}} = ۴/۳۹$$

$$\alpha = ۰/۰۵ \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} = t_{۰/۰۲۵, ۸} = ۲/۳۰۶$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۱} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}\right) = ۱ - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(۱۳ - ۲/۳۰۶(\frac{۴/۳۹}{۳}) \le \mu_x \le ۱۳ + ۲/۳۰۶(\frac{۴/۳۹}{۳})\right) = ۰/۹۵$$

$$\Rightarrow P(۹/۶۳ \le \mu_x \le ۱۶/۳۷) = ۰/۹۵$$

یعنی با احتمال ۰/۹۵، میانگین امتیاز کنترل کیفیت محصولات شرکت در فاصله ۱۶/۳۷-۹/۶۳ قرار دارد.

نکته مهم: براساس قضیه حد مرکزی وقتی که حجم نمونه (n) افزایش پیدا کند، توزیع t استیودنت نیز به سمت توزیع نرمال میل می‌کند. به عبارت دیگر اگر $n > ۳۰$ باشد، می‌توان بجای توزیع t استیودنت از توزیع z استفاده کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} \qquad P(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}) = ۱ - \alpha$$

۳-۳) توزیع جامعه غیر نرمال

در شرایطی که توزیع غیر نرمال باشد، ۳ حالت خواهیم داشت:

الف) اگر حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ باشد($n > ۳۰$) و انحراف معیار جامعه (σ_x) معلوم باشد:

$$P(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) = ۱ - \alpha$$

ب) اگر حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ باشد ($n > ۳۰$) و انحراف معیار جامعه (σ_x) نامعلوم باشد:

$$P(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}) = ۱ - \alpha$$

ج) اگر حجم نمونه کوچکتر از ۳۰ باشد ($n \le ۳۰$)، در این حالت از قضیه چی‌بی‌شف استفاده می‌شود. مطابق قضیه چی‌بی‌شف، احتمال قرار گرفتن میانگین نمونه در بین k انحراف معیار(σ_x) برابر است با:

$$P(\bar{X} - k\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le \bar{X} + k\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) = ۱ - \alpha$$

که در این رابطه $k = \sqrt{\frac{۱}{\alpha}}$ می‌باشد.

نکته مهم: در مورد رابطه چی‌بی‌شف، اگر انحراف معیار جامعه(σ_x) نامعلوم باشد، از $S_{\bar{x}}$ استفاده می‌کنیم که $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.

٤- تخمین فاصله‌ای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_۱ - \mu_۲)$

در این مورد با تعیین فاصله‌ای که احتمالاً تفاضل میانگین دو جامعه در آن قرار می‌گیرد، در واقع می‌خواهیم بدانیم که آیا اختلاف معنا داری بین میانگین دو جامعه وجود دارد یا خیر.

نکته مهم: با استفاده از تخمین‌های آماری مقدار UCL و LCL را بدست می‌آوریم و سپس در مورد آن مطابق موارد زیر تصمیم‌گیری می‌کنیم:

$$P(LCL \le \mu_۱ - \mu_۲ \le UCL) = ۱ - \alpha$$

الف) اگر علامت UCL و LCL هر دو مثبت باشد، بدین معنی است که در سطح اطمینان $1-\alpha$، μ_1 بزرگتر از μ_2 می‌باشد.

ب) اگر علامت UCL و LCL هر دو منفی باشد، بدین معنی است که در سطح اطمینان $1-\alpha$، μ_1 کوچکتر از μ_2 می‌باشد.

ج) اگر علامت UCL و LCL مختلف العلامه باشند، بدین معنی است که اختلاف معنا داری بین μ_1 و μ_2 وجود ندارد.

نکته: در مورد الف و ب هر چه قدر مطلق UCL و LCL بیشتر باشد، یعنی اختلاف بین μ_1 و μ_2 بیشتر خواهد بود.

نکته: اگر $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ آماره‌های نمونه‌های n_1, n_2 تایی باشند که از نمونه‌گیری از دو جامعه با میانگین μ_1 و μ_2 و انحراف معیار $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ بدست آمده باشند، خواهیم داشت:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} \Rightarrow \mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{X_1} - \mu_{X_2}$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{X}_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{\bar{X}_2}}{n_2}}$$

در مورد تخمین فاصله‌ای $\mu_1 - \mu_2$ نیز می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm \varepsilon \qquad \Leftarrow \text{تخمین فاصله‌ای } \mu_1 - \mu_2$$

مقدار ε بدون توجه به سطح اطمینان به شرایط زیر بستگی دارد:

الف) نوع توزیع آماری دو جامعه (نرمال یا غیر نرمال بودن)

ب) کیفیت انحراف معیار دو جامعه (معلوم یا نا معلوم بودن آن‌ها و مساوی یا نامساوی بودن آنها)

ج) مقدار درجهٔ آزادی $(df = n_1 + n_2 - 2)$

با توجه به ترکیب شرایط فوق، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱-۴) توزیع دو جامعه نرمال و σ_1, σ_2 معلوم باشند:

چون توزیع دو جامعه نرمال است، پس توزیع $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ نیز نرمال بوده و خواهیم داشت:

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

که در نتیجه در فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ خواهیم داشت:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}] = 1-\alpha$$

که در این حالت $\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$, $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

مثال: در نمونه‌گیری از دانشجویان مدیریت دو دانشگاه مختلف، مطابق جدول مقادیر زیر بدست آمده است. دو جامعه را در سطح اطمینان ۹۸٪ با هم مقایسه کنید.

	تعداد نمونه	$\bar{X}$	σ^2
دانشگاه تهران	۱۶	۱۶	۴/۲
دانشگاه شهید بهشتی	۲۵	۱۵	۱

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4/2}{16} + \frac{1}{25}} = \frac{11}{20}$$

$$\alpha = 0/02 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/01} = 2/326 \Rightarrow \varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 2/326 \times \frac{11}{20} = 1/28$$

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P[1-1/28 \le \mu_1 - \mu_2 \le 1+1/28] = 0/98 \Rightarrow P(-0/28 \le \mu_1 - \mu_2 \le 2/28) = 0/98$$

می‌توان نتیجه گرفت میان معدل دانشجویان دو دانشگاه اختلاف معناداری وجود ندارد.

۲-۴) توزیع دو جامعه نرمال و انحراف معیار جامعه‌ها نامعلوم و واریانس دو جامعه مساوی فرض شود:

در این حالت از توزیع t استیودنت استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \quad , \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$S_P^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \quad , \quad df=n_1+n_2-2$$

در این حالت تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2},df}.S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2},df}.S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

مثال: از دو جامعه آماری دو نمونه تصادفی به حجم $n_1=25$, $n_2=16$ گرفته‌ایم. اطلاعات زیر از آن‌ها به دست آمده است. اگر فرض تساوی واریانس‌های دو جامعه در نظر گرفته شود، فاصله اطمینان ۰/۹۰ را برای $\mu_1-\mu_2$ محاسبه نمایید؟

$$\bar{X}_1=50 \quad , \quad S_1=4$$

$$\bar{X}_2=47 \quad , \quad S_2=3$$

$$S_P^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\Rightarrow S_P^2=\frac{(24\times16)+(15\times9)}{41-2}=13/30\Rightarrow S_P=3/64$$

$$\alpha=0/10\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2},df}=t_{0/05,39}=1/6849$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2},df}.S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2},df}.S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[3-(1/6849)\times(3/64)\left(\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}\right)\le\mu_1-\mu_2\le3+(1/6849)\times3/64\left(\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}\right)]=0/90$$

$$P(1/0365\le\mu_1-\mu_2\le4/9635)=0/90$$

بدین معنی است که در سطح اطمینان ۰/۹۰، μ_1 بزرگتر از μ_2 می‌باشد.

محاسبه دقت یا خطا (e)

در برآورد فاصله برای میانگین جامعه دقت یا خطا عبارتست از:

$$e=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

در حالات مختلف به جای $z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ می‌توان استفاده کرد.

محاسبه طول فاصله (2e)

$$\text{فاصله اطمینان}:\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{طول فاصله}:\left(\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2e$$

$$\text{طول فاصله}=2e=2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

نکته:

۱) رابطه بین n و تعداد نمونه با e و 2e معکوس می‌باشد.

$$2e\sim e=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

۲) هرچه قدر طول فاصله (2e) بیشتر باشد، خطا (e) و دقت برآوردکننده بیشتر می‌شود.

۳) هرچه قدر تعداد نمونه بیشتر شود، خطا و در نتیجه طول فاصله کمتر می‌شود.

۴) با افزایش مقدار $z_{\frac{\alpha}{2}}$ یا $t_{\frac{\alpha}{2}}$ طول فاصله و همین طور خطا بیشتر می‌شود.

محاسبه تعداد نمونه (n)

در برآورد فاصله برای میانگین تعداد نمونه با توجه به مقدار e برابر است با:

$$e = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow e^2 z^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2}{e^2}$$

۳-۴) توزیع دو جامعه نرمال و انحراف معیار جامعه‌ها نامعلوم و واریانس دو جامعه نامساوی فرض شود:

در این حالت نیز از توزیع t استیودنت استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

و در فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ خواهیم داشت:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2},df} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},df} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}] = 1 - \alpha$$

مثال: در مثال قبل، اگر فرض عدم تساوی واریانس‌های دو جامعه پذیرفته شود، فاصله اطمینان ۰/۹۰ را برای $\mu_1 - \mu_2$ محاسبه نمایید؟

$$n_1 = 25 \quad , \quad \bar{X}_1 = 50 \quad , \quad S_1 = 4$$

$$n_2 = 16 \quad , \quad \bar{X}_2 = 47 \quad , \quad S_2 = 3$$

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \Rightarrow df = \frac{\frac{16}{25} + \frac{9}{16}}{\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^2}{24} + \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2}{15}} = 2/69 \simeq 3$$

$$\alpha = 0/10 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2},df} = t_{0/05,3} = 2/3534 \quad , \quad S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{16}} = 0/32$$

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2},df} \cdot S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},df} \cdot S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}] = 1 - \alpha$$

$$P[3 - 2/3534(0/32) \le \mu_1 - \mu_2 \le 3 + 2/3534(0/32)] = 0/90$$

$$P(2/247 \le \mu_1 - \mu_2 \le 3/753) = 0/90$$

می‌توان نتیجه گرفت که در سطح اطمینان ۰/۹۰، μ_1 بزرگتر از μ_2 می‌باشد.

نکته مهم: در هر دو حالت فوق(۲-۴ و ۳-۴) اگر $df = n_1 + n_2 - 2 > 30$ باشد، توزیع t به توزیع z نزدیک می‌شود، در نتیجه می‌توان از توزیع z برای تخمین فاصله‌ای استفاده کرد:

$$P\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right] - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\Bigg] = 1 - \alpha$$

۵- تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه (P):

قبلاً گفتیم که نسبت موفقیت یک جامعه (P) برابر است با $\frac{X}{n}$ که X تعداد موفقیت‌ها می‌باشد، و آمارهٔ متناظر با آن برابر است با $\bar{P}=\frac{X}{n}$. درضمن توزیع نمونه‌گیری $\bar{P}$ در نمونه‌های بزرگ، تقریبی از توزیع نرمال می‌باشد و داریم:

$$z=\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}$$

فاصله اطمینان برای نسبت موفقیت جامعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(\bar{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\le\bar{p}\le\bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}})=1-\alpha$$

مثال: یک نمونه ۱۰۰ تایی از شرکت کنندگان در آزمون راهنمایی و رانندگی گرفته شده است و مشخص شده است که ۷۴ نفر آنان قبلاً آموزش رانندگی دیده بودند. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت موفقیت بدست آورید.

$$\alpha=0/05\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0/025}=1/96\quad,\quad \bar{P}=\frac{X}{n}=\frac{74}{100}=0/74$$

$$p(\bar{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\le p\le\bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}})=1-\alpha$$

$$p[0/74-1/96(\sqrt{\frac{(0/74)(0/26)}{100}})\le p\le 0/74+1/96(\sqrt{\frac{(0/74)(0/26)}{100}})]=0/95$$

$$p(0/655\le p\le 0/825)=0/95$$

۶- تخمین فاصله‌ای تفاضل نسبت موفقیت دو جامعه (p_1-p_2):

اگر از دو جامعه آماری با نسبت موفقیت p_1 , p_2، دو نمونه نسبتاً بزرگ و مستقل انتخاب کنیم، در این صورت نسبت موفقیت دو نمونه برابر است با $\bar{p}_1=\frac{X_1}{n}$ و $\bar{p}_2=\frac{X_2}{n}$. آماره $(\bar{p}_1-\bar{p}_2)$ یک برآورد کنندهٔ نااریب از (p_1-p_2) با کمترین واریانس خواهد بود. بنابراین:

$$\mu_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\mu_{\bar{p}_1}-\mu_{\bar{p}_2}=p_1-p_2\quad,\quad \sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sigma^2_{\bar{p}_1}-\sigma^2_{\bar{p}_2}=\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

و توزیع نرمال استاندارد برای آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}}$$

فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای p_1-p_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

نکته: در برآورد فاصله برای نسبت جامعه دقت یا خطا (e) عبارتست از:

$$e=Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

محاسبه تعداد نمونه $\Rightarrow n=\frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\bar{p}\bar{q}}{e^2}$

طول فاصله $\Rightarrow 2e=2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$

$$P[(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}\le p_1-p_2\le(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}]=1-\alpha$$

نکته: در تحلیل تخمین فاصله‌ای نسبت به موفقیت دو جامعه (p_1-p_2)، همانند تخمین فاصله‌ای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1-\mu_2)$ عمل می‌کنیم.

مثال: برای مقایسه میزان قبولی در کنکور دو آموزشگاه، از هر یک از آنها نمونه‌گیری شده و نتایج زیر بدست آمده است. وضعیت دو آموزشگاه را در سطح اطمینان ۹۹٪ با هم مقایسه کنید.

	n	X (تعداد قبولی)	نسبت قبولی $(\overline{p})$
آموزشگاه الف	۴۰۰	۳۲	۰/۰۸
آموزشگاه ب	۹۰۰	۸۱	۰/۰۹

$$\overline{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{۳۲}{۴۰۰} = ۰/۰۸$$

$$\overline{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{۸۱}{۹۰۰} = ۰/۰۹$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{۰/۰۰۵} = ۲/۵۷۵ \qquad \sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2} = \sqrt{\frac{(۰/۰۸)(۰/۹۲)}{۴۰۰} + \frac{(۰/۰۹)(۰/۹۱)}{۹۰۰}} = ۰/۰۱۶۶$$

$$p[-۰/۰۱ - ۲/۵۷۵(۰/۰۱۶۶) \le p_1 - p_2 \le -۰/۰۱ + ۲/۵۷۵(۰/۰۱۶۶)] = ۰/۹۹$$

$$p(-۰/۰۵۳ \le p_1 - p_2 \le ۰/۰۳۳) = ۰/۹۹$$

یعنی در سطح اطمینان ۰/۹۹، اختلاف معنی داری میان نسبت موفقیت دو جامعه وجود ندارد.

۷- تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه (σ_x^2):

برای تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه (σ_x^2) با استفاده از نمونه انتخابی، از توزیع نمونه‌گیری کای مربع استفاده می‌کنیم که در این توزیع n تعداد نمونه و S_x^2 واریانس نمونه است و دارای رابطه زیر است:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \qquad df = n-1$$

فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای واریانس جامعه (σ_x^2) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P\left(\frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},df}} \le \sigma_x^2 \le \frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},df}}\right) = 1-\alpha$$

مثال: یک شرکت تولیدکننده مواد شوینده به منظور تعیین پراکندگی وزن محصولات خود یک نمونه ۴۵ تایی از محصولات خود را انتخاب کرده و واریانس آنها را محاسبه کرده است که نتیجه میانگین نمونه ۸۰۰ گرم و واریانس آن ۲۰ شده است. یک فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای واریانس محصولات شرکت تعیین کنید؟

$$\alpha = ۰/۰۵ \Rightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2},df} = \chi^2_{۰/۰۲۵,۴۴} = ۶۴/۲۰۱$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},df} = \chi^2_{۰/۹۷۵,۴۴} = ۲۷/۵۷۵$$

$$P\left(\frac{۴۴\times۲۰}{۶۴/۲۰۱} \le \sigma_x^2 \le \frac{۴۴\times۲۰}{۲۷/۵۷۵}\right) = ۰/۹۵$$

$$P(۱۳/۷۰ \le \sigma_x^2 \le ۳۱/۹۱) = ۰/۹۵$$

یعنی با احتمال ۰/۹۵، واریانس وزن محصولات شرکت بین ۱۳/۷۰, ۳۱/۹۱ خواهد بود.

۸- تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعه:

همانطور که قبلاً در آمار توصیفی گفته شد، گاهی برای مقایسه دو جامعه نمی‌توان به تنهایی از میانگین استفاده کرد و در نتیجه می‌بایست از شاخص‌های دیگری از جمله واریانس برای مقایسه دو جامعه استفاده کرد. به عبارت دیگر می بایست مقدار $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ را تعیین کرد. اما از آنجایی که در آمار استنباطی واریانس دو جامعه در دسترس نیست، برای تعیین تخمینی نسبت واریانس‌ها از توزیع خاصی استفاده می‌کنند.

توزیع موردنظر، توزیع F می‌باشد که دارای دو درجه می‌باشد. یکی $n_1 - 1$ که به آن درجهٔ آزادی صورت گویند و دیگری $n_2 - 1$ که به آن درجه آزادی مخرج گفته می شود.

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2 . \sigma_2^2}{S_2^2 . \sigma_1^2}$$

بر این اساس فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای نسبت واریانس دو جامعه به صورت زیر است:

$$P\left(\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(1-\frac{\alpha}{2}), df_1, df_2}} \right) = 1 - \alpha$$

نکته: $F_{(1-\frac{\alpha}{2}), df_1, df_2} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1}}$

نکته: برای تصمیم‌گیری در مورد تخمین فاصله‌ای بدست آمده برای نسبت واریانس دو جامعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر هر دو عبارت بزرگتر از یک باشد $(UCL, LCL > 1)$، در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ می‌توان گفت σ_1^2 بزرگتر از σ_2^2 است.

ب) اگر هر دو عبارت کوچکتر از یک باشد $(UCL, LCL < 1)$، در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ می‌توان گفت σ_1^2 کوچکتر از σ_2^2 است.

ج) در صورتیکه فاصله تخمین شامل یک باشد (از یک بگذرد)، بین واریانس دو جامعه اختلاف معنی داری وجود ندارد.

مثال: اگر یک نمونه ۵ تایی از نمرات دو ارزیاب به کارکنان سازمان الف به صورت زیر باشد، پراکندگی نمره‌ها را در سطح اطمینان ۹۰ درصد با هم مقایسه کنید (نمره‌ها از یک تا پنج باشد)

کارکنان	الف	ب	ج	د	و
ارزیاب ۱	۲	۳	۴	۴	۱
ارزیاب ۲	۱	۴	۵	۲	۲

$$\bar{X}_1 = 2/8 \Rightarrow S_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = 1/7$$

$$\bar{X}_2 = 2/8 \Rightarrow S_2^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = 2/7$$

$$\Rightarrow \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1/7}{2/7} = 0/63$$

$$\alpha = 0/10 \Rightarrow F_{\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2} = F_{0/05,4,4} = 6/39$$

$$F_{0/95,4,4} = \frac{1}{F_{0/05,4,4}} = 0/156$$

$$P\left(\frac{0/63}{6/39} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{0/63}{0/156} \right) = 0/90 \Rightarrow P\left(0/099 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 4/38 \right) = 0/90$$

در سطح اطمینان ۹۰٪، میان واریانس دو جامعه اختلاف معنی داری وجود ندارد.

۹- تعیین حجم نمونه برای برآورد میانگین جامعه

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_x}{\varepsilon} \right)^2 \qquad \varepsilon = \text{خطای حدی}$$

نکته: همانطور که مشاهده می‌شود، هر چه σ_x بزرگتر باشد، نیاز به حجم نمونه بزرگتری است.

مثال: برای برآورد فاصله اطمینان میانگین جامعه‌ای با واریانس ۱۶۰۰، چه تعداد نمونه انتخاب کنیم تا با احتمال ۰/۹۵، خطای حدی از ۳ تجاوز نکند؟

$$\alpha = ۰/۰۵ \quad , \quad Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۲۵} = ۱/۹۶$$

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \sigma_x}{\varepsilon}\right)^۲ \Rightarrow n = \left(\frac{۱/۹۶ \times ۴۰}{۳}\right)^۲ \Rightarrow n = ۶۸۳$$

۱۰- تعیین حجم نمونه برای برآورد نسبت موفقیت جامعه

$$n = \frac{Z^۲_{\frac{\alpha}{۲}} pq}{\varepsilon^۲} \qquad \varepsilon = \text{خطای حدی}$$

مثال: به منظور تعیین تأثیر آموزش بر موفقیت کارکنان یک سازمان تحقیقی می‌خواهیم انجام دهیم. در تحقیقات مشابه ۰/۷۰ افرادی که تحت آموزش قرار گرفته بودند، در شغل خود موفق بودند. در سطح اطمینان ۰/۹۹ حجم نمونه را چه اندازه بگیریم درصورتی که دقت برآورد ۰/۲ مدّ نظر باشد؟

$$\alpha = ۰/۰۱ \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۰۵} = ۲/۵۷۵ \quad , \quad P = ۰/۷ \Rightarrow q = ۰/۳ \quad , \quad \varepsilon = ۰/۲$$

$$n = \frac{Z^۲_{\frac{\alpha}{۲}} pq}{\varepsilon^۲} \Rightarrow n = \frac{(۲/۵۷۵)^۲ (۰/۷)(۰/۳)}{(۰/۲)^۲} = ۳۵$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- اگر بخواهیم بهترین برآوردکننده را از بین برآوردکننده‌های اریب و نااریب انتخاب کنیم، معیار گزینش عبارت خواهد بود از: (اقتصاد- ۷۶)

۱) کمترین واریانس
۲) کمترین میانگین مجذور خطا (MSE)
۳) نااریب بودن
۴) نااریب بودن به علاوه نااریب بودن مجانبی

۲- اگر در برآورد فاصله‌ای میانگین جامعه سطح اطمینان $(1-\alpha)$ زیاد شود، دقت برآورد چه تغییری خواهد کرد؟ (اقتصاد- ۷۶)

۱) به همان نسبت زیاد می‌شود.
۲) زیاد می‌شود.
۳) تغییری نمی‌کند.
۴) کم می‌شود.

۳- دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1, n_2 از جامعه نرمالی گرفته شده است و میانگین‌های $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ محاسبه شده است. برآوردکننده (تخمین زن) بدون تورش θ برای برآورد میانگین جامعه کدام است؟ (اقتصاد- ۷۷)

۱) $\theta = \frac{\bar{X}_1}{n_1} + \frac{\bar{X}_2}{n_2}$
۲) $\theta = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}$
۳) $\theta = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 n_2}$
۴) $\theta = n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2$

۴- اگر کمیت‌های $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از جامعه نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 باشد، کدامیک از توابع نمونه‌ای (Statistic) زیر تخمین‌زنی ناتور (Unbiassed) برای امید ریاضی (μ) در جامعه می‌باشد؟ (اقتصاد- ۷۷)

۱) $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum a_i X_i}{n}$
۲) $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum X_i}{n-1}$
۳) $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum X_i}{n}$
۴) $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_{max} - X_{min}}{n}$

۵- در یک نمونه تصادفی ۹۰۰ تایی از بازدیدکنندگان یک فروشگاه، تنها ۱۰٪ آنان کالای خاصی را خریده‌اند. تخمین فاصله‌ای (فاصله اطمینان) ۰/۹۵ برای P نسبت کل بازدید کنندگان که این کالا را خریداری می‌کنند، کدام است؟ (اقتصاد- ۷۷)

۱) ۰/۰۹۹ – ۰/۱۱۰۲
۲) ۰/۰۸۰۴ – ۰/۱۱۹۶
۳) ۰/۰۷۵ – ۰/۱۳۵۲
۴) ۰/۰۱۹۵ – ۰/۲۰۵

۶- اگر در یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی، میانگین $(\bar{X})$ را بدانید، برای برآورد فاصله‌ای میانگین جامعه دانستن کدامیک از اطلاعات زیر به صورت مجرد کفایت می‌کند؟ (اقتصاد- ۷۷)

۱) ضریب اطمینان
۲) مجموع مجذور انحرافات در جامعه
۳) مجموع مجذور مشاهدات در نمونه
۴) نرمال بودن جامعه اصلی

۷- دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1, n_2 از جامعه گرفته شده است و نسبت‌های $\bar{P}_1 = \frac{\bar{X}_1}{n_1}, \bar{P}_2 = \frac{\bar{X}_2}{n_2}$ محاسبه شده است. برآوردکننده (تخمین زن) بدون تورش $\hat{\theta}$ برای برآورد $P = \frac{X}{n}$ در جامعه کدام است؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) $\hat{\theta} = \frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2}$
۲) $\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$
۳) $\hat{\theta} = \frac{n_1X_1 + n_2X_2}{n_1 + n_2}$
۴) $\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 n_2}$

۸- کمیت تصادفی X بر طبق قانون دو جمله‌ای (برنولی) به صورت زیر توزیع شده است:

$$P_x(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

از این جامعه نمونه‌ای به حجم n انتخاب می‌کنیم. تخمین (برآورد) پارامتر P کدام است؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) $\hat{P} = \frac{1}{\bar{X}}$ ۲) $\hat{P} = \bar{X}$ ۳) $\hat{P} = n\bar{X}$ ۴) $\hat{P} = \frac{\hat{X}}{n}$

۹- از جامعه‌ای که کمیت تصادفی در آن بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 توزیع شده است. نمونه‌ای به حجم $n = 5$ بطور تصادفی انتخاب شده است و کمیت $\sigma^2 = 25$ به دست آمده است. اگر نقطه بحرانی $t = 2/776$ باشد، حداکثر خطای حدی یا دقت تخمین (e) با احتمال اعتماد (ضریب اطمینان) ۰/۹۵ کدام است؟

۱) ۲/۲۴ ۲) ۲/۷۷۶ ۳) ۳/۲۵ ۴) ۶/۲۲ (اقتصاد- ۷۸)

۱۰- اگر $S^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n-1}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب باشد، $E(S^2)$ برابر است با: (اقتصاد- ۷۸)

۱) σ_x^2 ۲) $\frac{n}{n-1}\sigma_x^2$ ۳) $\frac{n-1}{n}\sigma_x^2$ ۴) $\frac{n-1}{2}\sigma_x^2$

۱۱- نمونه‌ای تصادفی از قیمت کالایی در ۴۹ فروشگاه تهران دارای میانگین ۱۵۰ و انحراف معیار ۱۴ تومان بوده است. میانگین قیمت این کالا با ضریب اطمینان ۹۵٪ در چه فاصله‌ای قرار می‌گیرد؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) ۱۴۸/۰۸ - ۱۵۱/۹۲ ۲) ۱۴۸/۰۸ - ۱۵۷/۹۲

۳) ۱۴۶/۰۸ - ۱۵۳/۹۲ ۴) ۱۲۱/۰۸ - ۱۷۷/۹۲

۱۲- هیچ اطلاعی از نرخ بیکاری زنان در جامعه نیست و می‌خواهیم این نسبت را با یک درصد خطا در سطح اطمینان ۹۵٪ برآورد کنیم. حجم نمونه انتخابی تقریباً چقدر باید باشد؟ (اقتصاد- ۷۸)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰۰

۱۳- اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه دلخواه باشد، کدامیک از برآوردکننده‌های زیر برای μ نااریب (ناتور) است؟ (اقتصاد- ۷۹)

۱) $\hat{\mu}_2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i + 1)}{n}$ ۲) $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} - \frac{\sum_{i=1+k}^{n} X_i}{n-k}\right)$

۳) $\hat{\mu}_2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)}{n}$ ۴) $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} + \frac{\sum_{i=1+k}^{n} X_i}{n-k}\right)$

۱۴- متغیر X توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 دارد. از این جامعه نمونه‌ای به حجم ۳ انتخاب می‌شود. کارآیی تخمین زننده $\hat{X} = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{5}$ نسبت به $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ چیست؟ (اقتصاد- ۷۹)

۱) $\frac{5}{126}$ ۲) $\frac{25}{130}$ ۳) $\frac{25}{126}$ ۴) $\frac{25}{42}$

۱۵- S_X^2 برآورد نااریبی از σ_X^2 است. این بدان مفهوم است که اگر یک نمونه کوچک برای متغیر X از جامعه آماری بگیریم، واریانس نمونه: (اقتصاد- ۷۹)

۱) ممکن است بزرگتر و کوچکتر از σ_X^2 باشد. ۲) لزوماً کوچکتر از σ_X^2 است.

۳) لزوماً بزرگتر از σ_X^2 است. ۴) دقیقاً برابر σ_X^2 است.

۱۶- یک برآوردکننده بدون تورش (نااریب) برای واریانس جامعه (σ_X^2) کدام است؟ (اقتصاد- ۸۰)

۱) $\sigma_X^2 = \frac{\sum(X-\mu_X)^2}{n}$

۲) $\sigma_X^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}$

۳) $\sigma_X^2 = \frac{\sum(X-\sigma_X)^2}{n-1}$

۴) $\sigma_X^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n-1}$

۱۷- برآوردکننده‌ای بهتر است که دارای کمترین ..... باشد. (اقتصاد- ۸۰)

۱) اریب (تورش) ۲) انحراف معیار ۳) میانگین مجذور خطا ۴) واریانس

۱۸- کدامیک از موارد زیر در مورد فاصله اطمینان یک پارامتر آماری مصداق ندارد؟ هر قدر ..... ، طول فاصله اطمینان کمتر می‌شود. (اقتصاد- ۸۰)

۱) حجم نمونه بیشتر باشد. ۲) واریانس تخمین زننده نقطه‌ای کمتر شود.

۳) واریانس جامعه آماری کمتر شود. ۴) ضریب اطمینان بالاتر رود.

۱۹- اگر انحراف معیار جامعه ۲۰ باشد، حداقل تعداد نمونه لازم برای بدست آوردن فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد میانگین با خطایی به اندازهٔ ۵ کدام است؟ ($Z_{./.۲۵} = ۱/۹۶$, $Z_{./.۵} = ۱/۶۴۵$) (اقتصاد- ۸۰)

۱) ۸ ۲) ۶۲ ۳) ۱۵۷ ۴) ۳۴۷

۲۰- در یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۴۰۰$ از خانوارهای ساکن در شهر تهران مشخص شد که ۸۰ خانوار دارای اتومبیل هستند. فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت واقعی خانوارهای ساکن در شهر تهران که دارای اتومبیل هستند، کدام است؟ (اقتصاد- ۸۰)

۱) ۰/۱۶-۰/۲۴ ۲) ۰/۱۸-۰/۲۲ ۳) ۰/۱۴-۰/۲۶ ۴) ۰/۱۵-۰/۲۵

۲۱- اگر بخواهیم نسبت افراد بیکار در یک شهر بزرگ را با خطای ۰/۰۱ و ضریب اطمینان ۰/۹۵ برآورد کنیم، در صورت فقدان هر نوع اطلاع دیگر، حجم نمونه مناسب چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۰)

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۵۰۰

۲۲- در یک نمونه تصادفی ۳ تایی از کارمندان یک شرکت، حقوق ماهیانه پرداختی ۹۱، ۸۹ و ۹۰ هزار تومان بوده است. فاصله اطمینان ۹۰٪ برای میانگین حقوق ماهیانه کارمندان این شرکت کدام است؟ ($t = ۲/۹$) (اقتصاد- ۸۰)

۱) $۹۰ \pm \frac{۲/۹}{\sqrt{۳}}$ ۲) $۹۱ \pm \frac{۰/۹۷}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $۹۰ \pm ۰/۹۷$ ۴) $۹۰ \pm \frac{۵/۸}{۳\sqrt{۳}}$

۲۳- اگر بخواهیم متوسط درآمد خانوارها را در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ و حداکثر خطا $\varepsilon = ۰/۰۱$ در یک شهر تخمین بزنیم، به فرض اینکه واریانس جامعه برابر ۰/۲۵ باشد، حجم نمونه لازم کدام است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) ۱۹۲۰۸ ۲) ۲۴۰۱ ۳) ۴۸۰۲ ۴) ۹۶۰۴

۲۴- اگر یک نمونه تصادفی $x_1, x_2, ..., x_n$ از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 گرفته شده باشد، تخمین زننده زیر در مقایسه با $\bar{X}$ (میانگین نمونه) چگونه است؟ (اقتصاد- ۸۱)

$$\hat{\mu} = \frac{۲}{n(n+۱)}(X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ + ... + nX_n)$$

۱) کارآتر از $\bar{X}$ است.

۲) تخمین زننده با تورش از μ است.

۳) تخمین زننده بدون تورش است و نسبت به $\bar{X}$ کارآیی بیشتری دارد.

۴) تخمین زننده بدون تورش است و نسبت به $\bar{X}$ کارآیی کمتر دارد.

۲۵- U_1 و U_2 برآورد کنندهٔ نااریب (بدون تورش) و مستقل برای پارامتر θ هستند. ضریب a چقدر باشد تا آمارهٔ $T = ۲U_1 + aU_2$ یک برآوردکنندهٔ نااریب برای پارامتر θ باشد؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۶- در ساختن فاصله اطمینان برای میانگین، اگر حجم نمونه افزایش پیدا کند، کدام عبارت درست است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد.
۲) طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد.
۳) طول فاصله اطمینان بدون تغییر می‌ماند.
۴) واریانس نمونه‌ای، S^2 ، افزایش می‌یابد.

۲۷- از جمعیت فعال یک شهر بزرگ، یک نمونه تصادفی ۱۶۰۰ تایی انتخاب شده است و معلوم شده که ۳۲۰ نفر از آنها بیکارند. برآورد نرخ بیکاری در این شهر و انحراف معیار آن به ترتیب کدام است؟ (اقتصاد- ۸۱)

۱) ۰/۲۰،۰/۰۰۰۱ ۲) ۰/۱۵،۰/۱۶ ۳) ۰/۲۰،۰/۰۱ ۴) ۰/۱۵،۰/۰۰۱

۲۸- برآوردکنندهٔ بدون تورشی از پارامتر θ جامعه‌ای که دارای توزیع چگالی احتمال زیر است کدام است؟(اقتصاد- ۸۲)

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\hat{\theta}=X-2$ ۲) $\hat{\theta}=\frac{1}{2}X$ ۳) $\hat{\theta}=2X$ ۴) $\hat{\theta}=X$

۲۹- برای تخمین میانگین μ در جامعه‌ای با واریانس σ^2، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۳ را انتخاب کرده و سه تخمین‌زن زیر را در نظر می‌گیریم: (اقتصاد- ۸۲)

i) $w_1=\frac{x_1+x_2+x_3}{6}$

ii) $w_1=\frac{x_1+2x_2+3x_3}{6}$

iii) $w_1=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

که x_1 و x_2 و x_3 مقادیر مشاهده شده در نمونه می‌باشند، آنگاه:

۱) w_2 و w_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند و w_2 نسبت به w_3 کارآتر است.
۲) w_2 و w_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند و w_3 نسبت به w_2 کارآتر است.
۳) w_1 و w_2 و w_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند.
۴) w_1 و w_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ بوده و w_3 نسبت به w_1 کارآتر است.

