فتوگرامتری ۳ و محاسبات

استاد : مهندس کریم نقدی

نویسنده : علی ایمانی

تهیه کننده : یاسر عشورزاده (دبیر انجمن نقشه برداری دانشگاه آزاد تفت)

Geomatic Science Club

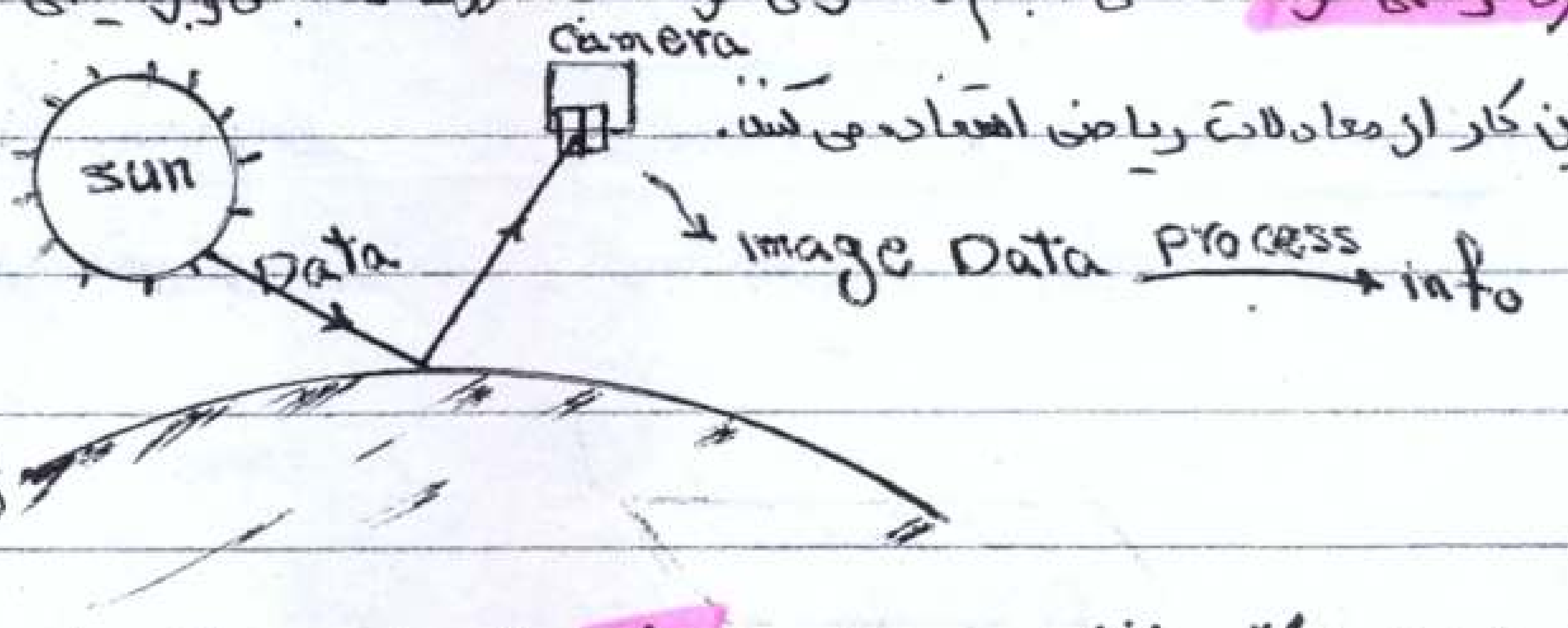
فتوگرامتری ۳

photogrammetry is the art and science and Technology of obtaining reliable information about an object through the analysis of the image of the object acquried by Camera.

Analytical photogrammetry

فتوگرامتری تحلیلی:

فتوگرامتری تحلیلی فتوگرامتری محاسباتی است و هیچ کاری با اطلاعات کیفی ندارد (qualitative Data) و روی اطلاعات کمّی (quantitive Data) کار می‌کند. هدف فتوگرامتری تحلیلی استخراج اطلاعات کمّی از تصاویر است ولی کار اندازه‌گیری را نمی‌خواهد دستی انجام دهد و می‌خواهد به صورت محاسباتی و به وسیله‌ی کامپیوتر انجام می‌شود، که جهت انجام این کار از معادلات ریاضی استفاده می‌کنند.

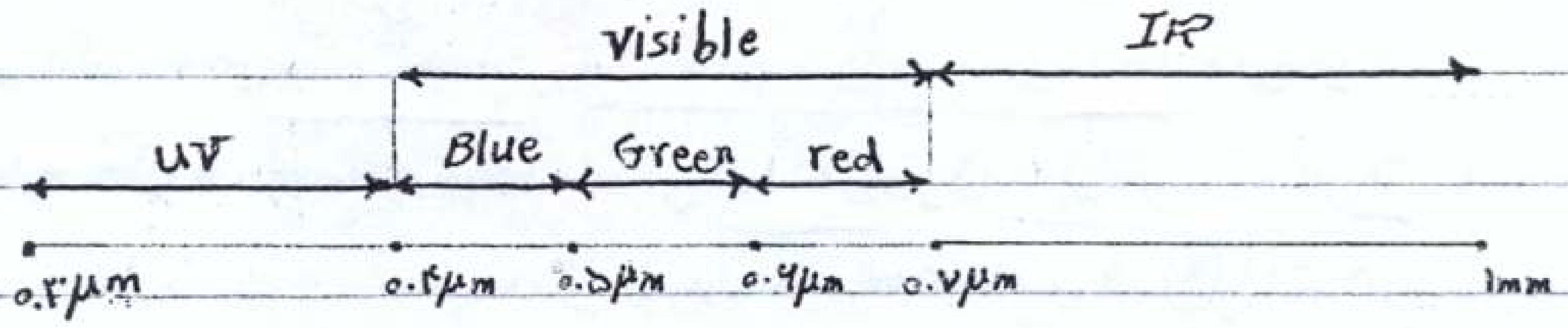


در اینجا تشعشعات الکترومغناطیس به عنوان Data ما خواهد بود که منابع مختلفی می‌توانند داشته باشند منبعی که بیشتر از همه مورد استفاده قرار می‌گیرد Natural source که همان خورشید می‌باشد منابع دیگری هم وجود دارد ولی در فتوگرامتری هوائی ما با آنها سروکار نداریم.

تشعشعات خورشید در برخورد با اشیاء سه حالت برای آن پیش می‌آید جذب، بخش و عبور.

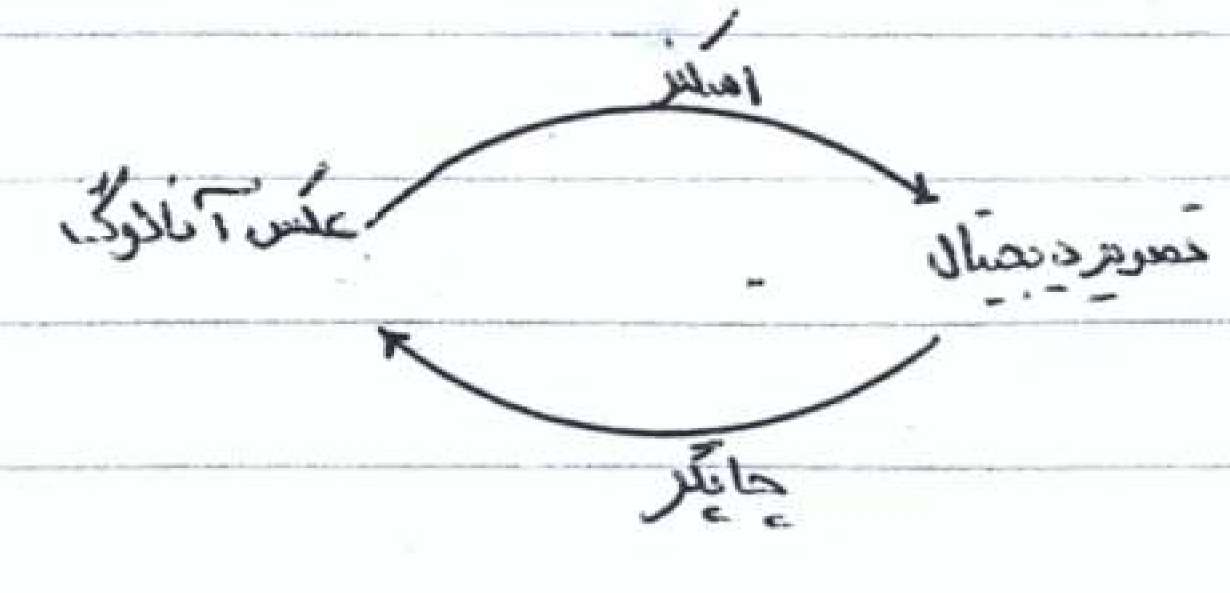
اگر بتوان بازتاب این امواج را ثبت کرد می‌توان اطلاعاتی در مورد شیئی بازتاب‌دهنده به دست آورد.

محدوده‌ی کار فتوگرامتری برحسب طول موج (λ) از ماوراء بنفش (UV) شروع شده و به مادون قرمز (IR) می‌رسد. امّا محدوده‌ای که بیشتر با آن سروکار داریم محدوده‌ی نور مرئی یا visible می‌باشد.



Camera (دوربین) { Digital Camera / Analouge Camera

Image { Analouge in nature / Digital in nature

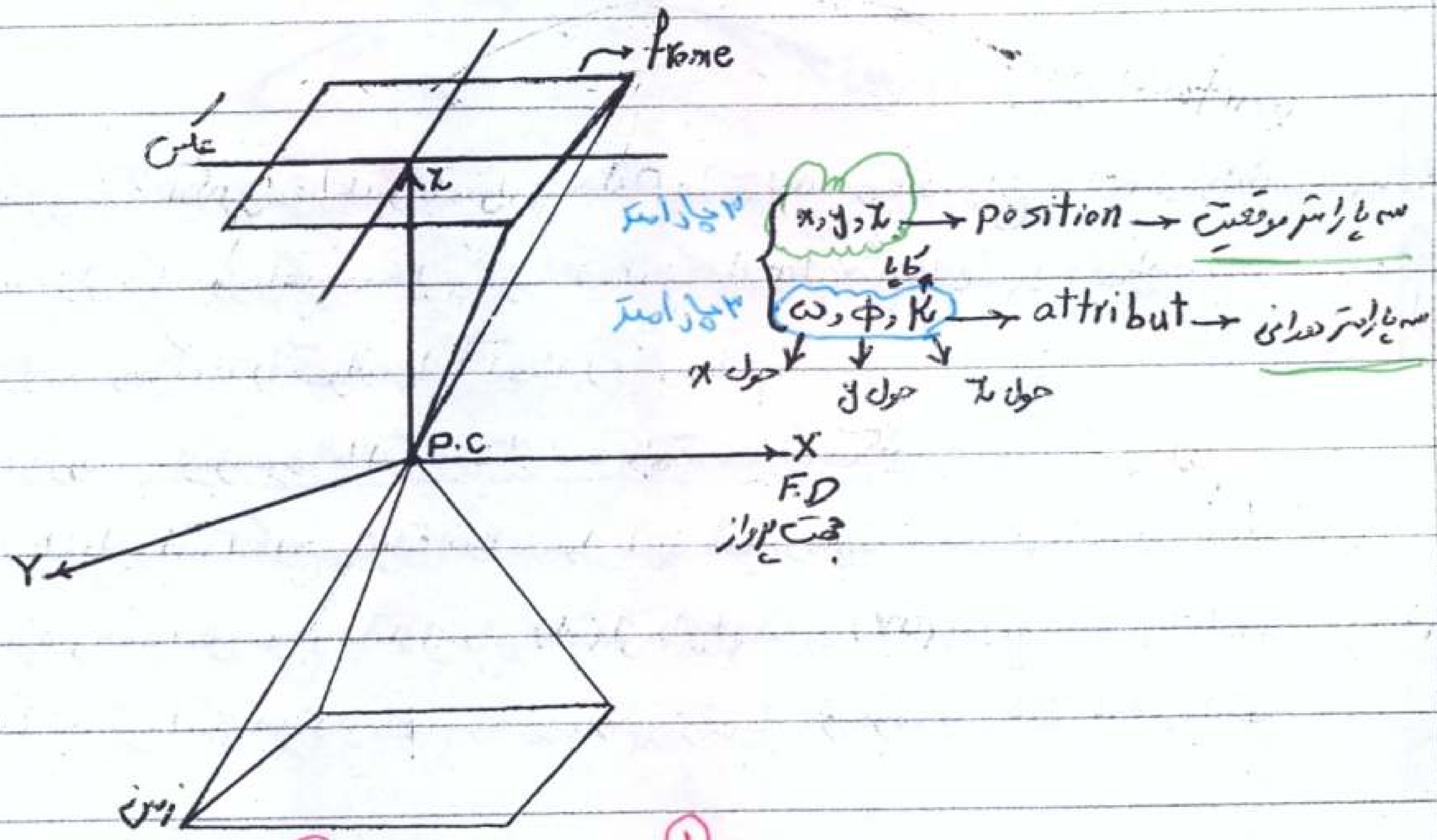


دوربین های فتوگرامتری براساس هندسه تصویر برداری به سه دسته تقسیم می شوند:

1. frame type Image. *
2. line type Image. *
3. point type Image. *

۱) frame type Image:

تصاویری هستند که در فتوگرامتری هوایی بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند و در آنها در یک لحظه مشخص از یک منطقه خاص تصویر برداری می شود و تصویر آن مرکزی است و همه شعاع های نوری تصویر کننده از یک نقطه بنام مرکز تصویر (p.c) عبور می کند. به عبارت دیگر یک محدوده از سطح زمین در یک لحظه برداشت می شود و چون همه اشعه ها از نقطه مرکز تصویر عبور می کنند پس هندسه تصویر برداری با این نقطه وابسته می باشد. این نقطه در هندسه تصویر برداری اهمیت زیادی دارد و دقیقاً نشان دهنده موقعیت تصویر می باشد.



موقعیت p.c یا نقطه ی اصلی نشان دهنده موقعیت تصویر و سه دوران حول سه محور مختصات، وضعیت تصویر را در لحظه تصویر برداری نشان می دهد. در نتیجه با داشتن این ۶ پارامتر (سه پارامتر موقعیت و سه پارامتر دوران) هندسه تصویر در فضا مشخص می شود پس در نتیجه برای یک frame تعیین این ۶ پارامتر لازم است.
*

۲) line type Image:

تصاویر line type Image مفهوم پیچیده تری نسبت به frame type Image دارند. در این سیستم‌ها آنچه در یک لحظه برداشت می‌شود یک خط از سطح زمین می‌باشد و مجموعه این خطوط frame را تشکیل می‌دهند. در اینجا خود خط، یک تصویر مرکزی است و موقعیت p.c نشان دهنده‌ی موقعیت تصویر در لحظه تصویر برداری است.

نکته مهم:

از نقطه نظر هندسی این خط خود یک تصویر است ولی از نظر رادیومتریکی، یک تصویر نیست چرا که ممکن است هیچ چیز روی خط دیده نشود و با کنار هم قرار دادن چند خط از نظر رادیومتریکی معنا پیدا کند.

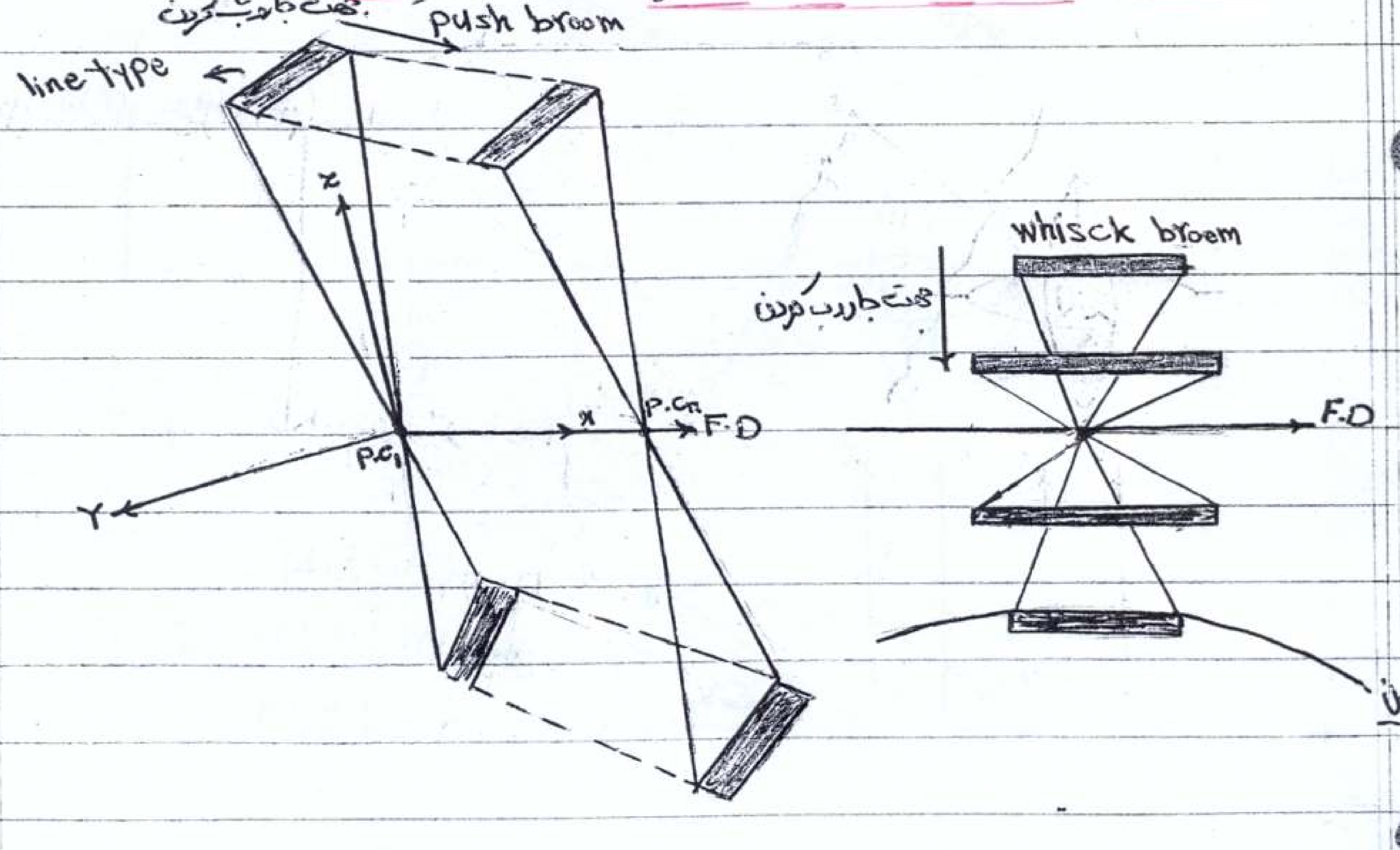
تفاوت اصلی line type Image و frame type Image:

تفاوت اصلی line type Image و from type Image در این است که frame type Image هندسه‌اش با ۶ پارامتر حل می‌شود ولی در line type Image هر خط خودش ۶ پارامتر دارد و اگر آن frame، n خط نیز باشد در نتیجه برای حل کردن هندسه آن از 6n پارامتر استفاده می‌شود.

سیستمهای تصویر برداری line type Image به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱) push broom: جهت جاروب کردن در جهت خط پرواز خطوط تصویر عمود بر خط پرواز است.

۲) whisck broom: جهت جاروب کردن عمود بر خط پرواز و خطوط تصویر موازی خط پرواز است.



۳) point type Image:

این حالت با مراتب پیچیده‌تر از دو حالت قبل است در این حالت در هر لحظه یک نقطه برداشت می‌شود و مجموع این نقاط تشکیل یک خط را می‌دهد و مجموع خطوط تشکیل یک frame را می‌دهد در این سیستم تصویر برداری مشتق از تکنولوژی whisck broom (point) استفاده می‌شود. در این سیستم به ازاء هر نقطه ۶ پارامتر داریم و اگر هر خط شامل n نقطه باشد و هر frame شامل m خط باشد در نتیجه برای حل هندسه تصویر برداری $\boxed{6 \times n \times m}$ پارامتر داریم می‌باشد.

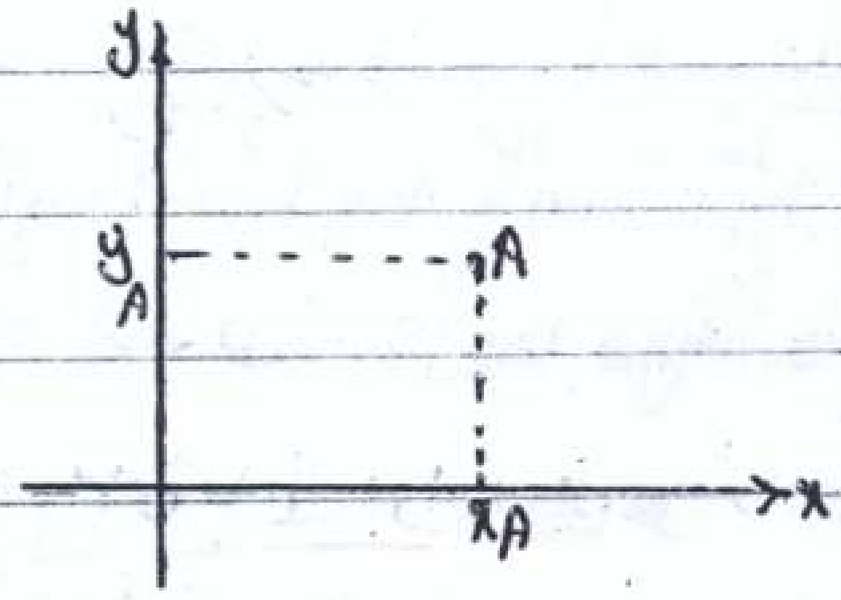
n: تعداد نقاط در هر خط.

m: تعداد خطوط در هر frame.