۳۰- مقدار فروش یک شرکت تجاری که دارای توزیع نرمال است، در یک نمونه تصادفی ۳ تایی ۲۰، ۲۲ و ۲۱ میلیون تومان بوده است. فاصله اطمینان $1-\alpha$ درصد برای میانگین فروش کدام است؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) $21\pm\frac{2}{\sqrt{3}}t_{\frac{\alpha}{2},2}$ ۲) $21\pm\frac{1}{\sqrt{3}}t_{\frac{\alpha}{2},2}$ ۳) $21\pm\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}}$ ۴) $21\pm\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}}$

۳۱- در یک جامعه نرمال احتمال اینکه واریانس یک نمونه تصادفی ۸۱ تایی کمتر از واریانس جامعه باشد، کدام است؟ (اقتصاد- ۸۲)

۱) $P(\chi^2_{(80)}\le 81)$ ۲) $P(F_{(1,80)}\le 5)$ ۳) $P(F_{(80,1)}\le 6)$ ۴) $P(\chi^2_{(80)}\le 80)$

۳۲- بمنظور برآورد نسبت خاصی در جامعه با خطای ۱۰ درصد و ضریب اطمینان ۹۵ درصد، حداقل حجم نمونه مناسب چقدر است؟ $(Z_{0/025}=2)$ (اقتصاد- ۸۲)

۱) ۳۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۴۰۰

۳۳- براساس نمونه‌ای تصادفی شامل ۲ مشاهده دو برآوردکننده μ (میانگین جامعه) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\bar{X}=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2 \qquad w=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$$

آنگاه: (اقتصاد- ۸۲)

۱) $\bar{x}$ و w نااریب (بدون تورش) اند. $var(\bar{x})>var(w)$ است.

۲) $\bar{x}$ و w اریب اند. $var(\bar{x})>var(w)$ است.

۳) $\bar{x}$ و w نااریب اند. $var(\bar{x})<var(w)$ است.

۴) $\bar{x}$ اریب و w نااریب است و $var(\bar{x})>var(w)$ است.

۳۴- قیمت کالایی در سطح شهر دارای توزیع نرمال است. این کالا در سه مغازه که بطور تصادف انتخاب شده است دارای قیمت‌های ۲۵، ۲۴ و ۲۶ تومان بوده است. فاصله اطمینان $1-\alpha$ درصد برای میانگین قیمت این کالا در سطح شهر کدام است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $25\pm\frac{\sqrt{2}}{3}t_{\frac{\alpha}{2},2}$ ۲) $25\pm\frac{1}{\sqrt{3}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ۳) $25\pm\frac{1}{\sqrt{3}}t_{\frac{\alpha}{2},2}$ ۴) $25\pm\frac{\sqrt{2}}{3}Z_{\frac{\alpha}{2}}$

۳۵- حداقل حجم نمونه مناسب برای تخمین نسبت افرادی که در انتخابات آینده شرکت می‌کنند با خطای ۲ درصد و ضریب اطمینان ۹۵ درصد تقریباً چقدر است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۷۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۳۶- دو متغیر تصادفی مستقل X و Y دارای توزیع نرمال با میانگین‌های یکسان و واریانس‌های به ترتیب برابر با ۸ و ۴ می‌باشند. براساس دو نمونه تصادفی به اندازه‌های ۱۶ از جامعه (متغیر) X و ۸ از جامعه (متغیر) Y برآوردکننده‌های میانگین دو جامعه به ترتیب $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ بدست آمده توزیع $(\bar{X}-\bar{Y})$ کدام است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,12)$ ۲) $(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,1)$

۳) $(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,4)$ ۴) $(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,8)$

۳۷- معاون اداری مالی دانشگاهی براساس یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از دانشجویان مشاهده کرده است که ۸۰ نفر از آنها از کمک هزینه تحصیلی استفاده می‌کنند. فاصله اطمینان ۹۰ درصدی نسبت واقعی دانشجویانی که از کمک هزینه تحصیلی استفاده می‌کنند، کدام است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $0/8\pm0/0658$ ۲) $0/8\pm0/0784$ ۳) $0/8\pm0/0520$ ۴) $0/8\pm0/0822$

۳۸- وزن مسافران و بار همراه آنان در یک پرواز دارای توزیع نرمال است. براساس اطلاعات در مورد میانگین و واریانس از یک نمونه تصادفی n_1 تایی از وزن مسافران و یک نمونه تصادفی n_2 تایی مستقل از بار مسافران، فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای مجموع میانگین وزن مسافر و بار همراه وی (μ_1,μ_2) کدام است؟ (اقتصاد- ۸۳)

۱) $(\bar{X}_1+\bar{X}_2)\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ۲) $(\mu_1+\mu_2)\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

۳) $(\bar{X}_1+\bar{X}_2)\pm Z_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ ۴) $(\bar{X}_1+\bar{X}_2)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

۳۹- تابع چگالی احتمال x عبارت است از: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از k تخمین‌زن $\hat{\theta}=kx$ می‌تواند تخمین‌زنی ناتور (نااریب) برای پارامتر θ در جامعه باشد؟ (اقتصاد- ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰- کشاورزی دارای مزرعه مربع شکلی است که می‌خواهد مساحت آن را برآورد کند. وقتی طول مزرعه را اندازه می‌گیرد خطایی مرتکب می‌شود، بطوریکه طول مشاهده شده x متغیری تصادفی با میانگین μ و انحراف معیار σ است. او که از این خطا آگاه است تصمیم می‌گیرد دو مشاهده x_1 و x_2 را مستقل از هم به دست آورد. اگر وی از برآوردگر $\frac{x_1^2+x_2^2}{2}$ برای محاسبهٔ مساحت زمین خود استفاده کند مقدار تورش (اریب) عبارتست از: (اقتصاد- ۸۴)

۱) $2\sigma^2$ ۲) σ^2 ۳) $\frac{1}{2}\sigma^2$ ۴) صفر

۴۱- فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای نسبت واریانس دو جامعه با فرض نرمال بودن جوامع عبارتست از: (اقتصاد- ۸۴)

۱) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}$

۲) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}$

۳) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}.F_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$

۴) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}.F_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$

۴۲- در سطح اطمینان $\gamma=1-\alpha$ کدامیک از فواصل ذیل کوتاهتر است؟(اقتصاد- ۸۴)

۱) $\bar{X}-Z_{\frac{3\alpha}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

۲) $\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X}+Z_{\frac{3\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

۳) $\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{3}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{3}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

۴) $\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

مجموعه حسابداری

۴۳- اگر X_1 و X_2 و X_3 نمونه تصادفی به دست آمده از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، کدامیک از تخمین‌زن‌های زیر بدون تورش می‌باشند؟ (حسابداری- ۷۸)

$$T_1=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\qquad T_2=\frac{X_1+2X_3}{3}\qquad T_3=\frac{X_1+2X_2+3X_3}{3}$$

۱) T_1 و T_2 ۲) فقط T_1 ۳) T_2 و T_3 ۴) T_2 و T_3

۴۴- برآورد می‌شود که نسبت موفقیت در جامعه حداکثر $\frac{1}{2}$ باشد. تعداد نمونه آماری با دقت ۰/۰۳ در سطح اطمینان ۹۵ درصد عبارتست از: $(Z|\alpha=0/025=-1/96)$. (حسابداری-۷۹)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۰۶۸ ۳) ۱۴۹۵ ۴) ۲۱۳۵

۴۵- به منظور برآورد میانگین یک جامعه نرمال با واریانس ۴، در نظر است یک نمونه تصادفی انتخاب گردد. اگر دقت برآورد ۰/۴ باشد، حجم نمونه تحقیق در سطح خطای ۵٪، کدام است؟ (حسابداری- ۸۱)

۱) ۹۴ ۲) ۹۷ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۳

۴۶- اگر تعداد نمونه $n=5$، میانگین و انحراف معیار نمونه به ترتیب ۵۰ و ۱/۵۸۱ باشد، و جامعهٔ آماری نرمال باشد، مقدار خطای نمونه‌گیری (ε) در برآورد میانگین جامعه کدام است؟ (حسابداری-۸۲)

(راهنمایی: $Z_{0/025}=1/96\ ,\ t_{0/025}=2/776$)

۱) ۱/۳۹ ۲) ۱/۹۶ ۳) ۴/۳۸ ۴) ۶/۲۱

۴۷- اگر (آماره) E از پارامتر کوچکتر باشد، کدام عبارت درست است؟ (حسابداری- ۸۳)

۱) آماره کارآ است.
۲) آماره دارای اریبی است.
۳) آماره دارای کمترین واریانس است.
۴) باید نوع آماره برای اظهار نظر مشخص باشد.

۴۸-آماره $\bar{x}=\frac{\sum X}{N}$ برای تخمین نقطه‌ای μ_X تعریف شده است شرط نااریب (بدون تورش) بودن آن کدام است؟(مدیریت ۷۵)

۱) $E(\bar{x})=\mu_x$ ۲) $E(\bar{x})\geq\mu_x$ ۳) $E(\bar{x})\geq 0$ ۴) $E(\bar{x})\leq\mu_x$

۴۹- اگر $\bar{x}$, S_x^2 به ترتیب میانگین و واریانس یک نمونه ۳۶ تایی باشد، برآورد نقطه‌ای انحراف معیار میانگین نمونه‌ها کدام است؟(۷۵)

۱) $\frac{S_x}{\sqrt{35}}$ ۲) $\frac{S_x}{6}$ ۳) $\frac{S_x^2}{36}$ ۴) $\frac{S_{\bar{x}}}{5}$

۵۰- تغییر قطر یک بلبرینگ بصورت نرمال با میانگین ۲/۵ سانتی متر و انحراف معیار ۰/۰۰۹ سانتی‌متر است. تابع توزیع میانگین نمونه‌های ۹تایی از این بلبرینگ‌ها چه تابع توزیعی را داراست و انحراف معیار آن چقدر است؟(سراسری ۷۷)

۱) دو جمله‌ای، ۰/۰۰۱- ۲) پواسون، ۰/۰۰۹ ۳) یکنواخت، ۰/۰۰۲ ۴) نرمال، ۰/۰۰۳

۵۱- برآورد فاصله‌ای $\mu_2-\mu_1$ در دامنه (۱۰ و ۶-)بدست آمده است . در سطح خطای ۰/۰۵ کدام گزینه صحیح است؟ (۷۷)

۱) μ_1,μ_2 اختلاف معنی‌داری با همدیگر ندارند ۲) μ_1 از μ_2 کوچکتر است.

۳) μ_1 از μ_2 بزرگتر است ۴) چنین تخمینی برای $\mu_1-\mu_2$ غیرممکن است.

۵۲- اگر نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نرمال انتخاب شده باشد.

$(\Sigma(x-\bar{x})^2=172/28\ ;\Sigma x=1008\ ,\ n=120$

فاصله اطمینان ۹۹٪ برای میانگین جامعه برابر است با:(سراسری ۷۸) {راهنمایی $(z|\alpha=0/005)=2/575$}

۱) (۸/۶۸۲، ۸/۱۱۸) ۲) (۱۰/۶۸۲، ۱۰/۱۱۸)

۳) (۱۲/۸۲۴، ۱۲/۱۲۴) ۴) (۱۴/۸۲۴، ۱۴/۱۲۴)

۵۳- مأمور کنترل کیفیت درصدد تعیین حجم نمونه برای برآورد و درصد کالاهای معیوب است. وی معتقد است نسبت مذکور بیش از ۰/۲۰ نیست. اگر دقت برآورد ۰/۰۴ باشد حداقل حجم در سطح خطای ۵٪ چقدر است؟ $(Z|\alpha=0/025)=1/96$ (سراسری ۷۹)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۳۸۵ ۴) ۴۸۱

۵۴- فرض کنید مقدار t0/005 با درجه آزادی ۱۵ و ۱۶ ۲/۹۴۷ , ۲/۹۲۱ باشد. اگر در یک نمونه ۱۶ تایی مقادیر $S_x=4\ ,\ \bar{x}=2$ بدست آمده باشد یک برآورد فاصله‌ای ۹۹ درصد از میانگین جامعه کدام است؟ (۷۹)

۱) (۴/۹۲۱,-۰/۹۲۱) ۲) (۰/۹,-۱/۱) ۳) (۲/۹,۱/۱) ۴) (۴/۹۴۷,-۰/۹۴۷)

۵۵- انحراف معیار توزیع جامعه ۲۰ و انحراف معیار توزیع میانگین نمونه‌ای n تایی ۲ می‌باشد تعداد n چقدر ست؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

۵۶- صدا و سیما درنظر دارد که بر اساس یک نمونه گیری تصادفی ، متوسط زمانی را که ساکنان منطقه بصورت روزانه صرف تماشای تلویزیون می‌کنند بر آورد کند. برآورد کلی آن است که متوسط زمان تماشای تلویزیون تحت تأثیر سن ساکنان منطقه است . کدام گزینه از روش‌های نمونه گیری برای این پژوهش مناسب است؟ (۸۱)

۱) خوشه‌ای ۲) نمونه‌گیری گروهی ۳) تصادفی ساده ۴) نمونه‌گیری با جایگزینی

۵۷- با توجه به اطلاعات به دست آمده از نمونه‌گیری به شرح زیر فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه کدام است؟ (۸۱) $\left(n=25\ ,\ \bar{x}=3/2\ ,\ S^2=0/2\ ,\ t_{0/025,24}=2/064\ ,\ Z_{0/25}=1/96\right)$

۱) (۳/۳۸۵,۳/۰۱۵) ۲) (۳/۲۱۵۶,۳/۱۸۴۴)

۳) (۳/۴۹۵,۳/۱۲۵) ۴) (۳/۴۴۸۶,۳/۲۸۴۴)

۵۸- از جامعه‌ای که متغیر تصادفی x بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی μ و واریانس $\sigma^2 = 100$ توزیع شده است برای تخمین پارامتر μ نمونه تصادفی n تایی انتخاب می‌شود اگر دقت برآورد ± 2 باشد و میزان سطح اطمینان ٪۹۵ باشد حجم نمونه (n) چه قدر است ؟ (سراسری ۸۲)

راهنمایی: $\int_{-4}^{-2} f(y)dy = \%225$, $\int_{-4}^{-1/96} f(z)dz = \%25$

۱) ۹۷ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۲ ۴) ۴۰۰

۵۹- در یک جامعه آماری که از نظر صنعت مورد نظر ناهمگون است کدام یک از روش‌های نمونه گیری مناسب است؟ (سراسری ۸۳)

۱) سیستماتیک ۲) تصادفی ساده ۳) تصادفی گروهی ۴) هر سه مورد

۶۰- آماره $\bar{x}$ یک آماره سازگار (consistance) است چون وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند $\bar{x}$ به سمت.... میل می‌کند؟ (۸۳)

۱) صفر ۲) μ_x ۳) $N.\mu_x$ ۴) ∞

۶۱- از قاعده چی بی‌شف در کدام موارد زیر برای تخمین μ_x استفاده می‌شود؟ (سراسری ۸۳)

۱) توزیع $\bar{x}$ نرمال باشد. ۲) توزیع $\bar{x}$ نامعلوم باشد.

۳) توزیع جامعه آماری نرمال باشد. ۴) توزیع $\bar{x}$ از نوع t استیودنت باشد.

۶۲- کدام‌یک از برآورد گرها از واریانس جامعه نااریب (بدون تورش) می‌باشند؟

۱) $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n-1}$ ۲) $S^2 = \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n-1}$ ۳) $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$ ۴) $S^2 = (\bar{x} - \mu)^2$

۶۳- به منظور برآورد میانگین جامعه براساس یک نمونه تصادفی ۲تایی، برآوردکننده‌های A و B زیر پیشنهاد شده‌اند. برای تشخیص آن که کدام یک مناسب‌تر است چه ملاکی کفایت می‌کند؟ $B = \frac{x_1 + x_2}{2} + 2$ $A = \frac{2x_1 + 3x_2}{5}$

۱) تورش ۲) واریانس ۳) واریانس + (تورش) ۴) واریانس + تورش

۶۴- برای تخمین نسبت موفقیت‌ها در جامعه‌ای دو نمونه تصادفی مستقل به حجم n_1 و n_2 از جامعه گرفته و برآوردکننده $\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 - n_2}$ پیشنهاد شده است که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت‌ها در نمونه اول و دوم است. کمیت انتظاری (امید ریاضی) این برآوردکننده کدام است؟

۱) P ۲) $\frac{2\mu x}{n_1 + n_2}$ ۳) $\frac{P_1 + P_2}{n_1 + n_2}$ ۴) $\frac{2P}{n_1 + n_2}$

۶۵- به ازاء چه مقداری از k برآوردکننده $\hat{\theta} = \frac{x}{k}$ بر آوردکننده بدون تورش (نااریبی) از پارامتر θ جامعه‌ای است که دارای تابع احتمال گسسته مقابل است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۶۶- موجودی حساب‌های پس‌انداز قرض‌الحسنه یک بانک دارای میانگین ۸۰ هزار تومان با انحراف معیار ۱۶ هزار تومان است. در یک نمونه تصادفی ۶۴ تایی از این حساب‌ها، احتمال این که میانگین به دست آمده بیشتر از ۸۴ هزار تومان باشد، چقدر است؟

۱) ٪۲/۵ ۲) ٪۵ ۳) ٪۴۵ ۴) ٪۴۷/۵

۶۷- اگر بخواهیم نرخ بیکاری را در سطح معنی‌داری $\alpha = \%5$ و حداکثر حاشیه خطای $e = 0/01$ برآورد کنیم، حجم نمونه لازم تقریباً چقدر باید باشد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰۰ ۴) ۴۰/۰۰۰

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۱ صحیح است.

بهترین برآوردکننده، برآوردکننده نااریبی است که کمترین واریانس را داشته باشد.

۲- گزینه ۴ صحیح است.

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(\hat{\theta})=E\left(\frac{n_1\overline{X}_1+n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2}\right)=\frac{n_1E(\overline{X}_1)+n_2E(\overline{X}_2)}{n_1+n_2}=\frac{n_1\mu+n_2\mu}{n_1+n_2}=\frac{(n_1+n_2)\mu}{n_1+n_2}=\mu$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(\hat{\theta})=E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)=E\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)=\frac{E(\overline{X}_1)+E(\overline{X}_2)+...+E(\overline{X}_n)}{n}=\frac{\mu+\mu+...+\mu}{n}=\frac{n\mu}{n}=\mu$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$p\left(\overline{P}-Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\le P\le\overline{P}+Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right)=0/95$$

$$p\left(0/1-1/96\left(\sqrt{\frac{(0/1)(0/9)}{900}}\right)\le P\le 0/1+1/96\left(\sqrt{\frac{(0/1)(0/9)}{900}}\right)\right)=0/95$$

$$p(0/0804\le P\le 0/1196)=0/95$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\hat{P}=\frac{n_1\overline{p}_1+n_2\overline{p}_2}{n_1+n_2}=\frac{n_1\times\frac{X_1}{n_1}+n_2\times\frac{X_2}{n_2}}{n_1+n_2}=\frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$e=t_{\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}=2/776\times\frac{5}{\sqrt{5}}=6/22$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

همانطور که گفته شد برآوردکننده‌ای نااریب است که:

$$E(\hat{\theta})=\theta\Rightarrow E(S^2)=\sigma^2$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$P\left(\overline{X}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(150-1/96\times\frac{14}{\sqrt{49}}\le\mu\le 150+1/96\times\frac{14}{\sqrt{49}}\right)=0/95$$

$$P(146/08\le\mu\le 153/92)=0/95$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}pq}{e^2}\Rightarrow n=\frac{(2^2)(0/5)(0/5)}{(0/01)^2}=10000$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(\hat{\mu}_f)=E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}X_i}{k}+\frac{\sum_{i=k+1}^{n}X_i}{n-k}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}E(X_i)}{k}+\frac{\sum_{i=k+1}^{n}E(X_i)}{n-k}\right)$$

$$\Rightarrow E(\hat{\mu}_f)=\frac{1}{2}\left(\frac{k\mu}{k}+\frac{(n-k)\mu}{n-k}\right)=\frac{1}{2}(2\mu)=\mu$$

۱۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$Var(\hat{X})=Var\left(\frac{X_1+2X_2+3X_3}{5}\right)=\frac{\sigma^2+4\sigma^2+9\sigma^2}{25}=\frac{14}{25}\sigma^2$$

$$Var(\overline{X})=Var\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\frac{\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2}{9}=\frac{1}{3}\sigma^2$$

کارآیی نسبی برآوردکننده $\hat{X}$ نسبت به $\overline{X}$ $=\frac{Var(\overline{X})}{Var(\hat{X})}=\frac{\frac{1}{3}\sigma^2}{\frac{14}{25}\sigma^2}=\frac{25}{42}$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

برای برآوردکننده نااریب داریم:

$$E(S^2)=\sigma^2$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است.

۱۷- گزینه ۴ صحیح است.

۱۸- گزینه ۴ صحیح است.

۱۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow n=\frac{(1/96)^2\times(20)^2}{(5)^2}=62$$

۲۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{p}=\frac{X}{n}=\frac{80}{400}=0/2 \qquad 1-\alpha=0/95\Rightarrow \alpha/2=0/025\Rightarrow Z_{0/025}=1/96$$

$$p\left(\overline{P}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\le P\le \overline{P}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right)=1-\alpha$$

$$p\left(0/2-(1/96)\times\sqrt{\frac{(0/2)(0/8)}{400}}\le P\le 0/2+1/96\times\sqrt{\frac{(0/2)(0/8)}{400}}\right)=0/95$$

$$p(0/16\le P\le 0/24)=0/95$$

۲۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}pq}{\varepsilon^2}\Rightarrow n=\frac{(1/96)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{(0/01)^2}=10000$$

۲۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$\overline{X}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{91+89+90}{3}=90 \qquad S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}=\frac{(91-90)^2+(89-90)^2+(90-90)^2}{2}=1$$

$$P\left(\overline{X}-t_{\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+t_{\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(90-2/9\times\frac{1}{\sqrt{3}}\le\mu\le 90+2/9\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0/90$$

$$P\left(90-\frac{2/9}{\sqrt{3}}\le\mu\le 90+\frac{2/9}{\sqrt{3}}\right)=0/90$$

۲۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}\times\sigma^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow n=\frac{(1/96)^2\times(0/5)^2}{(0/01)^2}=9604$$

۲۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(\hat{\mu})=E\left[\frac{2}{n(n+1)}(X_1+2X_2+3X_3+\ldots+nX_n)\right]$$

$$\Rightarrow E(\hat{\mu})=\frac{2}{n(n+1)}\left[E(X_1)+2E(X_2)+\ldots nE(X_n)\right]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[\mu+2\mu+\ldots+n\mu\right]=\frac{2}{n(n+1)}\left[(1+2+\ldots n)\mu\right]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\mu\Rightarrow E(\hat{\mu})=\mu$$

در نتیجه برآوردکننده H_0 بدون تورش نااریب است.

$$Var(\hat{\mu})=Var\left[\frac{2}{n(n+1)}(X_1+2X_2+\ldots+nX_n)\right]$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\mu})=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[Var(X_1)+Var(2X_2)+\ldots+Var(nX_n)\right]$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[\sigma^2+4\sigma^2+9\sigma^2+\ldots+n^2\sigma^2\right]=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[(1+4+9+\ldots+\ldots+n^2)\sigma^2\right]$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\sigma^2=\frac{2n(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2$$

بنابراین برآوردکننده $\hat{\mu}$ بدون تورش نااریب است.

$$Var(\hat{\mu})=Var\left[\frac{2}{n(n+1)}(X_1+2X_2+\ldots+nX_n)\right]$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\mu})=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[Var(X_1)+Var(2X_2)+\ldots+Var(nX_n)\right]$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[\sigma^2+4\sigma^2+9\sigma^2+\ldots+n^2\sigma^2\right]=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left[(1+4+9+\ldots+\ldots+n^2)\sigma^2\right]$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\sigma^2=\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2$$

بنابراین برآوردکننده $\hat{\mu}$ در مقایسه با $\overline{X}$ کارآیی کمتری دارد.

۲۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(u_1)=\theta\quad,\quad E(u_2)=\theta$$

$$E(T)=\theta\Rightarrow E(au_1+2u_2)=\theta\Rightarrow aE(u_1)+2E(u_2)=\theta$$

$$a\theta+2\theta=\theta\Rightarrow a\theta+2\theta-\theta=0\Rightarrow(a+1)\cdot\theta=0\Rightarrow a+1=0\Rightarrow a=-1$$

۲۶- گزینه ۱ صحیح است.

همانطور که قبلاً گفته شد فاصله اطمینان برای میانگین به صورت زیر می باشد:

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

طبق رابطهٔ بالا هر چه حجم نمونه (n) افزایش یابد، طول فاصله اطمینان کاهش می یابد.

۲۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{p} = \frac{X}{n} = \frac{320}{1600} = 0/2$$

$$S_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(0/2)(0/8)}{1600}} = 0/01$$

۲۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$E(\hat{\theta}) = E(X) = \int_0^\theta \frac{2}{\theta} \times dx = \frac{X^2}{\theta} J_0^\theta = \theta$$

۲۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(w_1) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)\right) = \frac{1}{6}(\mu + \mu + \mu) = \frac{1}{2}\mu \neq \mu$$

$$E(w_2) = E\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) = \frac{1}{6}\left[E(X_1) + 2E(X_2) + 3E(X_3)\right] = \frac{1}{6}(\mu + 2\mu + 3\mu) = \mu$$

$$E(w_3) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) = \frac{1}{3}\left[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)\right] = \frac{1}{3}(\mu + \mu + \mu) = \mu$$

در نتیجه W_2 و W_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش هستند.

$$Var(w_3) = Var\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) = \frac{1}{36}\left[Var(X_1) + 4Var(X_2) + 9Var(X_3)\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left[\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2\right] = \frac{7}{18}\sigma^2$$

$$Var(w_3) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) = \frac{1}{9}\left[Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)\right] = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{1}{3}\sigma^2$$

چون W_3 نسبت به W_2 واریانس کمتری دارد، در نتیجه کارآتر است.

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{20 + 22 + 21}{3} = 21 \qquad S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(20-21)^2 + (21-21)^2 + (21-21)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(21 - t_{\alpha/2, 2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \mu \leq 21 + t_{\alpha/2, 2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \alpha$$

$$21 \pm t_{\alpha/2, 2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۳۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$P(S^2 \leq \sigma^2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right) = P(\chi^2_{n-1} \leq n-1) = P(\chi^2_{80} \leq 80)$$

۳۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$1 - \alpha = 0/95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/025} = 2 \qquad e = 0/10$$

$$n=\frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\times \bar{p}\bar{q}}{\varepsilon^2}\Rightarrow n=\frac{(2)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{(0/1)^2}=100$$

۳۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$E(\bar{X})=E\left(\tfrac{1}{2}X_1+\tfrac{1}{2}X_2\right)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

$$E(w)=E\left(\tfrac{1}{3}X_1+\tfrac{2}{3}X_2\right)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{2}{3}E(X_2)=\frac{1}{3}\mu+\frac{2}{3}\mu=\mu$$

پس $\bar{X}$ و W نااریب اند.

$$Var(\bar{X})=Var\left(\tfrac{1}{2}X_1+\tfrac{1}{2}X_2\right)=\frac{1}{4}Var(X_1)+\frac{1}{4}Var(X_2)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$Var(w)=Var\left(\tfrac{1}{3}X_1+\tfrac{2}{3}X_2\right)=\frac{1}{9}Var(X_1)+\frac{4}{9}Var(X_2)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\sigma^2$$

$$Var(\bar{X})<Var(W)$$

۳۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{25+24+26}{3}=25 \qquad S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{(25-25)^2+(24-25)^2+(26-25)^2}{2}=1$$

$$P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(25-t_{\alpha/2,2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\le\mu\le 25+t_{\alpha/2,2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\alpha$$

$$25\pm\frac{1}{\sqrt{3}}t_{\alpha/2,2}$$

۳۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$1-\alpha=0/95\Rightarrow \alpha/2=0/025\Rightarrow Z_{0/025}\simeq 2$$

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}\,pq}{\varepsilon^2}=\frac{(2)^2\times 1/2\times 1/2}{(0/02)^2}=2500$$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$E(X)=E(Y) \qquad Var(X)=8 \qquad Var(Y)=4$$

$$E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=0$$

$$Var(\bar{X}-\bar{Y})=Var(\bar{X})+Var(\bar{Y})=\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}=\frac{8}{16}+\frac{4}{8}=1\Leftarrow \text{مستقلند } Y,X$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})\approx N(0,1)$$

۳۷- گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{P}=\frac{X}{n}=\frac{80}{100}=0/8 \qquad 1-\alpha=0/90\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0/05\Rightarrow Z_{0/05}=1/645$$

$$P(\bar{p}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\le p\le\bar{p}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}})=1-\alpha$$

$$P\left(0/8-(1/645)\left(\sqrt{\frac{(0/8)(0/2)}{100}}\right)\le p\le 0/8+(1/645)\left(\sqrt{\frac{(0/8)(0/2)}{100}}\right)\right)=0/90$$

$$P(0/8-0/0658\le p\le 0/8+0/0658)=0/90$$

$$0/8\pm 0/0658$$

۳۸- گزینه ۳ صحیح است.

۳۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{\theta} = kx$$

شرط اینکه $\hat{\theta}$ نااریب (ناتور) باشد:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$E(kx) = \theta \Rightarrow kE(x) = \theta$$

چون X از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند، بنابراین:

$$E(X) = \frac{a+b}{۲} = \frac{۰+\theta}{۲} = \frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow k \times \frac{\theta}{۲} = \theta \Rightarrow \frac{k}{۲} = ۱ \Rightarrow k = ۲$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{S} = \frac{X_۱^۲ + X_۲^۲}{۲} \qquad \sigma^۲ = E(X^۲) - \mu^۲ \Rightarrow E(X^۲) = \sigma^۲ + \mu^۲$$

اریب (تورش) $= E(\hat{\theta}) - \theta = E(\bar{S}) - \mu^۲$

$$E(\bar{S}) = E\left(\frac{X_۱^۲ + X_۲^۲}{۲}\right) = \left(\frac{E(X_۱^۲) + E(X_۲^۲)}{۲}\right) = \frac{\sigma^۲ + \mu^۲ + \sigma^۲ + \mu^۲}{۲} = \sigma^۲ + \mu^۲$$

اریب (تورش) $E(\bar{S}) - \mu^۲ = \sigma^۲ + \mu^۲ - \mu^۲ = \sigma^۲$

۴۱- گزینه ۲ صحیح است.

۴۲- گزینه ۴ صحیح است.

مجموعه حسابداری

۴۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(T_۱) = E\left(\frac{X_۱ + X_۲ + X_۳}{۳}\right) = \frac{E(X_۱) + E(X_۲) + E(X_۳)}{۳} = \frac{\mu + \mu + \mu}{۳} = \mu$$

$$E(T_۲) = E\left(\frac{X_۱ + ۲X_۲}{۳}\right) = \frac{E(X_۱) + ۲E(X_۲)}{۳} = \frac{\mu + ۲\mu}{۳} = \mu$$

$$E(T_۳) = E\left(\frac{X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳}{۳}\right) = \frac{E(X_۱) + ۲E(X_۲) + ۳E(X_۳)}{۳} = \frac{\mu + ۲\mu + ۳\mu}{۳} = ۲\mu$$

۴۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$n = \frac{Z_{\alpha/۲}^۲ \cdot pq}{\varepsilon^۲} = \frac{(-۱/۹۶)^۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{(۰/۰۳)^۲} = ۱۰۶۸$$

۴۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$\alpha = ۰/۰۵ \Rightarrow Z_{\alpha/۲} = Z_{۰/۰۲۵} = ۱/۹۶$$

$$n = \frac{Z_{\alpha/۲}^۲ \cdot \sigma^۲}{\varepsilon^۲} = \frac{(۱/۹۶)^۲ \times (۲)^۲}{(۰/۴)^۲} = ۹۶/۰۴ = ۹۷$$

۴۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\varepsilon = t_{\alpha/۲, n-۱} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = ۲/۷۷۶ \times \frac{۱/۵۸۱}{\sqrt{۵}} = ۱/۹۶$$

۴۷- گزینه ۲ صحیح است.

اگر $E(\hat{\theta})$ برابر با θ نباشد، آماره $\hat{\theta}$ دارای اریب (تورش) است.

۴۸- گزینه ۱ صحیح است.

اریب آماره $\hat{\theta}$ را به صورت $E(\hat{\theta})-\theta$ تعریف می‌شود بنابراین شرط بدون تورش بودن آن $E(\bar{x})=\mu_x$ است.

۴۹- گزینه ۲ صحیح است.

چون تعداد اعضای نمونه بیش از ۳۰ می‌باشد مطابق قضیه حد مرکزی می‌توان بجای σ_x^2 از S_x^2 استفاده کرد بنابراین $S_{\bar{x}}=\frac{1}{6}S_x$

۵۰-گزینه ۴ صحیح است.

نوع توزیع نمونه‌ها نرمال است که دراین حالت $S_x=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},\bar{x}=\mu_x$ پس انحراف معیار نمونه‌ها نیز برابر ۰/۰۰۳ است

۵۱-گزینه ۱ صحیح است.

چون دو انتهای دامنه تخمینی هم علامت نیست به معنی این است که از صفر نیز رد می‌شود، بنابراین می‌توان گفت که اختلاف معنی‌داری میان μ_1 , μ_2 در سطح خطای ۵ درصد وجود ندارد.

۵۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{1008}{120}=8/4,S_x^2=\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{172/8}{119}=1/45\Rightarrow S_x\approx 1/2\Rightarrow S_{\bar{x}}=\frac{1/2}{\sqrt{120}}$$

چون تعداد اعضای نمونه بیش از ۳۰ است بنابراین می‌تواند از توزیع Z برای تخمین میانگین جامعه استفاده کرد

$$\alpha=1-0/99=0/01\Rightarrow \alpha/2=0/005\Rightarrow Z_{\alpha/2}=2/575$$

$$\varepsilon=Z_{\alpha/2}.S_{\bar{x}}=2/575\times\frac{1/2}{\sqrt{120}}=0/282\Rightarrow \bar{x}\pm\varepsilon\Rightarrow$$

$$(8/4-0/282\ ,\ 8/4+0/282)\Rightarrow(8/118\ ,\ 8/682)$$

۵۳- گزینه ۳ صحیح است.

میزان دقت برآورد یا همان ε در تخمین نسبت موفقیت از رابطه $Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$ بدست می‌آید بنابراین:

$$\varepsilon^2=Z^2\left(\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}\right)\Rightarrow 0/0016=\frac{(1/96)^2(0/2)(0/8)}{n}\Rightarrow$$

$$n=\frac{(1/96)^2(0/2)(0/8)}{0/0016}=384/2\approx 385$$

۵۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\frac{4}{4}=1,\ \bar{x}=2\Rightarrow\varepsilon=T_{\alpha/2,n-1}\times S_{\bar{x}}=t_{0/005,15}\times 1=2/947\Rightarrow\bar{x}\pm\varepsilon\Rightarrow$$

$$(2-2/947\ ,\ 2+2/947)\Rightarrow(-0/947\ ,\ 4/947)$$

۵۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\Rightarrow 2=\frac{20}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=10\Rightarrow n=100$$

۵۶- گزینه ۲ صحیح است.

چون جامعه موردنظر همگن نیست و هر یک از گروهها نتایج متفاوتی را ممکن است ایجاد کنند بهتر است از روش گروهی استفاده کرد تا از تمام گروه‌ها با نسبت مناسب انتخاب شده باشد.

۵۷- گزینه ۱ صحیح است.

چون تعداد اعضای نمونه کمتر از ۳۰ است و انحراف معیار جامعه نامعلوم است بنابراین از توزیع استیودنت استفاده می‌شود.

$$\alpha=1-0/95=0/05\Rightarrow\varepsilon=\frac{S_x}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,24}=\frac{0/2}{\sqrt{25}}\cdot 2/064\approx 0/185\Rightarrow P(\bar{x}-\varepsilon\le\mu_x\le\bar{x}+\varepsilon)=\%95$$

$$\Rightarrow P(۳/۲-۰/۱۸۵ \le \mu_x \le ۳/۲+۰/۱۸۵)=\%۹۵$$
$$\Rightarrow P(۳/۰۱۵ \le \mu_x \le ۳/۳۸۵)=\%۹۵$$

۵۸- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه توزیع جامعه نرمال و انحراف معیار آن معلوم است از توزیع z برای تخمین می‌توان استفاده کرد و بنابراین:

$$|\varepsilon|=|Z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}|\Rightarrow ۲=|-۱/۹۶\times\frac{۱۰}{\sqrt{n}}|\Rightarrow \sqrt{n}=\frac{۱۹/۶}{۲}=۹/۸=n\Rightarrow ۹۶/۰۴\cong ۹۷$$

۵۹- گزینه ۳ صحیح است.

چرا که به این وسیله از گروههای مختلف متناسب با وزن آنها در جامعه در نمونه موجود می‌باشد و نتایج صحیح‌تری را ارائه می‌کند.

۶۰- گزینه ۲ صحیح است.

چون آماره $\overline{x}$ برای تخمین μ_x بکار می‌رود در صورتی که n به سمت بینهایت میل کند می‌بایست به سمت μ_x میل کند.

۶۱- گزینه ۲ صحیح است.

در زمانی که توزیع $\overline{x}$ نامعلوم باشد از این قاعده استفاده می‌شود.

۶۲- گزینه ۳ صحیح است.

در یک جامعه با میانگین μ در صورتیکه $\overline{x}$ میانگین نمونه باشد، برآوردهای نااریب برای واریانس جامعه $\sigma^۲$

$$S^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲}{n}$$
$$S^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})^۲}{n-۱}$$

۶۳- گزینه ۴ صحیح است.

در بین دو برآوردکننده دلخواه اریب یا نااریب برآوردکننده‌ای بهتر است که کمترین واریانس و مجذور اریبی را داشته باشد (حداقل میانگین مجذور خطا MSE)

$E(A)=\frac{۲\mu+۳\mu}{۵}=\mu\rightarrow$ نااریب A

$E(B)=\frac{\mu+\mu}{۲}+۲=\mu+۲\neq\mu\rightarrow$ اریب B

۶۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$E(x_۱)=n_۱P$$
$$E(x_۲)=n_۲P$$
$$E(\hat{P})=E\left[\frac{x_۱+x_۲}{n_۱+n_۲}\right]=\frac{۱}{n_۱+n_۲}\left[E(x_۱)+E(x_۲)\right]=\frac{n_۱P+n_۲P}{n_۱+n_۲}=P$$

۶۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x)=\theta^x(۱-\theta)^{۱-x} & x=۰,۱ \\ f(x)=۰ & \text{برای سایر مقادیر} \end{cases}$$

$\hat{\theta}$ برآوردکننده نااریب برای θ است هرگاه:

$$E(\hat{\theta})=\theta$$
$$\begin{cases} E(\hat{\theta})=\theta\rightarrow E(\frac{x}{k})=\theta\rightarrow\frac{E(x)}{k}=\theta\xrightarrow{(۱)}\frac{\theta}{k}=\theta\rightarrow\boxed{k=۱} \\ \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline f(x) & ۱-\theta & \theta \end{array}\rightarrow E(x)=\sum xP=۰\times(۱-\theta)+۱\times\theta=\theta \end{cases}$$

۶۶- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به قضیه حد مرکزی در یک نمونه $n>۳۰$ توزیع میانگین نمونه $(\overline{x})$، نرمال خواهد بود.

$$\begin{cases} P(\bar{x} > ۸۴) = P\left(\dfrac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \dfrac{۸۴-۸۰}{\dfrac{۱۶}{\sqrt{۶۴}}}\right) = P(z > ۲) = ۰/۰۲۵ \\ \mu = ۸۰ \ , \ \sigma = ۱۶ \ , \ n = ۶۴ \end{cases}$$

$$P(-۲ < z < ۲) \sim ۰/۹۵ \rightarrow P(z > ۲) = \frac{۱-۰/۹۵}{۲} = ۰/۰۲۵$$

۶۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$e = z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow n = \frac{z^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}pq}{e^{۲}} = \frac{۴ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{(۰/۰۱)^{۲}} = ۱۰/۰۰۰$$

$e = ۰/۰۱$

$p = q = \frac{۱}{۲}$ پیش فرض

فصل هشتم

آزمون فرض آماری

۱- آزمون فرض:

هر اظهار نظر و حکمی درباره پارامترها و یا توزیع جامعه را یک فرض آماری می‌نامند که ممکن است صحیح یا غلط باشد. در بسیاری از اوقات از آمار به عنوان وسیله‌ای برای اثبات صحت و سقم ادعاها و فرضیه ها استفاده می‌شود. فنون آماری که برای این منظور استفاده می‌شود را آزمون فرض آماری می‌گویند. در واقع بوسیله آزمون فرض آماری تعیین می‌کنیم که آیا با توجه به اطلاعات بدست آمده از داده‌های نمونه، فرضیه ما درباره کل جامعه، تایید یا رد می‌شود.

در واقع برای انجام آزمون فرض، دو فرض مکمل را بوجود می‌آوریم که عبارتند از فرض H_0 (فرض صفر) و فرض H_1 (فرض مقابل). سپس در مورد فرض H_0 تحقیق کرده که دو حالت پیش می‌آید

الف – با توجه به داده‌های مربوط به نمونه‌گیری، H_0 رد می‌شود و در نتیجه H_1 تایید می‌شود.

ب – با توجه به داده‌های مربوط به نمونه‌گیری، H_0 رد نمی‌شود و تایید می‌شود.

نکته: رد کردن فرض آماری، یک رد کردن قطعی و حتمی نیست بلکه محقق و پژوهشگر صرفاً با توجه به داده‌های نمونه در مورد رد کردن فرض تصمیم می‌گیرد.

نکته: فرض H_0 و H_1 می‌بایست مکمل هم باشند به عبارت دیگر می‌بایست دربرگیرنده کلیه حالتهای ممکن باشد. مثلاً اگر داشته باشیم $H_0: \mu_x \geq 40$، در مورد فرض H_1 خواهیم داشت: $H_1: \mu_x \geq 40$ اما آنچه که خیلی مهم است این است که برای تعیین H_0 و H_1 باید توجه داشت که همواره می‌بایست علامت متساوی در فرض صفر (H_0) وجود داشته باشد. یعنی فرض صفر همواره باید به صورت $\leq$ یا $\geq$ یا $=$ باشد.

در ضمن باید توجه داشت که ادعای اصلی ما گاهی اوقات در فرض صفر و گاهی اوقات در فرض مقابل (H_1) بیان می‌شود. ولی به هرحال فرض صفر (H_0) است که مورد آزمون قرار می‌گیرد.

آزمون فرض به صورت کلی به یکی از صورتهای زیر است:

$$1)\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$

مثال: اگر مدیر شرکتی ادعا کند که میانگین بهره‌وری کارکنان شرکت حداقل ۴۰ است. فرض H_0 و H_1 را مشخص کنید:

$\{H_0: \mu_x \geq 40$ (ادعای مسأله)

$\{H_1: \mu_x < 40$ (نقیض ادعای مسأله)

مثال۲: اگر سرکارگر یکی از بخشهای کارخانه ادعا کند که میانگین ضایعات روزانه بخش او بیشتر از ۷ کالا می‌باشد، فرض مربوطه به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} H_0 \mu_x \leq 7 & \text{(نقیض ادعای مسأله)} \\ H_1 : \mu_x > 7 & \text{(ادعای مسأله)} \end{cases}$$

۲- تعیین ناحیهٔ رد آزمون

ناحیهٔ رد آزمون در واقع ناحیهٔ رد فرض H_0 است. در واقع توزیع آزمون به دو ناحیه تقسیم می‌شود: یکی ناحیهٔ رد H_0 و دیگری ناحیهٔ قبول H_0. ناحیهٔ رد H_0 را ناحیه بحرانی می‌نامیم و تعدادی که دو ناحیه رد و قبول را از هم مجزا می‌سازد را مقدار بحرانی می‌نامیم.

۳- سطح معنی‌داری و خطاهای آماری

در آزمون فرض، در واقع در مورد صحت و سقم فرضیه صفر (H_0) که با توجه به نتایج آزمون H_0 یا H_1 تایید می‌شود سپس در مورد آن تصمیم‌گیری می‌کنیم.

سطح معنی‌داری: برای بررسی H_0، در ابتدا تخمین احتمالی را در نظر می‌گیریم. چنانچه احتمال وقوع H_0 برابر یا کمتر از آن احتمال اولیه باشد H_0 به نفع H_1 رد می‌شود و برعکس. به این مقدار احتمال بسیار کوچک، سطح معنی‌داری گفته و با α نشان می‌دهیم.

هنگام اخذ تصمیم درباره H_0، دو نوع خطا ممکن است پیش بیاید:

تصمیم‌گیری	H_0 صحیح باشد	H_0 غلط باشد
H_0 پذیرفته شود	تصمیم درست	خطای نوع دوم (β)
H_0 رد شود	خطای نوع اول (α)	تصمیم درست

$\alpha = P$ (خطای نوع اول) $= P(H_0$ رد | H_0 درست باشد$) = P(H_0$ رد | H_1 نادرست باشد$)$

احتمال خطای نوع اول برابر است با احتمال رد H_0 در شرایطی که H_0 درست باشد. احتمال وقوع خطای نوع اول با α ارتباط دارد و هر چه α بزرگتر باشد، احتمال وقوع خطای نوع اول افزایش می‌یابد.

$\beta = P$ (خطای نوع دوم) $= P(H_0$ قبول | H_1 درست باشد$) = P(H_0$ قبول | H_0 غلط بودن$)$

خطای نوع دوم عبارتست از پذیرش (تایید) H_0 در حالیکه فرض غلط باشد. احتمال خطای نوع دوم را با β نمایش می‌دهند.

بین β,α یک رابطهٔ معکوس وجود دارد، یعنی با بالا رفتن α مقدار β کاهش می‌یابد و در نتیجه می‌بایست میان احتمال وقوع β,α یک تعادلی ایجاد شود، به همین دلیل رابطه‌ای به نام توان یا قدرت آزمون مطرح می‌شود.

توان یا قدرت آزمون عبارتست از احتمال رد کردن H_0 وقتی که در حقیقت H_0 نادرست می‌باشد. یعنی:

$(H_0$ رد | H_1 درست باشد$) = P(H_0$ قبول | H_1 درست باشد$) = 1 - \beta = 1 - P$ توان آزمون

نکات مهم در مورد α و β

۱- α و β با هم رابطه معکوس دارند. $(\alpha \uparrow \ \beta \downarrow)$

۲- $\alpha + \beta \neq 1$ لزوماً جمع احتمال α و β یک نمی‌شود.

۳- با افزایش n هر دو نوع خطای α و β کاهش پیدا می‌کند.

۴- سطح معنی‌دار همان مقدار خطای نوع اول است. (α) و ارتباط معکوس با دقت برآورد دارد.

۵- سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر سطح اطمینان آزمون است.

۶- احتمال β همیشه قسمتی از سطح اطمینان از قبول H_0 است زمانی که H_0 غلط است.

نکته مهم: اگر بخواهیم خطای نوع اول و نوع دوم (β,α) را بطور همزمان کاهش دهیم، به عبارت دیگر اگر بخواهیم توان آزمون را افزایش دهیم باید حجم نمونه را افزایش دهیم.

نکته: اگر فرض آماری به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = a_0 \\ H_1 : \mu \neq a_0 \end{cases}$$

در این صورت توان آزمون از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$1-\beta = F\left(Z_{\alpha/2} + \delta\right) + F\left(Z_{\alpha/2} - \delta\right)$$

که در رابطه فوق $\delta = \frac{a - a_0}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.

و اگر فرضیه‌های آماری به صورت زیر باشند:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = a_0 \\ H_1 : \mu > a_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = a_0 \\ H_1 : \mu < a_0 \end{cases}$$

در اینصورت توان آزمون از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

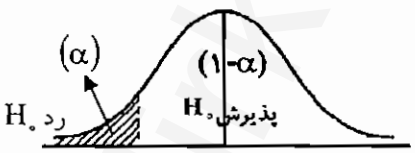
$$1-\beta = F\left(Z_{\alpha} + \delta\right)$$

۴- آزمون فرض یک دنباله (یک دامنه) و دو دنباله (دو دامنه):

بطور کلی فرض H_0 همیشه دربرگیرنده سطح اطمینان $(1-\alpha)$ درصد می‌باشد و فرض H_1 دربرگیرنده سطح معنی‌داری α درصد است. با توجه به شکل H_0، نوع آزمون فرض ممکن است یک دنباله یا دو دنباله باشد. اگر θ پارامتر دلخواهی از جامعه باشد، سه حالت مختلف برای دنباله وجود دارد که عبارتند از:

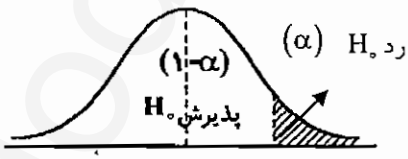
الف) آزمون فرض یک دنباله چپ

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$



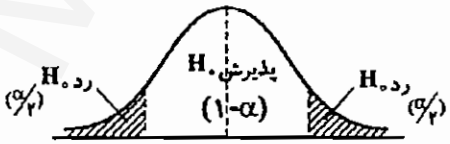
ب) آزمون فرض یک دنباله راست

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$



ج) آزمون فرض دو دنباله

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$



مثال: آزمون فرض آماری را برای ادعای زیر بنویسید.

«میانگین نمره درس آمار دانشجویان این کلاس کمتر از ۱۶ نخواهد بود.»

«آزمون یک دنباله چپ»

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 16 \\ H_1 : \mu < 16 \end{cases}$$

۵- مراحل عمومی آزمون فرض آماری:

الف – ابتدا فرض H_0 و H_1 را تعیین می‌کنیم. باید توجه داشت که H_0 حتماً می‌بایست شامل تساوی باشد.

ب – تعیین نوع توزیع نمونه‌گیری و نوع آمارهٔ آزمون

ج – تعیین سطح زیر منحنی H_0 و محاسبه مقدار بحرانی

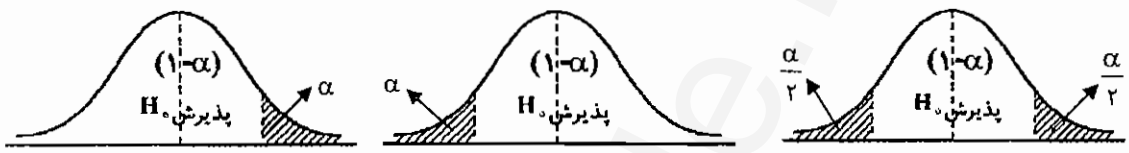
د- تصمیم‌گیری: اگر آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار بگیرد فرض H_0 را رد می‌کنیم و اگر در منطقه بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 را رد نمی‌کنیم.

نکته مهم: مقدار بحرانی در واقع خط مرزی و متمایزکننده فرض H_0 و H_1 می‌باشد که مقدار آن نیز با توجه به سطح معنی‌داری (α) و نوع آمادهٔ آزمون و درجه آزادی $(d.f)$ – در صورت نیاز – تعیین می‌شود. اکنون به بررسی آزمون فرض آماری در مورد هر پارامتر می‌پردازیم:

۶- آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x)

الف – فرض آماری: فرض آماری با توجه به ادعای محقق، یکی از سه حالت زیر را خواهد داشت:

۱) $\begin{cases} H_0: \mu_x \le \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0: \mu_x \ge \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \ne \mu_0 \end{cases}$



ب) آمارهٔ آزمون و تعیین نوع توزیع:

I) اگر نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شده باشد: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$

II) اگر نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شده باشد و حجم نمونه کوچک باشد $(n \le ۳۰)$:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

III) اگر نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شده باشد و حجم نمونه بزرگ باشد $(n > ۳۰)$:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

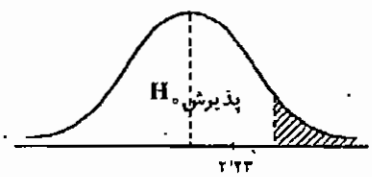
ج) مقدار بحرانی: با توجه به فرض آماری، آزمون از نوع یک دنباله یا دو دنباله می‌باشد و با توجه به سطح خطا (α)، مقدار بحرانی را از توزیع t یا z محاسبه می‌کنیم.

د) تصمیم‌گیری: اگر مقدار عددی آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار گیرد فرض H_0 رد و فرض H_1 پذیرفته می‌شود و اگر مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 رد نمی‌شود.

مثال: فرضیه به این صورت بیان شده است: میانگین نمرات ریاضی دانش آموزان راهنمایی بیشتر از ۱۶ می‌باشد. برای بررسی این موضوع، یک نمونه ۳۶تایی از دانش آموزان انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۱۷ و ۳ می‌باشد. در سطح خطای ۰/۰۱، صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.

$\begin{cases} H_0: \mu_x \le ۱۶ \\ H_1: \mu_x > ۱۶ \end{cases}$ ادعای مسأله $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S_x}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z = \dfrac{۱۷ - ۱۶}{\dfrac{۳}{\sqrt{۳۶}}} = ۲$

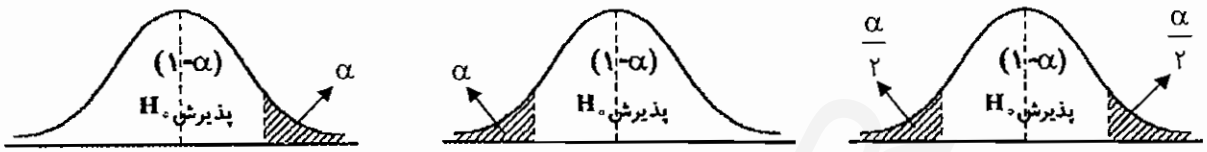
$Z_{۰/۰۱} = ۲/۲۳$ می‌باشد و از آنجا که مقدار بدست آمده از آمارهٔ آزمون کمتر از مقدار بحرانی $(Z_{۰/۰۱} = ۲/۲۳)$ می‌باشد، در سطح خطای ۰/۰۱ فرضیه H_0 تایید می‌شود در نتیجه ادعای مسأله رد می‌شود.



۷- آزمون فرض مقایسهٔ میانگین دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$:

الف) فرض آماری:

۱) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$



ب) آمارهٔ آزمون و تعیین نوع توزیع نمونه:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ آمارهٔ نااریب برای $\mu_1 - \mu_2$ می‌باشد اما با توجه به نوع توزیع نمونه سه حالت خواهیم داشت:

I) اگر نمونه از دو جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شده باشد، بدون توجه به حجم دو نمونه از توزیع Z استفاده می‌کنیم:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

II) اگر نمونه ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شده باشد و $d.f = n_1 + n_2 - 2 \le 30$ باشد، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

- اگر فرض تساوی واریانس‌های دو جامعه وجود داشته باشد $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2$$

اگر فرض عدم تساوی واریانس‌های دو جامعه وجود داشته باشد $(\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2)$:

III) اگر نمونه ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شده باشد و $d.f = n_1 + n_2 - 2 > 30$ باشد:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

نکته: علت حذف $(\mu_1 - \mu_2)$ از روابط بالا به علت قبول فرض تساوی در فرض H_0 می‌باشد.

ج) مقدار بحرانی: با توجه به نوع توزیع نمونه‌گیری (t, z)، نوع فرض آماری (یک دنباله یا دو دنباله) و سطح خطا (α) مقدار بحرانی را بدست می‌آوریم.

د) تصمیم‌گیری: اگر مقدار عددی آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد و فرض H_1 پذیرفته می‌شود و در صورتیکه مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 رد نمی‌شود.

مثال: فرضیه بیان می‌کند که «میانگین هزینه‌های نگهداری ماهانه خودروی مدل پایین بیشتر از خودروهای مدل بالا می‌باشد.» برای بررسی این قضیه دو نمونه آماری از میان خودروهای دو جامعه انتخاب شد و نتایج زیر بدست آمده، در سطح خطای ۲/۵ درصد دربارهٔ این فرضیه تصمیم‌گیری کنید (به شرط آنکه فرض تساوی واریانس‌های جامعه را بپذیریم)

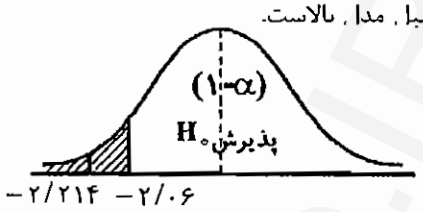
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$ ادعای مسأله

مدل پایین	مدل بالا
$n_2 = 10$	$n_1 = 17$
$\bar{X}_2 = 13$	$\bar{X}_1 = 10$
$S_2 = 5$	$S_1 = 2$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 = 17 + 10 - 2 = 25 < 30 \qquad S_P = \sqrt{\frac{16\times 4 + 9\times 25}{25}} = 3/4$$

$$t = \frac{-3}{3/4\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}} = -2/214 \quad , \quad t_{./025,25} = -2/06$$

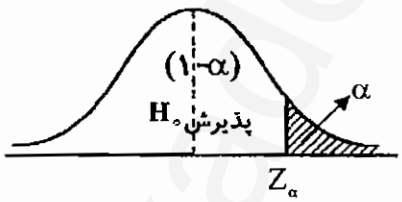
چون مقدار بدست آمده از آمارهٔ آزمون $(t = -2/214)$ از مقدار بحرانی $(t_{./025,25} = -2/06)$ کمتر است، در سطح خطای ۲/۵٪ فرض H_0 رد می‌شود بنابراین ادعای مسأله پذیرفته می‌شود یعنی می‌توان گفت در سطح اطمینان ۹۷/۵ درصد، میانگین هزینه‌های نگهداری اتومبیل مدل پایین بیشتر از اتومبیل مدل بالاست.



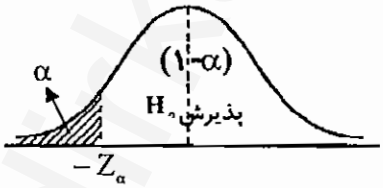
۸- آزمون فرض نسبت موفقیت جامعه (P)

الف) فرض آماری

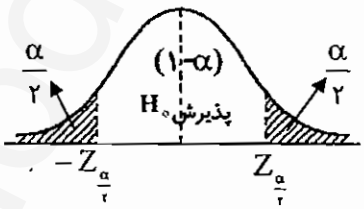
$$1)\begin{cases} H_0 : P \le P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{cases}$$



$$2)\begin{cases} H_0 : P \ge P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$$



$$3)\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \ne P_0 \end{cases}$$



ب) آمارهٔ آزمون و نوع توزیع نمونه‌گیری: آماره مورد استفاده $\overline{P}$ بوده که دارای توزیع نرمال است:

$$Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \qquad \overline{P} = \frac{x}{n}$$

مقدار مورد استفاده در مخرج Z همان $\sigma_{\overline{P}}$ می‌باشد.

ج) مقدار بحرانی: با توجه به توزیع Z و سطح خطای تعیین شده (α)، مقدار بحرانی را تعیین می‌کنیم.

د) تصمیم‌گیری: پس از تعیین مقدار بحرانی، اگر آمارهٔ آزمون در منطقه بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد می‌شود و در صورتیکه در منطقه بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 تایید می‌شود.

مثال: احتمال وجود کالای معیوب در تولیدات روزانه یک کارخانه ۱۰٪ می‌باشد. تولیدات ۸۱ روز این کارخانه را انتخاب کرده‌ایم که در آن بطور متوسط ۱۱٪ تولیدات روزانه معیوب می‌باشد. در سطح اطمینان ۹۵٪ در مورد فرضیه بالا تصمیم‌گیری نمایید.

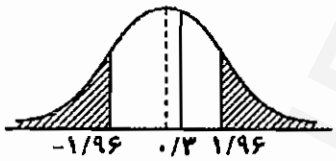
$$\begin{cases} H_0 : P = 0/1 \\ H_1 : P \ne 0/10 \end{cases}$$

$$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{(0/1)(0/9)}{81}} = 0/033$$

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sigma_{\bar{P}}} = \frac{0/11 - 0/1}{0/033} = 0/30$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0/025} = \pm 1/96$$

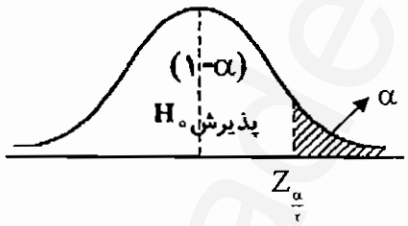
چون مقدار آماره آزمون در ناحیه پذیرش H_0 قرار گرفته است پس فرض H_0 پذیرفته می‌شود.



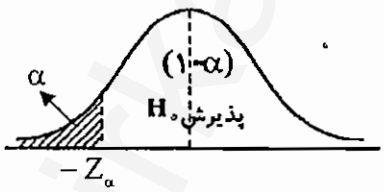
۹- آزمون فرض مقایسه نسبت موفقیت دو جامعه $(P_1 - P_2)$:

الف – فرض آماری:

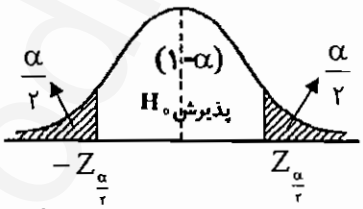
$$1)\begin{cases} H_0 : P_1 \le P_2 \\ H_1 : P_1 > P_2 \end{cases}$$



$$2)\begin{cases} H_0 : P_1 \ge P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases}$$



$$3)\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \ne P_2 \end{cases}$$



ب) آمارهٔ آزمون و نوع توزیع نمونه‌گیری:

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}}$$

ج) مقدار بحرانی: با توجه به توزیع Z و سطح خطا (α) تعیین می‌شود.

د) تصمیم‌گیری: مانند موارد قبلی اگر آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار گیرد فرض H_0 رد می‌شود و در غیر اینصورت نمی‌توان فرض H_0 را رد نمود.

مثال: بمنظور مقایسه محصولات دو شرکت تولیدی از هر یک از این دو کارخانه ۱۰۰ محصول را به عنوان نمونه انتخاب کرده‌ایم. اگر تعداد محصول معیوب را با X نمایش دهیم و مقدار آن در کارخانه اول و دوم بترتیب ۲۵ و ۲۹ باشد، آیا می‌توان نتیجه گیری کرد که کارخانه دوم تعداد محصول معیوب بیشتری دارد $(\alpha = 0/01)$

$$X_1 = 25 \Rightarrow P_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{25}{100} = 0/25$$

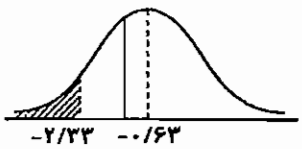
$$X_2 = 29 \Rightarrow P_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{29}{100} = 0/29$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 \geq P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}} = \frac{0/25 - 0/29}{\sqrt{\frac{(0/25)(0/75)}{100} + \frac{(0/29)(0/71)}{100}}}$$

$$Z = -0/63$$

$$\alpha = 0/01 \Rightarrow Z_{0/01} = 2/33$$

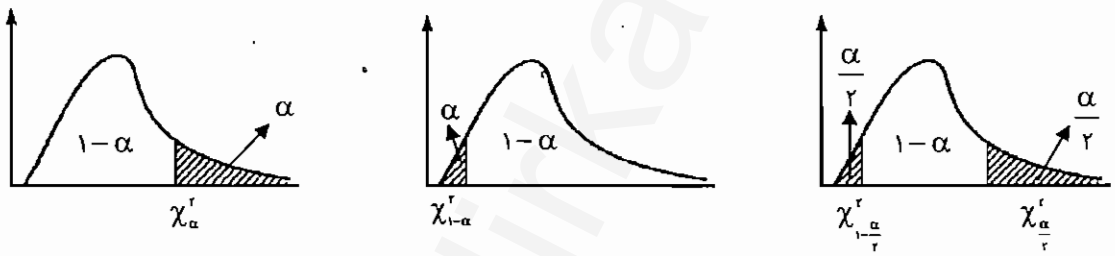


چون مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد بنابراین فرض H_0 پذیرفته می‌شود یعنی نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد که کارخانه دوم تعداد محصول معیوب بیشتری دارد.

۱۰- آزمون فرض آماری واریانس جامعه (σ_x^2):

الف) فرض آماری:

$$1)\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$



ب) آمارهٔ آزمون و نوع توزیع نمونه‌گیری:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2}$$

ج) مقدار بحرانی: مقدار بحرانی با توجه به توزیع χ^2 و درجه آزادی $d.f = n-1$ تعیین می‌شود.

د) تصمیم‌گیری: اگر مقدار آمارهٔ آزمون در محدودهٔ بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد می‌شود و اگر مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 پذیرفته می‌شود.

مثال: مدیر تولید شرکتی مدعی است حداکثر میزان انحراف معیار اتلاف مواد روزانه شرکت ۶ کیلوگرم است. بمنظور بررسی این ادعا، مدیران شرکت میزان اتلاف مواد ۲۰ روز شرکت را به عنوان نمونه انتخاب کرده که در نتیجه میانگین و واریانس آن به ترتیب ۲۰۰ و ۴۷ می‌باشد. آیا در سطح اطمینان ۹۰٪ این ادعا پذیرفته می‌شود.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)47}{36} = 24/81$$

$$\chi^2_{1-\alpha,n-1} = \chi^2_{0/90,19} = 11/65$$

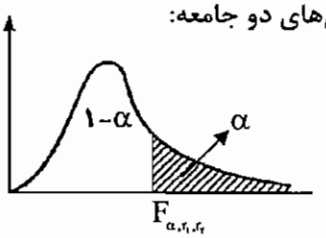
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \leq 36 \\ H_1 : \sigma_x^2 > 36 \end{cases}$$

چون مقدار آمارهٔ آزمون از مقدار $\chi^2_{1-\alpha,n-1} = 11/65$ بزرگتر است بنابراین در ناحیه بحرانی قرار گرفته و لذا فرض H_0 رد می‌شود. بنابراین ادعای مدیر تولید شرکت رد می‌شود.

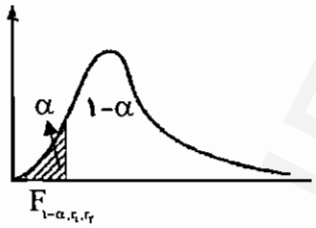
۱۱- آزمون فرض آماری مقایسهٔ واریانس‌های دو جامعه:

الف – فرض آماری:

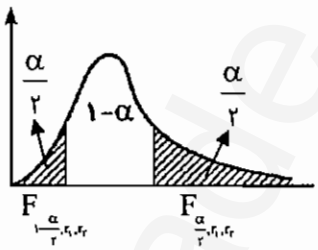
$$1)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$



$$2)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$



$$3)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \end{cases}$$



ب) آمارهٔ آزمون و نوع توزیع نمونه‌گیری: با توجه به رابطهٔ $F=\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}$، آمارهٔ آزمون مقایسه واریانسها برابر است با:

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \text{درجه آزادی} = n_1-1, n_2-1$$

نکته: علت حذف $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ از آماره، قبول فرض تساوی واریانس ها در فرض H_0 می‌باشد.

ج) مقدار بحرانی: با توجه به فرض مسأله و مقدار درصد خطا (α) و نیز درجه آزادی صورت $(r_1=n_1-1)$ و درجه آزادی مخرج $(r_2=n_2-1)$، می‌توان از جدول توزیع F مقدار بحرانی را بدست آورد.

(n_2, n_1 به ترتیب تعداد اعضای نمونه از جامعه‌های اول و دوم می‌باشند)

نکته بسیار مهم:

$$F_{1-\alpha,r_1,r_2}=\frac{1}{F_{\alpha,r_2,r_1}}$$

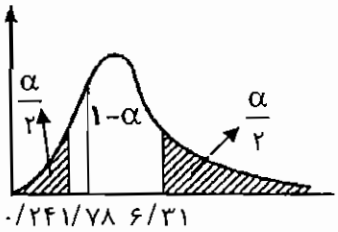
د) تصمیم‌گیری: چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد می‌شود و در صورتیکه در ناحیهٔ بحرانی قرار نگیرد، فرض H_0 را نمی‌توان رد کرد.