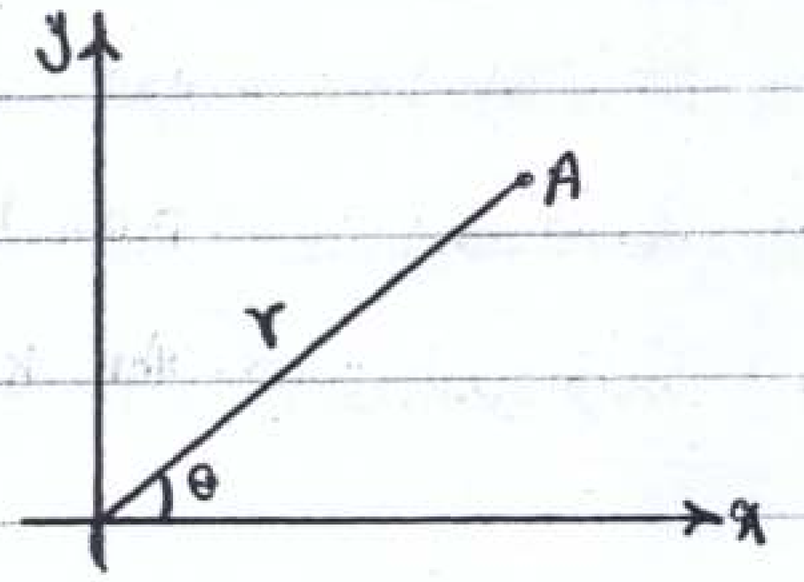
سیستم‌های مختصات و تبدیلات:

سیستم‌های مختصات:

۱) دو بعدی (2D)
- قائم الزاویه (دکارتی)
- قطبی (طول زاویه و چرخش)



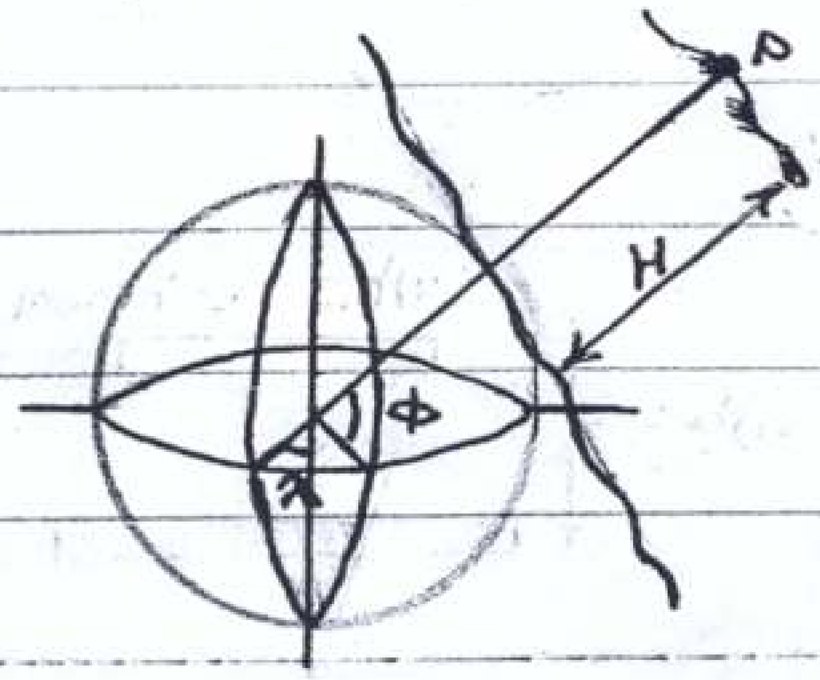
$r > 0$; $0 \le \theta \le 360^\circ$

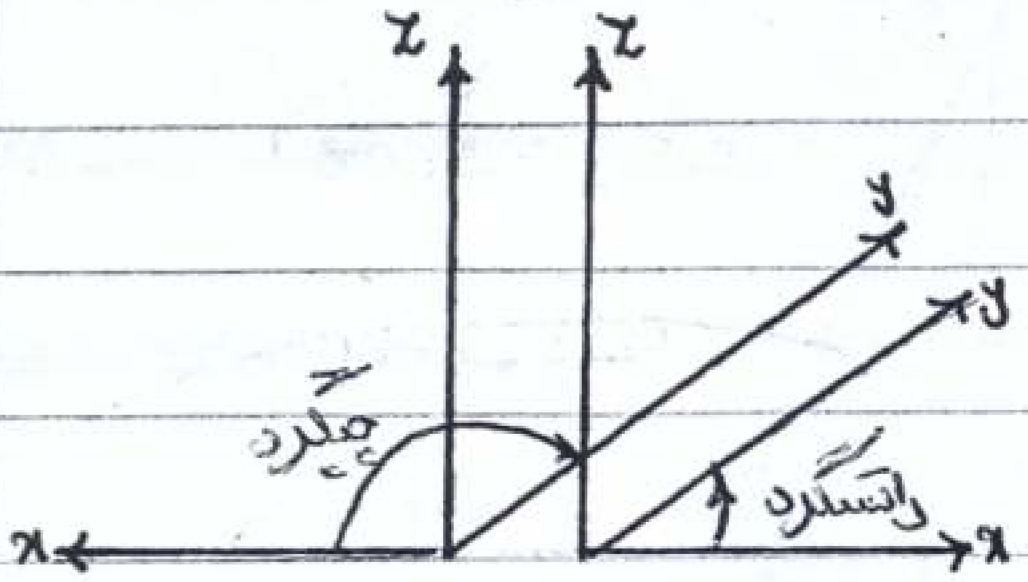


$$\begin{cases} x_A = r\sin\theta_A \\ y_A = r\cos\theta_A \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|$$

۲) سه بعدی (3D)
- جغرافیایی
- قائم الزاویه (دکارتی)
  - راست گرد
  - چپ گرد





$P(\lambda, \phi, h)$

شرقی $-180^\circ \le \lambda \le 180^\circ$ غربی

$-90^\circ \le \phi \le 90^\circ$

ماتریس تبدیل راستگرد به چپگرد و بالعکس:

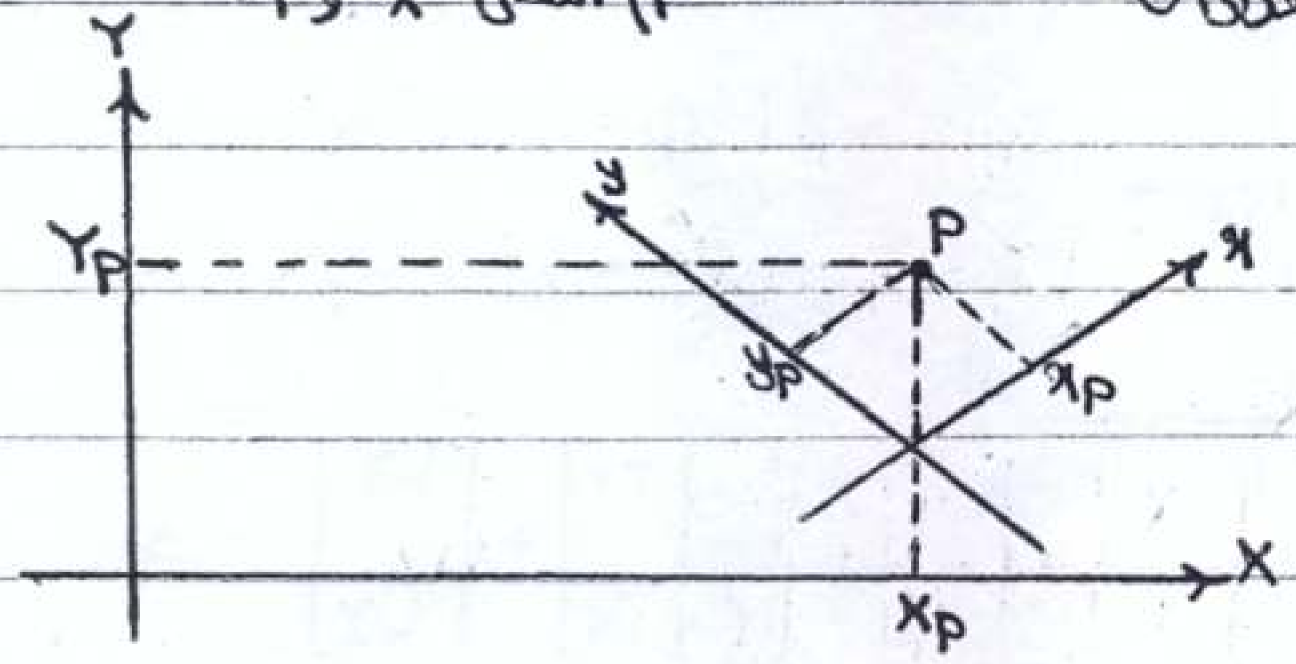
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترانسفورماسیون (به معنی تبدیل) کانفورمال دو بعدی:

2D imensional Conformal Trans formation

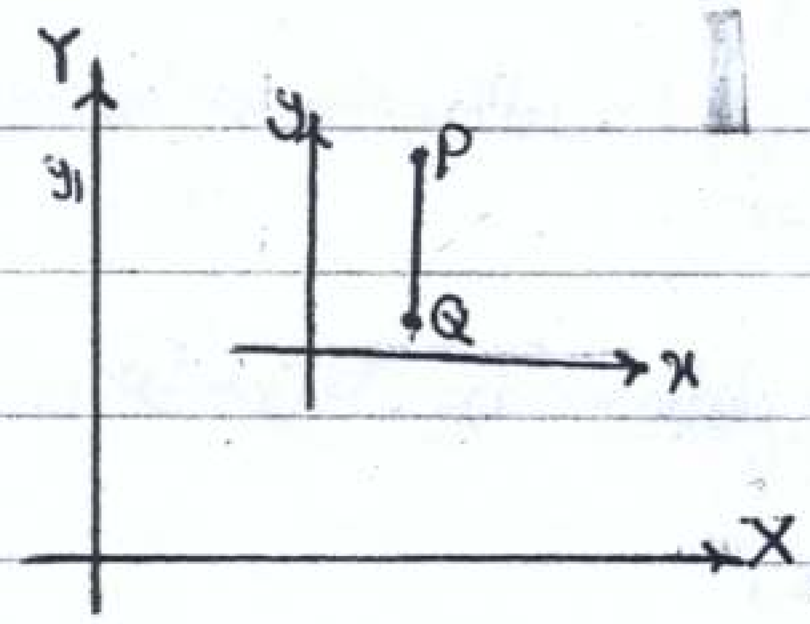
ترانسفورماسیون کانفورمال یعنی شکل حفظ می شود و حفظ شدن شکل به معنی حفظ زوایا می باشد. برای تبدیل بین دو سیستم مختصات با استفاده از کانفورمال ساختش به صورت زیر وجود دارد:

۱) تغییر مقیاس λ ۲) دوران θ ۳) انتقال C_x و C_Y



۱) تغییر مقیاس λ:

فرض می شود فقط تغییر مقیاس داریم:



	x	y	X	Y
P	x_P	y_P	X_P	Y_P
Q	x_Q	y_Q	X_Q	Y_Q

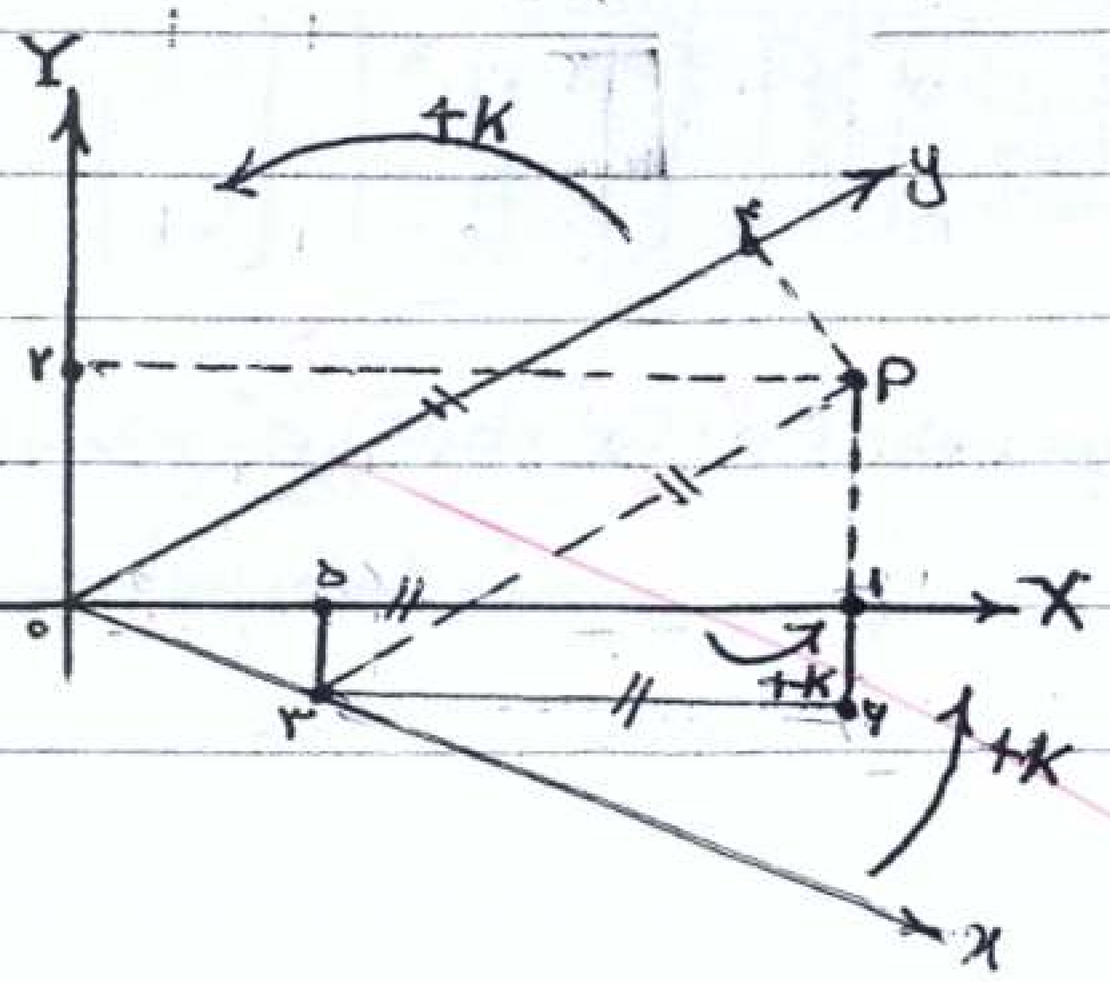
$$\lambda = \frac{\left[(X_P-X_Q)^2+(Y_P-Y_Q)^2\right]^{1/2}}{\left[(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2\right]^{1/2}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{pq}} \rightarrow \overline{PQ} = \lambda\,\overline{pq} \rightarrow$$

در سیستم ((XY)) ، در سیستم ((xy))

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

۲) دوران θ:

فرض می شود فقط دوران داریم:



$\overline{۳۶} = \overline{۵۱}$

$\overline{۳۶} = \overline{۴۱} = \overline{53}$

$\overline{P۲} = \overline{۰۴}$

$$\overline{o1}=\overline{ob}+\overline{b1} \Rightarrow \overline{o1}=\overline{o3}\cos k+\overline{o4}\sin k$$

$$X_p = x_p\cos k + y_p \sin k$$

$$\overline{o2}=\overline{p4}-\overline{14}=\overline{o4}\cos k-\overline{o3}\sin k$$

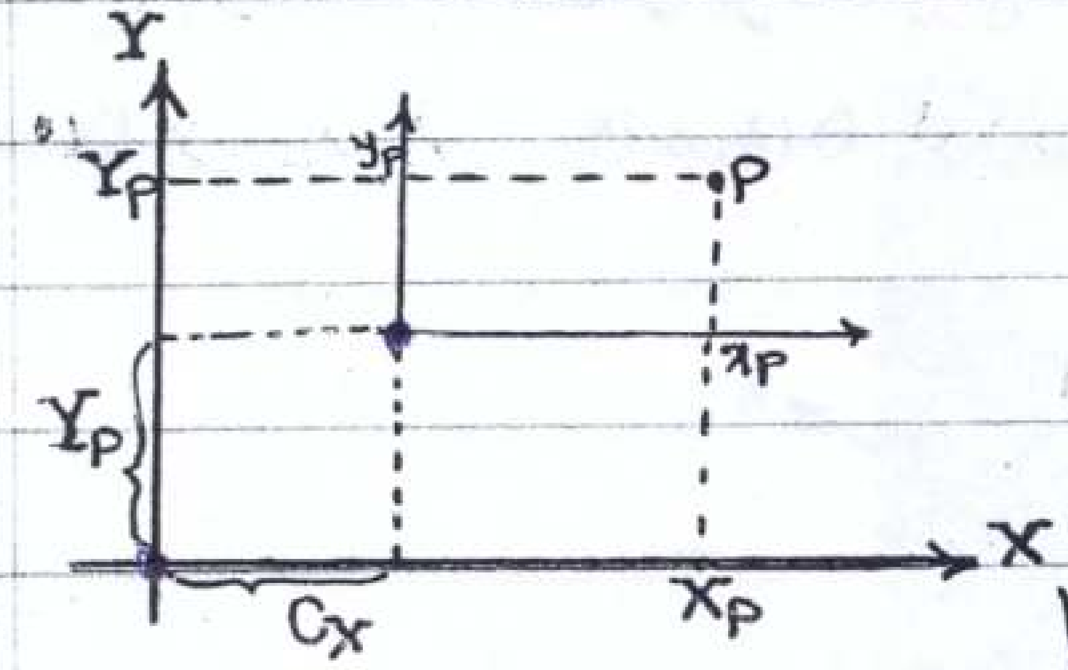
$$Y_p = y_p\cos k - x_p \sin k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_p = x_p\cos k + y_p\sin k \\ Y_p = -x_p\sin k + y_p\cos k \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

۳) انتقال C_X، C_Y:

فرض می‌شود فقط انتقال داریم:



$$\begin{cases} X_p = x_2p + C_X \\ Y_p = y_2p + C_Y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$①,②,③ \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \end{bmatrix}$$

معادله ترانسفورماسیون کانفورمال دو بعدی

تعیین پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال دو بعدی:

$$* \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \end{bmatrix}$$

پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال دو بعدی: λ، θ، C_X، C_Y

$$\begin{cases} X = \lambda\cos\theta\, x + \lambda\sin\theta\, y + C_X \\ Y = -\lambda\sin\theta\, x + \lambda\cos\theta\, y + C_Y \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌دهیم}]{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} a = \lambda\cos\theta \\ b = \lambda\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = ax + by + C_X \\ Y = -bx + ay + C_Y \end{cases} \xrightarrow[\text{ماتریسی}]{\text{بصورت}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \end{bmatrix}$$

بسیار مهم *

پارامترهای مجهول بعد از تغییر متغیر a، b، C_X، C_Y خواهند بود که پس از محاسبه آنها می‌توان θ و λ را بصورت زیر از روی آنها محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \lambda = (a^2+b^2)^{1/2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

اگر نقطه‌ی مشترک در دو سیستم داشته باشیم یعنی:

NO	x	y	X	Y
۱	x_1	y_1	X_1	Y_1
۲	x_2	y_2	X_2	Y_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	X_n	Y_n

اگر ۲≤n باشد آن گاه داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & -x_2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2n\times 4}}_{A\ \text{معلومات}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ C_X \\ C_Y \end{bmatrix}_{4\times 1}}_{x\ \text{مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{2n\times 1}}_{L\ \text{بردار مشاهدات}} \quad *$$

$$\begin{cases} X = ax + by + C_X \\ Y = -bx + ay + C_Y \end{cases}$$

$$A.x = L$$

$$W \equiv I \ , \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } A^T]{\text{طرفین را در}} \underbrace{A^T A}_{N} . X = \underbrace{A^T L}_{Q} \Rightarrow N.X = Q \Rightarrow \boxed{X = N^{-1} Q} \ *$$

* چون مشاهدات مستقل از یکدیگر بوده درنتیجه ماتریس وزن (W) قطری می‌باشد و چون مشاهدات دارای وزن یکسان می‌باشد (بعلت یکسان بودن دستگاه اندازه‌گیری) درنتیجه ماتریس وزن یک ماتریس واحد قطری خواهد بود.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$N = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) & 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) & \sum_{i=1}^{n} y_i & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ & \text{Symmetric (متقارن)} & n & 0 \\ & & & n \end{bmatrix}_{4\times 4} \ * \ ; \quad Q = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i X_i + y_i Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i X_i - x_i Y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{bmatrix} \ *$$

$$X = N^{-1} Q$$

روش ساده‌ی تعیین پارامترهای کانفورمال دوبعدی:

$$\begin{cases}\boxed{\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\\ \bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\end{cases}\xrightarrow[\text{بدهیم}]{\text{تغییر متغیر}}\begin{cases}x'_i=x_i-\bar{x}\\ X'_i=X_i-\bar{X}\end{cases}$$

برای y هم به همین صورت؛

No	x'	y'	X'	Y'
1	x'_1	y'_1	X'_1	Y'_1
2	x'_2	y'_2	X'_2	Y'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x'_n	y'_n	X'_n	Y'_n

در روش ساده تعیین پارامترها ابتدا برای xها و yهای سیستم اول و سپس Xها و Yهای سیستم دوم میانگین‌ها را حساب می‌کنیم و از کلیه‌ی اطلاعات میانگین مربوط به هر کدام را کم می‌کنیم و نتیجه را با x'، y'، X' و Y' مشخص می‌کنیم. حال بردار N و Q را برای این داده‌ها محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}x'_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-\overset{(n\bar{x})\,\bar{x}\,\text{در}\,n}{\sum_{i=1}^{n}\bar{x}}=n\times\overset{\bar{x}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}-n\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

$$N=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i) & & 0 & 0\\ & \sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i) & 0 & 0\\ & & n & 0\\ & & & n\end{bmatrix};\quad Q=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(x'_iX'_i+y'_iY'_i)\\ \sum_{i=1}^{n}(y'_iX'_i-x'_iY'_i)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i) & 0 & 0 & 0\\ & \sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i) & 0 & 0\\ & & n & 0\\ & & & n\end{bmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{bmatrix}a\\ b\\ C_X\\ C_Y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}\sum(x'_iX'_i+y'_iY'_i)\\ \sum(y'_iX'_i-x'_iY'_i)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{Q}$$