مثال: به منظور آزمون این فرض که پراکندگی نمایندگی‌های دو شرکت در ایران یکسان نیست، تحقیقی انجام شده است که نتایج آن به این صورت می‌باشد: میانگین و انحراف معیار نمایندگی‌های شرکت الف در ۱۶ شهر نمونه به ترتیب ۴۰ و ۴ و میانگین و انحراف معیار نمایندگی‌های شرکت ب در ۸ شهر نمونه‌گیری شده به ترتیب ۲۰ و ۳ می‌باشد. در سطح اطمینان ۹۸٪، آیا فرض پذیرفته می‌شود؟

$$\begin{cases} H_0=\sigma_1^2=\sigma_2^2 \\ H_1=\sigma_1^2\ne\sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{ادعای مسأله} F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{4^2}{3^2}=1/78$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1=n_1-1=16-1=15 \\ r_2=n_2-1=8-1=7 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{\alpha/2,r_1,r_2}=F_{0/01,15,7}=6/31$$

$$F_{(1-\alpha/2),r_1,r_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2,r_2,r_1}} = \frac{1}{F_{0/01,7,15}} = 0/24$$



چون آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار نگرفته است پس در سطح اطمینان ۹۸٪ فرض H_0 پذیرفته می‌شود. پس با اطمینان ۹۸٪ می‌توان گفت پراکندگی نمایندگی‌های دو شرکت یکسان است (ادعای مسأله رد می‌شود).

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- در آزمون فرضیه، اگر فرضیه H_1 غلط باشد، α (یعنی احتمال خطای نوع اول) عبارتست از: (اقتصاد – ۷۳)

۱) احتمال ارتکاب خطا به علت پذیرفتن فرضیه درست H_0

۲) احتمال ارتکاب خطا به علت نپذیرفتن فرضیه درست H_0

۳) احتمال ارتکاب خطا به علت پذیرفتن فرضیه غلط H_1

۴) احتمال ارتکاب خطا به علت قبول فرضیه درست H_0

۲- در آزمون فرضیه، افزایش خطای نوع اول به شرط ثابت بودن سایر عوامل، موجب می‌شود که: (اقتصاد – ۷۳)

۱) توان آزمون افزایش یابد. ۲) خطای نوع دوم افزایش یابد.

۳) توان آزمون کاهش یابد. ۴) خطای نوع دوم ثابت بماند.

۳- میانگین مقاومت پاکت‌های سازمانی ساخته شده توسط دو کارخانه دارای توزیع نرمال با واریانس $\sigma_1^2 = 150$ و $\sigma_2^2 = 250$ می‌باشد. اگر از دو کارخانه به تعداد ۱۰۰ نمونه پاکت را انتخاب کنیم که میانگین مقاومت آنها برابر $\overline{X}_1 = 50$ و $\overline{X}_2 = 55$ کیلوگرم باشد، کدامیک از فرضیه‌های زیر معتبرند؟ $(\alpha = 0/05)$ (اقتصاد – ۷۳)

۱) فرضیه مساوی بودن میانگین مقاومت پاکت‌های دو کارخانه رد نمی‌شود.

۲) فرضیه مساوی نبودن میانگین مقاومت پاکت‌های دو کارخانه رد می‌شود.

۳) فرضیه مساوی بودن میانگین مقاومت پاکت‌های دو کارخانه رد می‌شود.

۴) فرضیه مساوی بودن میانگین مقاومت پاکت‌های دو کارخانه ثابت می‌شود.

۴- مصرف کنندگان نوعی پودر لباسشویی شکایت کرده‌اند که وزن بسته‌های پودر مزبور کمتر از ۲۵۰ گرم می‌باشد. برای این منظور تعداد ۱۰۰ بسته پودر بطور تصادفی انتخاب گردیده که دارای میانگین $\overline{X} = 245$ و انحراف معیار $\sigma = 10$ بدست آمده است. در سطح اطمینان ۹۵٪ شکایت مصرف کنندگان را: (اقتصاد – ۷۳)

۱) می‌پذیریم. ۲) نمی‌توانیم بپذیریم.

۳) به اطلاعات بیشتری نیاز است. ۴) رد می‌کنیم.

۵- اگر (۳،۸) یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای انحراف معیار مجهول یک جامعه نرمال باشد، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ در مورد آزمون فرضیه $H_0: \sigma^2 = 10$ در برابر فرضیه مقابل $H_1: \sigma^2 \neq 10$ می‌توان نتیجه گرفت: (اقتصاد – ۷۴)

۱) H_0 رد نمی‌شود. ۲) H_0 رد می‌شود.

۳) احتیاج به اطلاعات بیشتری داریم. ۴) H_0 تقریباً رد می‌شود.

۶- اگر در آزمون فرضیه $H_0: \mu = 10$ در برابر $H_1: \mu \neq 10$ مقدار $\alpha = 0/05$ باشد، آنگاه مقدار β: (اقتصاد – ۷۴)

۱) به μ واقعی بستگی دارد. ۲) ۰/۹۵ است.

۳) کمتر از ۰/۰۵ است. ۴) بیش از ۰/۰۵ است.

۷- کدامیک از عبارات زیر بستگی بین خطای نوع اول و خطای نوع دوم را بیان می‌کند؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) $\lim_{\alpha \to 0} \beta = 0$ ۲) $\lim_{\alpha \to 0} \beta = 1$ ۳) $\lim_{\alpha \to 1} \beta = 1$ ۴) $\lim_{\alpha \to 1} \beta = 0$

۸- توان آزمون (Power of the test) یعنی: (اقتصاد – ۷۵)

۱) احتمال پذیرش فرضیهٔ نادرست. ۲) احتمال رد فرضیهٔ نادرست.

۳) احتمال پذیرش فرضیهٔ درست. ۴) رد فرضیهٔ نادرست.

۹- متغیر تصادفی X بر طبق قانون نرمال توزیع شده و ادعا می‌شود که $\sigma^2 = 18$ می‌باشد. برای آزمون ادعای فوق $n = 5$ نمونه بطور تصادفی انتخاب و $S^2 = 20/2$ به دست آمده است. کدامیک از گزاره‌های زیر در سطح اطمینان $\alpha = 0/05$ و نقاط بحرانی $\chi^2_{0/975,4} = 11/1$، $\chi^2_{0/025,4} = 0/484$ صحیح است؟ (اقتصاد – ۷۵)

۱) H_0 را رد می‌کنیم.
۲) H_0 را نمی‌توانیم رد کنیم.
۳) H_1 رد نمی‌شود.
۴) H_1 را می‌پذیریم.

۱۰- ادعا شده است که نیمی از افراد در جامعه‌ای موافق قانون خاصی هستند. نمونه‌ای ۱۰۰ تایی از افراد جامعه بطور تصادفی انتخاب کرده‌ایم و ملاحظه شد که ۵۵ نفر موافق قانون مزبور می‌باشند. در آزمون فرضیه برای پذیرفتن یا رد این ادعا آماره یا مقدار عددی تابع نمونه‌ای آزمون برابر است با: (اقتصاد – ۷۵)

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲

۱۱- در صورت ثابت بودن سایر عوامل، در کدامیک از موارد زیر توان آزمون افزایش می‌یابد؟ (اقتصاد – ۷۵)

۱) آزمون دو دامنه باشد.
۲) خطای نوع اول بیشتر شود.
۳) خطای نوع اول کمتر شود.
۴) سطح اطمینان بیشتر شود.

۱۲- خطای نوع دوم وقتی رخ می‌دهد که: (اقتصاد – ۷۶)

۱) فرض غلط H_0 را رد کنیم.
۲) فرض غلط H_0 را بپذیریم.
۳) فرض درست H_1 را بپذیریم.
۴) فرض غلط H_1 را رد کنیم.

۱۳- اگر کلیه عوامل موثر ثابت باقی بماند، با افزایش دادن احتمال خطای نوع اول، توان آزمون: (اقتصاد – ۷۶)

۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد به شرط اینکه سطح معنی‌داری ثابت باقی بماند.
۴) تغییر نمی‌کند.

۱۴- در انجام آزمون فرضیه زیر:

$$\begin{cases} H_0 = \mu \geq 240 \\ H_1 = \mu < 240 \end{cases}$$

با ضریب اطمینان ۰/۹۵ و بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی، وقتی که بدانیم مقدار واقعی میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۲۳۰ و ۱۰ می‌باشد، توان آزمون کدام است؟ (اقتصاد –.۷۷)

۱) ۰
۲) ۰/۰۵
۳) ۰/۹۵
۴) ۱

۱۵- در یک جامعه نرمال برای انجام فرضیه H_0 در برابر فرضیه مقابل H_1، خطای نوع اول (α) و خطای نوع دوم (β) محاسبه می‌شود. کدامیک از گزاره‌های زیر غلط است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) با افزایش α، β کاهش می‌یابد.
۲) با افزایش حجم نمونه، β کاهش می‌یابد.
۳) $(1-\beta)$ توان آزمون است.
۴) $\alpha + \beta = 1$ است.

۱۶- کمیت تصادفی X بر طبق قانون نرمال با واریانس σ^2 توزیع شده است. در نمونه‌ای تصادفی به حجم $n = 4$، میانگین برابر ۷ بدست آمده است. برای آزمون فرضیه $H_0 = \mu = 10$، کدامیک از قضاوتهای زیر در سطح احتمال $\alpha = 0/05$ صحیح است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) فرضیه H_0 را نمی‌توان در برابر فرضیه مقابل رد کرد.
۲) فرضیه H_0 رد و فرضیه مقابل پذیرفته می‌شود.
۳) فرضیه H_0 رد نمی‌شود.
۴) فرضیه H_0 ثابت می‌شود.

۱۷- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه تصادفی به حجم n از جامعه نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 نامعلوم باشد، برای آزمون فرضیه $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$، تابع نمونه‌ای آزمون (آمارهٔ آزمون) کدام است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) $K(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$

۲) $K(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{S^2 \max}{S^2 \min}$

۳) $K(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{S^2 \max}{S_i^2}$

۴) $K(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{S^2}{(n-1) \sigma^2}$

۱۸- کمیت آمارهٔ آزمون Z (تابع نمونه‌ای Z) که بر اساس یک دامنه در سطح ۵٪ معنی‌دار است: (اقتصاد – ۷۷)

۱) به احتمال ۹۵٪ متمایز از صفر است.

۲) با افزایش حجم نمونه، سطح معنی‌دار بودن آن افزایش خواهد یافت.

۳) بر اساس یک آزمون دو دامنه در سطح ۱۰٪ معنی‌دار است.

۴) می‌باید بزرگتر از ۲ یا کوچکتر از ۲- باشد.

۱۹- دلیل اینکه برای آزمون فرضیه برای میانگین در سه جامعه از توزیع t استفاده نمی‌کنیم چیست؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) آزمون t غیر ممکن است.

۲) توزیع χ^2 دارای توان آزمون بیشتری است.

۳) توزیع F دارای خطای نوع اول کمتری از توزیع t است.

۴) روش آنالیز واریانس دارای خطای نوع دوم کمتری است.

۲۰- برای آزمون برابری واریانس دو دستگاه اتوماتیک پر کنندهٔ قوطی‌های روغن نباتی که وزن آنها بر طبق قانون نرمال توزیع شده است، اطلاعات زیر در دست است:

دستگاه ۱: $S_1 = 3, n_1 = 30$ دستگاه ۲: $S_2 = 4, n_2 = 40$

مقدار عددی کمیت آماره (تابع نمونه‌ای) آزمون برای این منظور کدام است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) $\chi^2 = \frac{3}{4}$

۲) $F = \frac{9}{16}$

۳) $F = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{4}{40}}$

۴) $\chi^2 = \frac{\frac{9}{30}}{\frac{16}{40}}$

۲۱- در کدامیک از آزمونهای زیر می‌توان از توزیع F استفاده کرد؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) اختلاف بین دو نسبت

۲) برابری میانگین ها در دو جامعه

۳) استقلال دو کمیت

۴) برابری واریانس ها با یک عدد مشخص

۲۲- برای مقایسهٔ نسبت محصولات درجه یک در ۲ موسسه تولیدی از موسسه اول $n_1 = 400$ و از موسسه دوم $n_2 = 100$ واحد محصول انتخاب می‌شود و ملاحظه می‌شود که در نمونه اول ۳۶۰ محصول و در نمونه دوم ۴۰ محصول درجه یک می‌باشند. در سطح اطمینان $\alpha = 0/05$، فرضیه برابری نسبت محصولات درجه یک در دو موسسه: (اقتصاد – ۷۸)

۱) پذیرفته می‌شود. ۲) ثابت می‌شود. ۳) رد می‌شود. ۴) نمی‌توان رد کرد.

۲۳- در یک آزمون فرضیه، آمارهٔ آزمون (تابع نمونه‌ای آزمون) همواره: (اقتصاد – ۷۹)

۱) بر اساس نحوهٔ برآوردکننده پارامتر جامعه و با فرض صحیح بودن H_1 ساخته می‌شود.

۲) بر اساس نحوهٔ برآورد کنندهٔ پارامتر جامعه و با فرض صحیح بودن H_0 ساخته می‌شود.

۳) بر اساس نحوه متغیر مورد نظر در جامعه و با فرض صحیح بودن H_1 ساخته می‌شود.

۴) بر اساس نحوهٔ متغیر مورد نظر در جامعه و با فرض صحیح بودن H_0 ساخته می‌شود.

۲۴- در یک آزمون فرضیه در صورتیکه H_0 به واقع صحیح باشد: (اقتصاد – ۷۹)

۱) خطای نوع اول برابر β است.

۲) توان آزمون برابر صفر است.

۳) خطای نوع دوم برابر صفر است.

۴) خطای نوع دوم برابر ۱ است.

۲۵- در بازرسی فنی، محموله اشیاء وقتی پذیرفته می‌شود که واریانس صفت انجام شده برای بازرسی از ۰/۲ بـه طـور معنی‌داری تجاوز نکند. در نمونه‌ای به حجم $n = ۱۲۱$، تخمین بدون تورش (نااریب) واریـانس $S^۲ = ۰/۳$ بـه دسـت آمده است. مقدار عددی آمارهٔ آزمون (تابع نمونه‌ای آزمون) کدام است؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۹۰

۲۶- آمارهٔ آزمون فرضیه برابری واریانس یک جامعه با عددی خاص دارای کدام توزیع است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) F ۲) t ۳) $x^۲$ ۴) Z

۲۷- در دو جامعهٔ آماری نرمال با واریانس‌های نامعلوم ولی یکسان، آماره آزمون برای مقایسهٔ میـانگین هـا دارای چـه توزیعی است؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) F با درجهٔ آزادی $n_۱ - ۱ , n_۲ - ۱$
۲) کای دو با درجهٔ آزادی $n_۱ + n_۲$
۳) t با درجهٔ آزادی $n_۱ + n_۲$
۴) t با درجه آزادی $n_۱ + n_۲ - ۲$

۲۸- می‌خواهیم فرض $H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲$ را در مقابل $H_۱ : \mu_۱ \neq \mu_۲$ آزمون کنیم، بر اساس کدامیک از فاصـله‌هـای اطمینـان (۰/۹۵) که مربوط به $\mu_۱ - \mu_۲$ است، می‌توان فرض $H_۰$ را با $\alpha = ۰/۰۵$ رد کرد؟ (اقتصاد – ۸۰)

۱) (۰,۱۵) ۲) (−۴,۱/۲) ۳) (−۶,۶) ۴) (۲/۵,۳/۸)

۲۹- در آزمون فرضیه، وقتی که سطح معنی‌داری کاهش می‌یابد (در صورت ثبات سایر شرایط): (اقتصاد – ۸۱)

۱) توان آزمون کاهش می‌یابد.
۲) توان آزمون افزایش می‌یابد.
۳) خطای نوع اول افزایش می‌یابد.
۴) خطای نوع دوم کاهش می‌یابد.

۳۰- اگر $\begin{cases} H_۰ : P = ۱/۲ \\ H_۱ : P \neq ۱/۲ \end{cases}$ و از بین ۱۰۰ آزمایش، ۵۹ موفقیت مشاهده شده باشد، آمارهٔ آزمون و نتیجه آزمـون $\alpha = ۰/۰۵$ کدام است؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) ۱/۸۴، $H_۰$ رد می‌شود.
۲) ۱/۸، $H_۰$ رد می‌شود.
۳) ۱/۸۴، $H_۰$ رد نمی‌شود.
۴) ۱/۸، $H_۰$ رد نمی‌شود.

۳۱- ادعا شده است که در شهر (الف) افرادی که از فروشگاه‌های زنجیره‌ای خرید می‌کنند، بیشتر از افراد خریدکننـده از فروشگاه‌های زنجیره‌ای در شهر (ب) هستند، آمارهٔ آزمون این فرضیه کدام است؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) $\dfrac{\hat{P}_۱ - \hat{P}_۲}{\sqrt{pq\left(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}\right)}}$
۲) $\dfrac{n_۱ - n_۱}{\sqrt{\frac{p_۱q_۱}{n_۱} + \frac{p_۲q_۲}{n_۲}}}$
۳) $\dfrac{\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲}{\sqrt{S_p^۲\left(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}\right)}}$
۴) $\dfrac{\hat{P} - P_۰}{\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}}$

۳۲- تحقیقی برای مقایسهٔ دو روش آموزش دانشجویان با روش متداول یا سنتی و روش آموزش الکترونیکی یا جدیـد در دست مطالعه است. دو نمونه مستقل انتخاب و اطلاعات زیر به دست آمده است :

روش جدید	روش سنتی
$n_۲ = ۱۵$	$n_۱ = ۱۳$
$\overline{x}_۲ = ۴۸$	$\overline{x}_۱ = ۵۲$
$S_۲ = ۱۶$	$S_۱ = ۸۶$

مقدار آماره آزمون t استیودنت برای مقایسهٔ میانگین نمرات (وقتی فرض تساوی واریانس دو جامعه پذیرفته نشده باشد) چند است؟ (اقتصاد-۸۲)

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۴ ۴) ۱۰۰

۳۳- می‌خواهیم فرض صفر $H_0 : \sigma^2 = 5$ را در برابر فرض مقابل $H_1 : \sigma^2 > 5$ برای جامعه‌ای که توزیع آن نرمال است آزمون نماییم. برای این منظور نمونه‌ای به حجم ۱۲ از جامعه فوق گرفته و میانگین و واریانس آن به ترتیب $\overline{X} = 13/1$ و $S^2 = 7$ محاسبه شده است. با توجه به اینکه اگر متغیر تصادفی w دارای توزیع کای مربع با درجه آزادی ۱۱ باشد، آن گاه $P(w \geq 19/68) = 0/05$ است، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (سطح معنی‌داری را ۵ درصد در نظر بگیرید) (اقتصاد – ۸۲)

۱) فرض صفر را رد می‌کنیم.

۲) فرض صفر را رد نمی‌کنیم.

۳) با توجه به مشاهدات نمونه، احتمال رد فرض صفر عملاً صفر است.

۴) اطلاعات کافی در نمونه برای انجام آزمون واریانس وجود ندارد.

۳۴- اگر میانگین واقعی وزن قوطی هایی که توسط یک دستگاه اتوماتیک پر می‌شود ۳۹۶/۷ با انحراف معیار ۱۶ گرم باشد، خطای نوع دوم آزمون فرضیه زیر که براساس یک نمونه تصادفی ۶۴ تایی با خطای نوع اول ۵ درصد صورت می‌گیرد، چقدر است؟ (اقتصاد – ۸۲)

$(Z_{0/05} = 1/65)$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 400 \\ H_1 : \mu < 400 \end{cases}$$

۱) ۰/۹۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۵۰ ۴) ۰/۰۵

۳۵- اگر میانگین واقعی مقدار نوشابه ریخته شده به درون شیشه ها در کارخانه‌ای ۳۲۴ با انحراف معیار ۱۲ سی سی باشد، خطای نوع دوم آزمون زیر بر اساس یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی با خطای نوع اول ۲/۵ درصد تقریباً کدام است؟ $(Z_{0/025} = 1/96 \simeq 2)$ $H_0 : \mu \geq 330$, $H_1 : \mu < 330$ (اقتصاد – ۸۳)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۹۷۵

۳۶- در بررسی نسبت افراد مبتلا به یک بیماری، فرضیه $H_0 : P \leq 0/2$ را در مقابل $H_1 : P > 0/2$ آزمون می‌کنیم. برای این منظور نمونه‌ای تصادفی به حجم ۱۰۰ نفر از جامعه مورد مطالعه انتخاب و مشاهده گردید که ۳۰ نفر از آنان مبتلا به بیماری هستند. مقدار (ملاک) آزمون کدامیک از مقادیر زیر است؟ (اقتصاد-۸۳)

۱) ۲/۱۷ ۲) ۲/۵ ۳) ۴/۳۴ ۴) ۵

۳۷- برای $n = 14$ و $S^2 = 75$، فرضیه $H_0 : \sigma^2 \geq 100$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 < 100$ در سطح تشخیص $\alpha = 0/01$ آزمون می‌کنیم. در صورتیکه فرض شود جامعه‌ای که نمونه تصادفی از آن انتخاب می‌شود نزدیک به نرمال است، کدامیک از موارد زیر درست است؟ (کمیت بحرانی از جدول ۴/۱۰۷ است) (اقتصاد – ۸۳)

۱) $\chi^2 = 0/75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

۲) $\chi^2 = 9/75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

۳) $\chi^2 = 9/75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

۴) $\chi^2 = 0/75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

۳۸- در جوامع نرمال برای آزمون فرضیه‌های زیر بر اساس اطلاعات نمونه در صورتیکه $n_1 + n_2 < 30$ (مجموع اندازه‌های دو نمونه تصادفی کمتر از ۳۰) باشد، به ترتیب از راست به چپ از کدام ملاکهای آزمون استفاده می‌شود؟

$i) H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $\quad ii) H'_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (اقتصاد – ۸۳)

۱) F,t ۲) F,Z ۳) χ^2,t ۴) χ^2,Z

۳۹- دریک جامعه نرمال با میانگین معلوم μ می‌خواهیم فرضیه $H_0 : \sigma^2 = 0/05$ را درمقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 \neq 0/05$ براساس اطلاعات $n = 19$, $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}} = 0/3$ آزمون کنیم. مقدار عددی آمارهٔ آزمون عبارتست‌از:(اقتصاد-۸۴)

۱) ۲/۱ ۲) ۲/۳ ۳) ۳۲/۴ ۴) ۳۴/۲

۴۰- اگر میانگین واقعی مقدار قهوهٔ ریخته شده به داخل شیشه ها توسط یک دستگاه اتوماتیک ۵۹۶/۷ گرم با انحراف معیار ۱۴ گرم باشد، خطای نوع دوم آزمون فرضیه زیر بر اساس یک نمونه تصادفی ۴۹ تایی با خطای نوع اول ۵ درصد کدام است؟ $\left(Z_{0/05}=1/65\right)$ $\begin{cases} H_0: \mu \geq 600 \\ H_1: \mu < 600 \end{cases}$ (اقتصاد – ۸۴)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۹۵

۴۱- به منظور بررسی عدم تفاوت در نسبت طرفداران نظریه‌های کینزی بین دانشجویان کارشناسی و دانشجویان کارشناسی ارشد رشته اقتصاد، دو نمونه تصادفی مستقل به حجم ۶۴ و ۳۶ از هر یک انتخاب گردیده است. تعداد طرفداران در هر کدام از نمونه ها به ترتیب ۱۴ و ۶ نفر بوده است. اگر $\alpha = 0/05$ باشد، کمیت آمارهٔ آزمون و نتیجه آزمون چیست؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) H_0,۲/۰۶ رد می‌شود.
۲) H_0,۱/۸ را نمی‌توان رد کرد.
۳) H_0,۱/۷۸ را رد می‌شود.
۴) H_0,۰/۶ را نمی‌توان رد کرد.

مجموعه حسابداری

۴۲- اگر ادعایی به صورت «میانگین جامعه آماری بیش از ۱۰ است» بیان شود، فرضیه صفر کدام است؟ (حسابداری – ۷۹)

۱) $H_0: \mu < 10$ ۲) $H_0: \mu > 10$ ۳) $H_0: \mu \leq 10$ ۴) $H_0: \mu \geq 10$

۴۳- رابطهٔ بین خطای نوع اول (α) و دقت برآورد در ساختن یک فاصله اطمینان چگونه است؟ (حسابداری – ۸۰)

۱) خطی ۲) معکوس ۳) مستقیم ۴) خطی مستقیم

۴۴- ادعا شده است که ریسک شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران کمتر از ۱۰۰۰ ریال است. فرضیه صفر آماری، کدام است؟ (حسابداری – ۸۱)

۱) $H_0: \sigma_x^2 \leq 1000$ ۲) $H_0: \sigma_x = 1000$ ۳) $H_0: \sigma_x \geq 1000$ ۴) $H_0: \sigma_x^2 < 1000$

۴۵- کدام عبارت در مورد H_0 و H_1 صحیح نیست؟ (حسابداری – ۸۲)

۱) H_0 و H_1 نقیض یکدیگرند.
۲) همواره ادعا در H_1 قرار می‌گیرد.
۳) در H_0 همواره باید = یا ≤ یا ≥ قرار گیرد.
۴) فرض بر درستی H_0 است مگر خلاف آن ثابت شود.

۴۶- در کدام مورد نباید از آزمون فرض استفاده کرد؟ (حسابداری – ۸۳)

۱) $n = 10$ ۲) $n < 30$ ۳) $n \geq 30$ ۴) سرشماری

۴۷- سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر است با: (حسابداری – ۸۳)

۱) خطای نوع اول ۲) خطای نوع دوم ۳) توان آزمون ۴) سطح اطمینان آزمون

مجموعه مدیریت

۴۸- با ثابت نگه داشتن اندازه نمونه، احتمال اشتباه نوع اول فقط در صورتی کاهش می‌یابد که: (مدیریت – ۷۴)

۱) طول ناحیه رد H_0 افزایش یابد.
۲) طول ناحیه پذیرش H_0 کاهش یابد.
۳) احتمال خطای نوع دوم افزایش یابد.
۴) احتمال خطای نوع دوم کاهش یابد.

۴۹- ادعا شده است که متوسط دستمزد پرسنل سازمان کمتر از ۲۵ هزار تومان است، اگر مقدار عددی ملاک آزمون‌کننده (t – استیودنت محاسبه شده) مساوی با ۱/۲۲۵ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (مدیریت – ۷۶)

۱) اطلاعات برای اظهار نظر کافی نیست.
۲) H_0 پذیرفته می‌شود.
۳) H_1 تایید می‌شود.
۴) H_0 تایید نمی‌شود.

۵۰- به‌منظور مقایسه میانگین‌ها در دو جامعه، که متغیر X در هر یک از آنها بر طبق قانون نرمال توزیع شده‌اند، مقدار عددی ملاک آزمون‌کننده براساس دو نمونه n_1 و n_2، در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (مدیریت – ۷۶)

۱) فرضیه یکسان بودن میانگین ها در دو جامعه رد می‌شود.

۲) فرضیه یکسان بودن میانگین ها در دو جامعه را نمی‌توان رد کرد.

۳) فرضیه یکسان بودن میانگین ها در دو جامعه ثابت می‌شود.

۴) فرضیه یکسان بودن میانگین ها در دو جامعه پذیرفته نمی‌شود.

۵۱- فرضیه صفر بیان می‌کند که «فرآیند جدید، به خوبی فرآیند قدیمی نیست.» خطای نوع اول (α) به معنی آن است که نتیجه بگیریم: (مدیریت – ۸۰)

۱) فرآیند قدیمی بهتر است، در حالیکه چنین نیست.

۲) فرآیند جدید خوب است، در حالیکه چنین هم هست.

۳) فرآیند قدیمی بهتر است، در جالیکه چنین هم هست.

۴) فرآیند جدید به همان خوبی فرآیند قدیمی است، در حالیکه چنین نیست.

۵۲- ادعا شده است که نسبت مدیران وظیفه مدار در وزارتخانه A کمتر از وزارتخانه B است کدام گزینه برای تعریف H_0 درست است؟ (سراسری ۷۵)

۱) $H_0: P_A = P_B$ ۲) $H_0: P_A \le P_B$ ۳) $H_0: P_A > P_B$ ۴) $H_0: P_A \ge P_B$

۵۳- احتمال اشتباه نوع اول و احتمال اشتباه نوع دوم: (سراسری ۷۵) (سراسری ۷۹)

۱) با یکدیگر رابطه معکوس دارند. ۲) مجموعشان بیش از یک است.

۳) مجموعشان مساوی یک است. ۴) مساویند.

۵۴- ادعا شده است که متوسط دستمزد در بخش خصوصی حداقل ۲۰ هزار تومان است. برای بررسی ادعا یک نمونه ۶۴ تایی از کارکنان بخش خصوصی انتخاب شده است، که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۲۲ و ۵ هزار تومان است کدام گزینه صحیح است؟ (مدیریت ۷۷)

۱) ادعا رد می‌شود. ۲) اطلاعات برای اظهار نظر کافی نیست.

۳) ادعا تأئید می‌شود. ۴) H_1 تأئید می‌شود.

۵۵- ادعا شده است که نسبت ضایعات در کارخانه حداقل ۶۰٪ است. فرض H_0 کدام است؟ (مدیریت ۷۷)

۱) $H_0: P > ۰/۶$ ۲) $H_0: P \le ۰/۶$ ۳) $H_0: P < ۰/۶$ ۴) $H_0: P \ge ۰/۶$

۵۶- ادعا شده است که حداقل ۶۰ درصد تولیدات یک کارخانه معیوبند. به منظور بررسی این ادعا نمونه ای تصادفی از بین تولیدات به تعداد ۱۰۰ کالا انتخاب شده است. آماره آزمون حاصل از نمونه $Z = -۴$ شده است. در سطح اطمینان ۹۵٪ : (مدیریت ۸۰)

۱) H_1 رد می‌شود ۲) H_1 پذیرفته می‌شود

۳) H_0 تأئید می‌شود ۴) قبول ادعا بستگی به مقدار بحرانی دارد.

۵۷- اگر $n_1 = ۱۲۰$, $n_2 = ۱۰۰$ باشد و نسبت موقعیت در نمونه به ترتیب ۰/۶ و ۰/۵ باشد مقدار آماره آزمون برای بررسی H_0 کدام است؟ (مدیریت ۸۲) (مدیریت ۸۳)

۱) ۲/۰۷- ۲) ۲/۳۵- ۳) ۱/۴۹ ۴) ۲/۵۷

۵۸- در کدام یک از موارد زیر نمی‌توان آزمون فرض آماری را برگزار کرد؟ (مدیریت ۸۳)

۱) از سرشماری استفاده شده باشد.

۲) حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد.

۳) نمونه به روش تصادفی منظم انتخاب شده باشد.

۴) هیچکدام

۵۹- فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای واریانس جامعه‌ای با توزیع نرمال است؟ (α برای دنباله راست توزیع شده است.)

۱) $\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2}$

۲) $\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2}$

۳) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۴) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۶۰- متوسط قیمت در کتاب درسی ۲۳۰۰ ریال با انحراف معیار ۶۰۰ ریال می‌باشد. با فرض نامعلوم بودن توزیع جامعه، حداقل ۷۲درصد قیمت کتاب‌های درسی بین چه مقداری قرار دارد؟

۱) ۱۱۰۰ تا ۳۵۰۰ ۲) ۵۰۰ تا ۴۱۰۰ ۳) ۱۲۰۰ تا ۲۳۰۰ ۴) ۱۷۰۰ تا ۲۹۰۰

۶۱- یک نمونه تصادفی از ۶۴ لامپ نشان می‌دهد که عمر متوسط نمونه ۳۵۰ ساعت است. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای متوسط طول عمر واقعی لامپ‌ها با فرض $\sigma_\alpha = 100$ عبارت است از:

۱) ۱۵۰ تا ۵۵۰ ۲) ۱۵۴ تا ۵۴۶ ۳) ۲۵۰/۵ تا ۴۴۹/۵ ۴) ۳۲۶/۵ تا ۳۷۴/۵

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هشتم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۲ صحیح است.

۲- گزینه ۱ صحیح است.

افزایش α ← کاهش β ← افزایش توان آزمون

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \Rightarrow Z = \frac{50 - 55}{\sqrt{\frac{150}{100} + \frac{250}{100}}} = -2/5$$

$$-Z_{\alpha/2} = -Z_{0/025} = -1/96$$

چون $-2/5 < -1/96$ می‌باشد، بنابراین تعداد آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار می‌گیرد لذا فرضیه H_0 رد می‌شود.

۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = 250 \\ H_1 : \mu_1 \neq 250 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z = \frac{245 - 250}{\frac{10}{\sqrt{100}}} = -5$$

$$-Z_{\alpha/2} = -Z_{0/025} = -1/96$$

چون $-5 < -1/96$ است، بنابراین مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار می‌گیرد، پس فرضیه H_0 رد می‌شود.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 10 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 10 \end{cases}$$

چون $\sigma^2 = 10$ می‌باشد بنابراین $\sigma = 3/16$ است. پس چون فاصلهٔ اطمینان $(3,8)$ دربرگیرنده ۳/۱۶ می‌باشد پس در سطح معنی‌داری α، H_0 را می‌پذیریم.

۶- گزینه ۱ صحیح است.

۷- گزینه ۲ صحیح است.

بین α, β رابطهٔ معکوس وجود دارد. $\alpha + \beta = 1$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

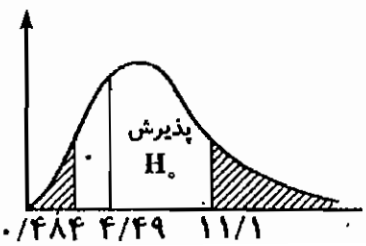
۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 18 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 18 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \Rightarrow \chi^2 = \frac{4 \times 20/2}{18} = 4/49$$

$$\chi^2_{0/975,4} = 11/1 \quad , \quad \chi^2_{0/025,4} = 0/484$$

$0/484 < 4/49 < 11/1$ پس H_0 را می‌پذیریم.



۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : P = 0/5 \\ H_1 : P \neq 0/5 \end{cases}$$

$$\alpha = 0/5 \qquad P = \frac{X}{n} = \frac{55}{100} = 0/55$$

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0/55 - 0/5}{\sqrt{\frac{0/5 \times 0/5}{100}}} = \frac{0/05}{0/05} = 1$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

افزایش α ← کاهش β ← افزایش توان آزمون

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

۱۳- گزینه ۱ صحیح است.

۱۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{توان آزمون} = F\left(Z_\alpha + \frac{a - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = F\left(Z_{0/05} + \frac{230 - 240}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = F(0/5199 - 10) = 1$$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است.

۱۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu \neq 10 \end{cases}$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow -Z_{\alpha/2} = -Z_{0/025} = -1/96$$

$$Z = \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{7 - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -3$$

چون $-3 < -1/96$ می‌باشد پس مقدار عددی آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار می‌گیرد و فرضیه H_0 رد می‌شود.

۱۷- گزینه ۱ صحیح است.

۱۸- گزینه ۳ صحیح است.

۱۹- گزینه ۳ صحیح است.

۲۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

۲۱- گزینه ۳ صحیح است.

۲۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 & \bar{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{360}{400} = 0/9 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 & \bar{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{40}{100} = 0/4 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}} = \frac{0/9 - 0/4}{\sqrt{\frac{(0/9)(0/1)}{400} + \frac{(0/4)(0/6)}{100}}} = 11/18$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0/025} = 1/96$$

چون ۱۱/۱۸ > ۱/۹۶ می‌باشد، بنابراین آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار می‌گیرد، در نتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

۲۳- گزینه ۲ صحیح است.