بدست آوردن a و b:

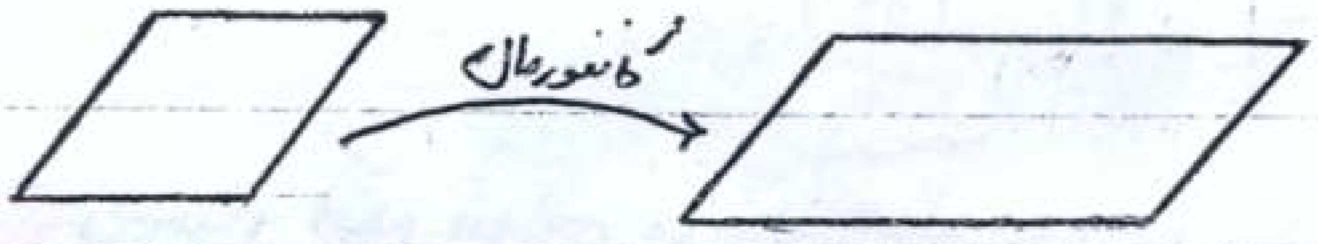
$$a=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x'_iX'_i+y'_iY'_i)\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i)\right]}\quad;\quad b=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(y'_iX'_i+x'_iY'_i)\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x'^2_i+y'^2_i)\right]}$$

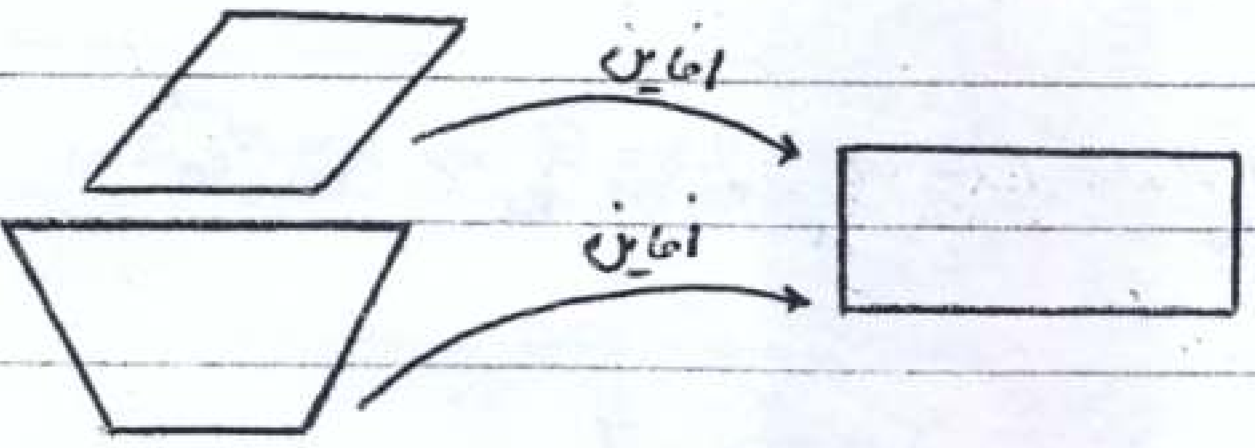
بدست آوردن Cx و Cy:

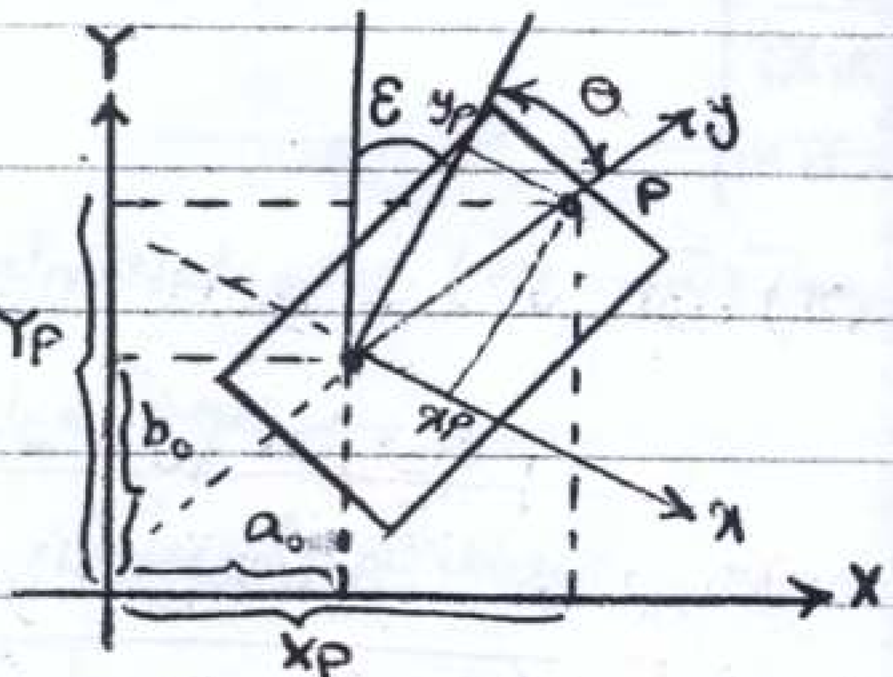
$$\begin{aligned}X&=ax+by+C_X\\ Y&=-bx+ay+C_Y\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}C_X=\bar{X}-a\bar{x}-b\bar{y}\\ C_Y=\bar{Y}+b\bar{x}-a\bar{y}\end{cases}$$

ترانسفورماسیون افاین دوبعدی: 2D Affine Transformation

ترانسفورماسیون کانفورمال دوبعدی دارای این عیب است که در صورت داشتن خطای تیلت یا تغییر شکل در عکس، این خطا را منتقل می‌کند ولی در ترانسفورماسیون افاین تضمینی برای حفظ زوایا و شکل وجود ندارد پس می‌توان با استفاده از آن خطای تیلت و تغییر شکل را حذف کرد تا به سیستم جدید منتقل نشود.







ε: انحراف از قائم محورهای کمپراتور

θ: زاویه دوران

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 X + a_2 Y \\ y = b_0 + b_1 X + b_2 Y \end{cases}$$

۶ پارامتر

معادلات افاین دوبعدی دارای ۶ پارامتر است که دو پارامتر نسبت به کانفورمال اضافه‌تر دارد، یکی مربوط به حذف خطای عمود نبودن محورهای دستگاه و دومی مربوط به مختلف بودن ضریب تغییر مقیاس در دو راستای X و Y می‌باشد. برای استفاده صحیح از معادلات افاین دوبعدی به دو نکته‌ی زیر توجه شود:

۱- ابتدا با استفاده از نقاط مشترک در دو سیستم (۴ فیدوشل مارک گوشه‌ای) پارامترهای ترانسفورماسیون را بدست آورید. ($b_0, b_1, b_2, a_0, a_1, a_2$).

۲- با استفاده از معادلات مربوطه و معلوم بودن پارامترها می‌توان برای هر نقطه‌ی دلخواه مانند P مختصات دستگاهی (کمپراتور) را در سمت راست معادله قرار داده و در سمت چپ مختصات عکسی آن را بدست آورد. با استفاده از این معادلات میزان جابجایی در مرکز سیستم‌های مختصات عکسی و کمپراتور دقیقاً در نظر گرفته شده و اعمال می‌شود همچنین میزان دوران دو سیستم مختصات عکسی و کمپراتور نسبت به هم در نظر گرفته شده و اعمال می‌شود همچنین میزان عمود نبودن (عدم تعامد) محورهای کمپراتور بر یکدیگر (ε) در نظر گرفته شده و تصحیح می‌گردد و باعث می‌شود که این عدم تعامد سیستم مختصات کمپراتور به محورهای سیستم مختصات عکسی تحمیل نشود.

بدست آوردن پارامترهای معادلات افاین دو بعدی:

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 X + a_2 Y \\ y = b_0 + b_1 X + b_2 Y \end{cases}$$

تعداد معادلات = دو معادله برای هر نقطه = $2n$

تعداد مجهولات = ۶

$n=4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \\ 1 & X_4 & Y_4 \end{bmatrix}_{4\times3}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{3\times1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{L}$$

در اصل ۳ نقطه لازم است ولی برای اینکه بتوانیم سرشکنی انجام دهیم چهار نقطه در نظر می‌گیریم.

$$A.x = L$$

$$W = I \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{A^T \text{ را در طرفین}} \underbrace{A^T A}_{N}.X = \underbrace{A^T L}_{Q} \Rightarrow N_{3\times3}.X_{3\times1} = Q_{3\times1} \Rightarrow X_{3\times1} = N^{-1}_{3\times3} Q_{3\times1}$$

برای $n \geq 3$:

$$N = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i & \Sigma Y_i \\ & \Sigma X_i^2 & \Sigma X_i Y_i \\ & & \Sigma Y_i^2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} \Sigma x_i \\ \Sigma x_i X_i \\ \Sigma Y_i x_i \end{bmatrix}$$

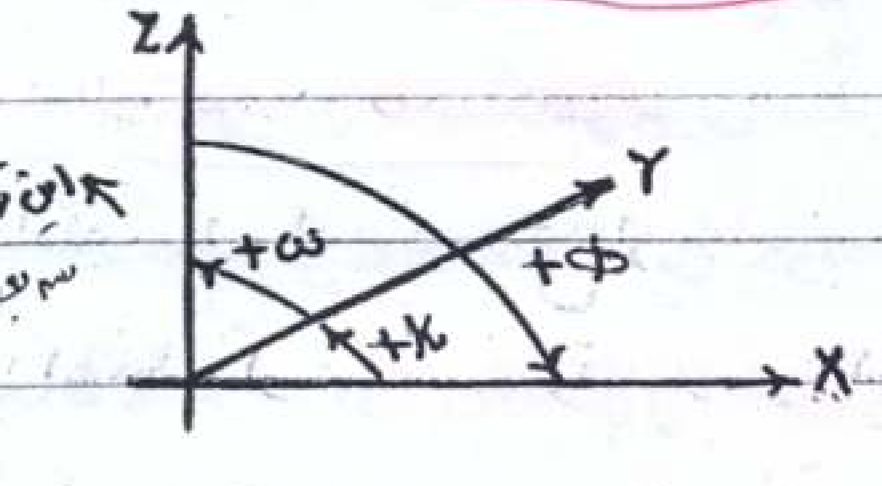
در بالا پارامترهای معادله‌ی اول (x) بدست آمد به طور مشابه همین مراحل را نیز برای معادله‌ی دوم (y) تکرار می‌کنیم.

* ترانسفورماسیون کانفرمال سه بعدی:

۱- ضریب تغییر مقیاس،

۲- سه دوران حول سه محور مختصات (ω, ϕ, κ).

۳- سه انتقال در راستای سه محور مختصات (C_x, C_y, C_z).

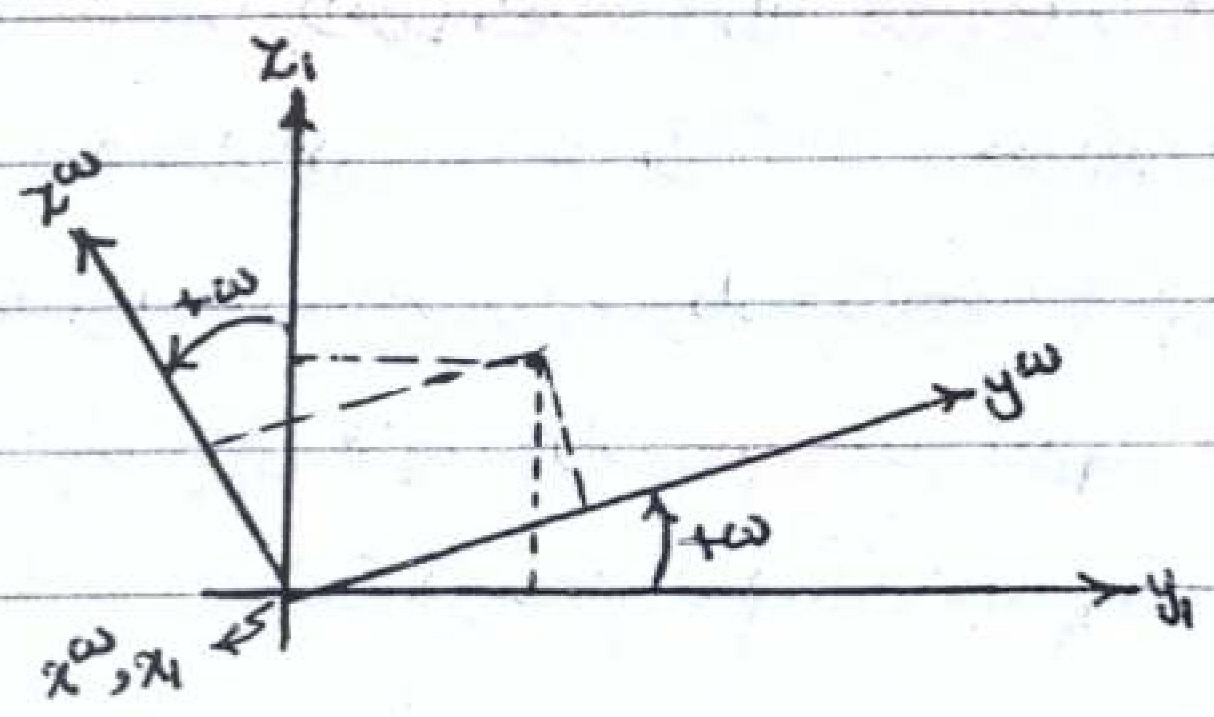


۱- ضریب تغییر مقیاس:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1)$$

۲- سه دوران حول سه محور مختصات (ω, ϕ, κ):

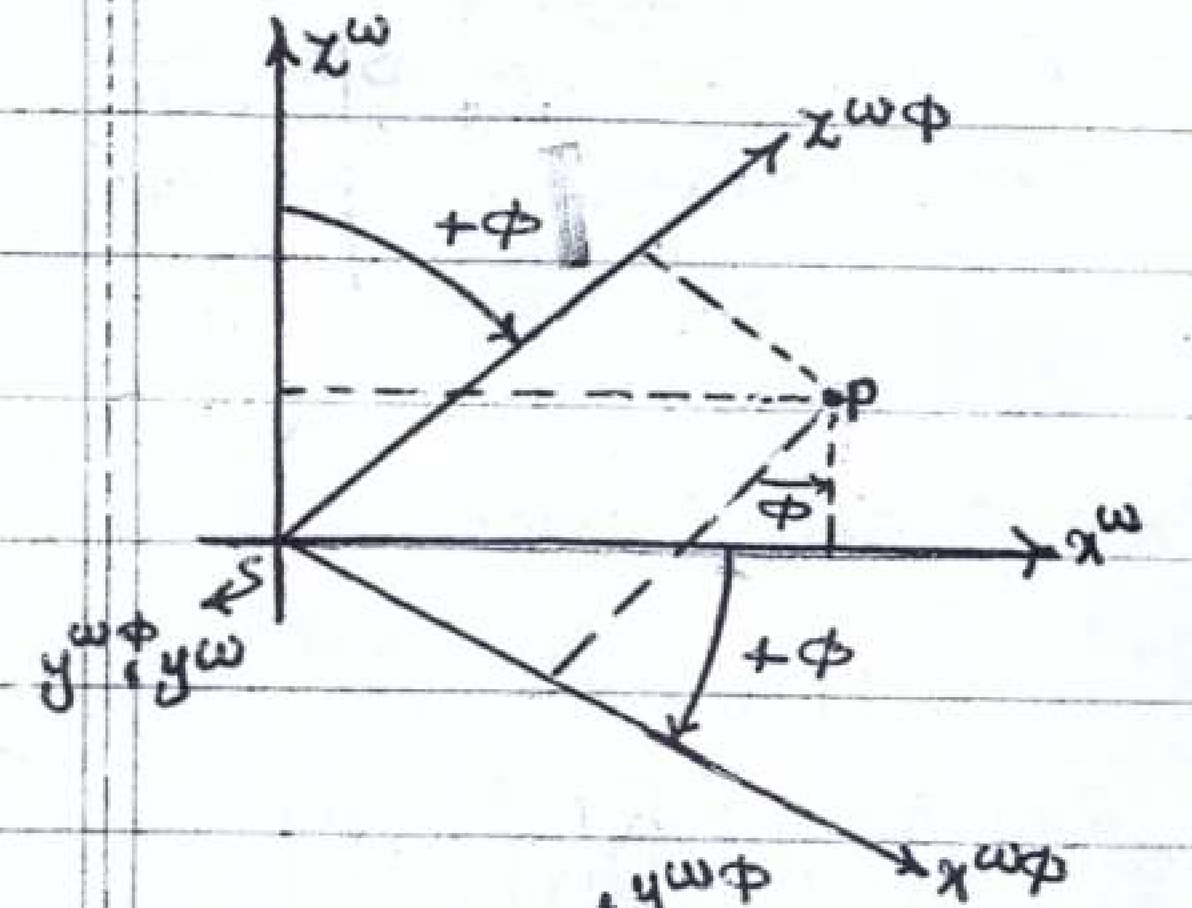
۲-۱- دوران ω:



$$\begin{cases} x^{\omega} = x_1 \\ y^{\omega} = y_1 \cos\omega + z_1 \sin\omega \\ z^{\omega} = -y_1 \sin\omega + z_1 \cos\omega \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

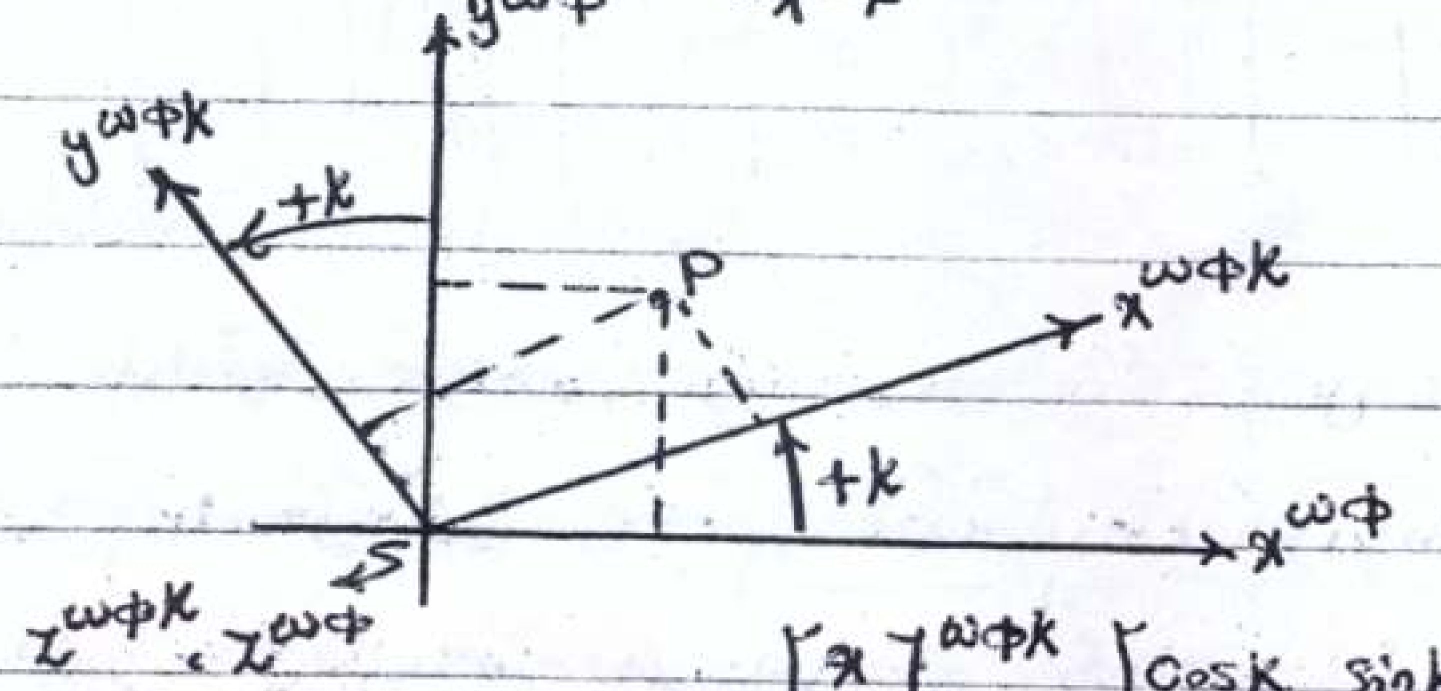
۲-۲- دوران ϕ:



$$\begin{cases} x^{\omega\phi} = x^{\omega} \cos\phi - z^{\omega} \sin\phi \\ y^{\omega\phi} = y^{\omega} \\ z^{\omega\phi} = x^{\omega} \sin\phi + z^{\omega} \cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega} \qquad (۳)$$

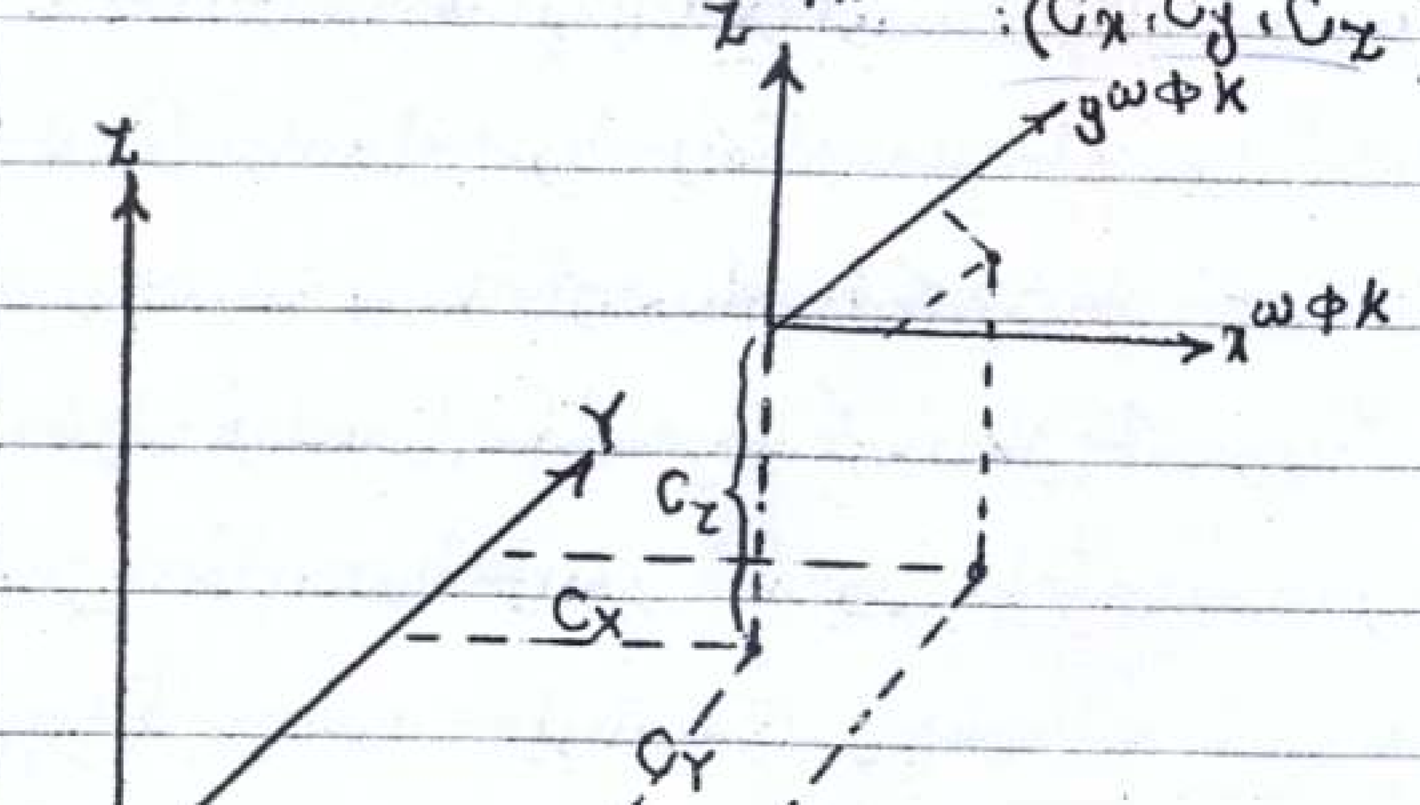
۲-۳- دوران k:



$$\begin{cases} x^{\omega\phi k} = x^{\omega\phi} \cos k + y^{\omega\phi} \sin k \\ y^{\omega\phi k} = -x^{\omega\phi} \sin k + y^{\omega\phi} \sin k \\ z^{\omega\phi k} = z^{\omega\phi} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega\phi k} = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega\phi} \qquad (۴)$$

۳- سه انتقال در راستای محور مختصات (C_x, C_y, C_z):



$$\begin{cases} X = x^{\omega\phi k} + C_X \\ Y = y^{\omega\phi k} + C_Y \\ Z = z^{\omega\phi k} + C_Z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\omega\phi k} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

از روابط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ داریم:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^k \text{ که دوران}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}}_{R^{\phi} \text{ که دوران}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}}_{R^{\omega} \text{ که دوران}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix}$$

$$M = R^{k} \cdot R^{\phi} \cdot R^{\omega}$$

اسم این سه ماتریس را در یکدیگر ماتریس M می‌نامند.

از صفحه قبل

$$M=\begin{bmatrix}\cos K\cos\phi & \sin K & -\cos K\sin\phi\\ -\sin K\cos\phi & \cos K & \sin K\sin\phi\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix}\cdot R^{\omega}$$

سطر اول در ستون اول

$$M=\begin{bmatrix}\overbrace{\cos K\cos\phi}^{m_{11}} & \overbrace{\sin K\cos\omega+\cos K\sin\phi\sin\omega}^{m_{12}} & \overbrace{\sin K\sin\omega-\cos K\sin\phi\cos\omega}^{m_{13}}\\ \overset{m_{21}}{-\sin K\cos\phi} & \underbrace{\cos K\cos\omega-\sin K\sin\phi\sin\omega}_{m_{22}} & \overset{m_{23}}{\cos K\sin\omega+\sin K\sin\phi\cos\omega}\\ \underbrace{\sin\phi}_{m_{31}} & \underbrace{-\cos\phi\cdot\sin\omega}_{m_{32}} & \underbrace{\cos\phi\cos\omega}_{m_{33}}\end{bmatrix}$$

*

$M_1=R^{K}\cdot R^{\phi}\cdot R^{\omega}$ $\qquad M_2=R^{\phi}\cdot R^{\omega}\cdot R^{K}$ $\qquad M_5=R^{\omega}\cdot R^{K}\cdot R^{\phi}$

$M_3=R^{\phi}\cdot R^{K}\cdot R^{\omega}$ $\qquad M_4=R^{\omega}\cdot R^{\phi}\cdot R^{K}$ $\qquad M_6=R^{K}\cdot R^{\omega}\cdot R^{\phi}$

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\lambda M\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_X\\C_Y\\C_Z\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_X\\C_Y\\C_Z\end{bmatrix}$$

بدست آوردن پارامترهای کانفورمال سه بعدی:

به منظور تعیین پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی از نقاط مشترک در دو سیستم استفاده می کنیم برای هر نقطه ی مشترک در دو سیستم (نقطه کنترل) سه معادله می توان نوشت بنابراین برای حل هفت پارامتر حداقل نیاز به سه نقطه ی مشترک در دو سیستم می باشد (غیر واقع بر روی یک خط) تا بتوانیم پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی را تعیین نمائیم. البته در عمل همیشه تعداد نقاط مشترک بیش از تعداد حداقل در نظر گرفته می شود. برای تعیین این پارامترها می توان به دو روش عمل کنیم:

۱- روش یکجا حل پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی ($M7$).

۲- روش دو بخشی حل پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی ($M4\ M3$).

۱- روش یکجا حل پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی ($M7$):

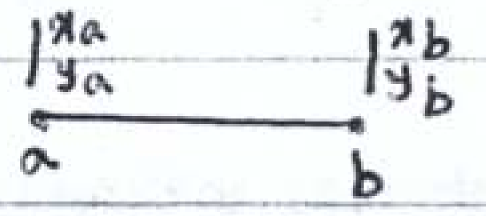
با توجه به معادلات ترانسفورماسیون و درایه های ماتریس دوران (M) ملاحظه می شود که این معادلات غیرخطی می باشند بنابراین برای تعیین پارامترهای مجهول باید مقدار تقریبی آنها را بدست آوریم و با استفاده از سری تیلور، تصحیحات مربوط به این مقادیر تقریبی را تعیین کرده، اعمال کنیم و با استفاده از تکرار تصحیحات جدید را بدست آوریم تا به مقدار واقعی پارامترها در حد دقت مورد نظر نزدیک شویم.

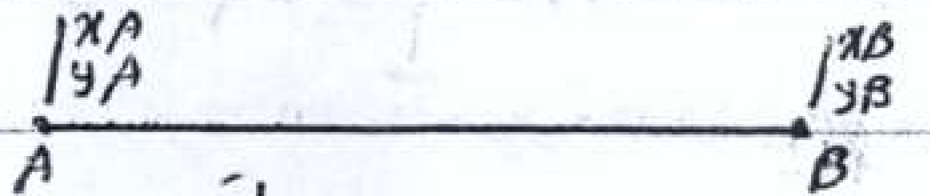
در حل یکجا (هفت تا پارامتر باهم) پارامترها، معادلات را طوری بازنویسی می کنیم که هفت پارامتر ترانسفورماسیون در بردار مجهولات ما قرار گیرند همچنین از تقریب های اولیه استفاده کرده تا حالت غیرخطی ماتریس دوران را با تقریب مطلوب به حالت خطی تبدیل کنیم

برای ایجاد یک تقریب صحیح ومطلوب و معقول باید به دو پارامتر تغییر مقیاس (λ) و دوران حول محور zها (κ) توجه کافی داشت. زیرا در عمل این پارامترها می توانند مقادیر بحرانی داشته باشند با توجه به اینکه معمولاً مقیاس عکسهای هوائی و مدل ایجاد شده معمولاً بصورت یک چند هزارم در نظر گرفته می شود بنابراین ضریب تغییر مقیاس از مدل یا عکس به زمین چند هزار خواهد بود.

برای حل این مشکل با استفاده از یک طول مشترک در دو سیستم مقدار تقریبی λ را بدست می آوریم و تمام مختصات های سیستم دوم را در آن ضرب می کنیم تا با تقریب خوبی با سیستم مختصات اول هم مقیاس شوند.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$





$$\lambda_0 = \frac{[\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2]^{1/2}}{[\Delta x_{ab}^2 + \Delta y_{ab}^2]^{1/2}} \qquad \underset{\text{واقعی}}{\lambda} = \underset{\text{تقریبی}}{\lambda_0} + \Delta\lambda \longrightarrow \text{تصحیح در روند سرشکنی}$$

$$if: \quad \lambda_0 = 1 \Rightarrow \lambda = (1 + \Delta\lambda)$$

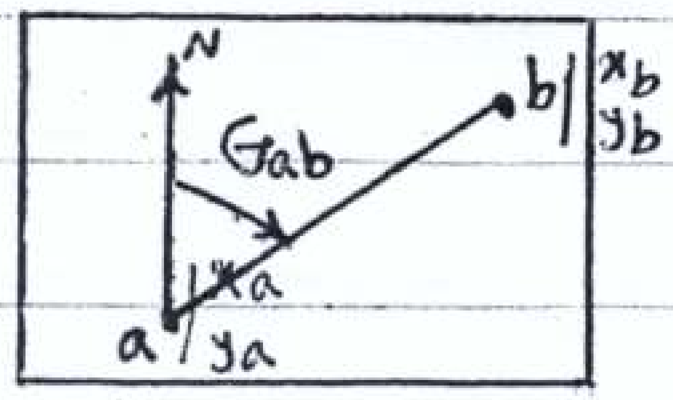
همچنین دوران κ معمولاً زاویه ای بین محورهای x دو سیستم مختصات زمینی و عکسی (همان خط پرواز است) در نظر گرفته می شود و ممکن است مقدار خیلی زیادی حتی ۹۰ هم داشته باشد در چنین حالتی نمی توان به تقریب $\sin\kappa$ را برابر κ برحسب رادیان در نظر گرفت.

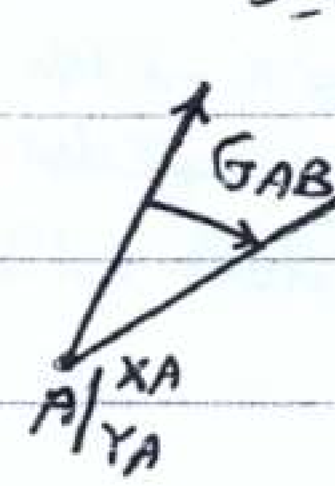
$$\sin\kappa \not\doteq \kappa^{rad}$$

و همچنین $\cos\kappa$ را نمی توان به تقریب ۱ در نظر گرفت.

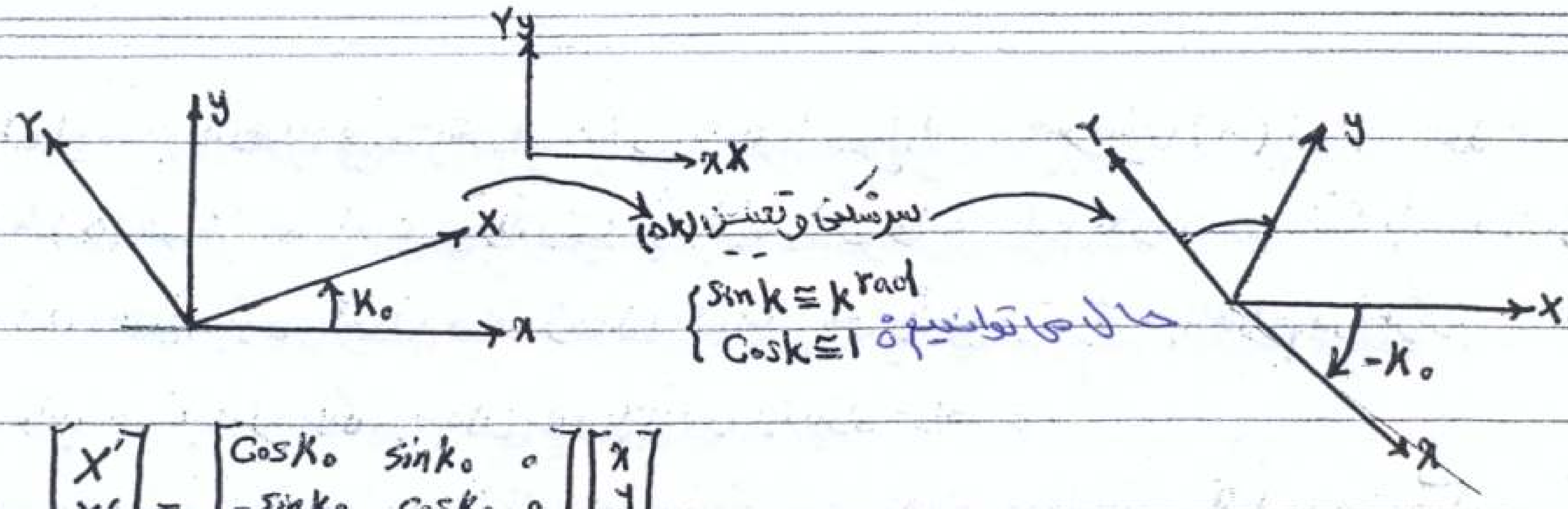
$$if \quad \kappa \ll 9^\circ \begin{cases} \sin\kappa \doteq \kappa^{rad} \\ \cos\kappa \doteq 1 \end{cases}$$

بنابراین برای حل این مشکل با تعیین ژیزمان یک امتداد مشترک در دو سیستم می توان مقدار تقریبی κ را بدست آورد (κ_0) و دو سیستم را موقتاً به اندازه ی κ_0 دوران داده تا محورهای x دو سیستم با تقریب خوبی بر یکدیگر منطبق شوند سپس عمل سرشکنی و تکرار را انجام می دهیم و مقدار تصحیح این مقدار اولیه ($\Delta\kappa$) همراه با سایر پارامترها تعیین می کنیم و سپس در نهایت دوباره به اندازه ی ($-\kappa_0$) دو سیستم را دوران می دهیم تا در حالت واقعی خود قرار گیرند.





$$\kappa_0 = G_{AB} - G_{ab}$$



$$\begin{cases} \sin k \cong k^{rad} \\ \cos k \cong 1 \end{cases}$$ حالا می توانیم

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos K_0 & \sin K_0 & 0 \\ -\sin K_0 & \cos K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{K_0}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

قبل از سرشکنی مقدار فوق را R^{K_0} را انجام می دهیم تا میزان اختلاف بین محور Xهای دو سیستم (مقدار K) کوچک شود و از تقریب بتوان استفاده کرد سپس به صورت معادله‌ی زیر دورانی در جهت مخالف K_0 و با اندازه‌ی K_0 اعمال می کنیم تا به حالت اولیه خود باز گردیم.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos K_0 & -\sin K_0 & 0 \\ \sin K_0 & \cos K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R(-K_0)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

با توجه به موارد بالا ماتریس M با تقریب به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda = 1 + d\lambda$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + d\omega \\ \phi = \phi_0 + d\phi \\ k = k_0 + dk \\ C_X = C_{X_0} + dC_X \\ C_Y = C_{Y_0} + dC_Y \\ C_Z = C_{Z_0} + dC_Z \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & dk & -d\phi \\ -dk & 1 & -d\omega \\ d\phi & -d\omega & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (1+d\lambda) \begin{bmatrix} 1 & dk & -d\phi \\ -dk & 1 & -d\omega \\ d\phi & -d\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dC_X \\ dC_Y \\ dC_Z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+d\lambda) & dk & -d\phi \\ -dk & (1+d\lambda) & d\omega \\ d\phi & -d\omega & (1+d\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dC_X \\ dC_Y \\ dC_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = x + x\,d\lambda + y\,dk - z\,d\phi \\ Y = -x\,dk + y + y\,d\lambda + z\,d\omega \\ Z = x\,d\phi - y\,d\omega + z + z\,d\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{X - x}_{DX} = x\,d\lambda + y\,dk - z\,d\phi \\ \underbrace{Y - y}_{DY} = -x\,dk + y\,d\lambda + z\,d\omega \\ \underbrace{Z - z}_{DZ} = x\,d\phi - y\,d\omega + z\,d\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} DX = x\,d\lambda + y\,dk - z\,d\phi + dC_X \\ DY = -x\,dk + y\,d\lambda + z\,d\omega + dC_Y \\ DZ = x\,d\phi - y\,d\omega + z\,d\lambda + dC_Z \end{cases}$$

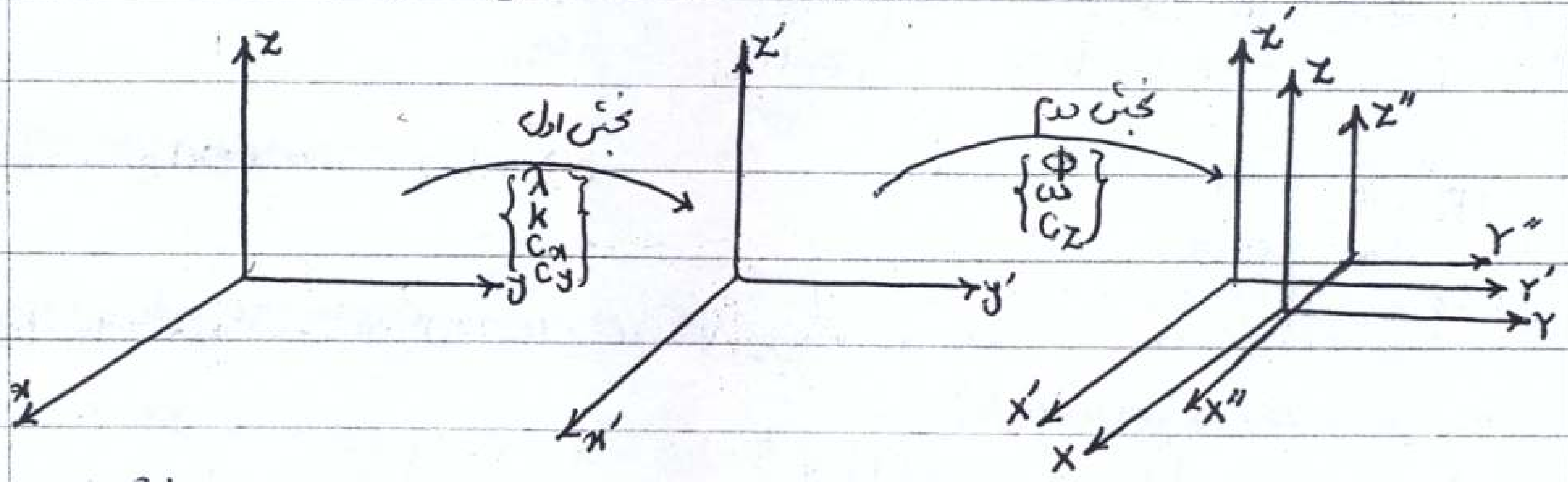
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 0 & -z_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & z_1 & 0 & -x_1 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & -y_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & -z_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ z_n & -y_n & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3n\times 7}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} d\lambda \\ d\omega \\ d\phi \\ dk \\ dc_X \\ dc_Y \\ dc_Z \end{bmatrix}_{7\times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta Y_2 \\ \vdots \\ \Delta Z_n \end{bmatrix}_{3n\times 1}}_{L}$$

این معادلات برای n تا نقطه ی مشترک تکرار می‌شود.

$$\begin{cases} A\cdot X = L \\ W = I \end{cases} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A^T} \underbrace{A^T\cdot A}_{N}\cdot x = \underbrace{A^T\cdot L}_{Q} \Rightarrow N\cdot x = Q \Rightarrow x = N^{-1}Q$$

۲- روش دو بخشی حل پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی (MAM3):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix}$$



بخش اول:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ \cancel{C_Z}\ 0 \end{bmatrix} \quad (1) \xrightarrow[\text{MAM3}]{\text{مجهولات}} \begin{Bmatrix} \lambda \\ k \\ C_X \\ C_Y \end{Bmatrix}$$

بخش دوم:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_Z \end{bmatrix} \quad (2) \xrightarrow{\text{مجهولات}} \begin{Bmatrix} \phi \\ \omega \\ C_Z \end{Bmatrix}$$

برای تعیین پارامترهای ترانسفورماسیون کانفورمال سه بعدی با روش دو بخشی همانطور که در بالا دیده شد معادلات را به دو بخش تقسیم می‌کنیم بخش اول شامل ۴ پارامتر مجهول (λ، k، C_X، C_Y) و بخش دوم شامل ۳ پارامتر مجهول (ϕ، ω، C_Z) می‌باشد. برای بدست آوردن پارامترها در بخش اول به صورت زیر عمل می‌کنیم. معادلات با تغییر متغیری به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{cases} \lambda\cos k = a \\ \lambda\sin k = b \end{cases} \quad , \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} & (1) \\ [z'] = \lambda\, [z] & (2) \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود بخش اول معادلات به دو معادله خطی تبدیل شده که یکی معادلات کانفورمال دو بعدی و دیگری یک معادله خطی برحسب z است (درجه یک) که هیچ کدام نیاز به مقادیر اولیه تقریبی ندارد. پس از حل بخش اول معادلات باید تمام نقاط در این معادله قرار گیرند و x' ، y' و z'ها بدست آیند.