۲۴- گزینه ۳ صحیح است.

۲۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{120(0/3)}{0/2} = 180$$

۲۶- گزینه ۳ صحیح است.

۲۷- گزینه ۴ صحیح است.

۲۸- گزینه ۴ صحیح است.

چون می‌خواهیم فرض $H_0: \mu_1 = \mu_2$ را رد کنیم باید فاصله انتخابی شامل نقطهٔ صفر نباشد که تنها فاصله (۳/۸ و ۲/۵) این ویژگی را دارد.

۲۹- گزینه ۱ صحیح است.

۳۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$n = 100 \quad , \quad X = 59 \Rightarrow \bar{P} = \frac{X}{n} = \frac{59}{100} = 0/59$$

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \Rightarrow Z = \frac{0/59 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{100}}} = \frac{0/09}{0/05} = 1/8$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow Z_\alpha = Z_{0/05} = 0/5199$$

چون ۱/۸ > ۰/۵۱۹۹ می‌باشد در نتیجه آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفته و فرض H_0 رد می‌شود.

۳۱- گزینه ۱ صحیح است.

۳۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{52-48}{\sqrt{\frac{64}{13} + \frac{256}{15}}} = 0/85$$

۳۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 5 \\ H_1: \sigma^2 > 5 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1)7}{5} = \frac{77}{5} = 15/4$$

$$\chi^2_{0/05,11} = 19/68$$

چون ۱۵/۴ < ۱۹/۶۸ می‌باشد در نتیجه آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار نمی‌گیرد و فرض H_0 را رد نمی‌کنیم.

۳۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{توان آزمون} = F(Z_a + \delta) = F(1/65 + \delta)$$

$$\delta = \frac{a - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{396/7 - 400}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = \frac{-3/3}{2} = -1/65$$

$$\text{توان آزمون} = F(1/65 - 1/65) = F(0) = 0/5$$

$$\beta = 1 - \text{توان آزمون} = 1 - 0/5 = 0/5$$

۳۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{توان آزمون} = F(Z_\alpha + \delta)$$

$$\delta = \frac{a - a_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{۳۳۰ - ۳۲۴}{\frac{۱۲}{\sqrt{۳۶}}} = ۳$$

$$\text{توان آزمون} = F(Z_{۰/۰۲۵} + ۳) = F(-۲ + ۳) = F(۱) = ۰/۸۴$$

$$\beta = ۱ - \text{توان آزمون} = ۱ - ۰/۸۴ = ۰/۱۶$$

۳۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_\circ : P \le ۰/۲ \\ H_۱ : P > ۰/۲ \end{cases}$$

$$\bar{P} = \frac{X}{n} = \frac{۳۰}{۱۰۰} = ۰/۳۰$$

$$Z = \frac{\bar{P} - P_\circ}{\sqrt{\frac{P_\circ(۱ - P_\circ)}{n}}} = \frac{۰/۳۰ - ۰/۲}{\sqrt{\frac{(۰/۲)\,(۱ - ۰/۲)}{۱۰۰}}} = \frac{۰/۱}{۰/۰۴} = ۲/۵$$

۳۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_\circ : \sigma^۲ \ge ۱۰۰ \\ H_۱ : \sigma^۲ < ۱۰۰ \end{cases}$$

$$\chi^۲ = \frac{(n - ۱)\, S^۲}{\sigma_\circ^۲} = \frac{(۱۳ - ۱)\,(۷۵)}{۱۰۰} = ۹/۷۵$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \Rightarrow \chi^۲_{\alpha, n-۱} = \chi^۲_{۰/۰۱, ۱۲} = ۴/۱۰۷$$

چون $۹/۷۵ > ۴/۱۰۷$ می‌باشد، در نتیجه آمارهٔ آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفته و فرض $H_\circ$ رد می‌شود.

۳۸- گزینه ۱ صحیح است.

۳۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$S^۲ = \frac{\sum (x_i - \mu)^۲}{n - ۱} = (۰/۳)^۲ \times \frac{۱۹}{۱۸} = ۰/۰۹۵$$

$$\chi^۲ = \frac{(n - ۱)\, S^۲}{\sigma^۲} = \frac{۱۸(۰/۰۹۵)}{۰/۰۵} = ۳۴/۲$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{توان آزمون} = E(Z_\alpha + \delta)$$

$$S = \frac{a - a_\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{۵۹۶/۷ - ۶۰۰}{\frac{۱۴}{\sqrt{۴۹}}} = -۱/۶۵$$

$$\text{توان آزمون} = F(Z_\alpha + \delta) = F(۱/۶۵ - ۱/۶۵) = F(۰) = ۰/۵$$

$$\beta = ۱ - \text{توان آزمون} = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

۴۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$X_۱ = ۱۴, X_۲ = ۶ \;,\; n_۱ = ۶۴ \;,\; n_۲ = ۳۶$$

$$\bar{P}_۱ = \frac{X_۱}{n_۱} = \frac{۱۴}{۶۴} \qquad \bar{P}_۲ = \frac{X_۲}{n_۲} = \frac{۶}{۳۶}$$

$$Z=\frac{\overline{P}_1-\overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1}+\frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}}=\frac{\frac{14}{64}-\frac{6}{36}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{14}{64}\right)\left(\frac{50}{64}\right)}{64}+\frac{\left(\frac{6}{36}\right)\left(\frac{30}{36}\right)}{36}}}=0/625$$

$$\alpha=0/05\Rightarrow Z_{\alpha/2}=Z_{0/025}=1/96$$

$1/96>0/625$ می‌باشد پس H_0 را نمی‌توان رد کرد.

۴۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases}H_0:\mu\le 10\\ H_1:\mu>10\end{cases}$$

۴۳- گزینه ۲ صحیح است.

۴۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases}H_0:\sigma_x^2\ge 1000\\ H_1:\sigma_x^2<1000\end{cases}$$

۴۵- گزینه ۲ صحیح است.

۴۶- گزینه ۴ صحیح است.

۴۷- گزینه ۴ صحیح است.

۴۸- گزینه ۳ صحیح است.

۴۹- گزینه ۲ صحیح است.

معمولاً در مسایل اقتصادی و اجتماعی $\alpha=0/05$ در نظر گرفته می‌شود و چون برای $\alpha=0/05$ مقدار $t_{\alpha,2}$ از ۱/۲۲۵ بیشتر است در نتیجه آماره آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار نمی‌گیرد و H_0 پذیرفته می‌شود.

۵۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases}H_0:\mu_1=\mu_2\\ H_1:\mu_1\ne\mu_2\end{cases}$$

چون مقدار ملاک عددی آزمون‌کننده در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد، در نتیجه فرضیه H_0 را نمی‌توانیم رد کنیم.

۵۱- گزینه ۱ صحیح است.

۵۲- گزینه ۴ صحیح است.

همانطور که گفتیم فرض صفر می‌بایست شامل تساوی باشد و از آنجائیکه در ادعای مسئله در مورد مساوی بودن نسبت دو جامعه ادعایی نشده است بنابراین فرض صفر ، نقیض ادعا می‌باشد.

۵۳- گزینه ۱ صحیح است.

احتمال وقوع اشتباه نوع اول α رابطه معکوس با احتمال وقوع اشتباه نوع دوم (β) دارد.

۵۴- گزینه ۳ صحیح است.

چون تعداد اعضای نمونه بیش از ۳۰ است می‌توان از توزیع Z برای آزمون استفاده کرد.

$$\begin{cases}H_0:\mu_0\ge 20\\ H_1:\mu_0<20\end{cases}$$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_{\overline{X}}}=\frac{22-20}{\frac{5}{\sqrt{64}}}=3/2\Rightarrow$$ H_0 رد نمی‌شود و ادعا تأئید می‌شود

۵۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases}H_0:P\ge 0/6\\ H_1:P<0/6\end{cases}$$

۵۶-گزینه ۱ صحیح است.

چون آماره آزمون در منطقه α $Z_\alpha = Z_{/\circ\circ} = -1/645$ قرار گرفته $H_\circ$ رد می‌شود بنابراین H_1 را می‌توان قبول کرد.

۵۷-گزینه ۳ صحیح است.

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}} = \frac{0/6 - 0/5}{\sqrt{\frac{0/6 \times 0/4}{120} + \frac{0/5 \times 0/5}{100}}} = 1/49$$

۵۸- گزینه ۱ صحیح است.

زیرا در سرشماری اطلاعات تمام جامعه جمع‌آوری می‌شود و در واقع نمونه‌گیری صورت نمی‌گیرد تا نیازی به آزمون فرض باشد.

۵۹- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به بحث مربوط به برآورد واریانس (σ^2)

۶۰- گزینه ۱ صحیح است.

با فرض نامعلوم بودن توزیع و بیان حداقل ۰/۷۵ احتمال از قضیه چی‌پی‌شف به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(|x-\mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \rightarrow P(\mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0/75$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0/75 \rightarrow \varepsilon^2 = 1440000 \rightarrow \boxed{\varepsilon = 1200} \\ \mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon \rightarrow 2300 - 1200 < x < 2300 + 1200 \rightarrow 1100 < x < 3500 \end{cases}$$

۶۱- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به معلوم بودن $\sigma^2 = 100^2$ و $n = 64 > 30$ با توجه به قضیه حد مرکزی برآورد فاصله از تابع z به شرح زیر استفاده می‌کند.

$$\begin{cases} \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 350 \pm 1/96 \frac{100}{\sqrt{64}} = (325/5, 374/5) \\ \overline{x} = 350, n = 64, \sigma = 100 \\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{/025} = 1/96 \\ (1-\alpha)\% = 0/95 \end{cases}$$

فصل نهم

تحلیل واریانس

در صورتیکه بخواهیم مقایسه میانگین را برای بیش از دو جامعه بررسی کنیم، دو راه وجود دارد:

۱) مقایسه میانگین جوامع به صورت دو به دو ۲) مقایسه میانگین‌ها به صورت همزمان

برای صرفه‌جویی در زمان و هزینه مقایسه میانگین‌ها را به صورت همزمان انجام می‌دهند، در این حالت هدف از مقایسه میانگین‌های بیش از دو جامعه این است که، آیا بین میانگین‌های نمونه‌ای جوامع مختلف تفاوت معنی‌داری وجود دارد یا خیر.

تعریف: تحلیل واریانس روشی برای مقایسه میانگین‌های چند جامعه (بیش از دو جامعه) می‌باشد که از طریق تحلیل و بررسی تفاوت‌های مشاهده شده بین میانگین‌های نمونه چند جامعه این عمل را انجام می‌دهد.

تحلیل واریانس بدین منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد که تعیین کنیم اختلافی بین میانگین‌ها وجود ندارد یا اینکه اختلاف بین میانگین‌ها معنی دارند. برای استفاده از تحلیل واریانس فرض‌های زیر مد نظر قرار می‌گیرند:

۱- جوامع مورد بررسی دارای توزیع نرمال هستند.

۲- جوامع مورد بررسی دارای واریانس‌های مساوی هستند.

۳- نمونه‌ها تصادفی و مستقل از هم هستند.

۱- تحلیل واریانس یک عامله

در تحلیل واریانس یک عامله فرض بر این است که مشاهدات تنها تحت تاثیر یک معیار قرار می‌گیرند. اگر از K جامعه موجود، K نمونه تصادفی به حجم n انتخاب نماییم و مشاهده j ام از جامعه i ام را با X_{ij} نمایش دهیم، می‌توان هر مشاهده را به صورت زیر نوشت:

$$x_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \qquad i = 1,2,\dots,k \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$$

نکته: در صورتیکه تحلیل واریانس براساس مشاهدات یک منبع باشد به آن تحلیل واریانس یک عامله می‌گویند و تجزیه مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین کل به صورت زیر می‌باشد:

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

مجموع مجذور انحرافات ناشی از منابع — مجموع مجذور انحرافات باقیمانده (خطا)

برای مشاهدات جدولی مانند زیر را در نظر می‌گیریم:

	۱	۲	.....	i	.....	K	
	x_{11}	x_{21}	.....	x_{i1}	.....	x_{k1}	
	x_{12}	x_{22}	.....	x_{i2}	.....	x_{k2}	
	⋮						
	x_{1n}	x_{2n}	.....	x_{in}	.....	x_{kn}	
مجموع	$T_{1.}$	$T_{2.}$		$T_{i.}$		$T_{k.}$	$T_{..}$
میانگین	$\bar{x}_{1.}$	$\bar{x}_{2.}$		$\bar{x}$		$\bar{x}_{k.}$	$\bar{X}_{..}$

آزمون فرضیه مربوط به تحلیل واریانس به صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \\ H_1: \text{حداقل یکی از اثرات تیماری مخالف صفر است} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \\ H_1: \text{حداقل یکی از میانگین ها با بقیه تفاوت دارد.} \end{cases}$$

منبع تغییرات	مجموع مربعات SS	درجه آزادی df	میانگین مربعات MS	آماره آزمون (F)
تیمارها	SSR	$k-1$	$MSR = \frac{SSR}{K-1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
خطا	SSE	$N-k$	$MSE = \frac{SSE}{N-K}$	
مجموع	SST	$N-1$		

$$SSR = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i0}^2}{n_i} - \frac{T_{00}^2}{N}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{T_{00}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSR$$

مقدار آماره F بدست آمده از جدول فوق را با $F_{\alpha,K-1,N-K}$ مقایسه می‌کنیم. اگر $F \geq F_{\alpha,K-1,N-K}$ باشد، فرض H_0 را در سطح معنی‌داری α رد می‌کنیم و در غیر این صورت آنرا می‌پذیریم.

مثال: زمان لازم برای تولید قطعه‌ای توسط ۳ نوع مختلفی از یک دستگاه اندازه‌گیری شده است و نتایج زیر را داده است. در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، آیا زمان لازم برای تولید این قطعه توسط ۳ دستگاه یکسان است.

حل:

دستگاه A	دستگاه B	دستگاه C
۱۸	۲۱	۱۹
۱۷	۱۹	۱۷
۱۹	۱۸	۱۸
۱۷	۲۰	۱۸
		۲۰

$$\begin{cases} H_0 = \mu_A = \mu_B = \mu_C \\ H_1: \text{همه میانگین ها باهم مساوی نیستند} \end{cases}$$

	A	B	C
	۱۸	۲۱	۱۹
	۱۷	۱۹	۱۷
	۱۹	۱۸	۱۸
	۱۷	۲۰	۱۸
			۲۰
مجموع	$T_{1.} = ۷۱$	$T_{2.} = ۷۸$	$T_{3.} = ۹۲$	$T_{00} = ۲۴۱$
میانگین	$\bar{x}_{1.} = ۱۷/۷۵$	$\bar{x}_{2.} = ۱۹/۵$	$\bar{x}_{3.} = ۱۸/۴$	$\bar{x}_{00} = ۵۵/۶۵$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_j} x_{ij}^2 = ۱۸^2 + ۱۷^2 + \dots + ۱۸^2 + ۲۰^2 = ۴۴۸۷$$

$$SST=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{nj} x_{ij}^{2}-\frac{T_{00}^{2}}{N}=4487-\frac{(241)^{2}}{13}=19/23$$

$$SSR=\sum_{i=1}^{r}\frac{T_{i0}^{2}}{n_i}-\frac{T_{00}^{2}}{N}=\left(\frac{71^{2}}{4}+\frac{78^{2}}{4}+\frac{92^{2}}{5}\right)-\frac{(241)^{2}}{13}=6/28$$

$$SSE=SST-SSR=19/23-6/28=12/95$$

منبع تغییرات	مجموع مربعات SS	درجه آزادی df	میانگین مربعات MS	آمارهٔ آزمون F
تیمارها	$SSR=6/28$	۲	$MSR=\frac{6/28}{2}=3/14$	$F=\frac{3/14}{1/295}=2/42$
خطا	$SSE=12/95$	۱۰	$F=\frac{3/14}{1/295}=2/42$	
جمع	$SST=19/23$	۱۲		

$F_{.05,2,10}=4/10$

$4/10>2/42$ فرض H_0 را در سطح اطمینان ۹۵٪ می‌پذیریم.

۲- تحلیل واریانس دو عامله

در تحلیل واریانس دو عامله، فرض بر این است که دو عامل بر مشاهدات تاثیر می‌گذارد، یکی تیمار و دیگری بلوک. تیمارها را در سطر و بلوک‌ها را در ستون نمایش می‌دهیم.

$x_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+e_{ij}$ $\quad i=1,2,\dots,k \quad j=1,2,\dots,n$

$\alpha_i=$ اثر تیماری $\quad \beta_j$ اثر بلوکی

تیمارها / بلوک‌ها	B_1	B_2 ...	B_n	مجموع مشاهدات تیمارها	میانگین مشاهدات تیمارها
A_1	X_{11}	X_{12} ...	X_{1n}	$T_{1.}$	$\overline{X}_{1.}$
A_2	X_{21}	X_{22} ...	X_{2n}	$T_{2.}$	$\overline{X}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
A_k	X_{K1}	X_{K2} ...	X_{Kn}	T_{K0}	$\overline{X}_{K0}$
مجموع مشاهدات بلوک‌ها	T_{01}	T_{02} ...	T_{0n}	T_{00}	
میانگین مشاهدات بلوک‌ها	$\overline{X}_{01}$	$\overline{X}_{02}$ ...	$\overline{X}_{0n}$		$\overline{X}_{00}$

آزمون فرض مربوط به تحلیل واریانس دو عامله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} H_0: \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0 \\ H_1: \text{حداقل یکی از } \alpha_i \text{ها مخالف صفر است.} \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} H_0: \beta_1=\beta_2=\dots=\beta_n=0 \\ H_1: \text{حداقل یکی از } \beta_j \text{ها مخالف صفر است.} \end{cases}$$

به منظور تحلیل واریانس دو عامله، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

منبع تغییرات	مجموع مربعات SS	درجه آزادی df	میانگین مربعات MS	آمارهٔ آزمون (F)
تیمارها	SSR	$K-1$	$MSR=\frac{SSR}{k-1}$	
بلوک‌ها	SSB	$n-1$	$MSB=\frac{SSB}{n-1}$	$F_R=\frac{MSR}{MSE}$
خطا	SSE	$(k-1)(n-1)$	$MSE=\frac{SSE}{(k-1)(n-1)}$	$F_B=\frac{MSB}{MSE}$
مجموع	SST	$kn-1$		

برای محاسبه پارامترهای جدول فوق از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} SSR &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} T_{i0}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 \\ SSB &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} T_{0j}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 \\ SST &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 \end{aligned}\right\} SSE = SST - SSR - SSB$$

در تحلیل واریانس دو عامله، دو F محاسبه می‌شود:

الف– اگر $F_R \geq F_{\alpha,(k-1),(k-1)(n-1)}$ باشد، فرض $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ را در سطح معنی‌داری α رد می‌کنیم.

ب– اگر $F_B \geq F_{\alpha,(n-1),(k-1)(n-1)}$ باشد، فرض $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ را در سطح معنی‌داری α رد می‌کنیم.

مثال: برای تولید یک محصول کشاورزی از ۳ نوع بذر و ۳ نوع زمین استفاده کرده‌ایم. در سطح معنی‌داری ۵٪ بررسی کنید آیا نوع زمین و نوع بذر در میزان محصول بدست آمده موثر است؟

(داده‌های جدول مربوط به میزان محصول بدست آمده در هر هکتار بر حسب تن می‌باشد.)

زمین / بذر	۱	۲	۳	تیمارها T_{i0}	$\bar{X}_{i0}$
A	۱۱	۹	۸	۲۸	۹/۳۳
B	۱۴	۱۲	۱۱	۳۷	۱۲/۳۳
C	۱۲	۱۳	۱۰	۳۵	۱۱/۶۷
بلوک‌ها $T_{.j}$	۳۷	۳۴	۲۹	۱۰۰	
$\bar{X}_{0j}$	۱۲/۳۳	۱۱/۳۳	۹/۶۷		$\bar{X}_{00} = ۱۱/۱۱$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}^2 = 11^2 + 9^2 + \ldots + 10^2 = 1140$$

$$SSR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} T_{i0}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 = \frac{1}{3}\left(28^2 + 37^2 + 35^2\right) - \frac{1}{9}(100)^2 = 1126 - 1111 = 15$$

$$SSB = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} T_{0j}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 = \frac{1}{3}\left(37^2 + 34^2 + 29^2\right) - \frac{1}{9}(100)^2 = 1122 - 1111 = 11$$

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{kn}T_{00}^2 = 1140 - \frac{1}{9}(100)^2 = 1140 - 1111 = 29$$

$$SSE = SST - SSR - SSB \Rightarrow SSE = 29 - 11 - 15 = 3$$

منبع تغییرات	مجموع مربعات SS	درجه آزادی d.f	میانگین مربعات MS	آمارهٔ آزمون (F)
تیمارها	$SSR = 15$	$K - 1 = 2$	$MSR = \frac{15}{2} = 7/5$	
بلوک‌ها	$SSB = 11$	$n - 1 = 2$	$MSB = \frac{11}{2} = 5/5$	$F_R = \frac{7/5}{0/75} = 10$
خطا	$SSE = 3$	$(k-1)(n-1) = 4$	$MSE = \frac{3}{4} = 0/75$	$F_B = \frac{5/5}{0/75} = 7/33$
مجموع	$SST = 29$	$kn - 1 = 8$		

$F_{\alpha,(k-1),(k-1)(n-1)} = F_{0/05,2,4} = 26/28 \quad F_{\alpha,(n-1),(k-1)(n-1)} = F_{0/05,2,4} = 26/28$

الف - $۱۰ < ۲۶/۲۸$ $\left(F_R < F_{\alpha,(k-۱),(k-۱)(n-۱)}\right) \Leftarrow$ دلیلی بر رد فرض $H_۰$ وجود ندارد. یعنی تیمارها (نوع بذر) تاثیری بر میزان محصول ندارد.

ب - $۷/۳۳ < ۲۶/۲۸$ $\left(F_B < F_{\alpha,(n-۱),(k-۱)(n-۱)}\right) \Leftarrow$ دلیلی بر رد فرض $H_۰$ وجود ندارد. یعنی بلوک‌ها (نوع زمین) تاثیری بر میزان محصول ندارد.

۳- تحلیل واریانس نمونه‌هایی با حجم مساوی:

در واقع در تحلیل واریانس مربوط به نمونه‌هایی با حجم مساوی، فرضیه زیر را آزمون می‌کنیم:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲ = \ldots = \mu_k \\ H_۱ : \text{حداقل ۲ تا از میانگین‌ها با هم برابر نیستند.} \end{cases}$$

در اینجا آمارهٔ آزمون به صورت زیر است:

$$F = \frac{\text{واریانس بین نمونه‌ها}}{\text{واریانس داخل نمونه‌ها}} = \frac{nS_{\bar{x}}^۲}{S_p^۲}$$

که در این رابطه $S_{\bar{x}}^۲$ واریانس میانگین‌های نمونه بوده و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\bar{x}}^۲ = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^۲}{n-۱}$$

$S_p^۲$ نیز واریانس داخل نمونه‌ها بوده و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_p^۲ = \frac{S_۱^۲ + S_۲^۲ + \ldots + S_k^۲}{k}$$

تعبیر آمارهٔ آزمون بدین صورت است که اگر $F > F_{\alpha,(k-۱),k(n-۱)}$ باشد، فرض $H_۰$ را در سطح خطای α رد می‌کنیم.

نکته: $k-۱$ درجه آزادی صورت و $k(n-۱)$ درجه آزادی مخرج می‌باشد.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- به منظور مقایسهٔ هزینه ممکن خانوارها در ۵ منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای به حجم $n = ۶$ خانوار بطور تصادفی انتخاب شده و براساس نتایج مشاهدات، جدول تجزیه واریانس به صورت زیر بدست آمده است. (اقتصاد – ۷۱)

نوع تغییرات	SSD	درجه آزادی	$MS = S^۲$	F
بین گروه‌ها (B)	۶/۴			
داخل گروهها یا خطا (E)				
تغییرات کل (T)	۶۸/۹			

مقدار عددی تابع آزمون (F) کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۶۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۰/۶۴

۲- به منظور مقایسهٔ هزینه مواد غذایی خانوارها در ۴ منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای به حجم $n = ۵$ خانوار بطور تصادفی انتخاب شده است. براساس نتایج مشاهدات میانگین مجذورات (تصحیح شده) بین گروه‌ها $\left(S_B^۲ = MSB\right)$ مساوی با ۶/۳۴ و میانگین مجذورات (تصحیح شده) داخل گروه‌ها $\left(S_E^۲ = MSE\right)$ مساوی با ۳/۵ بدست آمده‌اند، کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ $(\alpha = ۰/۰۵)$ (اقتصاد – ۷۲)

۱) میانگین ۴ جامعه فوق با هم یکسان هستند.

۲) یکسان بودن میانگین‌های ۴ جامعه فوق را نمی توانیم رد کنیم.

۳) میانگین ۴ جامعه فوق با هم تفاوت دارند.

۴) اقلاً یکی از میانگین‌ها با میانگین‌های دیگر تفاوت دارد.

۳- یک تجزیه واریانس روی ۵ ناحیه در شهری که شکلات مصرف می‌کنند انجام گرفته است و این اطلاعات در دست است:

$$SS_\alpha = SSD_\beta = \sum_{i=۱}^{r}\sum_{j=۱}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^۲ = ۱۵۵۲ \quad , \quad d.f_T = ۴۹$$

و $MSE = ۴۸/۵$ (مجموع انحرافات توجیه نشده)، مقدار F کدام است؟ (اقتصاد – ۷۳)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴- برای مقایسه مدت دوام سه نوع لنت ترمز اتومبیل، یک آزمایش تجربی تصادفی انجام شده و نتایج زیر برحسب هزار کیلومتر کارکرد به دست آمده است. تابع (Statistic) آزمون چیست و کمیت آن کدام است؟ (اقتصاد – ۷۳)

لنت ترمز	۱	۲	۳
الف	۳	۴	۵
ب	۴	۲	۳
ج	۳	۲	۵

۱) $۰/۵۳, F$ ۲) $۰/۵۳, \chi^۲$ ۳) $۰/۷۸, F$ ۴) $۱/۴۴, F$

۵- الگوی ریاضی مشاهده در آنالیز واریانس دو عاملی (دو طرفه) کدام است؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$ ۲) $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$

۳) $X_{ijk} = \mu + \alpha_i\beta_j + e_{ijk}$ ۴) $X_{ijk} = \mu\alpha_i + \beta_j\alpha_i + e_{ijk}$

۶- چهارخط تولید مهره‌های یکسان می‌سازند که قطر آنها برطبق نرمال توزیع می‌شوند. از هر خط تولید نمونه‌هایی به حجم $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 11$ انتخاب می‌کنیم و بر اساس نتایج مشاهدات کمیت‌های زیر به دست آمده است.

$$\sum_i\sum_j\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2 = 550 \quad , \quad \sum\left(X_{4j}-\overline{X}_4\right)^2 = 80 \quad , \quad \sum\left(X_{3j}-\overline{X}_3\right)^2 = 90$$

$$\sum\left(X_{2j}-\overline{X}_2\right)^2 = 110 \ , \sum\left(X_{1j}-\overline{X}_1\right)^2 = 120$$

مقدار عددی تابع نمونه‌ای (F) در آزمون فرضیه یکسان بودن میانگین‌های ۴ جامعه نرمال کدام است؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۶

۷- برای آزمون برابری میانگین سه جامعه، یک نمونه ۵تایی از هر جامعه گرفته شده و اطلاعات زیر محاسبه شده است، مقدار عددی تابع نمونه‌ای آزمون کدام است؟ (اقتصاد – ۷۶)

$$\overline{X}_1 = 5 \quad , \quad \overline{X}_2 = 10 \quad , \quad \overline{X}_3 = 15$$

$$S_1^2 = 9 \quad , \quad S_2^2 = 25 \quad , \quad S_3^2 = 41$$

۱) $F = 1$ ۲) $F = 2/5$ ۳) $F = 5$ ۴) $\chi^2 = 5$

۸- به منظور بررسی برابری میانگین مصرف مواد اولیه در سه کارخانه تولیدی که یک نوع محصول تولید می‌کنند، در ۵ روز، میزان مصرف مواد اولیه اندازه‌گیری شده و نتایج به صورت:

$$\sum\left(X_{1j}-\overline{X}_1\right)^2 = 12 \quad , \quad \sum\left(X_{2j}-\overline{X}_2\right)^2 = 21 \quad , \quad \sum\left(X_{3j}-\overline{X}_3\right)^2 = 25$$

$$,SST = \sum\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2 = 90$$

به دست آمده است. به فرض اینکه مصرف مواد اولیه بر طبق قانون نرمال توزیع شده باشد، مقدار عددی ملاک آزمون کننده (آمارهٔ آزمون) کدام است؟ (اندیس i متعلق به کارخانه و اندیس j مربوط به روز است). (اقتصاد – ۷۸)

۱) $F = 0/33$ ۲) $F = 0/58$ ۳) $F = 1/67$ ۴) $F = 3/33$

۹- برای آزمون برابری میانگین نمرات در سه کلاس، از نمونه‌ای ۹تایی از هر کلاس، اطلاعات زیر به دست آمده است. آمارهٔ آزمون کدام است؟ (اقتصاد – ۸۱)

$$\overline{X}_1 = 15 \quad , \quad \overline{X}_2 = 16 \quad , \quad \overline{X}_3 = 14$$

$$S_1^2 = 4 \quad , \quad S_2^2 = 6 \quad , \quad S_3^2 = 5$$

۱) $\chi_3^2 = 2/8$ ۲) $F_{2,24} = 1/8$ ۳) $F_{2,24} = 3/6$ ۴) $F_{2,27} = 2/9$

۱۰- به منظور مقایسه هزینه مسکن خانوارها در ۵ منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای به حجم $n = 6$ خانوار به‌طور تصادفی انتخاب شده است و بر اساس مشاهدات مجموع مجذور انحرافات رویه یا تیماری یا بین گروهی $SS_r = 6/4$ و مجموع مجذور انحرافات کل $SST = 68/9$ به دست آمده است، مقدار عددی تابع یا آماره آزمون کدام است؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۶۴ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۶۴ ۴) ۲/۵

۱۱- بر اساس نمونه‌های تصادفی ۴ تایی از ۳ جامعه که دارای توزیع نرمال است، اطلاعات زیر به دست آمده است :

$$X_1 = 110 \quad , \quad X_2 = 100 \quad , \quad X_3 = 120$$

$$S_1^2 = 180 \quad , \quad S_2^2 = 220 \quad , \quad S_3^2 = 200$$

کمیت (ملاک) آمارهٔ آزمون برای آزمون برابری میانگین در این سه جامعه چیست؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) $\chi_{11}^2 = 2$ ۲) $F_{2,9} = 2$ ۳) $F_{2,9} = 3$ ۴) $F_{9,2} = 3$

۱۲- به منظور آزمون برابری میانگین بین ۵ جامعه آماری، یک نمونه تصادفی ۵ تایی مستقل از هر یک گرفته شده و اطلاعات زیر محاسبه شده است. آمارهٔ آزمون مساوی چه عددی است؟ (اقتصاد – ۸۴)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2=60 \quad , \quad n\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_i-\overline{\overline{X}})^2=80$$

۱) ۰/۱۴ ۲) ۸/۹ ۳) ۷/۶ ۴) ۶/۶

۱۳- برای آزمون برابری متوسط هزینه‌های خانوارها در پنج منطقه، از هر یک از این مناطق، نمونه‌ای به حجم ۶ خانوار بطور تصادفی انتخاب شده و بر اساس آن $SSE=62/5$ و $SST=68/9$ بدست آمده است. مقدار عددی آمارهٔ آزمون عبارتست از: (اقتصاد – ۸۴)

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۱/۵۶ ۴) ۹/۷۶

پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$SSD_F = SST - SSD_B \Rightarrow SSD_E = ۶۸/۹ - ۶/۴ = ۶۲/۵$$

$$\left.\begin{array}{l} MSB = \dfrac{SSD_B}{k-۱} = \dfrac{۶/۴}{۵-۱} = ۱/۶ \\ MSE = \dfrac{SSD_E}{N-K} = \dfrac{۶۲/۵}{۳۰-۵} = ۲/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{MSB}{MSE} \Rightarrow F = \frac{۱/۶}{۲/۵} = ۰/۶۴$$

۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲ = \mu_۳ = \mu_۴ \\ H_۱ : \text{حداقل ۲ تا از میانگین ها نامساوی هستند.} \end{cases}$$

$$F = \frac{S_B^۲}{S_E^۲} = \frac{۶/۳۴}{۳/۵} = ۱/۸۱ \quad F_{\alpha,k-۱,N-k} = F_{۰/۰۵,۳,۱۶} = ۳/۲۴$$

چون $۱/۸۱ < ۳/۲۴$ می‌باشد در نتیجه فرض $H_۰$ را نمی‌توانیم رد کنیم.

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$d.f_T = N-۱ = ۴۹ \quad , \quad d.f_B = k-۱ = ۵-۱ = ۴ \Rightarrow d.f_E = ۴۹-۴ = ۴۵$$

$$MSB = \frac{SSD_B}{k-۱} = \frac{۱۵۵۲}{۴} = ۳۸۸ \quad , \quad MSE = ۴۸/۵$$

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{۳۸۸}{۴۸/۵} = ۸$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$SST = \sum\sum\left(X_{ij}^۲ - \frac{T_{۰۰}^۲}{N}\right) = ۳^۲ + ۴^۲ + \ldots + ۵^۲ - \frac{۱}{۹}(۳۱)^۲ = ۱۰/۲۲$$

$$SSR = \sum \frac{۱}{n_i}(T_{i۰})^۲ - \frac{۱}{N}(T_{۰۰})^۲ = \frac{۱}{۳}\left(۱۲^۲ + ۹^۲ + ۱۰^۲\right) - \frac{۱}{۹}(۳۱)^۲ = ۱/۵۵$$

$$SSE = SST - SSR \Rightarrow SSE = ۱۰/۲۲ - ۱/۵ = ۸/۶۷$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR = \dfrac{SSR}{k-۱} = \dfrac{۱/۵۵}{۳-۱} = ۰/۷۷۵ \\ MSE = \dfrac{SSE}{N-K} = \dfrac{۸/۶۷}{۹-۳} = ۱/۴۴۵ \end{array}\right\} \frac{MSR}{MSE} = \frac{۰/۷۷۵}{۱/۴۴۵} = ۰/۵۳$$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

۶- گزینه ۲ صحیح است.

$$SST = \sum_i\sum_j\left(X_{ij} - \overline{X}\right)^۲ = ۵۵۰$$

$$SSE = \sum\left(X_{ij} - \overline{X}_۱\right)^۲ + \sum\left(X_{۲j} - \overline{X}_۲\right)^۲ + \sum\left(X_{۳j} - \overline{X}_۳\right)^۲ + \sum\left(X_{۴j} - \overline{X}_۴\right)^۲$$

$$SSE = ۱۲۰ + ۱۱۰ + ۹۰ + ۸۰ = ۴۰۰$$

$$SSR = SST - SSE = ۵۵۰ - ۴۰۰ = ۱۵۰$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR = \dfrac{SSR}{k-۱} = \dfrac{۱۵۰}{۴-۱} = ۵۰ \\ MSE = \dfrac{SSE}{N-K} = \dfrac{۴۰۰}{۴۴-۴} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵$$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\overline{X}_۱ = \frac{\sum X_{۱j}}{n} \Rightarrow \sum X_{۱j} = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

$$\overline{X}_۲ = \frac{\sum X_{۲j}}{n} \Rightarrow \sum X_{۲j} = ۵ \times ۱۰ = ۵۰$$

$$\overline{X}_۳ = \frac{\sum X_{۳j}}{n} \Rightarrow \sum X_{۳j} = ۵ \times ۱۵ = ۷۵$$

$$S_۱^۲ = \frac{\sum X_{۱j}^۲ - \frac{\left(\sum X_{۱j}\right)^۲}{n}}{n-۱} \Rightarrow ۹ = \frac{\sum X_{۱j}^۲ - \frac{\left(۲۵^۲\right)}{۵}}{۴} \Rightarrow \sum X_{۱j}^۲ = ۱۶۱$$

$$S_۲^۲ = \frac{\sum X_{۲j}^۲ - \frac{\left(\sum X_{۲j}\right)^۲}{n}}{n} \Rightarrow ۲۵ = \frac{\sum X_{۲j}^۲ - \frac{(۵۰)^۲}{۵}}{۴} \Rightarrow \sum X_{۲j}^۲ = ۶۰۰$$

$$S_۳^۲ = \frac{\sum X_{۳j}^۲ - \frac{\left(\sum X_{۳j}\right)^۲}{n}}{n} \Rightarrow ۴۱ = \frac{\sum X_{۳j}^۲ - \frac{(۷۵)^۲}{۵}}{۴} \Rightarrow \sum X_{۳j}^۲ = ۱۲۸۹$$

$$SSR = SST - SSE = ۵۵۰ - ۳۰۰ = ۲۵۰$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR = \frac{SSR}{k-۱} = \frac{۲۵۰}{۳-۱} = ۱۲۵ \\ MSE = \frac{SSE}{N-K} = \frac{۳۰۰}{۱۵-۳} = ۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{۱۲۵}{۲۵} = ۵$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$SST = \sum\left(X_{ij} - \overline{X}\right)^۲ = ۹۰$$

$$SSE = \sum\left(X_{۱j} - \overline{X}_۱\right)^۲ + \sum\left(X_{۲j} - \overline{X}_۲\right)^۲ + \sum\left(X_{۳j} - \overline{X}_۳\right)^۲ = ۱۲ + ۲۱ + ۲۵ = ۵۸$$

$$SSR = SST - SSE = ۹۰ - ۵۸ = ۳۲$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR = \frac{SSR}{k-۱} = \frac{۳۲}{۳-۱} = ۱۶ \\ MSE = \frac{SSE}{N-K} = \frac{۵۸}{۱۵-۳} = ۴/۸۳ \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{۱۶}{۴/۸۳۳} \simeq ۳/۳۳$$

۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$S_{\overline{X}}^۲ = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^۲}{n-۱} = \frac{(۱۵-۱۵)^۲ + (۱۶-۱۵)^۲}{۳-۱} = ۱$$

$$S_P^۲ = \frac{S_۱^۲ + S_۲^۲ + S_۳^۲}{۳} = \frac{۴+۶+۵}{۳} = ۵$$

درجه آزادی صورت $= k-۱ = ۳-۱ = ۲$ درجه آزادی مخرج $= k(n-۱) = ۳(۹-۱) = ۲۴$

$$F_{(k-۱),k(n-۱)} = F_{۲,۲۴} = \frac{nS_{\overline{X}}^۲}{S^۲P} \Rightarrow F_{۲,۲۴} = \frac{۹ \times ۱}{۵} = ۱/۸$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$SSE = SST - SSR \Rightarrow SSE = ۶۸/۹ - ۶/۴ = ۶۲/۵$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR=\dfrac{SSR}{k-۱}=\dfrac{۶/۴}{۵-۱}=۱/۶ \\ MSE=\dfrac{SSE}{N-K}=\dfrac{۶۲/۵}{۳۰-۵}=۲/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow F=\dfrac{MSR}{MSE}=\dfrac{۱/۶}{۲/۵}\cong ۰/۶۴$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\overline{X}_{۰۰}=\frac{۱۱۰+۱۰۰+۱۲۰}{۳}=۱۱۰$$

$$SSR=n\sum_{i=۱}^{k}\left(\overline{x}_{i۰}-\overline{x}_{۰۰}\right)^{۲}=۴\left[(۱۱۰-۱۱۰)^{۲}+(۱۰۰-۱۱۰)^{۲}+(۱۲۰-۱۱۰)^{۲}\right]=۸۰۰$$

$$SSE=\sum(n_i-۱)S_i^{۲}=(۳\times ۱۸۰)+(۳\times ۲۲۰)+(۳\times ۲۰۰)=۱۸۰۰$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR=\dfrac{SSR}{k-۱}=\dfrac{۸۰۰}{۳-۱}=۴۰۰ \\ MSE=\dfrac{SSE}{N-K}=\dfrac{۱۸۰۰}{۱۲-۳}=۲۰۰ \end{array}\right\} \Rightarrow F=\dfrac{MSR}{MSE}=\dfrac{۴۰۰}{۲۰۰}=۲$$

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$SSR=n\sum_{i=۱}^{k}\left(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}}\right)^{۲}=۸۰$$

$$SSE=\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n}\left(x_{ij}-\overline{x}_i\right)^{۲}=۶۰$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR=\dfrac{SSR}{k-۱}=\dfrac{۸۰}{۵-۱}=۲۰ \\ MSE=\dfrac{SSE}{N-K}=\dfrac{۶۰}{۲۵-۵}=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow F=\dfrac{MSR}{MSE}=\dfrac{۲۰}{۳}=۶/۶$$

۱۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$SSR=SST-SSE \Rightarrow SSR=۶۸/۹-۶۲/۵=۶/۴$$

$$\left.\begin{array}{l} MSR=\dfrac{SSR}{k-۱}=\dfrac{۶/۴}{۵-۱}=۱/۶ \\ MSE=\dfrac{SSE}{N-K}=\dfrac{۶۲/۵}{۳۰-۵}=۲/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow F=\dfrac{MSR}{MSE}=\dfrac{۱/۶}{۲/۵}=۰/۶۴$$

فصل دهم

رگرسیون و همبستگی

۱- رگرسیون خطی ساده

در واقع برآوردی است از رابطه‌ای که بین دو یا چند متغیر وجود دارد. در واقع با داشتن معادله رگرسیون می‌توان با تعیین متغیر مستقل، مقدار تقریبی متغیر وابسته را برآورد کرد. برای اینکه بفهمیم بین دو متغیر ارتباط خطی وجود دارد یا خیر می‌توان از همبستگی و نمودار پراکنش استفاده نمود.

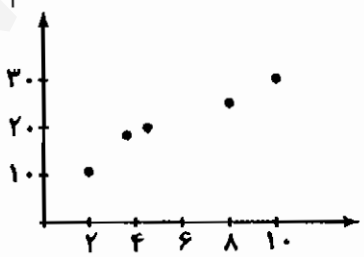
۲- نمودار پراکنش

نموداری دو بعدی است که در واقع نشان‌دهندهٔ زوج مرتب‌های متغیر مستقل (x) و متغیر وابسته (y) می‌باشد. در واقع هر زوج مرتب (x_i, y_i) را به عنوان یک نقطه در صفحهٔ مختصات درنظر می‌گیریم و نمودار پراکنش را رسم می‌کنیم. این نمودار می‌تواند اطلاعات اولیه بسیار خوبی را در اختیار ما قرار دهد. از جمله اینکه نشان می‌دهد که آیا رابطهٔ بین y,x وجود دارد یا خیر. اگر رابطه وجود دارد از نوع خطی یا غیرخطی است و بالاخره در صورت خطی بودن، چه نوع رابطه‌ای می‌باشد (مستقیم، معکوس). اما ضعف نمودار پراکنش این است که در این نمودار نمی‌توان علت این رابطه و نیز شدت رابطه را تعیین کرد. در ضمن با استفاده از این نمودار نمی‌توان به ازای x های مختلف، برازش مناسبی از y ها داشت.

با استفاده از نمودار پراکنش می‌توان به برازش بصری داده ها پرداخت، به این ترتیب که خطی را که به نظر بهترین برآوردکننده داده ها است را رسم کرد.

مثال: جدول زیر داده‌های مربوط به هزینه تبلیغات و سود شرکت را نشان می‌دهد. نمودار پراکنش داده ها به صورت زیر ترسیم می‌شود:

x (هزینه تبلیغات) برحسب میلیون ریال	۲	۴	۵	۸	۱۰
y (سود) برحسب میلیون ریال	۱۱	۱۹	۲۰	۲۴	۳۰



۳- ضریب همبستگی

ضریب همبستگی بدین منظور استفاده می‌شود که تعیین کنیم آیا رابطهٔ معنی‌داری بین دو متغیر وجود دارد یا خیر. ضریب همبستگی را با r نمایش می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[n\sum X^2 - (\sum X)^2][n\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} = \frac{SP_{XY}}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}$$

$$r=\frac{\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{\sum(X-\overline{X})^2\sum(Y-\overline{Y})^2}}$$

$$r=\frac{\sum XY-n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{(\sum X^2-n\overline{X}^2)(\sum Y^2-n\overline{Y}^2)}} \qquad -1\le r\le +1$$

نکته ۱: اگر Y,X از لحاظ آماری مستقل باشند، ضریب همبستگی بین آنها صفر است ولی عکس آن صادق نیست یعنی اگر $r=0$ بدین معنا نیست که دو متغیر مستقل هستند.

نکته ۲: ضریب همبستگی صرفاً جهت بررسی وابستگی خطی بین دو متغیر استفاده می‌شود و وابستگی غیرخطی را نمی‌توان با آن نشان داد.

نکته ۳: برحسب مقدار بدست آمده برای r، در مورد رابطهٔ بین y,x می‌توان گفت:

الف – اگر $-1<r<0$ باشد، رابطهٔ بین y,x معکوس می‌باشد.

ب – اگر $0<r<r$ باشد، رابطهٔ بین y,x مستقیم می‌باشد.

ج – اگر $|r|=1$ باشد رابطه بین y,x کامل و اگر $r=0$ باشد بین y,x رابطهٔ خطی وجود ندارد و در غیر این دو صورت رابطهٔ بین y,x ناقص است.

مثال: اطلاعات زیر در دسترس هستند، ضریب همبستگی خطی بین دو متغیر X و Y چقدر است؟ آن را تفسیر کنید.

$n=10 \quad \sum X_i^2=250 \quad \sum Y_i^2=480 \quad \sum XY=560$

$\overline{X}=11 \quad \overline{Y}=18$

$$r=\frac{\sum XY-n\overline{X}\overline{Y}}{\sqrt{(\sum X^2-n\overline{X}^2)(\sum Y^2-n\overline{Y}^2)}}=\frac{560-10(11)}{\sqrt{(250-10(11)^2)(480-10(18)^2)}}$$

نکته: $r_{xy}=r_yx$

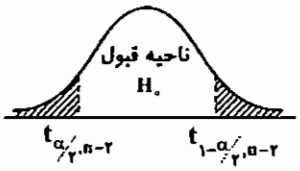
٤- آزمون بررسی معنی‌داری ضریب همبستگی:

چون مقدار r بدست آمده ضریب همبستگی بین Y,X دو نمونه را بررسی می‌کند، در واقع برآوردی از ضریب همبستگی جامعه (ρ) می‌باشد. نکته‌ای که در اینجا باید توجه داشت این است که حتی در صورتیکه r دارای مقدار غیرصفر باشد نیز ممکن است ضریب همبستگی جامعه صفر باشد. از این رو باید ضریب همبستگی جامعه را مورد آزمون قرار دهیم. این آزمون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}H_0=\rho=0\\ H_1=\rho\neq 0\end{cases}$$

در اینجا فرض می‌شود که هم X و هم Y دارای توزیع نرمال می‌باشند؛ در اینجا آماره مورد استفاده برای آزمون t می‌باشد که دارای توزیع t استیودنت با درجه آزادی $n-2$ است:

$$t=\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$



نکته: در صورتیکه بخواهیم آزمونی درباره برابر بودن ضریب همبستگی با یک مقدار خاص انجام دهیم، فرض آزمون و آمارهٔ آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}H_0=\rho=A\\ H_1=\rho\neq A\end{cases}$$

$$Z=\frac{r-A}{\sqrt{\frac{1-A^2}{\sqrt{n}}}}$$

۵- رگرسیون

با استفاده از رگرسیون به دنبال این هستیم که مقدار متوسط یک متغیر را براساس مقادیر ثابت مربوط به سایر متغیرها پیش‌بینی نماییم. به عنوان مثال با استفاده از رگرسیون می‌خواهیم تعداد کارمندان مورد نیاز برای سازمان را از روی میزان فروش برآورد نماییم.

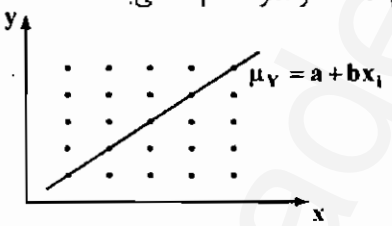
زمانی می‌توانیم از معادلهٔ خط رگرسیون استفاده نماییم که بین دو متغیر همبستگی خطی معنی‌داری وجود داشته باشد یعنی r نزدیک به ۱ یا ۱- منفی باشد.

٦- رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی ساده به صورت $Y = a + bX$ می‌باشد که در این رابطه Y متغیر وابسته، X متغیر مستقل، a عرض از مبدأ و b شیب خط رگرسیون می‌باشد.

۷- تابع رگرسیون جامعه

تابع رگرسیون جامعه به صورت $\mu_Y = a + bX_i$ می‌باشد. از آنجا که در جامعه به ازای هر X_i، تعداد زیادی Y_i وجود خواهد داشت لذا بجای Y_i از μ_Y استفاده می‌کنیم که مقدار متوسط Y_i می‌باشد.



در نتیجه هر Y_i نسبت به مقدار متوسط خودش یعنی μ_Y، دارای انحرافی خواهد بود که آن را با u_i نشان می‌دهیم.

$$e_i = Y_i - \mu_Y \Rightarrow Y_i = \mu_Y + e_i$$

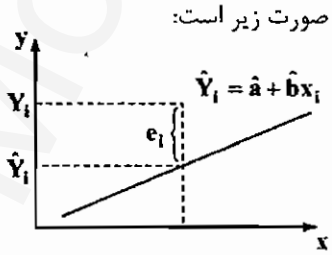
با جایگذاری مقدار μ_Y خواهیم داشت:

$$Y_i = a + bX_i + u_i$$

۸- تابع رگرسیون نمونه

از آنجا که در اکثر موارد ما مقادیر مربوط به تابع رگرسیون جامعه را در دسترس نداریم، در نتیجه به برآورد تابع رگرسیون جامعه از روی اطلاعات مربوط به نمونه می‌پردازیم. اگر فرض کنیم $\hat{a}$ برآوردی از a، $\hat{b}$ برآوردی از b و $\hat{Y}_i$ حد نیز برآوردی از μ_Y جامعه اصلی باشد، آنگاه تابع رگرسیون نمونه به صورت زیر است:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$$



در اینجا نیز همانند جامعه خواهیم داشت:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \Rightarrow Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

با جایگذاری مقدار $\hat{Y}_i$ خواهیم داشت:

$$Y_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + e_i$$

در اینجا e_i همانند u_i نشان‌دهندهٔ میزان خطا (انحراف) است.

در ادامه روش حداقل مجذورات (مربعات) برای تعیین خط رگرسیون را تشریح می‌نماییم.

۹- روش حداقل مربعات برای تعیین خط رگرسیون (بهترین خط برازش)

از این روش بمنظور تعیین مقدار $\hat{b}, \hat{a}$ استفاده می‌گردد به نحوی که بهترین خط برازش بین مقادیر X_i و Y_i بدست آید.

بهترین خط برازش خطی است که در آن مجموع مجذورات خطاها $\left(\sum e_i^2\right)$ کمترین مقدار را داشته باشد.

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad , \quad \hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)^2$$

برای تعیین مقدار $\hat{b},\hat{a}$ کافی است از SSE یکبار نسبت به $\hat{a}$ و یکبار نسبت به $\hat{b}$ مشتق گرفته و آنها را مساوی صفر قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SSE}{\partial \hat{a}} = 0 \Rightarrow 2\sum(Y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)\,(-1) = 0 \Rightarrow \sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i \\ \qquad \Rightarrow \overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{x} \Rightarrow \hat{a} = \overline{Y} - b\overline{x} \\ \dfrac{\partial SSE}{\partial \hat{b}} = 0 \Rightarrow 2\sum(Y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)\,(-x_i) = 0 \Rightarrow \sum X_iY_i = \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum x_i^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

مثال: فرض کنید جدول زیر مربوط به هزینه تبلیغات (X_i) و سود (Y_i) مربوط به یک شرکت است: (ارقام به میلیون ریال)

X_i	۳	۵	۶	۷	۹
Y_i	۱۴	۱۵	۱۴	۱۹	۱۸

الف- معادله خط رگرسیون Y برحسب X را بدست آورید.

ب- طبق خط رگرسیون بدست آمده اگر شرکت ۴ میلیون ریال صرف تبلیغات نماید، سود شرکت چه میزان خواهد بود.

$$\overline{Y} = \frac{۸۰}{۵} = ۱۶ \quad \overline{X} = \frac{۳۰}{۵} = ۶ \quad n = ۵$$

$$\hat{b} = \frac{۵(۴۹۶) - (۳۰)(۸۰)}{۵(۲۰۰) - (۳۰)^2} \Rightarrow \hat{b} = ۰/۸۰$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \Rightarrow \hat{a} = ۱۶ - ۰/۸۰(۶)$$

$$\hat{a} = ۱۱/۲$$

X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
۳	۱۴	۹	۴۲
۵	۱۵	۲۵	۷۵
۶	۱۴	۳۶	۸۴
۷	۱۹	۴۹	۱۳۳
۹	۱۸	۸۱	۱۶۲
$\sum X_i = ۳۰$	$\sum Y_i = ۸۰$	$\sum X_i^2 = ۲۰۰$	$\sum X_iY_i = ۴۹۶$

$$Y_i = \hat{a} + \hat{b}x_i \Rightarrow \hat{Y}_i = ۱۱/۲ + ۰/۸x_i$$

ب-

$$X_i = ۴ \Rightarrow \hat{Y}_i = ۱۱/۲ + ۰/۸(۴) \Rightarrow \hat{Y}_i = ۱۴/۴$$

نکته: مقدار $\hat{b}$ را می‌توان از طریق روابط زیر نیز محاسبه نمود:

$$۱)\ \hat{b} = \frac{\sum X_iY_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\overline{x}^2} = \frac{SP_{XY}}{SS_X} \qquad SS_Y = \sum(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum Y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum Y_i)^2$$

$$SS_X = \sum(X_i - \overline{X})^2 = \sum X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum X_i)^2$$

$$۲)\ \hat{b} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_i - \overline{X})^2} \qquad SP_{XY} = \sum(X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y}) = \sum X_iY_i - \frac{1}{n}(\sum X_i)\,(\sum Y_i)$$

نکته: ویژگی‌های خط رگرسیون $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{\beta}X_i$ عبارتند از:

۱) خط رگرسیون از میانگین Y, X نمونه $(\overline{Y}, \overline{X})$ می‌گذرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X}$$

۲) مقدار متوسط Y برآورد شده با مقدار متوسط Y واقعی (مشاهده شده) برابر است: $\overline{\hat{Y}} = \overline{Y}$

۳) میانگین انحرافات برابر صفر است:

$$\overline{e}_i = ۰$$

۱۰- خطای برآورد

خطای برآورد که آن را با S_e نمایش می‌دهیم، نشان می‌دهد که نقاط برآورد شده به چه میزان از خط رگرسیون انحراف دارند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum (e - \overline{e})^۲}{n - ۲}}$$

که در این رابطه $n - ۲$ همان درجهٔ آزادی است. در ضمن از آنجا که $\overline{e} = ۰$ می‌باشد و داریم:

$$\sum e_i^۲ = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^۲$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \overline{Y}_i)^۲}{n - ۲}} \quad , \quad S_e = \sqrt{\frac{\sum Y_i^۲ - \hat{a}\sum Y_i - \hat{b}\sum X_i Y_i}{n - ۲}}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{SS_Y - \hat{b}^۲ SS_X}{n - ۲}}$$

مثال: در مورد مثال قبل خطای برآورد را محاسبه نمایید.

$$\hat{Y}_i = ۱۱/۲ + ۰/۸X_i$$

X_i	۱۴	۱۵	۱۴	۱۹	۱۸
$\hat{Y}_i$	۱۳/۶	۱۵/۲	۱۶	۱۶/۸	۱۸/۴

$$\sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^۲ = (۱۴ - ۱۳/۶)^۲ + (۱۵ - ۱۵/۲)^۲ + \ldots + (۱۸ - ۱۸/۴)^۲ = ۹/۲$$

$$S_e = \sqrt{\frac{۹/۲}{۳}} = ۱/۷۵۱$$

۱۱- برآورد فاصله اطمینان برای b

گفتیم برآورد b را با $\hat{b}$ نمایش می‌دهیم. اگر خطای برآورد $\hat{b}$ را با $S_{\hat{b}}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$S_{\hat{b}} = \frac{S_e}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^۲}} = \frac{S_e}{\sqrt{SS_X}} (۱ \quad و \quad S_e = \sqrt{\frac{SS_Y - \hat{b}^۲ SS_X}{n - ۲}} (۲$$

$$(۱,۲) \Rightarrow S_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{SS_Y - \hat{b}SS_X}{(n - ۲)\ SS_X}}$$

برای برآورد فاصله b از آماره t به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

که دارای توزیع t با درجه آزادی $n - ۲$ خواهد بود.

$$t = \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}}$$

فاصله اطمینان برای b به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{b} - t_{\alpha/2,n-2} S_{\hat{b}} \le b \le \hat{b} + t_{\alpha/2,n-2} \cdot S_{\hat{b}}$$

مثال: اطلاعات زیر در مورد نمونه‌ای به حجم $n = 12$ که از یک جامعه نرمال گرفته شده است، در دسترس می‌باشد:

$$\sum X_i = 80 \ , \ \sum Y_i = 205 \sum Y_i^2 = 4500 \ , \ \sum X_i Y_i = 1370 \ , \ \sum X_i^2 = 542$$

مقدار خطای برآورد $\hat{b}$ را برای برآورد فاصله اطمینان b محاسبه کنید.

$$\hat{b} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{12(1370) - 80(205)}{12(542) - (80)^2} = \frac{40}{104} = 0/38$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \Rightarrow \hat{a} = 17/08 - 0/38(6/66) = 14/54$$

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - \hat{a}\sum Y_i - \hat{b}\sum X_i Y_i}{n-2}} = \sqrt{\frac{4500 - 14/54(205) - 0/38(1370)}{10}} \cong 10$$

$$SS_X = \sum X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum X_i)^2 \Rightarrow SS_X = 542 - \frac{1}{12}(80)^2 = 8/66$$

$$S_{\hat{b}} = \frac{S_e}{\sqrt{SS_X}} = \frac{10}{\sqrt{8/66}} = 3/39$$

۱۲- برآورد فاصله اطمینان برای a

همانند b می‌توانیم فاصله اطمینان a را نیز محاسبه نماییم:

$$S_{\hat{a}} = \frac{S_e}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{(X_i - \overline{X})^2}}} = \frac{S_e}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}}}$$

برای برآورد فاصله a نیز از آماره t به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

که دارای توزیع t با درجه آزادی $n-2$ خواهد بود.

$$t = \frac{\hat{a} - a}{S_{\hat{a}}}$$

فاصله اطمینان برای a به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{a} - t_{\alpha/2,n-2} \cdot S_{\hat{a}} \le a \le \hat{a} + t_{\alpha/2,n-2} \cdot S_{\hat{a}}$$

مثال: با توجه به اطلاعات مثال قبل، مقدار خطای برآورد $\hat{a}$ را محاسبه کنید.

$$S_{\hat{a}} = \frac{S_e}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(6/66)^2}{542 - 12(6/66)^2}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{12} + 4/43}} = 4/70$$

۱۳- آزمون فرض آماری مربوط به b

آزمون فرض برابر بودن b با عدد ثابت b_0 به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{cases} H_0 : b = b_0 \\ H_1 : b \ne b_0 \end{cases}$$

اگر واریانس نامعلوم باشد، آماره آزمون به صورت زیر است:

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{S_{\hat{b}}}$$

که دارای توزیع t با درجه آزادی $n-2$ است و ناحیه بحرانی آن به صورت دو دامنه نوشته می‌شود:

$$\left(t < -t_{\alpha/2,n-2} \ , \ t > t_{\alpha/2,n-2}\right) \text{ ناحیه بحرانی}$$

۱۴- آزمون فرض آماری مربوط به a

آزمون فرض برابر بودن a با عدد ثابت a_0 به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{cases} H_0 : a = a_0 \\ H_1 : a \neq a_0 \end{cases}$$

اگر واریانس نامعلوم باشد، آماره آزمون به صورت زیر است:

$$t = \frac{\hat{a} - a_0}{S_{\hat{a}}}$$

این آماره نیز دارای توزیع t با درجه آزادی $n-2$ است و ناحیه بحرانی آن به صورت دو دامنه نوشته می‌شود:

$$\left(t < -t_{\alpha/2, n-2} \ , \ t > t_{\alpha/2, n-2}\right) \text{ ناحیهٔ بحرانی}$$

مثال: اگر در رگرسیون دو متغیره $Y = b_0 + b_1X + V$ ، شیب منحنی $\hat{b}_1 = 0/5$ و واریانس آن $S^2_{b_1} = 0/04$ باشد، t محاسبه شده پارامتر برابر است با:

۱) $t = 12/5$ ۲) $t = 2/5$ ۳) $t = 0/125$ ۴) $t = 0/04$

فرض آماری به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$$

آماره آزمون به این صورت محاسبه می‌شود:

$$t \stackrel{\varepsilon}{=} \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}} \xrightarrow{b=0} t = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}} = \frac{0/5}{\sqrt{0/04}} = 2/5$$

۱۵- تحلیل رگرسیون

بمنظور بررسی وجود یا عدم وجود ارتباط خطی بین Y, X از ۲ روش استفاده می‌شود که عبارتند از: روش آزمون فرض و روش تحلیل واریانس

۱-۱۵- روش آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$$

آماره آزمون بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$t = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}}$$

که دارای توزیع t با درجه آزادی $n-2$ است و ناحیهٔ بحرانی آن به صورت دو دامنه است:

$$\left(t < -t_{\alpha/2, n-2} \ , \ t > t_{\alpha/2, n-2}\right) \text{ ناحیه بحرانی}$$

۲-۱۵- روش تحلیل واریانس

در مدل رگرسیون، کل تغییرات Y را می‌توان به تغییرات توضیح داده شده و تغییرات توضیح داده نشده تقسیم کرد. یعنی:

$$\left(Y - \bar{Y}\right) = \left(Y - \hat{Y}\right) + \left(\hat{Y} - \bar{Y}\right)$$

$$SST = \sum\left(Y - \bar{Y}\right)^2 = \sum Y^2 - \frac{1}{n}\left(\sum Y\right)^2 \text{ کل تغییرات}$$

$$SSE = \sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2 = \sum Y^2 - \hat{a}\sum Y - \hat{b}\sum XY \text{ تغییرات توضیح داده نشده}$$

$$SSR = \sum\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right)^2 = \hat{a}\sum Y + \hat{b}\sum XY - \frac{1}{n}\left(\sum Y\right)^2 \text{ تغییرات توضیح داده شده}$$

$$SST = SSE + SSR$$

برای انجام آزمون فرضیه $\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$، جدول تحلیل واریانس را تشکیل می‌دهیم و مقدار آمارهٔ F را طبق جدول محاسبه نموده و با مقدار F بدست آمده از جدول توزیع F مقایسه می‌کنیم. اگر مقدار F بدست آمده از جدول تحلیل واریانس بزرگتر از مقدار بحرانی شود، فرض H_0 در سطح اطمینان $1-\alpha$ رد می‌شود.

منبع تغییرات	درجه آزادی d.f	مجموع مربعات SS	میانگین مربعات MS	F
X	۱	SSR	$MSR = SSR$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
خطا	$n-2$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
کل تغییرات	$n-1$	SST		

اگر $F > F_{\alpha,1,n-2} \Rightarrow$ فرض H_0 رد می‌شود

۱۶- ضریب تعیین

برای تعیین اینکه چه میزان از تغییرات Y بوسیله تغییرات X مشخص می‌شود، از عبارتی به نام R^2 استفاده می‌کنند که به این صورت محاسبه می‌شود:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2} \qquad R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}$$

نکته: روش‌های ساده‌تر محاسبه R^2 (ضریب تعیین) عبارتند از:

$$1)\ R^2 = \frac{(n\sum XY - \sum X \sum Y)^2}{[n\sum X^2 - (\sum X)^2][n\sum Y^2 (\sum Y)^2]}$$

$$0 \le R^2 \le 1$$

$$2)\ R^2 = \frac{\hat{a}\sum Y + \hat{b}\sum XY - n\overline{Y}^2}{\sum Y^2 - n\overline{Y}^2}$$

نکته: مجذور ضریب همبستگی (r) برابر است با ضریب تعیین.

$$r^2 = R^2$$

نکته: روش دیگر محاسبه ضریب همبستگی عبارتست از:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که در این رابطه σ_{XY} همان کوواریانس Y,X است.

مثال: اطلاعات زیر در مورد کمیت های X , Y در دسترس است. ضریب تعیین را محاسبه کنید؟

$$n = 15 \ , \ \sum X = 15 \ , \ \sum Y = 23 \ , \ \sum XY = 100 \ , \ \sum X^2 = 65 \ , \ \sum Y^2 = 155$$

$$R^2 = \frac{[15(100) - 15(23)]^2}{[15(65) - (15)^2][15(155) - (23)^2]} = 0/99$$

مثال: اگر $COV(x,y) = 31$ و $V(x) = 36$, $V(Y) = 35$ باشد، ضریب تعیین چقدر است؟

$$r = \frac{COV(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{31}{\sqrt{36}\sqrt{35}} = 0/87$$ ضریب همبستگی

$$R^2 = (r)^2 = (0/87)^2 = 0/75$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دهم

مجموعه علوم اقتصادی

۱- از یک نمونه گیری اطلاعات زیر در دست است:

$\overline{X}=۳, \overline{Y}=۳, \sigma_y=\sqrt{۸}, \sigma_x=\sqrt{۲}, \sigma_{xy}=۰/۹$

$\hat{Y}=a+bx$ کدام است؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) $\hat{Y}=۱/۲+۱/۸x$ ۲) $\hat{Y}=-۰/۶+۱/۸x$ ۳) $\hat{Y}=۰/۶+۱/۸x$ ۴) $\hat{Y}=۱/۲-۱/۸x$

۲- اگر $\hat{Y}=۱+۲/۵x$ برآورد یک خط رگرسیون $R^۲=۰/۸۱$ باشد، ضریب همبستگی برابر است با: (اقتصاد – ۷۴)

۱) $r=۰/۹$ ۲) $r=-۰/۹$ ۳) $r=-۰/۱۹$ ۴) $r=۰/۱۹$

۳- اگر در یک رگرسیون دو متغیره $Y=b_۰+b_۱X+V$، شیب منحنی $\hat{b}_۱=۰/۵$ و واریانس آن $S^۲_{b_۱}=۰/۰۴$ باشد، t محاسبه شده پارامتر برابر است با: (اقتصاد – ۷۴)

۱) $t=۱۲/۵$ ۲) $t=۲/۵$ ۳) $t=۰/۱۲۵$ ۴) $t=۰/۰۴$

۴- در آزمون فرضیه $H_۰: P=۰$ ضریب همبستگی خطی بین دو صفت در توزیع مشترک دو کمیت تصادفی نرمال می‌باشد، به علت نبودن جدول کوانتیل‌های توزیع r (یا جدول اعداد بحرانی r) تابع نمونه‌ای آن (Statistic) کدام خواهد بود؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) $t=\frac{r}{\sqrt{\frac{۱-r^۲}{n}}}$ ۲) $u=\frac{r}{\sqrt{\frac{۱-r^۲}{n}}}$ ۳) $t=\frac{r}{\sqrt{\frac{۱-r^۲}{n-۲}}}$ ۴) $u=\frac{r}{\sqrt{\frac{۱-r^۲}{n-۲}}}$

۵- تعبیر و تفسیر ضریب همبستگی کدام یک از عبارات است؟ (اقتصاد – ۷۴)

۱) مشخص‌کننده شدت همبستگی و جهت تغییرات دو متغیر

۲) مشخص‌کننده شدت همبستگی و درصد تغییرات دو متغیر

۳) مشخص می‌کند که چند درصد از تغییرات متغیر تابع توسط متغیر مستقل تعیین می‌شود.

۴) مشخص می‌کند که چند درصد از تغییرات متغیر مستقل توسط متغیر تابع تعیین می‌شود.