برای حل بخش دوم معادلات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\omega & -\sin\phi\cos\omega \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin\phi \simeq \phi\,\text{rad} \\ \sin\omega \simeq \omega\,\text{rad} \\ \cos\phi \simeq \cos\omega \simeq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_i = \phi_{i-1} + d\phi_i \\ \omega_i = \omega_{i-1} + d\omega_i \\ C_{z_i} = C_{z_{i-1}} + dC_{z_i} \end{cases}$$

برای مقادیر اولیه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi_0 \simeq 0 \\ \omega_0 \simeq 0 \\ C_{z_0} \simeq 0 \end{cases}$$

با توجه به تقریبات و مقادیر اولیه معادلات به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\sin\phi\,\sin\omega \simeq d\phi_0\, d\omega_0 \simeq 0$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\phi \\ 0 & 1 & d\omega \\ d\phi & -d\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dC_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = x' - z'\cdot d\phi \\ Y = y' + z'\cdot d\omega \\ Z = x'\cdot d\phi - y'\cdot d\omega + z' + dC_z \end{cases}$$

با توجه به تغییر متغیر زیر داریم:

$$\begin{cases} \Delta X = x - x' \\ \Delta Y = y - y' \\ \Delta Z = z - z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X = -z'\cdot d\phi \\ \Delta Y = +z'\cdot d\omega \\ \Delta Z = x'\cdot d\phi - y'\cdot d\omega + dC_z \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -z'_1 & 0 & 0 \\ 0 & +z'_1 & 0 \\ x'_1 & -y'_1 & 1 \\ -z'_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & +z'_n & 0 \\ x'_n & -y'_n & 1 \end{bmatrix}_{3n\times 3}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d\phi \\ d\omega \\ dC_z \end{bmatrix}_{3\times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta Y_2 \\ \vdots \\ \Delta X_n \\ \Delta Y_n \\ \Delta Z_n \end{bmatrix}_{3n\times 1}}_{L}$$

$$\begin{cases} A_{3n\times 3}\cdot X_{3\times 1}=L_{3n\times 1} \\ W\equiv I \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A^T.A}_{N}.X=\underbrace{A^T L}_{\Phi} \Rightarrow NX=\Phi \Rightarrow X=N^{-1}\Phi$$

$$N=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+z_i'^2) & -\sum_{i=1}^{n}(x_i'-y_i') & \sum_{i=1}^{n}x_i' \\ & \sum_{i=1}^{n}(y_i'^2+z_i'^2) & -\sum_{i=1}^{n}y_i' \\ \text{Symmetric} & & n \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad \Phi=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i'.\Delta z-z_i'.\Delta x) \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i'.\Delta y-y_i'.\Delta z) \\ \sum_{i=1}^{n}\Delta z_i \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

معادلات شرط هم خطی:

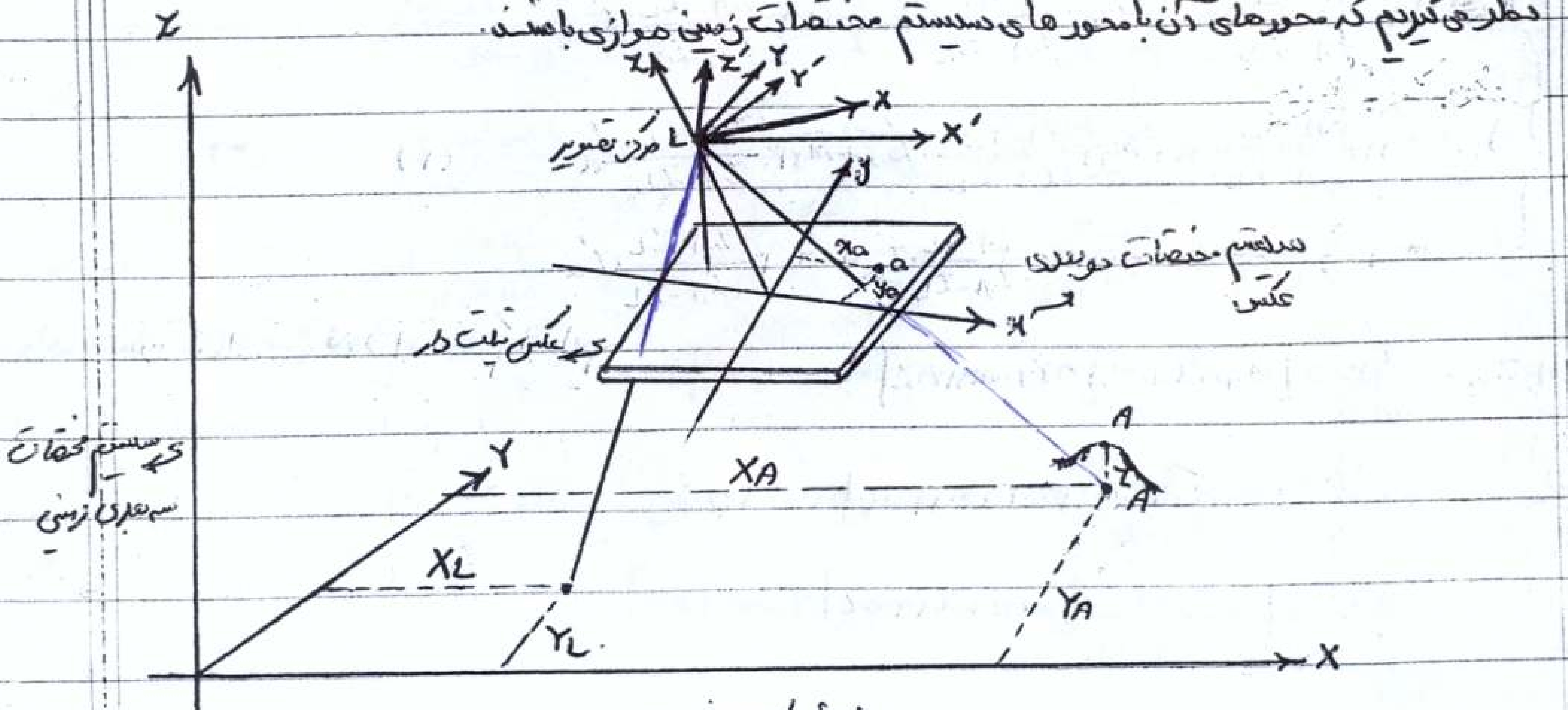
همانطور که در شکل زیر دیده می‌شود شرط هم خطی بیان می‌دارد که هر نقطه‌ی دلخواه زمینی مانند A و تصویرش روی عکس هوایی (a) و مرکز عکسبرداری تصویر (L) همواره بر روی یک خط قرار دارند. با استفاده از این اصل هم می‌توان ارتباطی منطقی بین سیستم مختصات دوبعدی عکس تیلت دار و سیستم مختصات سه بعدی زمینی برقرار نمود.

برای نوشتن معادلات یک سیستم مختصات سه بعدی در نظر می‌گیریم که مرکز آن در مرکز تصویر (L) و محور xها و yهای آن موازی با سیستم مختصات عکس تیلت دار و محور z آن بر صفحه‌ی عکس تیلت دار عمود می‌باشد و چنانچه این سیستم هم مقیاس با سیستم مختصات دوبعدی عکس در نظر گرفته شود z تمام نقاط عکس تیلت دار به صورت زیر خواهد بود:

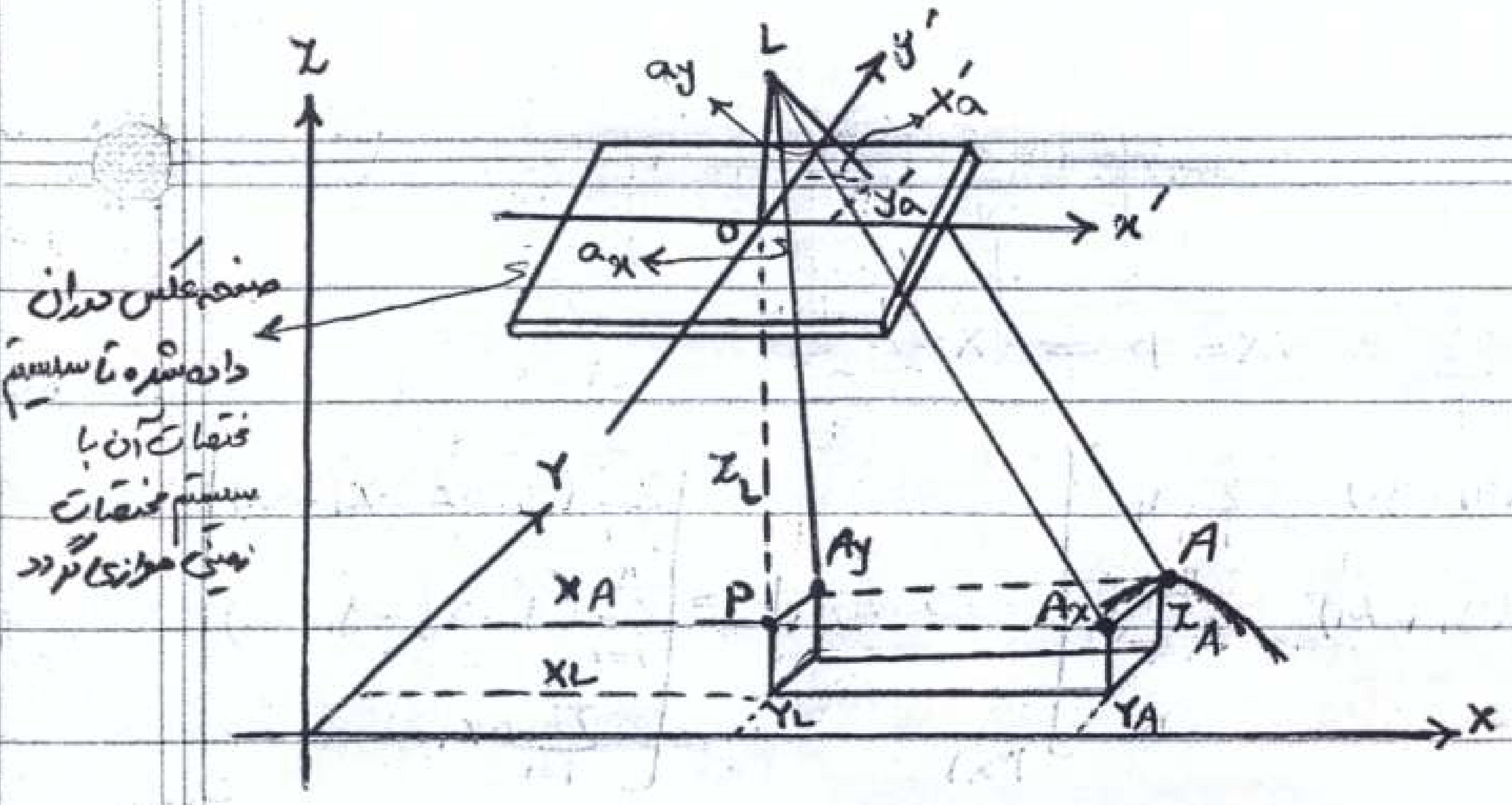
فاصله کانونی

$$z=-f$$

علاوه بر سیستم مختصات ذکر شده، سیستم مختصات دیگری نیز با محورهای x'، y' و z' در نقطه‌ی L در نظر می‌گیریم که محورهای آن با محورهای سیستم مختصات زمینی موازی باشند.



(شرط هم خطی)



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = m_{11} x' + m_{12} y' + m_{13} z' \\ Y = m_{21} x' + m_{22} y' + m_{23} z' \\ Z = m_{31} x' + m_{32} y' + m_{33} z' \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} \triangle L o a_x \sim \triangle L P A_x \\ \triangle L o a_y \sim \triangle L P A_y \end{cases} \Rightarrow \frac{x'_a}{X_A - X_L} = \frac{y'_a}{Y_A - Y_L} = - \frac{z'_a}{Z_L - Z_A}$$

متشابه

!?

$$\begin{cases} x'_a = \dfrac{X_A - X_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a \\ y'_a = \dfrac{Y_A - Y_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a \\ z'_a = \dfrac{Z_A - Z_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a \end{cases} \qquad (۲)$$

رابطه (۲) را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_a = m_{11} \dfrac{X_A - X_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{12} \dfrac{Y_A - Y_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{13} \dfrac{Z_A - Z_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a \\ y_a = m_{21} \dfrac{X_A - X_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{22} \dfrac{Y_A - Y_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{23} \dfrac{Z_A - Z_L}{Z_A - Z_L} z'_a \\ z_a = m_{31} \dfrac{X_A - X_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{32} \dfrac{Y_A - Y_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a + m_{33} \dfrac{Z_A - Z_L}{Z_A - Z_L} \cdot z'_a \end{cases} \qquad (۳)$$

طرفین را در معادله (۳) تقسیم کرده‌ایم:

$$\begin{cases} (۱)\ x_a = \dfrac{z'_a}{Z_A - Z_L} \left[m_{11} \Delta X + m_{12} \Delta Y + m_{13} \Delta Z \right] \\ (۲)\ y_a = \dfrac{z'_a}{Z_A - Z_L} \left[m_{21} \Delta X + m_{22} \Delta Y + m_{23} \Delta Z \right] \\ (۳)\ z_a = \dfrac{z'_a}{Z_A - Z_L} \left[m_{31} \Delta X + m_{32} \Delta Y + m_{33} \Delta Z \right] \end{cases} \qquad (۴)$$

معادله (۱) و (۲) را بر سومی (۳) تقسیم می‌کنیم و به جای Z_A' معادل $-f$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_a = -f\,\dfrac{[m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z]}{[m_{31}\Delta X + m_{32}\Delta Y + m_{33}\Delta Z]} \\ y_a = -f\,\dfrac{[m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z]}{[m_{31}\Delta X + m_{32}\Delta Y + m_{33}\Delta Z]} \end{cases} \Leftarrow$$

معادلات شرط هم خطی

خطی کردن معادلات شرط هم خطی:

$$x_a = -f\,\frac{[m_{11}(X_A - X_L) + m_{12}(Y_A - Y_L) + m_{13}(Z_A - Z_L)]}{[m_{31}(X_A - X_L) + m_{32}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)]}$$

$$y_a = -f\,\frac{[m_{21}(\overbrace{X_A - X_L}^{\Delta X}) + m_{22}(\overbrace{Y_A - Y_L}^{\Delta Y}) + m_{23}(\overbrace{Z_A - Z_L}^{\Delta Z})]}{m_{31}(X_A - X_L) + m_{32}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)}$$

$$\begin{cases} q = m_{31}\Delta X + m_{32}\Delta Y + m_{33}\Delta Z \\ r = m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z \\ s = m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z \end{cases}$$

با توجه به تغییر متغیر بالا داریم:

$$\begin{cases} x_a = -f\,\dfrac{r}{q} \Rightarrow x_a \cdot q = -f \cdot r \Rightarrow x_a \cdot q + f \cdot r = 0 = F \\ y_a = -f\,\dfrac{s}{q} \Rightarrow y_a \cdot q = -f \cdot s \Rightarrow y_a \cdot q + f \cdot s = 0 = G \end{cases} \qquad (1)$$

$$F = f(\omega, \phi, \kappa, X_L, Y_L, Z_L, X_A, Y_A, Z_A)$$

$$G = g(\omega, \phi, \kappa, X_L, Y_L, Z_L, X_A, Y_A, Z_A)$$

یادآوری:

$$\text{Taylor}: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \cdot dx_n$$

$$\begin{cases} F \cong 0 \cong F_0 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_a}\right)_0 \cdot dx_a + \left(\dfrac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 \cdot d\omega + \left(\dfrac{\partial F}{\partial \phi}\right)_0 \cdot d\phi + \left(\dfrac{\partial F}{\partial \kappa}\right)_0 \cdot d\kappa + \left(\dfrac{\partial F}{\partial X_L}\right)_0 \cdot dX_L + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y_L}\right)_0 \cdot dY_L \\ \quad + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Z_L}\right)_0 \cdot dZ_L + \left(\dfrac{\partial F}{\partial X_A}\right) \cdot dX_A + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y_A}\right) \cdot dY_A + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Z_A}\right) \cdot dZ_A = 0 \\ G \cong 0 \cong G_0 + \left(\dfrac{\partial G}{\partial y_a}\right)_0 \cdot dy_a + \left(\dfrac{\partial G}{\partial \omega}\right)_0 \cdot d\omega + \left(\dfrac{\partial G}{\partial \phi}\right)_0 \cdot d\phi + \left(\dfrac{\partial G}{\partial \kappa}\right)_0 \cdot d\kappa + \left(\dfrac{\partial G}{\partial X_L}\right)_0 \cdot dX_L + \left(\dfrac{\partial G}{\partial Y_L}\right)_0 \cdot dY_L \\ \quad + \left(\dfrac{\partial G}{\partial Z_L}\right)_0 \cdot dZ_L + \left(\dfrac{\partial G}{\partial X_A}\right)_0 \cdot dX_A + \left(\dfrac{\partial G}{\partial Y_A}\right)_0 \cdot dY_A + \left(\dfrac{\partial G}{\partial Z_A}\right)_0 \cdot dZ_A = 0 \end{cases}$$

چون ما از مقادیر تقریبی استفاده می‌کنیم این ۰ را گذاشتیم.

با توجه به اینکه x_a و y_a مشاهدات ما در فضای تصویر می‌باشد درنتیجه dx_a و dy_a تصحیحات مربوط به مقادیر تقریبی مجهولات نمی‌باشند. بلکه باقی مانده‌ی مشاهدات می‌باشد لذا آنها را به صورت زیر نام گذاری

می کنیم (علامت باقی مانده می تواند مثبت یا منفی باشد (علامت آن اختیاری می باشد)).

$$\begin{cases} dx_a = -V_{x_a} \\ dy_a = -V_{y_a} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_a}\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial y_a}\right) = q$$ در معادلات (۱)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right), \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right), \dots \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \omega}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial \phi}\right), \dots \end{cases}$$ در معادلات (۲)

در معادلات (۲) مشتقات جزئی توابع F و G نسبت به پارامترهای مجهول می باشد که در اینجا بعنوان ضرایب تصحیحات ظاهر شده اند و آن ها را می توانیم بصورت پارامترهای علامت شده ای نشان دهیم همچنین:

$$d\omega, d\phi, dk, \dots, dZ_A$$

تصحیحات به مقادیر تقریبی اولیه می باشند که در سرشکنی مقادیر آنها مشخص می گردد با اضافه کردن این مقادیر به مقادیر تقریبی، مقادیر بهبود یافته تری برای مجهولات بدست می آید که این مقادیر بهبود یافته برای تکرارهای بعدی بعنوان مقادیر تقریبی اولیه به کار می رود و F_0، G_0 نیز مقادیر تابع F و G به ازاء مقادیر تقریبی اولیه برای مجهولات می باشند.

حال در معادلات (۲) به جای $\left(\frac{\partial F}{\partial x_a}\right)$ و $\left(\frac{\partial G}{\partial y_a}\right)$ مقادیر آن یعنی q را قرار می دهیم و به جای dx_a و dy_a به ترتیب $-V_{x_a}$ و $-V_{y_a}$ قرار می دهیم و جملات مربوط به آن ها را به سمت دیگر معادله می بریم و در نهایت دو طرف معادله را به q تقسیم می کنیم آن گاه داریم:

معادلات شرط خطی شده

$$\begin{cases} V_{x_a} = b_{11}d\omega + b_{12}d\phi + b_{13}dk - b_{14}dX_L - b_{15}dY_L - b_{16}dZ_L + b_{14}dX_A + b_{15}dY_A + b_{16}dZ_A + J \\ V_{y_a} = b_{21}d\omega + b_{22}d\phi + b_{23}dk - b_{24}dX_L - b_{25}dY_L - b_{26}dZ_L + b_{24}dX_A + b_{25}dY_A + b_{26}dZ_A + K \end{cases}$$

در معادلات بالا ضرایب b_{ij} همان مشتقات جزئی تابع F و G هستند که بر q تقسیم شده اند به صورتی که در زیر دیده می شود همچنین مقادیر k و G برابر با مقدار تابع به ازاء مقادیر تقریبی تقسیم بر q می باشد

$$b_{11} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 / q \qquad b_{21} = \left(\frac{\partial G}{\partial \omega}\right)_0 / q$$

$$b_{12} = \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)_0 / q \qquad b_{22} = \left(\frac{\partial G}{\partial \phi}\right)_0 / q \qquad J = \frac{F_0}{q} \;;\; K = \frac{G_0}{q}$$

$$b_{13} = \left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)_0 / q \qquad b_{23} = \left(\frac{\partial G}{\partial k}\right)_0 / q$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_{16} = \left(\frac{\partial F}{\partial Z_A}\right)_0 / q \qquad b_{26} = \left(\frac{\partial G}{\partial Z_A}\right)_0 / q$$

بدست آوردن پارامترهای معادلات شرط هم خطی (خطی شده):

برای مثال و مشخص کردن چگونگی تعیین پارامترها یکی از آنها مثلاً b_{11} را تعیین می نمائیم.

$$\begin{cases} q = m_{31}\Delta X + m_{32}\Delta Y + m_{33}\Delta Z \\ r = m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z \\ s = m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z \end{cases} \qquad F = x_a \cdot q + f \cdot r$$

$$b_{11} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 / q \quad (1) \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega} = \frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \omega} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial \omega} = f\cdot\frac{\partial r}{\partial \omega} + x_a\cdot\frac{\partial q}{\partial \omega} \quad (2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial m_{11}}\cdot\frac{\partial m_{11}}{\partial \omega} + \frac{\partial r}{\partial m_{12}}\cdot\frac{\partial m_{12}}{\partial \omega} + \frac{\partial r}{\partial m_{13}}\cdot\frac{\partial m_{13}}{\partial \omega} = \Delta X\cdot\frac{\partial m_{11}}{\partial \omega} + \Delta Y\cdot\frac{\partial m_{12}}{\partial \omega} + \Delta Z\cdot\frac{\partial m_{13}}{\partial \omega} \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \omega} = \frac{\partial q}{\partial m_{31}}\cdot\frac{\partial m_{31}}{\partial \omega} + \frac{\partial q}{\partial m_{32}}\cdot\frac{\partial m_{32}}{\partial \omega} + \frac{\partial q}{\partial m_{33}}\cdot\frac{\partial m_{33}}{\partial \omega} = \Delta X\frac{\partial m_{31}}{\partial \omega} + \Delta Y\frac{\partial m_{32}}{\partial \omega} + \Delta Z\frac{\partial m_{33}}{\partial \omega} \quad (4)$$

(از بحث کانفورمال سه بعدی نوشته شده) از سطرهای ماتریس M در معادله کانفورمال سه بعدی برداشته شود

$m_{11} = \ldots$ $\qquad m_{31} = \ldots$

$m_{12} = \ldots$ $\qquad m_{32} = \ldots$

$m_{13} = \ldots$ $\qquad m_{33} = \ldots$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{11}}{\partial \omega} = 0 \\ \dfrac{\partial m_{12}}{\partial \omega} = -\sin k \sin \omega + \cos k \cdot \sin \phi \cdot \cos \omega = -m_{13} \\ \dfrac{\partial m_{13}}{\partial \omega} = \cos \omega \sin k + \cos k \cdot \sin \phi \cdot \sin \omega = m_{12} \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \omega} = -m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z$$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m_{31}}{\partial \omega} = 0 \\ \dfrac{\partial m_{32}}{\partial \omega} = -\cos \phi \cdot \cos \omega = -m_{33} \\ \dfrac{\partial m_{33}}{\partial \omega} = -\cos \phi \cdot \cos \omega = m_{32} \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial \omega} = -m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z$$

داریم تغییر متغیر دهیم

$$(2), (3), (4) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \omega} = f\cdot\left[-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z\right] + x_a\cdot\left[-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z\right]$$

$$b_{11} = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 / q$$

$$b_{11} = \frac{f}{q}\left[-m_{13}\,\Delta Y + m_{12}\,\Delta Z\right] + \frac{x_a}{q}\left[-m_{33}\cdot\Delta Y + m_{32}\,\Delta Z\right]$$

دیگری را بدست آوردم
با توجه به جزوه خودمان است
سوال امتحان.

$$b_{11} = \frac{x}{q}\left[-m_{33}\,\Delta Y + m_{32}\,\Delta Z\right] + \frac{f}{q}\left[-m_{13}\,\Delta Y + m_{12}\,\Delta Z\right]$$

$$b_{12} = \frac{x}{q}\left[\Delta X \cos\phi + \Delta Y(\sin\omega \sin\phi) + \Delta Z(-\sin\phi\cdot\cos\omega)\right] + \frac{f}{q}\left[\Delta X(-\sin\phi\cdot\cos k) + \Delta Y(\sin\omega\cdot\cos\phi\cdot\cos k) + \Delta Z(-\cos\omega\cdot\cos\phi\cdot\cos k)\right]$$

$$b_{13} = \frac{f}{q}\left[m_{21}\,\Delta X + m_{22}\,\Delta Y + m_{23}\,\Delta Z\right]$$

$$b_{14} = \frac{x}{q}(m_{31}) + \frac{f}{q}(m_{11})$$

$$b_{15} = \frac{x}{q}(m_{32}) + \frac{f}{q}(m_{12})$$

$$b_{16} = \frac{x}{q}(m_{33}) + \frac{f}{q}(m_{13})$$

$$j = (q\cdot x + r\cdot f)/q$$

$$b_{21} = \frac{y}{q}\left[-m_{33}\,\Delta Y + m_{32}\,\Delta Z\right] + \frac{f}{q}\left[-m_{23}\,\Delta Y + m_{22}\,\Delta Z\right]$$

$$b_{22} = \frac{y}{q}\left[\Delta X \cos\phi + \Delta Y(\sin\omega \sin\phi) + \Delta Z(-\sin\phi\cdot\cos\omega)\right] + \frac{f}{q}\left[\Delta X(\sin\phi\cdot\sin k) + \Delta Y(-\sin\omega\cdot\cos\phi\cdot\sin k) + \Delta Z(\cos\omega\cdot\cos\phi\cdot\sin k)\right]$$

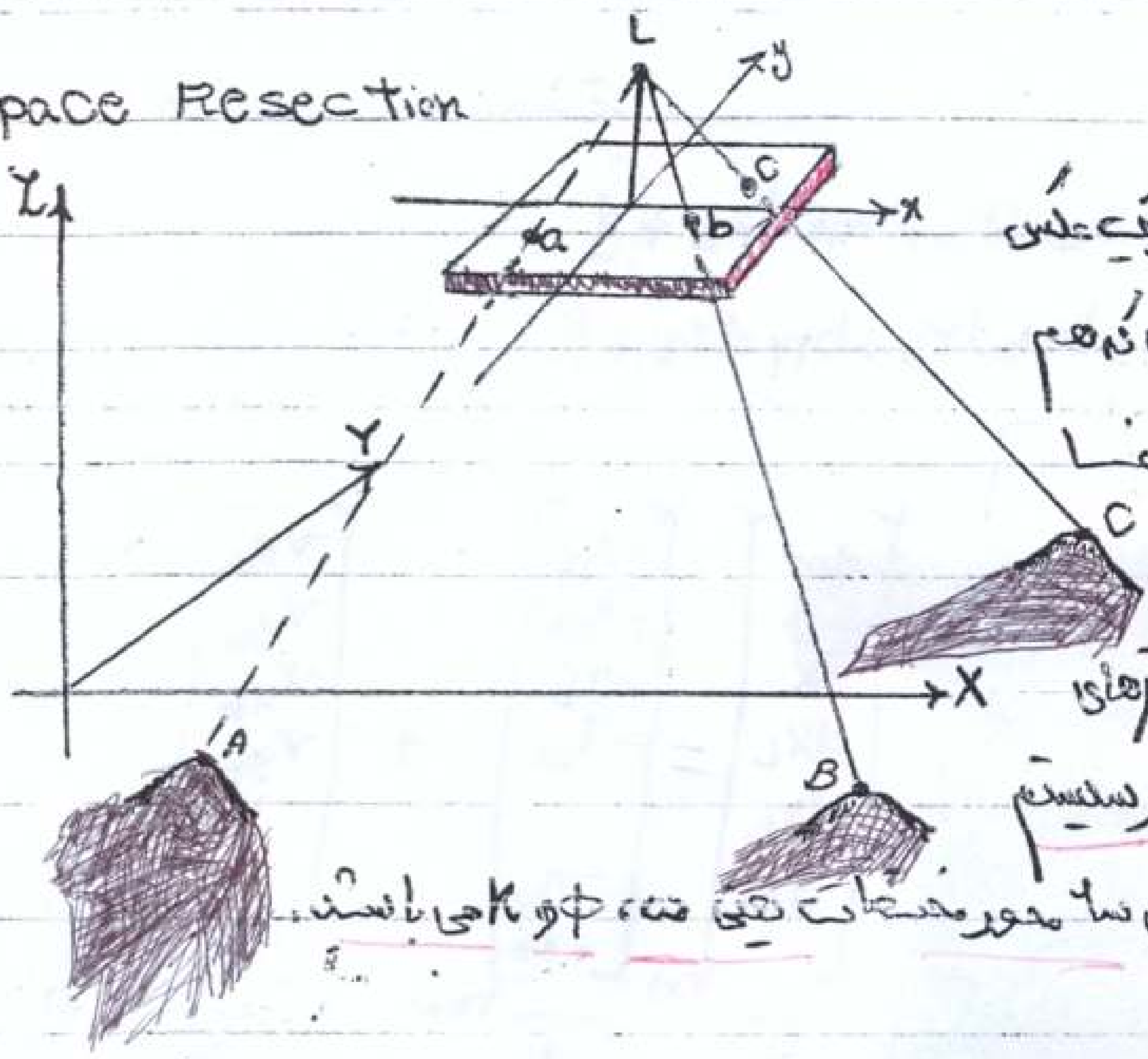
$$b_{23} = \frac{f}{q}\left[-m_{11}\,\Delta X + m_{12}\,\Delta Y + m_{13}\,\Delta Z\right]$$

$$b_{24} = \frac{y}{q}(m_{31}) + \frac{f}{q}(m_{21})$$

$$b_{26} = \frac{y}{q}(m_{33}) + \frac{f}{q}(m_{23})$$

$$k = (q\cdot y + s\cdot f)/q$$

Space Resection



ترفیع فضائی:

همانطور که مشاهده می‌شود چنانچه در یک عکس هوائی حداقل ۳ نقطه کنترل زمینی داشته باشیم که هم مختصات زمینی آنها و هم مختصات عکسی آنها مشخص باشد می‌توان پارامترهای توجیه خارجی عکس را محاسبه نمود. منظور از پارامترهای توجیه خارجی مختصات مرکز تصویر X_L، Y_L، Z_L در سیستم مختصات زمینی و همچنین دوران‌ها حول سه محور مختصات یعنی ω، φ و κ می‌باشد.

نکته:

توزیع نقاط در حل ترفیع فضائی مؤثر می‌باشد. ۳ نقطه نباید واقع بر روی یک خط باشند زیرا ممکن است عکس حول این خط حرکت دورانی (دوران) داشته باشد.

مراحل محاسبات ترفیع فضائی:

۱- داده‌های مسئله:

الف- مشاهدات عکسی.

No	x	y
a	x_a	y_a
b	x_b	y_b
c	x_c	y_c
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

$n \geq 3$

ب- معلومات (مختصات زمینی نقاط کنترل).

No	X	Y	Z
A	X_A	Y_A	Z_A
B	X_B	Y_B	Z_B
C	X_C	Y_C	Z_C
⋮	⋮	⋮	⋮
N	X_N	Y_N	Z_N

۲- مجهولات:

- مختصات مرکز تصویر X_L، Y_L، Z_L
- دوران‌ها ω، φ، κ

۳- معادلات مشاهدات:

$$\begin{cases} v_{x_a} = b_{11}\,d\omega + b_{12}\,d\phi + b_{13}\,dk + b_{14}\,dX_L + b_{15}\,dY_L + b_{16}\,dZ_L + J \\ v_{y_a} = b_{21}\,d\omega + b_{22}\,d\phi + b_{23}\,dk + b_{24}\,dX_L + b_{25}\,dY_L + b_{26}\,dZ_L + K \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (b_{11})_a & (b_{12})_a & (b_{13})_a & (b_{14})_a & (b_{15})_a & (b_{16})_a \\ (b_{21})_a & (b_{22})_a & (b_{23})_a & (b_{24})_a & (b_{25})_a & (b_{26})_a \\ (b_{11})_b & (b_{12})_b & (b_{13})_b & (b_{14})_b & (b_{15})_b & (b_{16})_b \\ (b_{21})_b & (b_{22})_b & (b_{23})_b & (b_{24})_b & (b_{25})_b & (b_{26})_b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_{11})_n & (b_{12})_n & (b_{13})_n & (b_{14})_n & (b_{15})_n & (b_{16})_n \\ (b_{21})_n & (b_{22})_n & (b_{23})_n & (b_{24})_n & (b_{25})_n & (b_{26})_n \end{bmatrix}_{2n\times 6}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} d\omega \\ d\phi \\ dk \\ dX_L \\ dY_L \\ dZ_L \end{bmatrix}_{6\times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -J_a \\ -K_a \\ -J_b \\ -K_b \\ \vdots \\ -J_n \\ -K_n \end{bmatrix}_{2n\times 1}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x_a} \\ v_{y_a} \\ v_{x_b} \\ v_{y_b} \\ \vdots \\ v_{x_n} \\ v_{y_n} \end{bmatrix}_{2n\times 1}}_{V}$$

$$A.X = L + V$$

$$\begin{cases} \omega = I \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A^T.A}_{N}.X = \underbrace{A^T.L}_{Q} \Rightarrow NX = Q \Rightarrow \underline{X = N^{-1}Q}$$

$$\begin{cases} \omega^i = \omega^{i-1} + d\omega^i \\ \phi^i = \phi^{i-1} + d\phi^i \\ k^i = k^{i-1} + dk^i \end{cases} \qquad \begin{cases} X_L^i = X_L^{i-1} + dX_L^i \\ Y_L^i = Y_L^{i-1} + dY_L^i \\ Z_L^i = Z_L^{i-1} + dZ_L^i \end{cases}$$

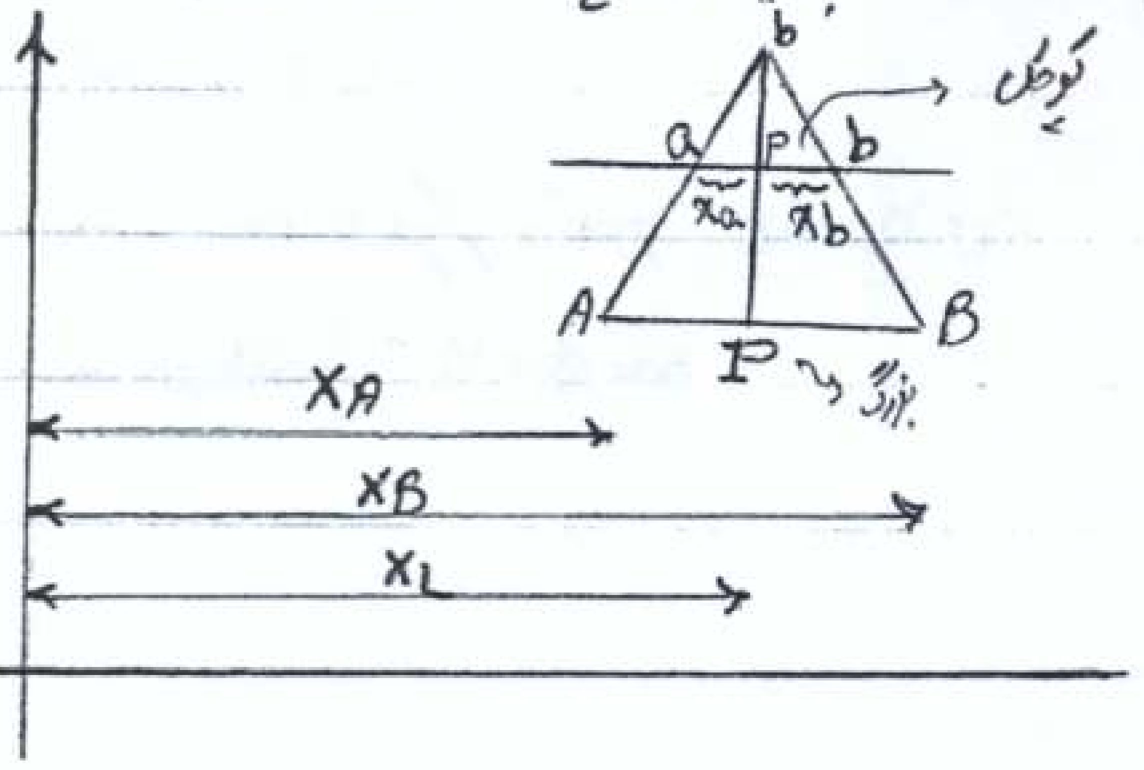
۳- تعیین مقادیر تقریبی اولیه مجهولات:

می‌توان از اختلاف بین ژیزمان های یک امتداد معلوم در فضای تصویر و فضای زمینی استفاده کرد.

$$\begin{cases} \omega^\circ \simeq 0 \\ \phi^\circ \simeq 0 \end{cases}$$

$k^\circ = G_{AB} - G_{ab}$ → روی عکس

$Z_L^\circ =$ (به تقریب خوبی می‌توان برابر ارتفاع پرواز گرفت) ارتفاع پرواز



همانطور که در شکل بالا دیده می‌شود اگر مقطع عکس را در جهت محور عکس‌ها در نظر بگیریم می‌توان نسبت‌های زیر را برای آن نوشت تا بتوان برای مقدار X_L° یک مقدار تقریبی اولیه بدست آورد.

$$\overline{op} = |x_a|$$

$$\overline{AB} = X_B - X_A \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{ap}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ab}} \Rightarrow \frac{X_L - X_A}{|x_a|} = \frac{X_B - X_A}{x_b - x_a}$$

$$\overline{ab} = x_b - x_a$$

$$\overline{AP} = X_L - X_A \qquad X_L^\circ = |x_a| \cdot \frac{X_B - X_A}{x_b - x_a} + X_A$$

برای Y_L° نیز به همین صورت عمل می‌کنیم و مقدار تقریبی آن را بدست می‌آوریم.

$$\overline{op} = |y_a|$$

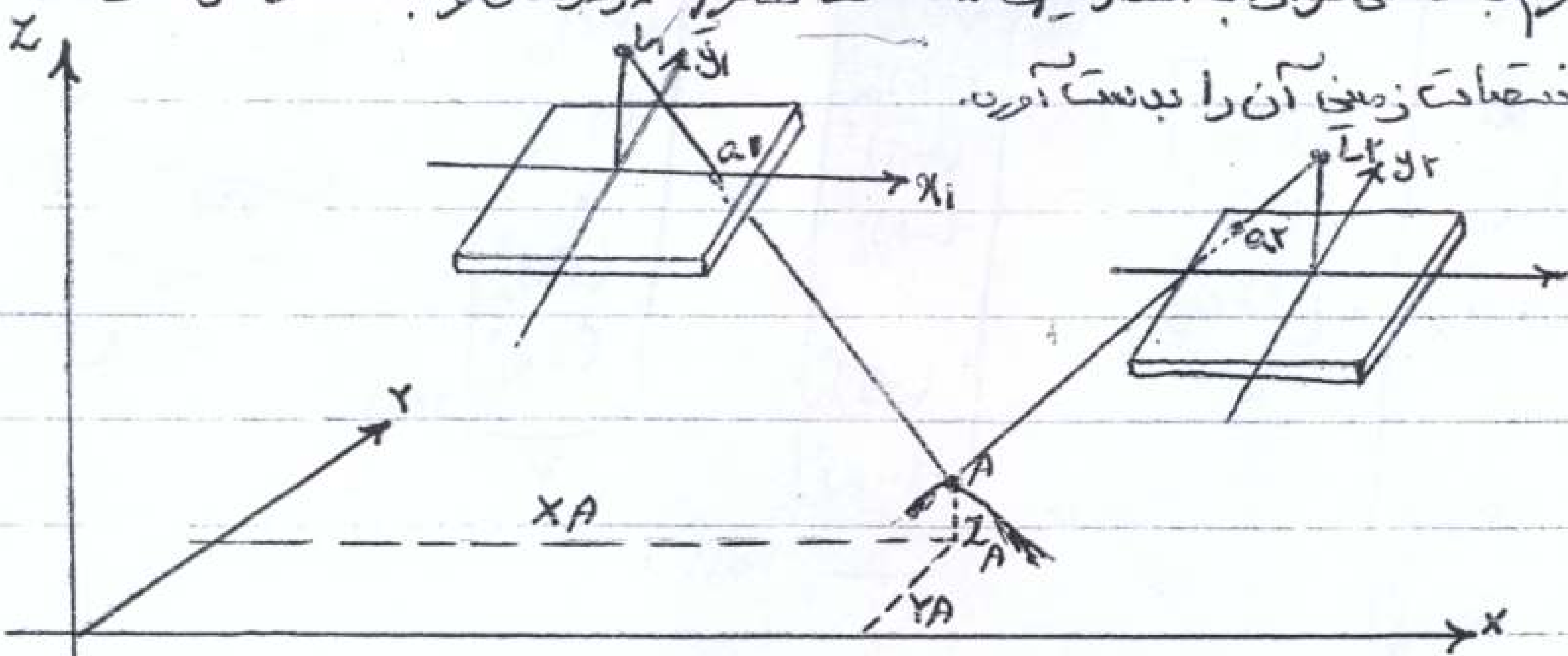
$$\overline{AB} = Y_B - Y_A \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{ap}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ab}} \Rightarrow \frac{Y_L - Y_A}{|y_a|} = \frac{Y_B - Y_A}{y_b - y_a}$$

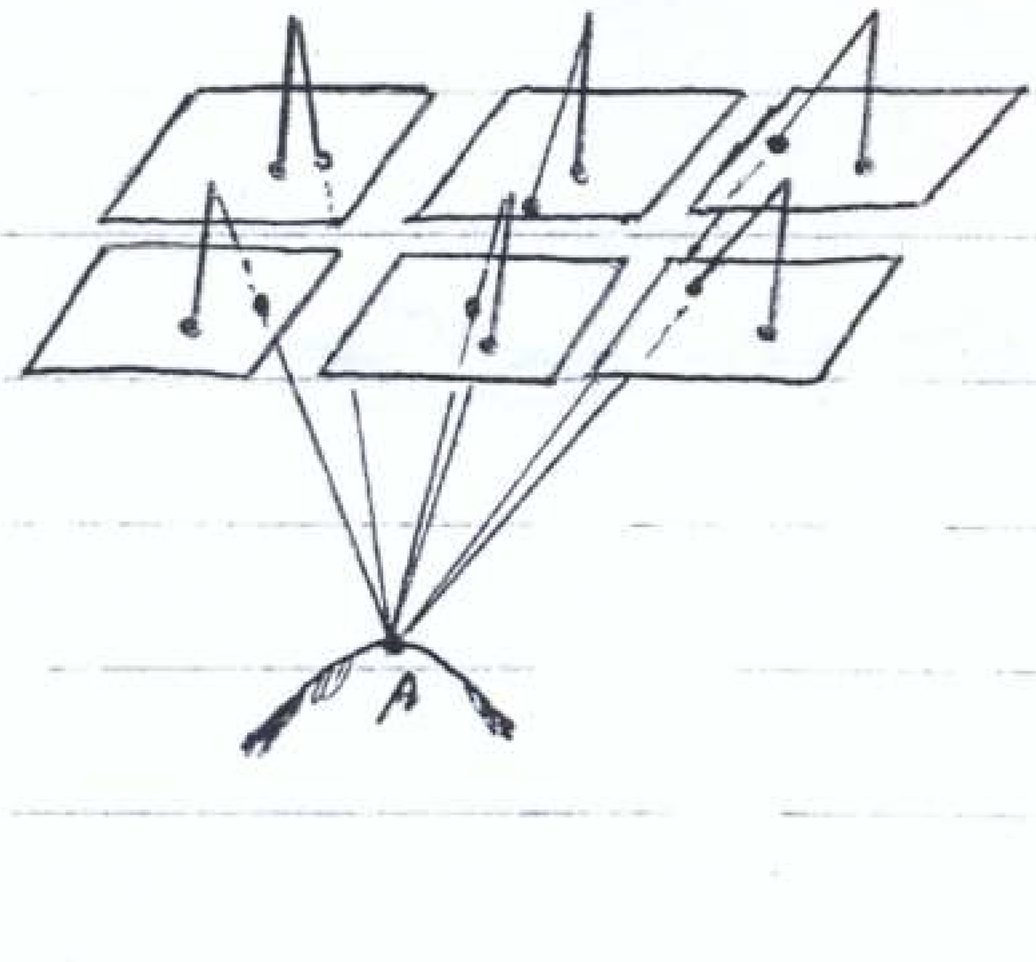
$$\overline{ab} = y_b - y_a$$

$$\overline{AP} = Y_L - Y_A \qquad Y_L^\circ = |y_a| \cdot \frac{Y_B - Y_A}{y_b - y_a} + Y_A$$

Space intersection — تقاطع فضائی:

منظور از تقاطع فضائی این است که اگر یک نقطه در دو عکس ظاهر شده باشد و این دو عکس دارای پارامترهای توجیه خارجی معلوم باشند می‌توان با اندازه‌گیری مختصات تصویری در دو عکس و با استفاده از معادلات تقاطع فضائی، مختصات زمینی آن را بدست آورد.