۶- در یک جامعه دو بعدی، ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی Y,X مساوی $r=۰/۹۲$ به دست آمده است. چند درصد تغییرات Y توسط X بیان می‌شود؟ (اقتصاد – ۷۵)

۱) ۱۵/۳۶ ۲) ۸۱/۲۴ ۳) ۸۴/۶۴ ۴) ۹۲

۷- ضریب همبستگی در نمونه به عنوان برآوردکننده ضریب همبستگی جامعه دارای کدام ویژگی زیر است؟

۱) ناریب ۲) ناسازگار ۳) مطلقاً کارآ ۴) اریب (اقتصاد – ۷۵)

۸- رابطهٔ بین مصرف (C) و درآمد قابل تصرف (Y_d) براساس نمونه‌ای به حجم $n=۶۶$ به صورت زیر برآورد شده است:

$\hat{C}_t=۶+۰/۷۲Y_d$

اگر ضریب همبستگی بین مصرف و درآمد قابل تصرف در نمونه ۰/۶ باشد، خطای معیار میل نهایی به مصرف ($S_{\hat{p}}$) برابر است با: (اقتصاد – ۷۶)

۱) ۰/۰۷۵ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۰۹

۹- ضریب همبستگی $۳x, -۵x+\frac{۲}{۳}$ برابر است با: (اقتصاد – ۷۶)

۱) ۱- ۲) ۰/۸۲- ۳) ۰/۸۲ ۴) ۱+

۱۰- به منظور آزمون معنی‌دار بودن معادله رگرسیون در یک جامعهٔ نرمال دو بعدی نمونه‌ای به حجم $n=۱۵$ خانوار انتخاب و براساس آنها درآمد (X) و هزینه خانوارها (Y) اندازه‌گیری شده است و براساس نتایج مشاهدات کمیت‌های زیر بدست آمده است:

$$b_۱ = ۰/۸ \quad \sum(X-\overline{X})^۲ = SSD_X = ۲۵, \sum(Y-\overline{Y})^۲ = SSD_Y = ۳۶$$

مقدار عددی ملاک آزمون‌کننده (آمارهٔ آزمون) برای آزمون معنی‌دار بودن ضرایب معادلهٔ رگرسیون تابع مصرف کوتاه مدت کدام است؟ (اقتصاد – ۷۷)

۱) ۰/۴۴ ۲) ۵/۴۴ ۳) ۱۰/۴۵ ۴) ۱۳/۰۷

۱۱- اگر دو متغیر Y,X همبسته باشند. خط رگرسیونی که برای پیش‌بینی Y با توجه به کمیت X به روش OLS برآورد می‌شود: (اقتصاد – ۷۷)

۱) از تمامی نقاط Y,X می‌گذرد.
۲) از نقطه میانگین X و میانگین Y می‌گذرد.
۳) دارای شیب واحد است.
۴) دارای شیبی معادل ضریب همبستگی است.

۱۲- رابطهٔ بین عرضه پول (M) و سطح عمومی قیمت‌ها (P) براساس یک سری زمانی ۱۸ ساله به صورت زیر برآورد شده است. مقدار عددی آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۷)

$$\hat{P} = ۷۸ + ۰/۴M \quad , \quad R^۲ = ۰/۵$$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳- برای برآورد رابطهٔ بین فروش (Y) و هزینه تبلیغات (X) رابطهٔ زیر براساس یک نمونه تصادفی ۵۱تایی برآورد شده است:

$$Y = ۳۶ + ۴/۷X + e \quad , \quad R^۲ = ۰/۵$$

مقدار عددی آمارهٔ آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن ضریب X یعنی B چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴- بمنظور ارزیابی همبستگی بین دو صفت Y,X در یک جامعه نرمال دوبعدی نمونه‌ای به حجم $n=۲۰$ انتخاب و کمیت‌های زیر به دست آمده اند :

$$\sum X = ۴۰, \sum X^۲ = ۹۰, \sum Y = ۱۰۰, \sum Y^۲ = ۵۲۸, \sum XY = ۲۱۰$$

کمیت تخمین خطای (خطای تخمین S_e) معادله رگرسیون Y بر حسب X کدام است؟ (اقتصاد – ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۰/۵۸ ۳) ۱ ۴) ۱/۵۸

۱۵- رابطه تورم (P) و کسر بودجه (BD) براساس آمار سری ۲۱ ساله به صورت زیر برآورد شده است:

$$P = ۵ + ۰/۰۰۲BD \quad , \quad R^۲ = ۰/۸۱$$

در آزمون معنی‌دار بودن ضرایب، آماره t مربوط به BD چقدر است؟ (اقتصاد – ۷۹)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۴/۲ ۴) ۲/۶

۱۶- براساس نمونه تصادفی ۲۷تایی، مدل رگرسیون برآورد شده است. آزمون فرضیه $H_۰ : \beta = ۰$ در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$: (اقتصاد – ۸۰)

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X \quad , \quad R^۲ = ۰/۳۶$$

۱) قابل رد نیست.
۲) رد نمی‌شود زیرا مقدار t محاسبه شده ۱/۵۳۸۸ و کمتر از ۲ می‌باشد.
۳) رد می‌شود زیرا مقدار t محاسبه شده ۳/۵۳۸۸ و بیشتر از ۲ می‌باشد.
۴) براساس اطلاعات فوق قابل انجام نیست.

۱۷- از یک نمونهٔ تصادفی به حجم ۵۰ مقادیر زیر بدست آمده است. شیب خط رگرسیون Y روی X کدام است؟ (اقتصاد – ۸۰)

$$\sum X_i = ۵۰, \sum X_i^۲ = ۷۵۰, \sum Y_i = ۲۰۰, \sum Y_i^۲ = ۱۱۹۰۰, \sum X_i Y_i = ۲۹۵۰$$

۱) ۵/۶ ۲) ۴/۸۹ ۳) ۲/۲۵۸ ۴) ۳/۹۳

۱۸- در یک مدل رگرسیون دو متغیره کدام رابطه بین ضریب همبستگی Y, X در نمونه (r) و ضریب تعیین $R^۲$ وجود دارد؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) $R^۲ = r^۲$ ۲) $R^۲ = \sqrt{r}$ ۳) $R^۲ = \frac{S_X}{S_Y} \cdot r$ ۴) $R^۲ = \frac{S_X^۲}{S_Y^۲} \cdot r$

۱۹- اگر ضریب همبستگی بین دو متغیر ۰/۹۰ و ضریب همبستگی بین دو متغیر دیگر برابر با ۰/۳۰ باشد، همبستگی دو متغیر اول «چند برابر قوی‌تر» از دو متغیر دوم است؟ (اقتصاد – ۸۱)

۱) سه ۲) شش ۳) نه ۴) دوازده

۲۰- اگر کوواریانس دو متغیر Y, X برابر ۳۶- و واریانس X برابر ۶۴ و واریانس Y برابر ۲۵ باشد، چند درصد از تغییرات r بوسیله X توضیح داده می‌شود؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۶۴ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۶۴ ۴) ۲/۵

۲۱- اگر معادله خط رگرسیون برآوردی به صورت $\hat{Y} = ۲/۴ - ۰/۶X$ به دست آمده و ضریب تعیین ۰/۴۹ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟ (اقتصاد – ۸۲)

۱) ۰/۷+ ۲) ۰/۴۹- ۳) ۰/۷ ± ۴) ۰/۷-

۲۲- با توجه به آمار مربوط به واردات کل کشور (Y) و درآمدهای ارزی حاصل از صادرات نفت (X) در طی ۲۱ سال گذشته رگرسیون زیر برآورد شده است. آماره آزمون معنی‌دار بودن رابطهٔ خطی بین واردات و درآمدهای ارزی کدام است؟ (اقتصاد – ۸۳)

$$Y = ۳/۲ + ۰/۹X + e \qquad R^۲ = ۰/۸۱$$

۱) $Z = ۲/۵$ ۲) $X^۲_{۲۰} = ۴/۶$ ۳) $F_{۱,۱۹} = ۸۲/۲$ ۴) $t_{۱۹} = ۹$

۲۳- براساس یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۵$ از جامعه‌ای نرمال دو متغیره (X,Y) نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\sum x = ۲۰ \ , \ \sum x^۲ = ۹۰ \ , \ \sum xy = ۱۸۰ \ , \ \sum y = ۴۰ \ , \ \sum y^۲ = ۳۷۰$$

آماره (ملاک) آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن ضریب رگرسیون خطی Y روی X کدام است؟ (اقتصاد – ۸۳)

۱) $t = ۳/۴۶$ ۲) $t = ۱/۹$ ۳) $t = ۰/۳۵$ ۴) $t = ۵/۹۳$

۲۴- در یک رگرسیون دو متغیره اگر آماره t مربوط به شیب در ناحیه بحرانی قرار گیرد در خصوص آماره F و نتیجه آزمون کدام گزینه صحیح است؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) مقدار آماره F نیز در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_0 رد می‌شود.

۲) آماره F در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_a رد می‌شود.

۳) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای مستقل و وابسته رابطه وجود دارد.

۴) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای مستقل و وابسته رابطه وجود ندارد.

۲۵- رابطه بین مصرف (C) و درآمد قابل تصرف (Y_d) براساس یک نمونه تصادفی ۳۲ تایی به صورت زیر برآورد شده است. $R^۲ = ۰/۹$ ، $\hat{C} = ۲/۶ + ۰/۸۵Y_d$ ، آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کدام است؟ (اقتصاد – ۸۴)

۱) $F_{۱,۳۰} = ۲۷۰$ ۲) $F_{۱,۳۰} = ۱۵۰$ ۳) $X^۲_{(۳۰)} = ۱۵$ ۴) $t_{(۳۰)} = ۷/۲$

مجموعه حسابداری

۲۶- در جدول فراوانی داده‌های آماری دو صفت Y,X داریم:

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=32,\sum(Y_i-\overline{Y})^2=50,\sum(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=24$$

ضریب همبستگی کدام است؟ (حسابداری – ۷۷)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۲۷- اگر مقدار کوواریانس Y,X مساوی ۵ باشد و $\sigma_x^2=\sigma_y^2=25$، مقدار ضریب تشخیص کدام است؟

۱) ۰/۰۰۸ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۲۰ ۴) ۱ (حسابداری – ۷۹)

۲۸- با فرض: $\sum X_iY_i=50,\sum X_i^2=66,\sum Y_i^2=38,\overline{Y}=3,\overline{X}=4,n=4$ شیب خط رگرسیون کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲۹- فرض کنید که کوواریانس بین دو متغیر Y,X مساوی ۳۲ است. اگر $\sigma_X^2=64,\sigma_Y^2=25$ باشد، چند درصد تغییرات Y توسط متغیر مستقل بیان می‌شود؟ (حسابداری – ۸۰)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۸۰

۳۰- با استفاده از اطلاعات زیر معادله رگرسیون کدام است؟ (حسابداری – ۸۱)

$$\sum Y_i=50,\sum X_i=75,n=25,\sum Y_i^2=228,\sum X_iY_i=30,\sum X_i^2=625$$

۱) $\hat{Y}=2/9-0/3X$ ۲) $\hat{Y}=2/9-0/15X$ ۳) $\hat{Y}=5/8-0/3X$ ۴) $\hat{Y}=8/7-0/6X$

۳۱- شیب خط رگرسیون $Y=a+bx$ چقدر است؟ (حسابداری – ۸۲)

X	۰	۱	۳	۴	۵
Y	۰	۲	۵	۹	۱۱

۱) ۰/۳۱ ۲) ۱/۲۱ ۳) ۱/۸ ۴) ۲/۲

۳۲- معادله خط رگرسیون بین دو متغیر y,x در جدول مقابل به صورت $Y=ax+b$ است، شیب a کدام است؟ (حسابداری – ۸۴)

X	۳	۵	۷
Y	۹	۱۰	۵

۱) ۱/۲۵- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۱/۲۵

۳۳- می‌خواهیم ببینیم آیا بین متغیرهای کیفی Y,X رابطه وجود دارد یا خیر. متغیر کیفی X دارای سه سطح و متغیر Y دارای ۴ سطح است. درجه آزادی برای آزمون کدام است؟ (مدیریت – ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۳۴- ضریب همبستگی دو متغیر Y,X در جدول مقابل کدام است؟ (مدیریت – ۸۴)

X	۲	۵	۸
Y	۳	۱۰	۱۴

۱) $\frac{11}{2\sqrt{31}}$ ۲) $\frac{11}{2\sqrt{35}}$ ۳) $\frac{5}{\sqrt{31}}$ ۴) $\frac{5}{\sqrt{37}}$

۳۵- فرض کنید $\delta_y=3,\delta_x=4,\Sigma X_i=\Sigma y_i=50,n=10,COV(X,Y)=12$ است معادله رگرسیون کدام است؟ (مدیریت ۷۵) (مدیریت ۷۷)

۱) $y=1/5-0/3x$ ۲) $y=1/25+0/75x$

۳) $y=1/5+0/4x$ ۴) $y=3+2/2x$

۳۶- ضرب همبستگی بین x , y مساوی با ۰/۷۰ است. چند درصد از تغییرات y تحت تأثیر x نیست؟ (مدیریت۷۵)

۱) ٪۳۰ ۲) ٪۴۹ ۳) ٪۵۱ ۴) ٪۷۰

۳۷- ضرب همبستگی بین متغیر x , y چه میزان است؟ (مدیریت ۷۶)

X	Y
۱	۲
۲	۳
۳	۴

۱) -/۵ ۲) ۰ ۳) ۰/۵ ۴) ۱

۳۸- اگر $\bar{x}=\bar{y}=10, \sigma_x=\sigma_y=2, Cov(x,y)=-10$ باشد مقدار پیش‌بینی y به ازای x=4 چقدر است؟ (مدیریت - ۷۶)

۱) ۲۵ ۲) ۲۸/۷۵ ۳) ۳۲/۲۵ ۴) ۴۰

۳۹- اگر $\bar{y}=4, \bar{x}=5, ss_x=20, sp_{xy}=20$ باشد معادله رگرسیون برابر است با: (مدیریت ۷۹)

۱) y=-x+1 ۲) y=x-1 ۳) y=x+1 ۴) $y=\frac{1}{2}x+1$

۴۰- اگر داشته باشیم $\sigma_y^2=25, \sigma_x^2=16, cov(x,y)=-18$ چند درصد تغییرات y به وسیله x بیان نمی‌شود؟ (مدیریت ۸۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۹ ۳) ۸۱ ۴) ۹۰

۴۱- کدام عبارت از مزایای دیاگرام پراکنشی محسوب نمی‌شود؟ (مدیریت ۸۰)

۱) علت رابطه دو متغیر را شناسایی می‌کند. ۲) قدرت رابطه دو متغیر را نشان می‌دهد.
۳) علامت ضریب همبستگی را معلوم می‌کند. ۴) طبیعت رابطه x , y (خطی یا منحنی) را معلوم می‌کند.

۴۲- $\sigma_x^2=\sigma_y^2=36, cov(x,y)=32/4$ باشد ضریب تعیین (تشخیص) چقدر است؟ (مدیریت ۸۱)

۱) ۰/۶۴ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۸۱ ۴) ۰/۹۰

۴۳- اگر

x	۵	۷	۹
y	۲۰	۱۵	۱۳

مورد نظر باشد. شیب معادله رگرسیون خطی کدام است؟ (مدیریت ۸۱)

۱) -۱/۰۰ ۲) -۱/۷۵ ۳) -۲/۰۰ ۴) -۲/۷۰

۴۴- اگر $\sigma_y=3, \sigma_x=5, cov(x,y)=10$ باشد ضریب همبستگی کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) هیچکدام

۴۵- اگر ضریب همبستگی بین دو متغیر ۰/۶ و دو متغیر دیگر ۰/۳ باشد می‌توان گفت همبستگی دو متغیر اول چند برابر همبستگی دو متغیر دوم است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) دو برابر ۲) سه برابر ۳) چهار برابر ۴) نه برابر

پاسخ تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دهم

۱- گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} r=\dfrac{\hat{\beta}\sigma_X}{\sigma_Y}\Rightarrow ۰/۹=\hat{\beta}\dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}}\Rightarrow \hat{\beta}=۱/۸ \\ \hat{a}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}\Rightarrow \hat{\alpha}=۶-(۱/۸)(۳)\Rightarrow \hat{\alpha}=۰/۶ \end{array}\right\}\Rightarrow \hat{Y}=۰/۶+۱/۸x$$

۲- گزینه ۱ صحیح است.

چون $\hat{\beta}$ مثبت می‌باشد، بنابراین $r=۰/۹$ خواهد بود.

$$r=\pm\sqrt{R^۲}\Rightarrow r=\pm\sqrt{۰/۸۱}=\pm ۰/۹$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

برای آزمون فرضیه $H_۰:\beta=۰$، آماره آزمون (t) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t=\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}=\frac{۰/۵}{\sqrt{۰/۰۴}}=۲/۵$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$r=۰/۹۲\Rightarrow R^۲=(۰/۹۲)^۲=۰/۸۴۶۴=۸۴/۶۴$$

۷- گزینه ۱ صحیح است.

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$R^۲=\hat{b}^۲\frac{SSX}{SSY}\Rightarrow(۰/۶)^۲=(۰/۷۲)^۲\times\frac{SSX}{SSY}\Rightarrow\frac{SSX}{SSY}=۱/۴$$

$$S_{\hat{b}}=\sqrt{\frac{SSY-\hat{b}^۲SSX}{(n-۲)\,SSX}}\Rightarrow S_{\hat{b}}=\sqrt{\frac{SSY}{(n-۲)\,SSX}-\frac{\hat{b}^۲}{n-۲}}=\frac{۱/۴۴}{۶۴}-\frac{۰/۵۱۸۴}{۶۴}$$

$$S_{\hat{b}}=۰/۱۲$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$V=-۵x+\frac{۲}{۳}\Rightarrow E(V)=-۵E(x)+\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sigma_v=۵\sigma_x$$

$$U=۳x\quad\Rightarrow E(U)=۳E(x)\Rightarrow\sigma_u=۳\sigma_x$$

$$Cov(U,V)=E\left[U-E(U)\right]\left[V-E(V)\right]$$

$$Cov(U,V)=E\left[۳x-۳E(x)\right]\left[-۵x+\frac{۲}{۳}-۵E(x)-\frac{۲}{۳}\right]$$

$$=-۱۵E(x^۲)-۱۵E(x)^۲=-۱۵\left(E(x^۲)-E(x)^۲\right)=-۱۵\sigma_x^۲$$

$$r=\frac{Cov(U,V)}{\sigma_u.\sigma_y}\Rightarrow r=\frac{-۱۵\sigma_x^۲}{(۵\sigma_x)(۳\sigma_x)}=-۱$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.

$$SSR=\hat{b}^۲\sum(x-\bar{x})^۲=(۰/۸)^۲(۲۵)=۱۶$$

$$SSE=SST-SSR=۳۶-۱۶=۲۰$$

منبع تغییرات	درجه آزادی	SS	MS	F
تیمار (X)	۱	SSR = ۱۶	$MSR = \frac{۱۶}{۱} = ۱۶$	
خطا	۱۵ − ۲ = ۱۳	SSE = ۲۰	$MSE = \frac{۲۰}{۱۳} = ۱/۵۳$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
مجموع	۱۴	SST = ۳۶		$F = \frac{۱۶}{۱/۵۳} = ۱۰/۴۵$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

۱۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{\sqrt{0/5}}{\sqrt{\frac{1-0/5}{8-2}}} = 4$$

۱۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{\sqrt{0/5}}{\sqrt{\frac{1-0/5}{51-2}}} = 7$$

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{b} = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \Rightarrow \hat{b} = \frac{20(210) - (40)(100)}{20(90) - (40)^2} = 1$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{40}{20} = 2 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \Rightarrow \hat{a} = 5 - 1(2) = 3$$

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - \hat{a}\sum Y_i - \hat{b}\sum X_iY_i}{n-2}} \Rightarrow S_e = \sqrt{\frac{528 - 3(100) - 1(210)}{20-2}} \; S_e = 1$$

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \Rightarrow t = \frac{0/9}{\sqrt{\frac{1-0/81}{21-2}}} \Rightarrow t = 9$$

۱۶- گزینه ۲ صحیح است.

۱۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\hat{b} = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2} \Rightarrow \hat{b} = \frac{50(2950) - (50)(200)}{50(750) - (50)^2} = 3/93$$

۱۸- گزینه ۱ صحیح است.

۱۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$R_1^2 = (0/90)^2 = 0/81$$
$$R_2^2 = (0/30)^2 = 0/09$$
$$\Rightarrow \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{0/81}{0/09} = 9$$

۲۰- گزینه صحیح است.

برای تعیین درصد تغییرات Y که بوسیله X توضیح داده می‌شود، از ضریب تعیین استفاده می‌کنیم.

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow r = \frac{-36}{8 \times 5} \Rightarrow r = -0/9$$

$$R^2 = (-0/9)^2 = 0/81$$

۲۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$R^2 = 0/49 \Rightarrow r = \mp 0/7$$

چون شیب خط رگرسیون منفی است $\left(\hat{Y} = 2/4 - 0/6X\right)$ پس $r = -0/7$ می‌باشد.

۲۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} H_0 : P = 0 \\ H_1 : P \neq 0 \end{cases}$$

$$R^2 = 0/81 \Rightarrow r = 0/9$$

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \Rightarrow t = \frac{0/9}{\sqrt{\frac{1-0/81}{21-2}}} \Rightarrow t = 9$$

۲۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$SS_X = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 90 - \frac{(20)^2}{5} = 10$$

$$SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 370 - \frac{(40)^2}{5} = 50$$

$$SP_{XY} = \sum X_i Y_i - \frac{1}{n}(\sum X)(\sum Y) = 180 - \frac{1}{5}(40)(20) = 20$$

$$r = \frac{SP_{XY}}{\sqrt{SS_X . SS_Y}} \Rightarrow r = \frac{20}{\sqrt{10 \times 50}} \Rightarrow r = 0/894$$

$$\begin{cases} H_0 : P = 0 \\ H_1 : P \neq 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0/894}{\sqrt{\frac{1-0/8}{5-2}}} = 3/46$$

۲۴-گزینه ۱ صحیح است.

۲۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 0/9 \Rightarrow SSR = 0/9SST \Rightarrow SSE = 0/1SST$$

منبع تغییرات	درجه آزادی	SS	MS	
تیمار (X)	۱	$SSR = 0/9SST$	$MSR = \frac{0/9SST}{1}$	$F = \frac{0/9SST}{\frac{0/1SST}{30}} = 270$
خطا	$n-2=30$	$SSE = 0/1SST$	$MSE = \frac{0/1SST}{30}$	

مجموعه حسابداری

۲۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$r = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{24}{\sqrt{32 \times 50}} = \frac{24}{40} = 0/6$$

۲۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{5}{5 \times 5} = \frac{1}{5} = 0/20$$

$$R^2 = (r)^2 = (0/20)^2 = 0/04$$

۲۸- گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{b}=\frac{\sum X_iY_i-n\overline{XY}}{\sum X_i^2-n\overline{X}^2}\Rightarrow \hat{b}=\frac{50-4(4)(3)}{66-4(4)^2}=1$$

۲۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$r=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}=\frac{32}{8\times 5}=0/8$$

$$R^2=(r)^2=(0/8)^2=0/64$$

۳۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$\hat{b}=\frac{n\sum X_iY_i-\sum X_iY_i}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}\Rightarrow \hat{b}=\frac{(25)(30)-(75\times 50)}{(25)(625)-(75)^2}=\frac{-3000}{10000}=-0/3$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{50}{25}=2 \qquad \overline{X}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{75}{25}=3$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-\hat{b}\overline{X}\Rightarrow \hat{a}=2-(-0/3\times 3)\Rightarrow \hat{a}=2/9$$

$$\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}X\Rightarrow \hat{Y}=2/9-0/3X$$

۳۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$\sum X=13,\sum Y=27,\sum XY=108,\sum X^2=51,n=5$$

$$b=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2}\Rightarrow b=\frac{(5)(108)-(13)(27)}{(5)(51)-(13)^2}\Rightarrow b=\frac{189}{86}=2/2$$

۳۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum X=15,\sum Y=24,\sum XY=112,\sum X^2=83,n=3$$

$$a=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2}\Rightarrow a=\frac{(3)(112)-(15)(24)}{(3)(83)-(15)^2}=-1$$

۳۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$d.f=(3-1)(4-1)=2\times 3=6$$

۳۴- گزینه ۱ صحیح است.

$$\sum X=15,\sum Y=27,\ \sum X^2=93,\ \sum Y^2=305,\sum XY=168,n=3$$

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{(n\sum x^2-(\sum x)^2)\,(n\sum y^2-(\sum y)^2)}}\Rightarrow r=\frac{(3)(168)-(15)(27)}{\sqrt{(3\times 93-(15)^2)\,(3\times 305-(27)^2)}}\Rightarrow r=\frac{11}{2\sqrt{31}}$$

۳۵- گزینه ۲ صحیح است.

$$b=\frac{cov(x,y)}{\delta_x^2}=\frac{12}{16}=0/75\Rightarrow \overline{x}=\frac{\Sigma x_i}{n}=5,\overline{y}=\frac{\Sigma y_i}{n}=5\Rightarrow a=\overline{y}-b\overline{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=5-0/75\times 5=1/25\Rightarrow y=1/25+0/75x$$

۳۶-گزینه ۳ صحیح است.

$$1-R^2=1-(0/7)^2=1-0/49=0/51=\%51$$

۳۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$r=\frac{\Sigma xy-n\overline{xy}}{\sqrt{\Sigma x^2-nx^{-2}}}=\frac{20-3\times 2\times 3}{\sqrt{14-12}\sqrt{29-27}}=1$$

$$\Sigma xy = ۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴ = ۲۰, \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = ۲, \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = ۳, \Sigma x^۲ = ۱+۴+۹ = ۱۴$$

$$\Sigma y^۲ = ۴+۹+۱۶ = ۲۹$$

۳۸- گزینه ۱ صحیح است.

$$b = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^۲} = \frac{-۱۰}{۴} = -۲/۵ \qquad a = \bar{y} - b\bar{x} = ۱۰ - (-۲/۵)(۱۰) = ۳۵$$

$$\Rightarrow y = ۳۵ - ۲/۵x \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۳۵ - ۲/۵(۴) = ۲۵$$

۳۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$b = \frac{\Sigma y - n\overline{xy}}{\Sigma x^۲ - n\bar{x}} = \frac{sf_{xy}}{ss_x} = \frac{۲۰}{۲۰} = ۱ \qquad a = \bar{y} - b\bar{x} = ۴ - ۱\times۵ = -۱ \Rightarrow y = x - ۱$$

۴۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$r = \frac{cov(x,y)}{\delta_x.\delta_y} = \frac{-۱۸}{۴\times۵} = -۰/۹ \qquad R^۲ = r^۲ = ۰/۸۱ \Rightarrow ۱ - R^۲ = ۰/۱۹ = \%۱۹$$

۴۱-گزینه ۱ صحیح است.

دیاگرام پراکنشی علت رابطه بین دو متغیر را بیان نمی‌کند.

۴۲- گزینه ۳ صحیح است.

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x, \sigma_y} = \frac{۳۲/۴}{۶\times۶} = ۰/۹$$

ضریب تعیین $= r^۲ = ۰/۹^۲ = ۰/۸۱$

۴۳-گزینه ۲ صحیح است.

$$b = \frac{\Sigma xy - n\overline{xy}}{\Sigma x^۲ - nx^{-۲}} = \frac{۳۲۲ - ۳\times۷\times۱۶}{۱۵۵ - ۳\times۴۹} = \frac{-۱۴}{۸} = -۱/۷۵$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{۵+۷+۹}{۳} = ۷, \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{۲۰+۱۵+۱۳}{۳} = ۱۶, \Sigma xy = ۵/۲۰ + ۷\times۱۵ + ۹\times۱۳ = ۳۲۲$$

$$\Sigma x^۲ = ۲۵+۴۹+۸۱ = ۱۵۵$$

۴۴- گزینه ۳ صحیح است.

$$r = \frac{cov(x,y)}{\delta_x.\delta_y} = \frac{۱۰}{۳\times۵} = \frac{۲}{۳}$$

۴۵- گزینه ۳ صحیح است.

برای مقایسه همبستگی بین دو متغیر از ضریب تعیین استفاده می‌کنیم بنابراین:

$$\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲} = \frac{(۰/۶)^۲}{(۰/۳)^۲} = (\frac{۰/۶}{۰/۳})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

یعنی همبستگی دو متغیر اول ۴ برابر دو متغیر دوم است.

تست‌های کنکور سراسری سال ۱۳۸۶

۱- اولین مرحله در یک تحقیق علمی کدام است؟

۱) فرضیه‌سازی ۲) جمع‌آوری داده‌ها ۳) هدفگذاری ۴) تحلیل یافته‌ها

۲- فزونی میانگین حسابی از میانگین هندسی داده‌های جدول زیر کدام است؟

x_i	۹	۱۲	۱۶
F_i	۲	۳	۲

۱) ٪۲۴ ۲) ٪۲۵ ۳) ٪۲۷ ۴) ٪۲۸

۳- طبق قانون چی‌بی‌شف انتظار می‌رود ۸۴ درصد مشاهدات در دامنه (۸۸ و ۷۲) قرار گیرند، مقدار انحراف معیار این مشاهدات کدام است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

۴- در یک توزیع فراوانی داده‌ها، چارک‌های اول، دوم و سوم به ترتیب ۳۶، ۶۱ و ۷۶ می‌باشد، نوع توزیع از نظر تقارن نسبت به نرمال چگونه است؟

۱) چوله به راست ـ تقریباً نرمال ۲) چوله به راست ـ تفاوت اندک

۳) چوله به چپ ـ تقریباً نرمال ۴) چوله به چپ ـ تفاوت اندک

۵- اگر $N = ۲۰$، $\sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i - \mu)^۴ = ۸۶۴۰$ و واریانس جامعه ۱۲ باشد، ضریب کشیدگی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶- واریانس کل داده‌ها، متشکل از سه گروه جدول زیر کدام است؟

N	۱۰۰	۲۰۰	۷۰۰
μ	۱۴	۱۸	۲۰
$\sigma^۲$	۵۰	۶۰	۴۰

۱) ۴۸/۴ ۲) ۴۷/۵ ۳) ۴۵/۸ ۴) ۴۵

۷- میانه در توزیع آماری ۵۰ مشاهده دسته‌بندی شده برابر ۴۱ می‌باشد. اگر طول دسته‌ها ۵، فراوانی طبقه میانه‌دار ۱۰ و مجموع فراوانی‌های ماقبل طبقه میانه‌دار برابر ۱۸ باشد حدود دسته میانه‌دار کدام است؟

۱) ۴۱/۵ و ۳۶/۵ ۲) ۴۲ و ۳۷ ۳) ۴۲/۵ و ۳۷/۵ ۴) ۴۳ و ۳۸

۸- اعداد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی ۶ مهره یکسان نوشته شده‌اند اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۹- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند، چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد. به‌طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۱۰- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد با کدام احتمال تعداد دفعات پرتاب شده فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

۱۱- از جعبه‌ای که محتوی ۱۲ عدد کالاست ۴ عدد آن معیوب است به تصادف ۲ تا را انتخاب می‌کنیم اگر x تعداد کالای سالم انتخاب شده باشد امید ریاضی x کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۱}$

۱۲- در توزیع احتمال توأم روبه‌رو $COV(x,y)$ کدام است؟

y \ x	۰	۱	۲
۱	۰	۰/۱	۰/۲
۳	۰/۳	۰/۴	۰

۱) ۰/۵۶- ۲) ۰/۴۶ ۳) صفر ۴) ٪۶۴

۱۳- وزنه‌برداری در هر آزمون می‌تواند سه نوع امتیاز A و B و C را به ترتیب با احتمالات ۰/۵، ۰/۳ و ۰/۲ کسب نماید احتمال اینکه در هفت بار آزمون امتیازات وی ۲ بار A، ۲ بار B و ۳ بار C باشد کدام است؟

۱) ۰/۰۳۸۷ ۲) ۰/۰۷۵۶ ۳) ۰/۱۶۸ ۴) ۰/۳۷۸

۱۴- در تابع چگالی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ میانگین x کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵- اگر یک نمونه ۱۰۰ تایی از جامعه اول با واریانس ۹ و یک نمونه ۲۵ تایی از جامعه دوم با واریانس ۴ انتخاب شوند و این دو نمونه مستقل از یکدیگر باشند، انحراف معیار تفاضل میانگین دو نمونه کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۶- ضریب همبستگی بین دو متغیر در جدول روبرو کدام است؟

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۳	۵	۱	۴	۲

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳- ۳) ۰/۲- ۴) ۰/۲

پاسخ تست‌های کنکور سراسری سال ۱۳۸۶

۱- گزینه ۳ صحیح است.

۲- گزینه ۴ صحیح است.

در داده‌های طبقه‌بندی شده $\Rightarrow \mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{k} F_i x_i}{N}$ $\qquad \mu_G = \sqrt[N]{x_1^{F_1} x_2^{F_2} \dots x_k^{F_k}}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mu_x = \frac{2\times 9 + 12\times 3 + 2\times 16}{7} = 12/28 \\ \Rightarrow \mu_G = \sqrt[7]{9^2\times 12^3\times 16^2} = \sqrt[7]{3^4\times 3^3\times 4^3\times 4^4} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_x - \mu_G = 12/28 - 12 = 0/28$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{84}{100} \Rightarrow -\frac{1}{k^2} = -\frac{16}{100} \Rightarrow k^2 = \frac{100}{16} \Rightarrow k = \pm\frac{10}{4}$$

با توجه به اینکه در قضیه چی‌بی شف $k \geq 1$ می‌باشد در نتیجه خواهیم داشت: $k = \frac{10}{4}$

از طرف دیگر با توجه به حد ابتدایی و حد انتهایی دامنه داده شده مشخص است که: $\begin{cases} \mu_x - k\sigma_x = 72 \\ \mu_x + k\sigma_x = 88 \end{cases} \Rightarrow \mu_x = 80$

بنابراین با توجه به حد ابتدایی داریم: $80 - \frac{10}{4}\times\sigma_x = 72 \Rightarrow \sigma_x = 3/2$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

همان‌طوری که می‌دانیم برای برخی از توزیع‌ها محاسبه میانگین و واریانس امکان‌پذیر نیست. پراکندگی این توزیع‌ها به کمک چندک‌ها بیان می‌گردد.

ضریب چولگی چارکی $\Rightarrow SKQ = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

ضریب چولگی صدکی $\Rightarrow SKP = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$

چون ضریب چولگی کمتر از صفر شده است بنابراین توزیع دارای چوله به چپ است و از طرفی دیگر چون $0/1 < SK \leq 0/5$ بنابراین نتیجه می‌گیریم توزیع از نظر قرینگی دارای تفاوت اندکی با توزیع نرمال است.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{432}{144} - 3 = 0$$

زیرا $\Rightarrow$ گشتاور مرکزی مرتبه چهارم $\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)^4}{N} = \frac{8640}{20} = 432$

۶- گزینه ۱ صحیح است.

$$\sigma^2_{کل} = \frac{\sum Ni\sigma i^2}{N} + \frac{\sum N_i(\mu_i - \mu_T)^2}{N}$$

$$\frac{\sum Ni\sigma i^2}{N} = \frac{100\times 50 + 200\times 60 + 700\times 40}{100} = 45$$

پس نتیجه می‌گیریم که واریانس کل باید بزرگتر از ۴۵ باشد بنابراین:

$$\mu_{کل} = \frac{\sum Ni\mu i}{N} = \frac{100\times 14 + 200\times 18 + 700\times 20}{100} = 19$$

$$\Rightarrow \frac{\sum Ni(\mu i-\mu)^2}{N}=\frac{100\times(14-19)^2+200(18-19)^2+700(20-19)^2}{100}=3/4\Rightarrow \sigma^2_{\text{کل}}=45+3/2=48/4$$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

برای به‌دست آوردن میانه در سری اعداد طبقه‌بندی شده پیوسته از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mu d=L_{\mu d}+\frac{\frac{N}{2}-f_{2(i-1)}}{f_i}\times J\Rightarrow 41=L_{\mu d}+\frac{25-18}{10}\times 5\Rightarrow L_{\mu d}=37/5$$

حد بالای طبقه میانه‌دار $=L_{\mu d}+J\Rightarrow$ حد بالای طبقه میانه‌دار $=37/5+5=42/5$

۸- گزینه ۱ صحیح است.

چون ترتیب مهم نمی‌باشد بنابراین: $n(s)=15$

از طرفی دیگر، اگر فرض کنیم که A مجموع دو عددی باشد که مضرب ۳ باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$A=\{(1,2),(1,5),(2,4),(3,6),(4,5)\}\Rightarrow n(A)=5$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

۹- گزینه ۳ صحیح است.

a		b			برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	
b		a			برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	
	a		b		برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	
	b		a		برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	تعداد حالات ممکن $=\underbrace{6+6+6+6+6+6}_{36}$
		a		b	برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	
		b		a	برای سایر افراد (سه نفر دیگر) $3\times2\times1=6$ حالت سخنرانی وجود دارد	

تعداد دفعات پرتاب دو تاس تا برای اولین بار مجموع عدد ظاهر شده ۷ باشد = x

۱۰- گزینه ۴ صحیح است.

به کمک توزیع مهندسی خواهیم داشت.

احتمال اینکه وقتی دو تاس، برای اولین بار پرتاب می‌کنیم مجموع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. $=P(x=1)=(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})$

احتمال اینکه وقتی دو تاس را برای دومین بار پرتاب می‌کنیم مجموع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. $=P(x=2)=(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^2$

احتمال اینکه وقتی دو تاس را برای پنجمین بار پرتاب می‌کنیم مجموع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. $=P(x=5)=(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^3$

حال باید مجموع احتمالات فوق را حساب کنیم که به صورت یک تصاعد هندسی نسبت $(\frac{5}{6})^2$ و جمله اول $\frac{1}{6}$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$S_n=\frac{a_r}{1-r}\Rightarrow s_n=\frac{\frac{1}{6}}{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{6}{11}$$

۱۱- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به توزیع فوق هندسی خواهیم داشت:

$n=2$ $\quad N-k=4$ $\quad$ کالای معیوب $\quad k=8$ $\quad$ کالای سالم $\quad N=12$

تعداد کالاهای سالم $x\Rightarrow E(x)=n.\frac{k}{N}=2\times\frac{8}{12}=\frac{4}{3}$

۱۲- گزینه ۲ صحیح است.

$$COV(x,y)=E(x.y)-E(x)E(y)=117-0/9\times2/4=-0/46$$

زیرا $E(xy)=\sum_i\sum_j x_i y_j f(x_i,y_j)$

$$\Rightarrow E(xy)=۱\times۰\times۰+۱\times۱\times۰/۱+۱\times۲\times۰/۲+۳\times۰\times۰/۳+۳\times۱\times۰/۴+۳\times۲\times۰=۱/۷$$

$$E(x)=\sum_x x_i\times f(X=x_i)\Rightarrow E(x)=۰\times۰/۳+۱\times۰/۵+۲\times۰/۲=۰/۹$$

$$E(y)=\sum_y y_j\times f(Y=y_j)\Rightarrow E(y)=۱\times۰/۳+۳\times۰/۷=۲/۴$$

۱۳- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به توزیع چند جمله‌ای خواهیم داشت:

$P_۱=۰/۵ \quad P_۲=۰/۳ \quad P_۳=۰/۲ \quad n=۷$

امتیاز A گرفتن وزنه بردار $=x_۱\Rightarrow x_۱=۰,۱,۲,...,۷$

امتیاز B گرفتن وزنه بردار $=x_۲\Rightarrow x_۲=۰,۱,۲,...,۷ \qquad \Rightarrow P(x_۱=۲,x_۲=۲,x_۳=۳)=\binom{۷}{۲,۲,۳}$

امتیاز C گرفتن وزنه بردار $=x_۳\Rightarrow x_۳=۰,۱,۲,...,۷ \qquad (۰/۵)^۲(۰/۳)^۲(۰/۲)^۳=-۰/۰۳۷۸$

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

تابع چگالی ارائه شده مربوط به توزیع نمایی است. همانطوری که می‌دانیم تابع چگالی توزیع نمایی به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>۰\\ ۰ & x\le ۰\end{cases} \xrightarrow[\text{است}\ \lambda=\frac{۱}{۲}]{\text{در این سوال}} E(x)=\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

۱۵- گزینه ۲ صحیح است.

منظور سوال این است که ما از جامعه اول که دارای واریانس ۹ می‌باشد یک نمونه ۱۰۰ تایی و از جامعه دوم که دارای واریانس ۴ می‌باشد یک نمونه ۲۵تایی انتخاب می‌کنیم و می‌خواهیم ببینیم انحراف معیار تفاضل میانگین دو نمونه چیست، بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma^۲(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)=\sigma^۲(\bar{x}_۱)+\sigma^۲(\bar{x}_۲)=\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)=\frac{۹}{۱۰۰}+\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۵}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \sigma(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}=۰/۵$$

یادآوری: ترکیب خطی دو متغیر تصادفی مستقل نرمال است هر یک از آنها نرمال است.

۱۶- گزینه ۲ صحیح است.

x	y	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^۲$	$(y_i-\bar{y})^۲$
۲	۳	-۲	۰	۰	۴	۰
۳	۵	-۱	۲	-۲	۱	۴
۴	۱	۰	-۲	۰	۰	۴
۵	۴	۱	۱	۱	۱	۱
۶	۲	۲	-۱	-۲	۴	۱
$\bar{x}=۴$	$\bar{y}=۳$			$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{x})=-۳$	$\sum(x_i-\bar{x})=۱۰$	$\sum(y_i-\bar{y})^۲=۱۰$

$$\text{ضریب همبستگی}\Rightarrow r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\left[\sum(x_i-\bar{x})^۲\right]\left[\sum(y_i-\bar{y})^۲\right]}}=\frac{-۳}{\sqrt{۱۰\times۱۰}}=-۰/۳$$

تست‌های کنکور سراسری سال ۱۳۸۷

۱- متغیرهای تصادفی کمی به کدام دو دسته تقسیم می‌شوند؟

۱) اسمی ـ ترتیبی ۲) پیوسته ـ ترتیبی ۳) گسسته ـ پیوسته ۴) گسسته ـ اسمی

۲- در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط ۱۶ باشد فراوانی مطلق در دسته چهارم کدام است؟

مرکز دسته	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۵	a	۵۸	۷۵

۱) ۲۴ ۲) ۲۱ ۳) ۱۹ ۴) ۱۷

۳- ۲۰ داده آماری با میانگین ۱۲ و انحراف معیار ۱/۲ با ۱۰ داده آماری دیگر با میانگین ۹ و انحراف معیار ۲ در نظر می‌گیریم. واریانس ۳۰ داده موجود کدام است؟

۱) ۷/۶ ۲) ۷/۹ ۳) ۸/۱ ۴) ۸/۴

۴- در جدول توزیع فراوانی دسته‌بندی شده اگر هر جامعه ۱۶ باشد فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟

حدود دسته	۹−۱۲	۱۲−۱۵	۱۵−۱۸	۱۸−۲۱
فراوانی مطلق	۸	۱۲	۱۵	a

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵- در داده‌های طبقه‌بندی شده با متغیرهای پیوسته و توزیع فراوانی اندکی متقارن فاصله طبقات ۶، تعداد جامعه ۲۴۰ و مقدار میانگین و واریانس به ترتیب ۲۵ و ۱۲ محاسبه شده است. واریانس تصحیح شده شپارد کدام است؟

۱) ۱۱/۲۵ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۶- در ۵۰ داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ داریم: $\sum_{i=1}^{50}(x_i=15)^3=24$ ضریب چولگی و تفاوت جامعه از نظر متقارن با توزیع نرمال چگونه است؟

۱) ۰/۱۲، تقریباً نرمال ۲) ۰/۰۶، تقریباً نرمال ۳) ۰/۱۲، تفاوت اندک با نرمال ۴) ۰/۰۶، تفاوت اندک با نرمال

۷- به چند طریق می‌توان ۹ مهره یکسان را در ۶ قفسه که در یک ردیف قرار دارند جای داد به طوری که هیچ قفسه‌ای بدون مهره باقی نماند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۴۲ ۴) ۵۶

۸- ارقام ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ به تصادف کنار هم قرار می‌گیرند، با کدام احتمال بین هر دو رقم یکان دو رقم متمایز قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۹- در یک آزمایش مهارت احتمال موفقیت دو نفر به ترتیب $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آن دو موفق‌اند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۰- به ازای کدام مقدار a، تابع $x=0,1,2,3,4$، $P(X=x)=\frac{(x^4)}{3a+1}$ یک تابع احتمال است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۱- شصت‌درصد افراد شرکت‌کننده در یک آزمون قبول شده‌اند. اگر x تعداد افراد قبول شده در هر انتخاب ۹۶ نفری باشد، انحراف معیار x کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۳/۶ ۳) ۵/۴ ۴) ۷/۲

۱۲- تعداد مشتری‌هایی که به یک فروشگاه مراجعه می‌کنند دارای توزیع پواسون با میانگین ۳ مشتری در هر دقیقه است با کدام احتمال در ۸۰ ثانیه‌ی اول حداقل ۲ مشتری مراجعه می‌کنند؟ (راهنمایی $e^{-۴} = ۰/۰۱۸$)

۱) ۰/۹۱۵ ۲) ۰/۸۹۵ ۳) ۰/۸۷ ۴) ۰/۹۱

۱۳- در تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی x و y مقدار کوواریانس کدام است؟

x \ y	۱	۴
۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
۵	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۴- در یک توزیع نرمال با میانگین ۱۵/۲۱ و واریانس ۹، داده نظیر شصت و سومین صدک آن کدام است؟ $(P(z < ۰/۳۳) = ۰/۳۷)$

۱) ۱۵/۹ ۲) ۱۶/۳ ۳) ۱۶/۴ ۴) ۱۶/۲

۱۵- در ۱۲۰ داده آماری دسته‌بندی نمودار بافت‌نگار فراوانی مطلق متقارن است. مجموع این داده‌ها ۸۴۰ و مجموع مربعات آنها ۶۱۵۰ می‌باشد، تقریباً ۹۵درصد داده‌ها کدام بازه است؟

۱) (۴,۹) ۲) (۵,۹) ۳) (۴,۱۰) ۴) (۵,۱۰)

۱۶- در آزمون فرض مقایسه نسبت موفقیت در دو جامعه آماری اگر $n_۱ = ۱۲۰$ و $n_۲ = ۱۰۰$، $\bar{P}_۱ = ۰/۶$ و $\bar{P}_۲ = ۰/۵$ باشند، مقدار آماره آزمون برای آزمون فرض $H_۰ = P_۱ \le P_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

پاسخ تست‌های کنور سراسری سال ۱۳۸۷

۱- گزینه ۳ صحیح است.

همانطوری که می‌دانیم متغیر تصادفی در واقع، برخلاف اسمش، متغیر نیست بلکه تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود و هر یک از مقادیر آن، متناظر با یک یا چند عضو از اعضای فضای نمونه است. می‌دانیم که هر تابع دارای دامنه و برد است. بنابراین می‌توان متغیر تصادفی را این‌گونه تعریف کرد: «متغیر تصادفی، تابعی است که دامنه آن فضای نمونه و حوزه آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.»

متغیر تصادفی را معمولاً بر حسب تعداد مقادیری که می‌تواند اختیار کند به دو دسته تقسیم می‌شود:

الف) متغیر تصادفی گسسته　　ب) متغیر تصادفی پیوسته

۲- گزینه ۲ صحیح است.

$F_r = ۸ \quad ۲۵ \quad ۳۷ \quad ۵۸ \quad ۷۵$

زیرا: الف) فراوانی تجمعی کمتر از طبقه اول همان فراوانی مطلق طبقه اول است بنابراین: $f_۱ = ۸$

ب) فراوانی تجمعی کمتر از طبقه آخر همان N می‌باشد بنابراین $N = ۷۵$

ج) درصد فراوانی نسبی (P_i) برابر است با:

$$P_۱ = \frac{F_i}{N} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۱۶ = \frac{F_r}{۷۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow F_r = ۱۲$$

د) با توجه به تعریف فراوانی تجمعی کمتر نتیجه می‌گیریم که: اولاً: $a = ۲۵ + ۱۲ = ۳۷$ ثانیاً: $F_f = ۲۱$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

N_i	۲۰	۱۰
μ_i	۱۲	۹
$\sigma_i^۲$	۴	۹

$$\sigma_T^۲ = \frac{\sum Ni\sigma i^۲}{N} + \frac{\sum Ni(\mu_i - \mu_T)^۲}{N} = \frac{۲۰ \times ۴ + ۱۰ \times ۹}{۳۰} + \frac{۲۰(۱۲-۱۱)^۲ + ۱۰(۹-۱۱)^۲}{۳۰} = ۷/۶$$

$$\text{زیرا} \Rightarrow \mu_{T_{\text{کل}}} = \frac{\sum Ni\mu i}{N} \Rightarrow \mu_T = \frac{۲۰ \times ۱۲ + ۱۰ \times ۹}{۳۰} = ۱۱$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

طبقه حد دار، طبقه‌ای است که دارای بیشترین فراوانی باشد. بنابراین طبقه مُددار با توجه به $\mu o = ۱۶$ طبقه سوم است. در نتیجه:

$$\mu o = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_r} \times I \Rightarrow ۱۶ = ۱۵ + \frac{۳}{۳ + ۱۵ - a} \times ۳ \Rightarrow ۱ = \frac{۹}{۱۸ - a} \Rightarrow a = ۹$$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

در داده‌های طبقه‌بندی شده، برای محاسبه میانگین و واریانس از نماینده طبقات استفاده می‌شود. نتیجه این عمل ممکن است دارای اختلاف با مقادیر واقعی داده‌ها باشد. در میانگین، اشتباه ناشی از این تقریب به علت مثبت و منفی بودن اشتباهات جبران می‌شود، از این‌رو از مجموع خطاها صرف نظر می‌گردد. در مورد واریانس چون خطاهای مثبت و منفی به توان دو می‌رسد، خطاها یکدیگر را خنثی نمی‌کنند بنابراین مقداری که برای واریانس به دست می‌آید از مقدار واقعی واریانس بیشتر است. برای تصحیح این اشتباه، شپارد پیشنهاد کرده است از واریانس بدست آمده مقدار $\frac{d^۲}{۱۲}$ کم شود، که در آن صورت مقدار بدست آمده دقیقتر از واریانس خواهد بود.

$$\sigma^۲ = \sigma_x^۲ - \frac{J^۳}{۱۲}$$

دقت خواهیم داشت که این تصحیح در مواردی به کار می‌رود که اولاً متغیر پیوسته باشد، ثانیاً تعداد مشاهدات دست کم هزار تا باشد و ثالثاً تابع توزیع فراوانی از نوع متقارن یا اندکی متقارن باشد.

در این سوال خواهیم داشت:

$$\sigma_r^۲ = ۱۲ - \frac{۳۶}{۲۳} = ۹$$

۶- گزینه ۲ صحیح است.

$N = ۵۰$

$\mu_x = ۱۵$

$\sigma^۲ = ۴$

$\sum_{i=۱}^{۵۰}(x_i - ۱۵)^۳ = ۲۴$

ضریب چولگی گشتاوری $\Rightarrow SIK = \frac{\mu_۳}{\sigma} = \frac{\frac{۲۴}{۵۰}}{۸} = ٪۶$

چون $|SK| \leq ۰/۱$ است توزیع جامعه از نظر قرینگی تقریباً نرمال است.

۷- گزینه ۴ صحیح است.

نکته: اگر بخواهیم N شی مشابه را بین K نفر تقسیم کنیم تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $\frac{(N+k-۱)!}{Ni \times (k-۱)!}$

در این سوال چون گفته هیچ قفسه‌ای بدون مهره باقی نماند بنابراین ابتدا در هر قفسه یک مهره قرار می‌دهیم در نتیجه مسأله همانند آن است که بخواهیم سه مهره مشابه را بین ۶ قفسه تقسیم کنیم،

$N = ۳ , k = ۶ \Rightarrow \frac{(۳+۶-۱)!}{۳!۵!} = ۵۶$

۸- گزینه ۳ صحیح است.

تعداد کل حالات ممکن $n(S) = \frac{۶!}{۲!۲!۲!} = ۹۰$

تعداد حالات مساعد $n(A) = ۶ \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۹۰} = \frac{۱}{۱۵}$

۹- گزینه ۳ صحیح است.

$P(A) = \frac{۳}{۵} \qquad P(B) = \frac{۱}{۲}$

حوادث A و B سازگارند و مستقل از هم یعنی هر دو نفر می‌توانند موفق شوند و از طرفی دیگر موفقیت یا شکست نفر اول ربطی به موفقیت یا شکست نفر دوم ندارد.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۱} = \frac{۴}{۵}$

زیرا $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۱۰}$

۱۰- گزینه ۲ صحیح است.

به کمک جدول توزیع احتمال خواهیم داشت:

x	۰	۱	۲	۳	۴
$P(x=x) = \frac{\binom{۴}{x}}{۳a+۱}$	$\frac{۱}{۳a+۱}$	$\frac{۴}{۳a+۱}$	$\frac{۶}{۳a+۱}$	$\frac{۴}{۳a+۱}$	$\frac{۱}{۳a+۱}$

$\sum_{x=۰}^{۴} P(X=x) = ۱ \Rightarrow \frac{۱۶}{۳a+۱} = ۱ \Rightarrow a = ۵$

۱۱- گزینه ۱ صحیح است.

توزیع مورد نظر دو جمله‌ای می‌باشد بنابراین خواهیم داشت:

$P = ۰/۶ \quad q = ۰/۴ \quad n = ۹۶ \quad \sigma_x = ?$

$\sigma_x^۲ = nPq \Rightarrow \sigma_x^۲ = ۹۶ \times ۰/۶ \times ۰/۴ = ۲۳/۰۴ \Rightarrow \sigma_x = ۴/۸$

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

فرض می‌کنیم که:

ثانیه	مشتری به فروشگاه مراجعه می‌کند
۶۰	۳
۸۰	$\lambda \Rightarrow \lambda = ۴$

$= x \Rightarrow x = ۰, ۱, ۲, \cdots$ تعداد مشتریانی است که در A ثانیه اول به فروشگاه مراجعه می‌کنند.

$P(x \geq ۲) = ۱ - P(x < ۲) = ۱ - ۰/۰۹ = ۰/۹۱$

$P(x < ۲) = P(x = ۰) + P(x = ۱) \Rightarrow P(x < ۲) = e^{-۴} + ۴e^{-۴} = ۵e^{-۴} = ۰/۰۹$

۱۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$COV(x, y) = E(xy) - E(x)E(y) = ۵ - \frac{۲۵}{۴} = -\frac{۵}{۴}$$

$$E(xy) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j)$$

$$\Rightarrow E(xy) = ۰ \times ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۰ \times ۴ \times \frac{۱}{۳} + ۵ \times \frac{۱}{۳} + ۵ \times ۴ \times \frac{۱}{۶} = ۵$$

$$E(x) = \sum x_i f(X = x_i) \Rightarrow E(x) = ۰ \times \frac{۱}{۲} + ۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

$$E(y) = \sum y_i f(Y = y_i) \Rightarrow E(y) = ۱ \times \frac{۱}{۲} + ۴ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

۱۴- گزینه ۴ صحیح است.

$x =$ نرمال $\quad \mu_x = ۱۵/۲۱ \quad \sigma_x^۲ = ۹ \qquad P_{۶۳} = ?$ صدک شصت و سوم

صدک شصت و سوم یعنی داده‌ایی که ۰/۶۳ داده‌ها کوچکتر یا مساوی با آن و ۳۷٪ داده‌ها بزرگتر یا مساوی با آن هستند. مشخص است که Z متناظری برای صدک شصت و سوم برابر ۰/۳۳ می‌باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow ۰/۳۳ = \frac{x - ۱۵/۲۱}{۳} \Rightarrow x = ۱۶/۲$$

۱۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$N = ۱۲۰ \quad \sum_{i=۱}^{۱۲۰} x_i = ۸۴ \quad \sum_{i=۱}^{۱۲۰} x_i^۲ = ۶۱۵۰$$

$$\Rightarrow \mu_x = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۸۴۰}{۱۲۰} = ۷ \,,\, \sigma^۲ x = \frac{\sum x_i^۲}{N} - (\mu x)^۲ = ۵۱/۲۵ - ۴۹ = ۲/۲۵ \Rightarrow \sigma_x = ۱/۵$$

از طرف $P(\mu_x - ۲\sigma x \leq x \leq \mu_x + ۲\sigma x) = ۰/۹۵$

بنابراین خواهیم داشت $P(۷ - ۲ \times ۱/۵ \leq x \leq ۷ + ۲ \times ۱/۵) = ۰/۹۵ \Rightarrow P(۴ \leq x \leq ۱۰) = ۰/۹۵$

۱۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$Z = \frac{(\bar{P}_۱ - \bar{P}_۲) - (P_۱ - P_۲)}{\sqrt{\frac{\bar{P}_۱ \bar{q}_۱}{n_۱} + \frac{\bar{P}_۲ \bar{q}_۲}{n_۲}}} = \frac{(۰/۶ - ۰/۵) - ۰}{\sqrt{\frac{۰/۶ \times ۰/۴}{۱۲۰} + \frac{۰/۵ \times ۰/۵}{۱۰۰}}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$$

تست‌های کنور سراسری سال ۱۳۸۸

۱-کدام مقیاس برای اندازه‌گیری از ویژگی‌های بهتری برخوردار است؟

۱) نسبی ۲) اسمی ۳) فاصله‌ای ۴) رتبه‌ای

۲- یک هواپیما فاصله ۳ هزار کیلومتری را با سرعت ۶۰۰ کیلومتر در ساعت، فاصله ۵ هزار کیلومتری را با سرعت ۷۵۰ کیلومتر در ساعت و فاصله ۴ هزار کیلومتری را با سرعت ۸۰۰ کیلومتر در ساعت طی می‌کند. سرعت متوسط آن کدام است؟

۱) ۷۱۵ ۲) ۷۱۷ ۳) ۷۲۰ ۴) ۷۲۵

۳- میانگین داده‌های پیوسته از جدول زیر کدام است؟

حدود دسته	۲۱۶ – ۲۳۲	۲۳۲ – ۲۴۸	۲۴۸ – ۲۶۴	۲۶۴ – ۲۸۰
فراوانی	۱۶	۲۹	۱۳	۱۲

۱) ۲۴۲/۸ ۲) ۲۴۳/۲ ۳) ۲۴۳/۶ ۴) ۲۴۴/۸

۴- نمرات مسئولیت‌پذیری کارمندان یک شرکت از صفر تا ۳۰ طبقه‌بندی شده است. انحراف چارکی کدام است؟

فاصله طبقات	< ۱۰	۱۰ – ۱۴	۱۴ – ۱۸	۱۸ – ۲۲	۲۲ – ۲۶	≥ ۲۶
فراوانی	۴	۸	۱۰	۱۲	۹	۷

۱) ۲/۹ ۲) ۴/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۹/۲

۵- در یک آزمون مهارت میانگین و واریانس نمرات به ترتیب ۷۵ و ۶۴ بوده است، بنابر قانون چی‌بی‌شف انتظار می‌رود حداقل چند درصد نمرات بین دو عدد ۶۳ و ۸۷ قرار گیرند؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۵ ۴) ۶۵

۶- در یک جدول طبقه‌بندی شده چارک اوّل، دوّم و سوّم به ترتیب ۱۲، ۱۵ و ۱۷ محاسبه شده است، نوع چولگی و از نظر قرینگی، با توزیع نرمال چگونه است؟

۱) چوله به راست ـ تفاوت اندک با نرمال ۲) چوله به راست ـ تفاوت فاحش با نرمال

۳) چوله به چپ ـ تفاوت اندک با نرمال ۴) چوله به چپ ـ تقریباً نرمال

۷- در یک تاس ناسالم احتمال آمدن هر شماره متناسب با وارون عدد آن است، با کدام احتمال در پرتاب این تاس عدد زوج ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۲۹}{۶۰}$ ۲) $\frac{۳۱}{۶۰}$ ۳) $\frac{۴۵}{۱۴۷}$ ۴) $\frac{۵۵}{۱۴۷}$

۸- شش نفر کارشناس مدیریت را به چند طریق می‌توان به ۳ شهر اعزام کرد به‌طوری که تعداد افراد اعزامی به دو شهر برابر نباشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۹- شش نفر دانشجو که دو نفر آنان از گروه مدیریت، دو نفر از گروه حسابداری و دو نفر دیگر از گروه آمار می‌باشند دور یک میزگرد می‌نشینند. با کدام احتمال افراد هم گروه کاملاً مقابل هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۰- در ظرف اوّل ۱ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوّم ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. به تصادف یک مهره از ظرف اوّل برداشته بدون رویت در ظرف دوّم قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوّم دو مهره با هم خارج می‌کنیم، با کدام احتمال هر دو مهره خارج شده سفید است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۳۶

۱۱- در جدول توزیع احتمال زیر، $Var\left(\frac{1}{2}x-2\right)$ کدام است؟

x	−۲	۰	۲	۴	۵
f(x)	۰/۱	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	۰/۲

۱) ۱/۲۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۳۵ ۴) ۱/۴۱

۱۲- در یک رمز عبور شش رقمی بدون صفر با کدام احتمال دقیقاً سه رقم مضرب ۳ و یک رقم مضرب ۴ می‌باشد؟

۱) $\frac{320}{81\times81}$ ۲) $\frac{640}{81\times81}$ ۳) $\frac{80}{27\times27}$ ۴) $\frac{160}{27\times27}$

۱۳- به طور متوسط در هر دقیقه ۱۰ نفر با یک مرکز مخابرات تماس می‌گیرند، با کدام احتمال در ۳۰ ثانیه اوّل ۴ نفر تماس می‌گیرند؟ $(e^{-5}=0/007)$

۱) ۰/۱۶۸ ۲) ۰/۱۸۲ ۳) ۰/۱۹۶ ۴) ۰/۲۰۳

۱۴- توزیع نمرات آزمون داوطلبان، نرمال با میانگین ۷۲ و انحراف معیار ۱۲ می‌باشد. از این جامعه یک نمونه n تایی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه میانگین نمره ارزشیابی آنها حداقل ۶۹ باشد برابر ۰/۹۷۷۲ است. می‌دانیم $P(z\geq 2)=0/0228$، مقدار n کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

۱۵- برای دو صفت X و Y در جدول روبه‌رو، معادله خط رگرسیون کدام است؟

X	۲	۳	۵	۶
Y	۳	۲	۴	۳

۱) $\hat{y}=0/2x+2/2$ ۲) $\hat{y}=-0/2x+3/8$ ۳) $\hat{y}=0/3x+1/8$ ۴) $\hat{y}=-0/3x+4/2$

پاسخنامه تست‌های کنکور سراسری سال ۱۳۸۸

۱-گزینه ۱ صحیح است.

اسمی و رتبه‌ای جزو مقیاسهای کیفی هستند و فاصله‌ای و نسبی جزو مقیاسهای کمی هستند و مقیاس نسبی دارای صفر مطلق است.

۲-گزینه ۳ صحیح است.

باید میانگین هارمونیک حساب شود چون ترکیبی است:

$$\bar{x}_G = \frac{۳۰۰۰+۴۰۰۰+۵۰۰۰}{\frac{۳۰۰۰}{۶۰۰}+\frac{۴۰۰۰}{۸۰۰}+\frac{۵۰۰۰}{۷۵۰}} = ۷۲۰$$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

$$x_۱ = \frac{۲۱۶+۲۳۲}{۲} = ۲۲۴ \qquad x_۲ = ۲۴۰ \qquad x_۳ = ۲۵۶ \qquad x_۴ = ۲۷۲$$

طول دسته $c = ۲۳۲-۲۱۶ = ۱۶$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{۲۲۴\times۱۶+۲۴۰\times۲۹+۲۵۶\times۱۳+۲۷۲\times۱۲}{۱۶+۲۹+۱۳+۱۲} = ۲۴۴/۸$$

۴-گزینه ۲ صحیح است.

ÇL	<۱۰	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶	≥۲۶
F_i	۴	۸	۱۰	۱۲	۹	۷
Fc_i	۴	۱۲	۲۲	۳۴	۴۳	۵۰

مکان چارک اول $= C_{Q_۱} = \frac{۱\times۵۰}{۴} = ۱۲/۵ \rightarrow$ در طبقه سوم قرار دارد.

$CQ_۳ = \frac{۳\times۵۰}{۴} = ۳۷/۵ \rightarrow$ در طبقه پنجم وجود دارد

$$\left.\begin{aligned} Q_۱ &= ۱۴+\left(\frac{۱۲/۵-۱۲}{۱۰}\right)\times۴ = ۱۴/۲ \\ Q_۳ &= ۲۲+\left(\frac{۳۷/۵-۲۴}{۹}\right)\times۴ = ۲۳/۵۶ \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q = \frac{Q_۳-Q_۱}{۲} = ۴/۶۸$$

۵-گزینه ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{aligned} x &= ۷۵ \\ \sigma^۲ &= ۶۴ \rightarrow \sigma = ۸ \end{aligned}\right\} ۶۳ = \bar{x} - z\sigma \Rightarrow ۶۳ = ۷۵ - ۸z$$

$$\rightarrow ۸z = ۱۲ \rightarrow z = \frac{۳}{۲}$$

$$\rightarrow \left(۱-\frac{۱}{z^۲}\right)\times۱۰۰ = \left(۱-\frac{۱}{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲}\right)\times۱۰۰ = ۵۵\%$$

۶-گزینه ۳ صحیح است.

$$S = \frac{Q_۳-۲Q_۲+Q_۱}{Q_۳-Q_۱} = \frac{۱۷-(۲\times۱۵)+۱۲}{۱۷-۱۲} = \frac{-۱}{۵}$$

۷- گزینه ۴ صحیح است.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

۹-گزینه ۱ صحیح است.

فضای نمونه $\rightarrow \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} = ۶!$

$A \rightarrow \boxed{۶}\ \boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} = ۶\times۴\times۲$

مدیریت — روبروی مدیریت — حسابداری — روبروی حسابداری — آمار — روبروی آمار

$$p(A) = \frac{۶\times۴\times۲}{۶!} = \frac{۱}{۱۵}$$

۱۰-گزینه ۳ صحیح است.

۱	۴	۳	۲
سفید	سیاه	سفید	سیاه

p (سفید بودن دو مهره) = p (سفید بودن اولی) × p (سفید بودن دو مهره) + p (سیاه بودن اولی) p (سفید بودن دو مهره)

$$p\ (\text{سفید بودن دو مهره}) = \frac{۱}{۵}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۴}{۵}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}}$$

$$p\ (\text{سفید بودن دو مهره}) = \frac{۱}{۵}\times\frac{۴\times۳}{۶\times۵} + \frac{۴}{۵}\times\frac{۳\times۲}{۶\times۵} = \frac{۲}{۲۵} + \frac{۴}{۲۵}$$

$$p\ (\text{سفید بودن دو مهره}) = \frac{۶}{۲۵} = \frac{۲۴}{۱۰۰} = ۰/۲۴$$

۱۱-گزینه ۱ صحیح است.

x_i	−۲	۰	۳	۴	۵
f_i	۰/۱	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	۰/۲
$x_i^۲$	۴	۰	۹	۱۶	۲۵
$f_i x_i^۲$	۰/۴	۰	۲/۷	۴	۵
$f_i x_i$	−۰/۲	۰	۰/۹	۱	۱

$$\sigma_x^۲ = \frac{\sum f_i x_i^۲}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^۲ = ۱۲/۱ - (۲/۷)^۲ = ۴/۸۱$$

$$Var\left(\frac{۱}{۲}x - ۲\right) = \frac{۱}{۴}Var(x) = \frac{۱}{۴}\times۴/۸۱ = ۱/۲۱$$

۱۲-گزینه ۲ صحیح است.

۱۳-گزینه ۲ صحیح است.

$$p(x = x) = \frac{e^{\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$p(x = ۴) = \frac{e^{-۵}\times۵^{۴}}{۴!} = ۰/۱۸۲$$

۶۰ ثانیه	۱۰ نفر
۳۰ ثانیه	λ

$\lambda = ۵$

۱۴-گزینه ۲ صحیح است.

۱۵-گزینه ۱ صحیح است.

x	۲	۳	۵	۶	$\sum x_i = ۱۶$
y	۳	۲	۴	۲	$\sum y = ۱۱$
$x^۲$	۴	۹	۲۵	۳۶	$\sum x^۲ = ۷۴$
$y^۲$	۹	۴	۱۶	۴	$\sum y^۲ = ۳۳$
xy	۶	۶	۲۰	۱۲	$\sum xy = ۴۴$

$$\left.\begin{array}{c}\beta = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^۲ - \left(\sum x\right)^۲} = ۰/۲ \\ \alpha = \overline{y} - \beta\overline{x} = ۲/۲\end{array}\right\} \Rightarrow y = ۰/۲x + ۲/۲$$

بودجه‌بندی سوالات کنکور مربوط به درس آمار مدیریت و حسابداری

عنوان / سال	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸
مفاهیم و تعاریف (کلیات)	۲	۱	۲	۱	۱	۱	۱
آمار توصیفی	م ۵ ح ۵	ح ۵* م ۰	۷	۴	۶	۴	۴
احتمال	م ۱* ح ۳	۱	م ۳ ح ۱	۲	۲	۳	۴
توابع احتمال گسسته و پیوسته	م ۲ ح ۳	۴	۴	۵	۵	۴	۳
توزیع نرمال	ح ۱ م ۰	—	م ۱ ح ۰	۲	—	۲	—
نمونه‌گیری و توزیع‌های نمونه‌گیری	—	م۲ ح ۱	—	—	—	—	—
تخمین آماری	م ۱ ح ۱	۱	—	—	۱	—	۲
آزمون فرض	۲	۲	—	—	—	۱	—
رگرسیون و همبستگی	۱	۲	۱	۱	۱	—	۱
جمع	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵

منابع و مأخذ:

آمار و کاربرد آن در مدیریت: تألیف مهندس ایرج ابراهیمی
آمار و کاربرد آن در مدیریت: تألیف دکتر عادل آذر
آمار و کاربرد آن در مدیریت: تألیف مسعود نیکوکار