۱- داده های مسئله:

الف- مشاهدات: شامل مختصات عکسی.

NO	x_1	y_1
a_1	x_{1a}	y_{1a}

NO	x_2	y_2
a_2	x_{2a}	y_{2a}

و ...

ب- معلومات: شامل پارامترهای توجیه خارجی عکسها:

$$
\begin{array}{cccccc}
X_{L_1} & Y_{L_1} & Z_{L_1} & \omega_1 & \varphi_1 & k_1 \\
X_{L2} & Y_{L2} & Z_{L2} & \omega_2 & \varphi_2 & k_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
X_{L6} & Y_{L6} & Z_{L6} & \omega_6 & \varphi_6 & k_6
\end{array}
$$

۲- مجهولات: شامل مختصات زمینی نقطه یا نقاط مورد نظر.

No	X	Y	Z
A	X_A	Y_A	Z_A

۳- معادلات مشاهدات:

$$
\begin{cases}
v_x = b_{14}\,dX_A + b_{15}\,dY_A + b_{16}\,dZ_A + J \\
v_y = b_{24}\,dX_A + b_{25}\,dY_A + b_{26}\,dZ_A + K
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
(b_{14})_a^1 & (b_{15})_a^1 & (b_{16})_a^1 \\
(b_{24})_a^1 & (b_{25})_a^1 & (b_{26})_a^1 \\
(b_{14})_a^2 & (b_{15})_a^2 & (b_{16})_a^2 \\
(b_{24})_a^2 & (b_{25})_a^2 & (b_{26})_a^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(b_{14})_a^n & (b_{15})_a^n & (b_{16})_a^n \\
(b_{24})_a^n & (b_{25})_a^n & (b_{26})_a^n
\end{bmatrix}_{2n\times 3}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} dX_A \\ dY_A \\ dZ_A \end{bmatrix}_{3\times 1}}_{X}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} (-J)_a^1 \\ (-K)_a^1 \\ (-J)_a^2 \\ (-K)_a^2 \\ \vdots \\ (-J)_a^n \\ (-K)_a^n \end{bmatrix}_{2n\times 1}}_{L}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} (V_x)_a^1 \\ (V_y)_a^1 \\ \vdots \\ (V_x)_a^n \\ (V_y)_a^n \end{bmatrix}_{2n\times 1}}_{V}
$$

چرا از ۴ شروع میکنیم؟ چون در آرایه های قبلی از ۱ تا ۳ صفر بوده پس از اینجا شروع میشود.

$$AX = L + V$$

$$
\begin{cases} W = 0 \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A^T A}_{N} \cdot X = \underbrace{A^T L}_{Q} \Rightarrow N^{3\times 3} X^{3\times 1} = Q^{3\times 1} \Rightarrow X = N^{-1} Q
$$

$$
\begin{cases}
X_A^i = X_A^{i-1} + dX_A^i \\
Y_A^i = Y_A^{i-1} + dY_A^i \\
Z_A^i = Z_A^{i-1} + dZ_A^i
\end{cases}
$$

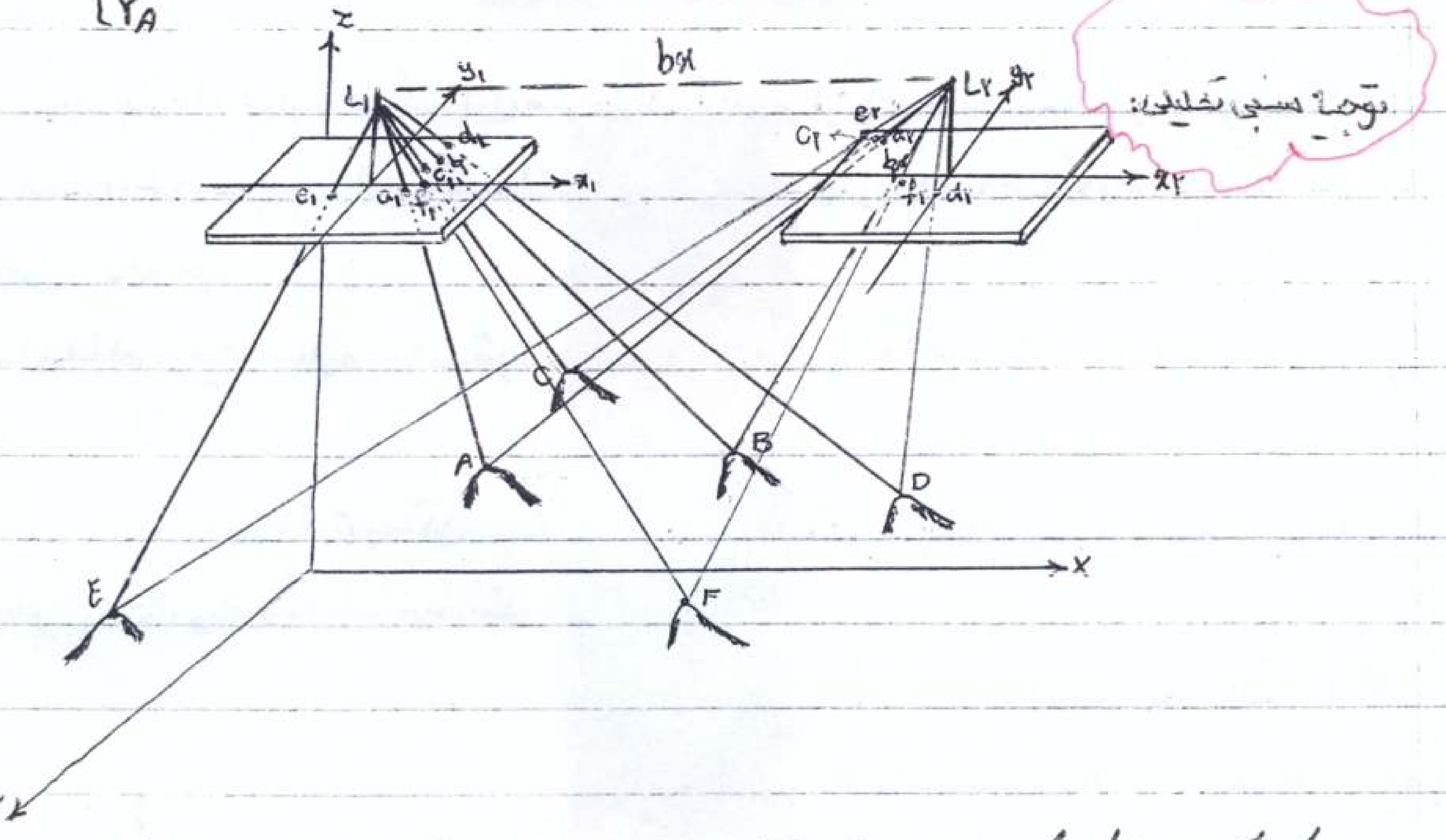
۳- تعیین مقادیر اولیه مجهولات:

می توان ارتفاع متوسط منطقه را به عنوان مقدار اولیه تقریبی در نظر گرفت.

Z°_A

با متوسط گیری از مختصات ها نقاط می توان مقدار تقریبی اولیه را بدست آورد.

$$\begin{cases} X^{\circ}_A \\ Y^{\circ}_A \end{cases}$$

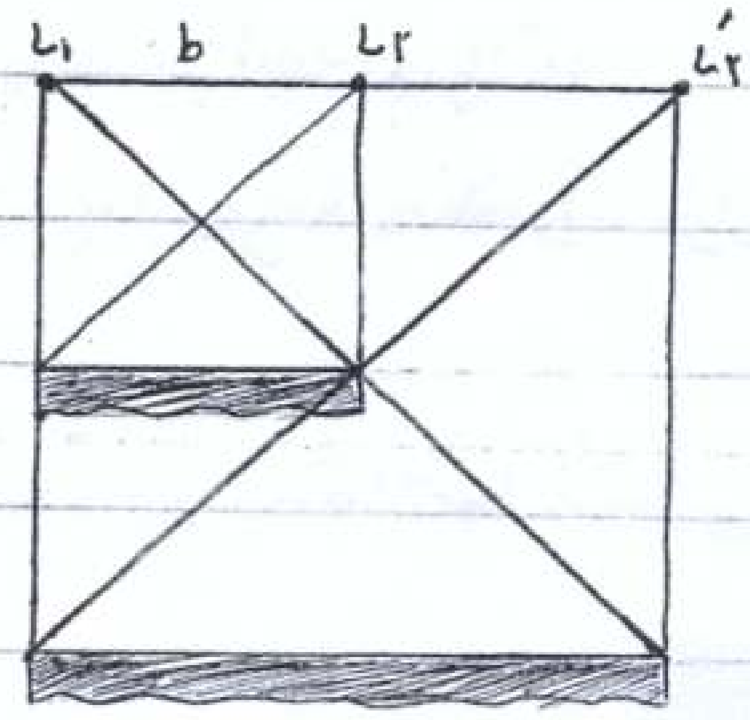


فرض می کنیم که طبق شکل عکس سمت چپ کاملاً ثابت بوده و در حالت ایده آل می باشد یعنی مرکز آن بر روی محور Z های سیستم مختصات زمینی قرار دارد و دورانهای k، φ، ω برابر صفر در نظر گرفته شده و Z آن برابر ارتفاع پرواز در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ k_1 = 0 \\ X_{L_1} = 0 \\ Y_{L_1} = 0 \\ Z_{L_1} = H \longrightarrow \text{ارتفاع پرواز} \end{cases}$$

فقط برای عکس سمت چپ

برای ایجاد تقاطع دسته اشعه های نظیر با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده برای عکس سمت چپ، دورانها و جابجایی ها باید روی عکس سمت راست اعمال شود. اما با توجه به اینکه، bx (مؤلفه ی باز دستگاه در جهت محور xها باید ثابت باشد) زیرا تغییرات آن باعث تغییرات مقیاس مدل می شود در نتیجه باید مؤلفه ی x عکس دوم را نیز ثابت در نظر بگیریم. شکل زیر اثر تغییر bx روی مقیاس را نشان می دهد:



$X_{L2}=bx$ (ثابت)

نکته:

می‌توانیم ارتفاع پرواز را در عکس اول صفر در نظر بگیریم و باز را نیز برابر باز عکسی در نظر بگیریم و در این حالت مختصات زمینی نقاط مدل، هم مقیاس با مختصات عکسی آنها می‌شود و در این حالت کنترل منابع خطاها راحت‌تر صورت می‌پذیرد.

برای انجام توجیه نسبی از معادلات شرط هم خطی، خطی شده استفاده می‌شود و مراحل آن به صورت زیر می‌باشد:

۱- مفروضات مسئله:

عکس سمت چپ در حالت ایده آل در نظر گرفته و ارتفاع ثابت و برابر ارتفاع پرواز فرض شد همچنین مؤلفه‌ی X_{L2} برابر باز هوائی و به صورت ثابت فرض شد.

$X_{L2}=B$ (باز هوایی)

$\omega_1=\varphi_1=K_1=X_{L1}=Y_{L1}=0$ ⇐ حالت ایده آل

$Z_{L1}=H \ , \ X_{L2}=B$

۲- مجهولات:

مجهولات به دو دسته هستند:

الف) پارامترهای مجهول:

شامل پنج پارامتر توجیه خارجی عکس سمت راست.

$P=5$ $(\omega_2 , \varphi_2 , K_2 , Y_{L2} , Z_{L2})$

ب) مختصاتهای مجهول:

برای هر نقطه زمینی سه مؤلفه‌ی X، Y و Z آن مجهول می‌باشد بنابراین برای ۶ نقطه‌ی انتخابی داریم مجهولات عبارتند از:

$C=6\times 3=18$ $(X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B , \ldots , Y_F , Z_F)$

$U=P+C=5+18=23$ تعداد کل مجهولات ⇐ مربوط به بند (الف و ب)

۳- مشاهدات:

مشاهدات ما شامل اندازه‌گیری مختصات عکسی ۶ نقطه‌ی استاندارد در دو عکس به تفکیک می‌باشد.

عکس اول

No	x_i	y_i
a	x_1a	y_1a
b	x_1b	y_1b
⋮	⋮	⋮
f	x_1f	y_1f

عکس دوم

No	x_i	y_i
a	x_2a	y_2a
b	x_2b	y_2b
⋮	⋮	⋮
f	x_2f	y_2f

۴- معادلات مشاهدات:

از معادلات شرط هم خطی، خطی شده برای هر عکس استفاده می‌شود.

الف) برای عکس سمت چپ:

$$\begin{cases} v_{x_i} = b_{14}\,dX_i + b_{15}\,dY_i + b_{16}\,dZ_i + J \\ v_{y_i} = b_{24}\,dX_i + b_{25}\,dY_i + b_{26}\,dZ_i + K \end{cases}$$

$i = a, b, \ldots, f$

تعداد معادلات $T_1 = \underbrace{6}_{\text{تعداد نقاط}} \times \underbrace{2}_{\text{تعداد معادلات به ازای هر نقطه}} = 12$

ب) برای عکس سمت راست:

$$\begin{cases} v_{x_i} = b_{11}\,d\omega + b_{12}\,d\varphi + b_{13}\,d\kappa + b_{15}\,dY_L + b_{16}\,dZ_L + b_{14}\,dX_i + b_{15}\,dY_i + b_{16}\,dZ_i + J \\ v_{y_i} = b_{21}\,d\omega + b_{22}\,d\varphi + b_{23}\,d\kappa + b_{25}\,dY_L + b_{26}\,dZ_L + b_{24}\,dX_i + b_{25}\,dY_i + b_{26}\,dZ_i + K \end{cases}$$

$T_2 = 6 \times 2 = 12$ تعداد معادلات برای عکس سمت راست

$T = T_1 + T_2 = 12 + 12 = 24$ تعداد کل معادلات

$df = T - u = 24 - 23 = 1$ درجه آزادی

۵- مقادیر تقریبی اولیه مجهولات:

- برای پارامترها:

$$\begin{cases} \omega_2^\circ = 0 \\ \varphi_2^\circ = 0 \\ \kappa_2^\circ = 0 \end{cases} \qquad Y_{L2}^\circ = 0 \qquad Z_{L2}^\circ = H$$

چون اولی را صفر در نظر گرفتیم

- برای مختصات‌ها:

از مختصات عکسی نقاط در عکس سمت چپ ضرب در عدد مقیاس به عنوان مقدار تقریبی اولیه برای مختصات نقاط استفاده می‌کنیم. (چون مرکز عکس را منطبق بر محور Z های زمینی در نظر گرفتیم)

$$S = \frac{1}{\frac{H - h_m}{f}}$$ ← مقیاس

$\frac{H - h_m}{f}$ ← عدد مقیاس

N

$$X^\circ_A = x_{1a} \cdot N \qquad Y^\circ_A = y_{1a} \cdot N$$
$$X^\circ_B = x_{1b} \cdot N \qquad Y^\circ_B = y_{1b} \cdot N$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$X^\circ_F = x_{1f} \cdot N \qquad Y^\circ_F = y_{1f} \cdot N$$

$$Z^\circ_A \simeq Z^\circ_B \simeq \dots = Z^\circ_F = H_M$$ → ارتفاع متوسط منطقه

$$\left[\; (b_{11})_a \; (b_{12})_a \; (b_{13})_a \; (b_{14})_a \; (b_{15})_a \; (b_{16})_a \;\cdots\; 0 \;\cdots\; (b_{21})_f \; \dots \; (b_{26})_f \;\right]_{24\times 24} \times X = [\;]$$

$$X = \begin{bmatrix} d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \\ dX_L \\ dY_L \\ dZ_L \\ dX_A \\ dY_A \\ dZ_A \\ dX_B \\ dY_B \\ dZ_B \\ dX_C \\ dY_C \\ dZ_C \\ dX_D \\ dY_D \\ dZ_D \\ dX_E \\ dY_E \\ dZ_E \\ dX_F \\ dY_F \\ dZ_F \end{bmatrix}_{24\times 1}$$

$$\underbrace{[\;]_{24\times 24} \times [\;]_{24\times 1} = [\;]_{24\times 1} + [\;]_{24\times 1}}_{A}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (v_x)^1_a & (v_y)^1_a & (v_x)^1_b & (v_y)^1_b & (v_x)^1_c & (v_y)^1_c & (v_x)^1_d & (v_y)^1_d & (v_x)^1_e & (v_y)^1_e & (v_x)^1_f & (v_y)^1_f & (v_x)^2_a & (v_y)^2_a & (v_x)^2_b & (v_y)^2_b & (v_x)^2_c & (v_y)^2_c & (v_x)^2_d & (v_y)^2_d & (v_x)^2_e & (v_y)^2_e & (v_x)^2_f & (v_y)^2_f \end{bmatrix}^T}_{V_{24\times1}}$$

$$+$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (-y)^1_a & (-x)^1_a & (-y)^1_b & (-x)^1_b & (-y)^1_c & (-x)^1_c & (-y)^1_d & (-x)^1_d & (-y)^1_e & (-x)^1_e & (-y)^1_f & (-x)^1_f & (-y)^2_a & (-x)^2_a & (-y)^2_b & (-x)^2_b & (-y)^2_c & (-x)^2_c & (-y)^2_d & (-x)^2_d & (-y)^2_e & (-x)^2_e & (-y)^2_f & (-x)^2_f \end{bmatrix}^T}_{L_{24\times1}}$$

= ماتریس اعداد ثابت

$$A.X = L + V$$

$$\begin{cases} W = I \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow A.x = L \Rightarrow \underbrace{A^T A}_{N} . x = \underbrace{A^T L}_{Q} \Rightarrow \underset{23\times23}{N} . \underset{23\times1}{X} = Q_{23\times1} \Rightarrow X = N^{-1} Q$$

$$\begin{cases} \omega^i = \omega^{i-1} + d\omega^i \\ \varphi^i = \varphi^{i-1} + d\varphi^i \\ \kappa^i = \kappa^{i-1} + d\kappa^i \\ Y^i_{L_2} = Y^{i-1}_{L_2} + dY^i_{L_2} \\ Z^i_{L_2} = Z^{i-1}_{L_2} + dZ^i_{L_2} \\ X^i_A = X^{i-1}_A + dX^i_A \\ Y^i_A = Y^{i-1}_A + dY^i_A \\ \vdots \\ Z^i_F = Z^{i-1}_F + dZ^i_F \end{cases}$$

ترسیم تحلیلی:

تعریف ترسیم (Rectification):

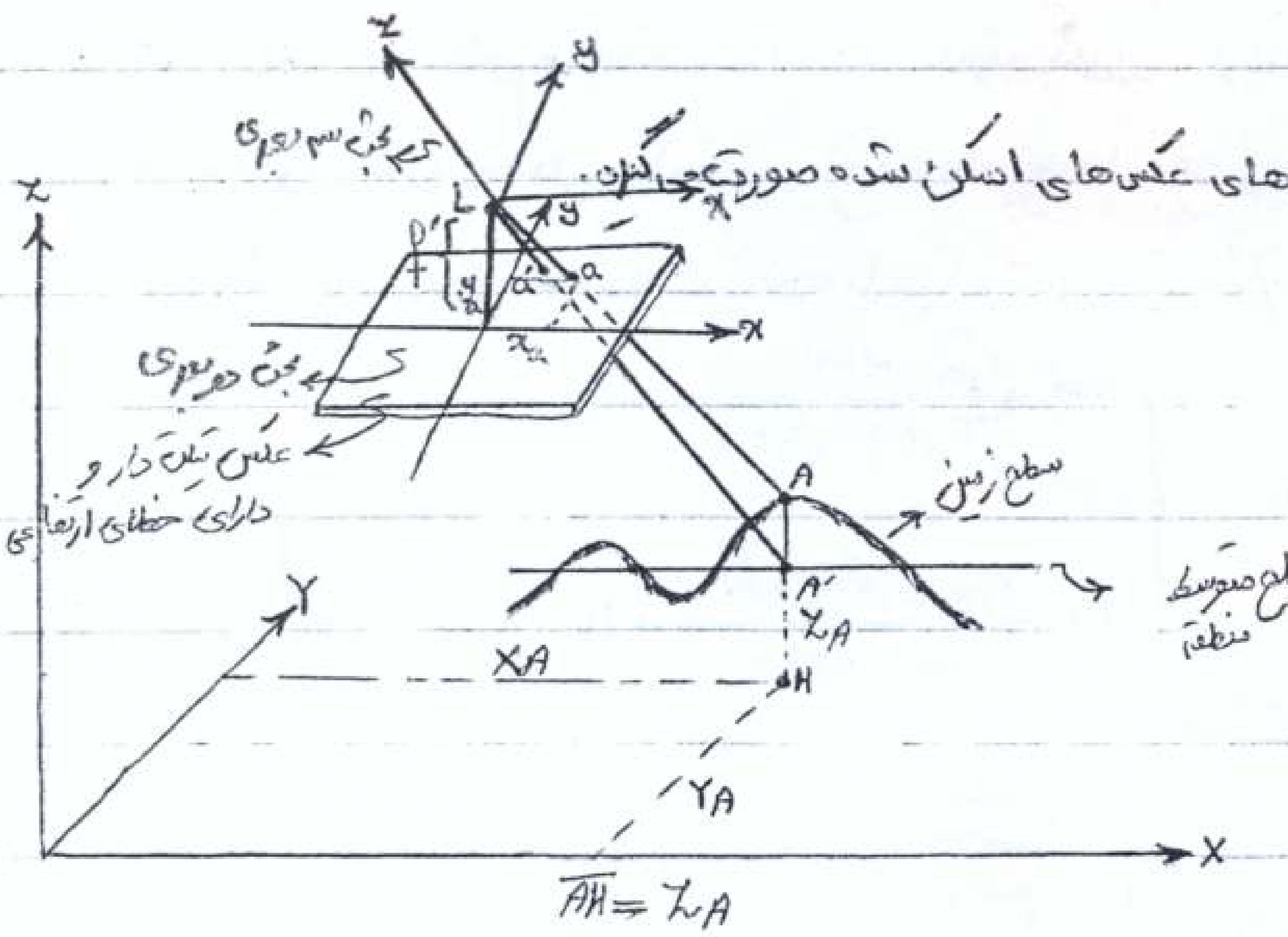
حذف جابجایی های ناشی از تیلت و اختلاف ارتفاع در یک عکس هوایی ترسیم می گویند و به روشهای زیر قابل انجام می باشد:

۱) ترسیم معمولی: با دستگاه Rectifier

۲) ترسیم جزء به جزء:

۳) ترسیم دیجیتالی: ترسیم روی پیکسل های عکس های اسکن شده صورت می گیرد.

۴) ترسیم تحلیلی:



ماتریس (بردار توجیه داخلی)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ -f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه L

$$\begin{bmatrix} X_A - X_L \\ Y_A - Y_L \\ Z_A - Z_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ -f \end{bmatrix}$$

$$X_A - X_L = \lambda\left(m_{11} x_a + m_{12} y_a + m_{13}(-f)\right)$$

$$Y_A - Y_L = \lambda\left(m_{21} x_a + m_{22} y_a + m_{23}(-f)\right)$$

$$Z_A - Z_L = \lambda\left(m_{31} x_a + m_{32} y_a + m_{33}(-f)\right)$$

طرفین را بر معادله سوم ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} X_A - X_L = (Z_A - Z_L)\dfrac{m_{11} x_a + m_{12} y_a + m_{13}(-f)}{m_{31} x_a + m_{32} y_a + m_{33}(-f)} \\ Y_A - Y_L = (Z_A - Z_L)\dfrac{m_{21} x_a + m_{22} y_a + m_{23}(-f)}{m_{31} x_a + m_{32} y_a + m_{33}(-f)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A - X_L = \dfrac{(Z_A - Z_L)}{m_{33}(-f)} \cdot \dfrac{m_{11} x_a + m_{12} y_a + m_{13}(-f)}{\frac{m_{31}}{m_{33}(-f)} x_a + \frac{m_{32}}{m_{33}(-f)} y_a + 1} \\ Y_A - Y_L = \dfrac{(Z_A - Z_L)}{m_{33}(-f)} \cdot \dfrac{m_{21} x_a + m_{22} y_a + m_{23}(-f)}{\frac{m_{31}}{m_{33}(-f)} x_a + \frac{m_{32}}{m_{33}(-f)} y_a + 1} \end{cases}$$

فرضیات:

فرض ۱) : فرض می‌کنیم همه نقاط روی سطح متوسط هستند پس Z به نقطه بستگی ندارد و برای همه نقاط ثابت می‌باشد و چون نقطه A یک نقطه‌ی دلخواه می‌باشد پس می‌توانیم اندیس A را برداریم.

فرض ۲) : فرض می‌کنیم پارامترهای توجیه داخلی عکس معلوم باشند و منطقه کاملاً مسطح باشد در چنین حالتی X_L ، Y_L و Z_L معلوم می‌باشد و درایه‌های ماتریس دوران (m_{ij} ها) معلوم باشند و Z_A به ازای هر نقطه دلخواه روی عکس مقداری ثابت می‌باشد. بنابراین حاصلجمع و ضرب چنین مقادیر ثابت خود مقداری ثابت می‌باشد پس می‌توان معادلات بالا را با توجه به فرضیات ذکر شده به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} X - X_L = \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3}{C_1 x + C_2 y + 1} \\ Y - Y_L = \dfrac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3}{C_1 x + C_2 y + 1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3}{C_1 x + C_2 y + 1} + X_L \\ Y = \dfrac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3}{C_1 x + C_2 y + 1} + Y_L \end{cases}$$

طرح مشترک

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 + C_1 x X_L + C_2 y X_L + X_L}{C_1 x + C_2 y + 1} \\ Y = \dfrac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 + C_1 x Y_L + C_2 y Y_L + Y_L}{C_1 x + C_2 y + 1} \end{cases}$$

ساده‌تر می‌کنیم

ادامه در صفحه بعد

$$\begin{cases} X = \dfrac{\underbrace{(\alpha_1 + c_1 X_L)}_{a_1} x + \underbrace{(\alpha_2 + c_2 X_L)}_{a_2} y + \underbrace{(\alpha_3 + X_L)}_{a_3}}{c_1 x + c_2 y + 1} \\[2ex] Y = \dfrac{\underbrace{(\beta_1 + c_1 Y_L)}_{b_1} x + \underbrace{(\beta_2 + c_2 Y_L)}_{b_2} y + \underbrace{(\beta_3 + Y_L)}_{b_3}}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \\[2ex] Y = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{cases}$$

معادلات پروژکتیو دو بعدی

معادلات به دست آمده معادلات پروژکتیو دو بعدی می باشد که جهت ترمیم تحلیلی از آن استفاده می شود

این معادله ۸ پارامتر مجهول دارد $\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2 \end{pmatrix}$ و برای حل کردن آن نیاز به ۴ نقطه با توزیع مناسب می باشد زیرا برای هر نقطه دو معادله نوشته می شود که می شود ۸ معادله ۸ مجهول که قابل حل می باشد.

در عمل بیش از حداقل نقطه (بیش از ۴ نقطه) در نظر می گیرند تا بتوانند درجه آزادی بیشتر، پارامترها را از طریق کمترین مربعات به دست آورند.

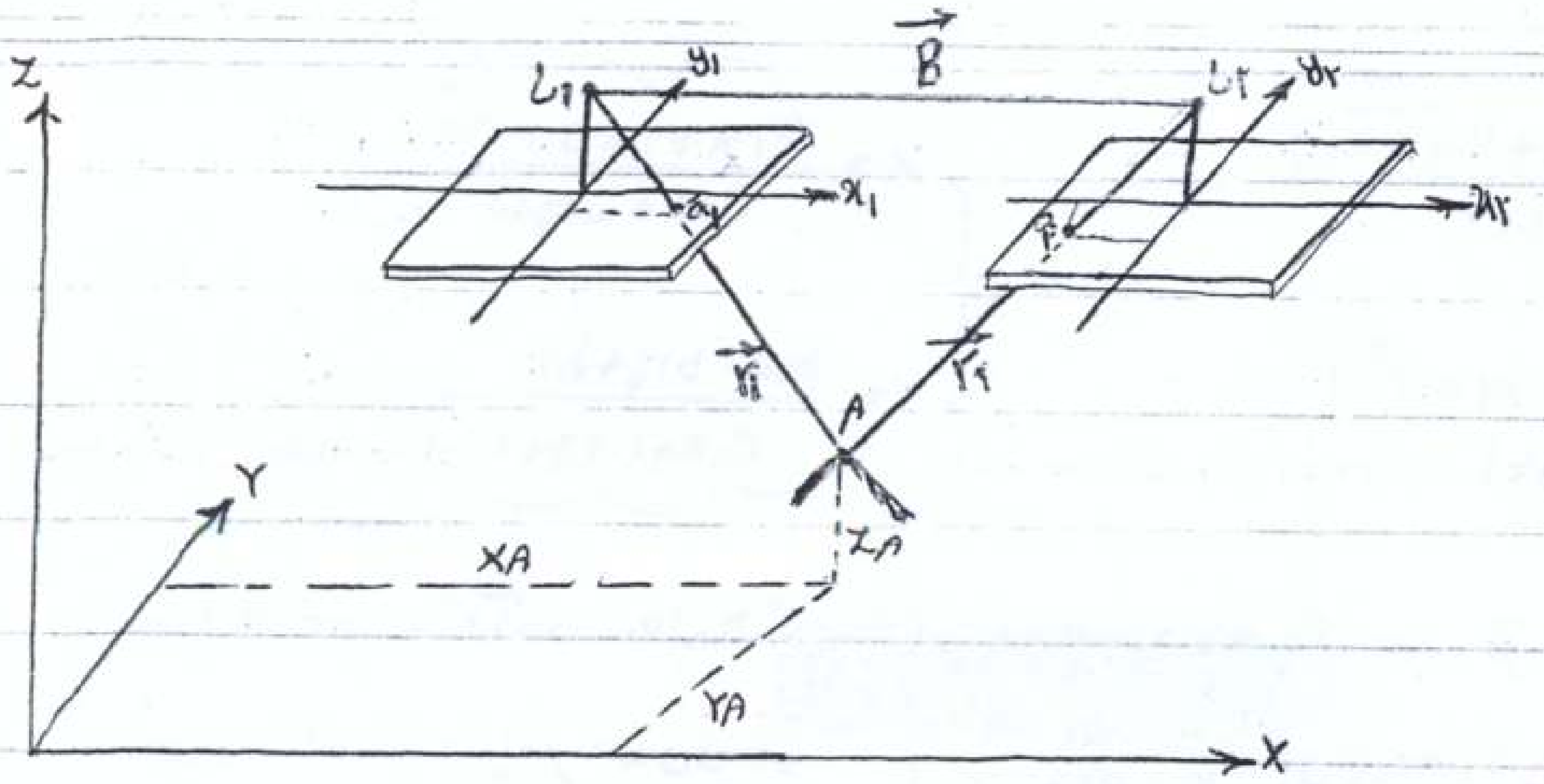
محاسبه پارامترهای معادلات پروژکتیو دو بعدی:

$$\begin{cases} X = \dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \\[2ex] Y = \dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \end{cases} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 - c_1 x X - c_2 y X = X \\ b_1 x + b_2 y + b_3 - c_1 x Y - c_2 y Y = Y \end{cases}$$

$n \geq 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -y_1 X_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 Y_1 & -y_1 Y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -y_2 X_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 Y_2 & -y_2 Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n X_n & -y_n X_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_n Y_n & -y_n Y_n \end{bmatrix}_{2n \times 8}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{8 \times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{2n \times 1}}_{L}$$

$$\begin{cases} A \cdot X = L \\ W = I \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A^T A}_{N} \cdot X = \underbrace{A^T L}_{Q} \Rightarrow N X = Q \Rightarrow \underline{X = N^{-1} Q}$$



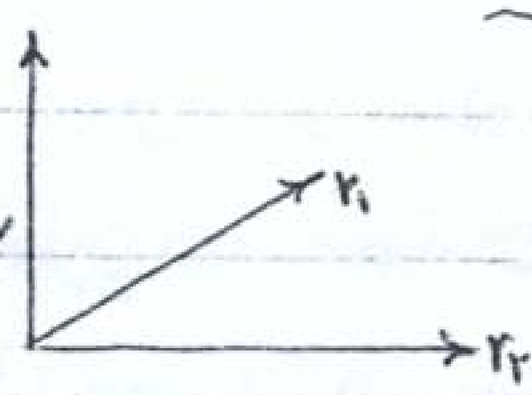
معادلات شرط هم صفحه‌ای:

$$(\vec{r_1} \times \vec{r_2}) \cdot \vec{B} = 0$$

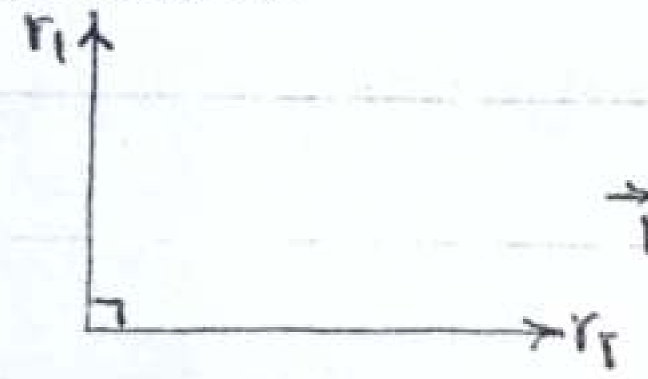
ضرب خارجی

ضرب داخلی

معادله شرط هم صفحه‌ای



بردار حاصلضرب خارجی



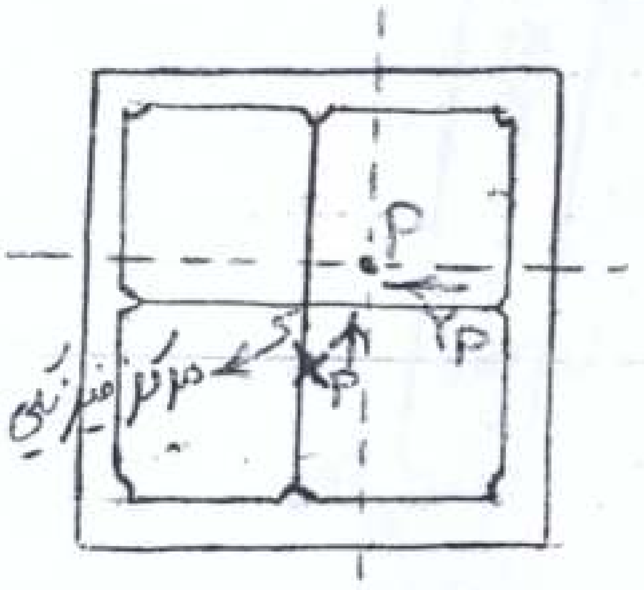
یادآوری:

ضرب داخلی $\quad \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 0$

$$\vec{r_1} = (X_A - X_{L_1})\vec{i} + (Y_A - Y_{L_1})\vec{j} + (Z_A - Z_{L_1})\vec{k}$$

$$\vec{r_2} = (X_A - X_{L_2})\vec{i} + (Y_A - Y_{L_2})\vec{j} + (Z_A - Z_{L_2})\vec{k}$$

$$\vec{B} = (X_{L_2} - X_{L_1})\vec{i} + (Y_{L_2} - Y_{L_1})\vec{j} + (Z_{L_2} - Z_{L_1})\vec{k} \implies \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$



مرکز فیدوشیال عکس

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \begin{bmatrix} X_A - X_L \\ Y_A - Y_L \\ Z_A - Z_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot M^T \begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A - X_L \\ Y_A - Y_L \\ Z_A - Z_L \end{bmatrix}$$

نکته (یادآوری):

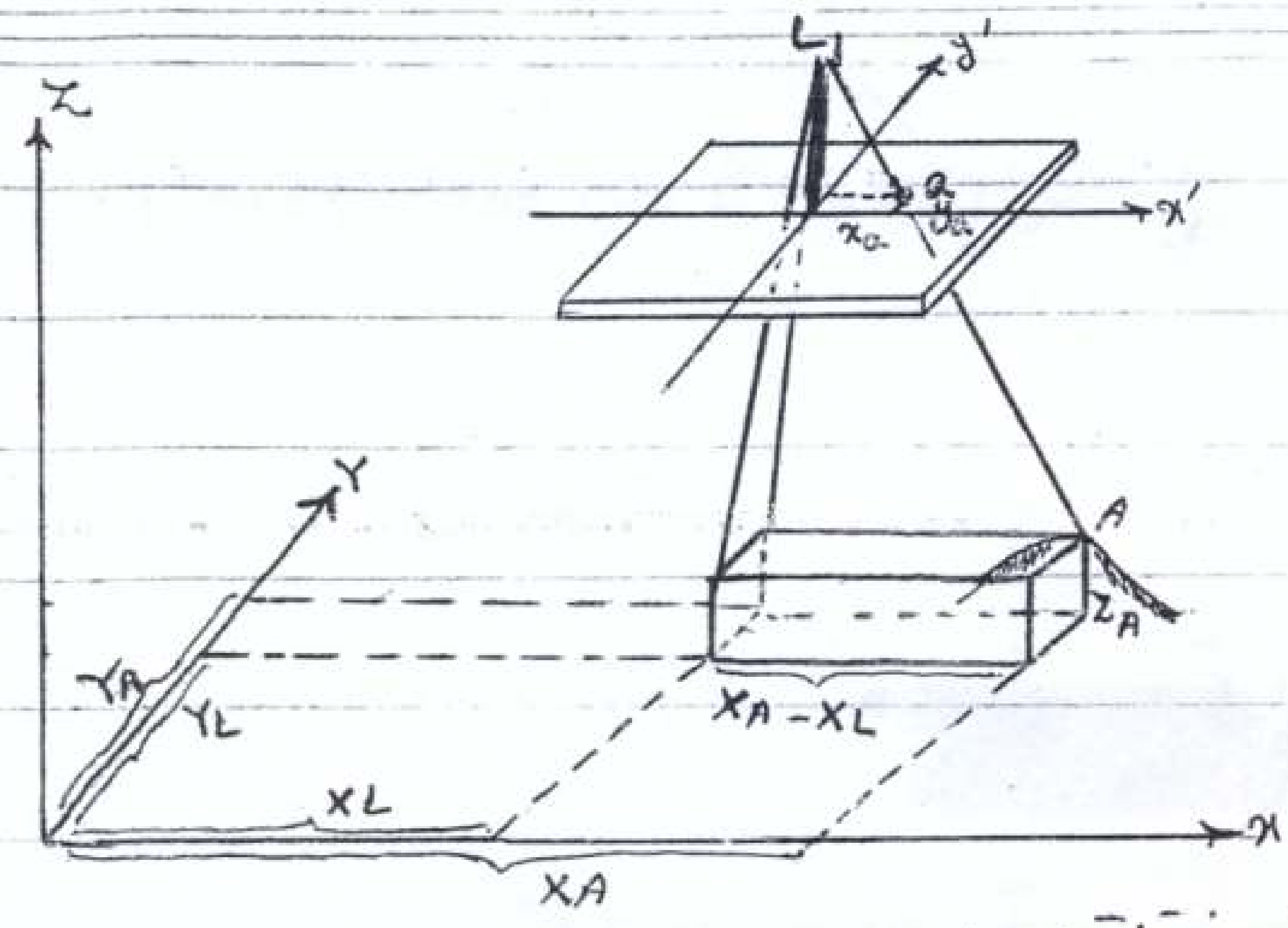
$$M^{-1} = M^T$$

$$M \cdot M^T = M^T \cdot M = I$$

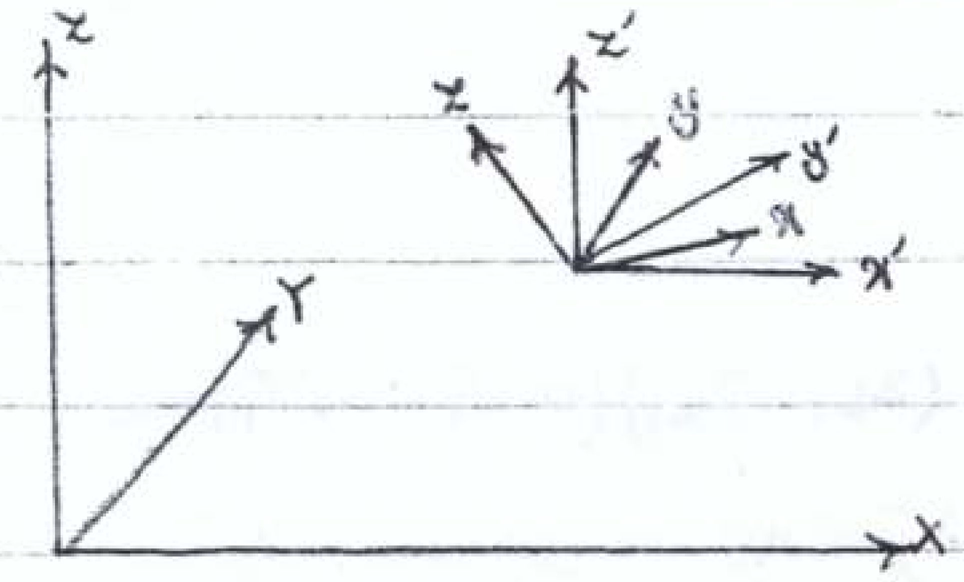
ماتریس اورتوگونال

مثال: مجموع مربعی هر سطر برابر یک است.

$$m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2 = 1$$



سیستم موازی با سیستم مختصات زمینی



انطباق سیستم مختصات موازی با سیستم زمینی بر سیستم مختصات عکس تیلت در

$$\begin{cases} X_A - X_{L_1} = \lambda_1 \cdot x'_a \\ Y_A - Y_{L_1} = \lambda_1 \cdot y'_a \qquad (2) \\ Z_A - Z_{L_1} = \lambda_1 \cdot z'_a \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ -f \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = M \cdot X' \qquad (3) \\ X' = M^T \cdot X \qquad (4) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix} \quad ; \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

در معادله (۴) جایگذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(4)} \begin{cases} x' = m_{11}(x - x_p) + m_{21}(y - y_p) + m_{31}(-f) \\ y' = m_{12}(x - x_p) + m_{22}(y - y_p) + m_{32}(-f) \qquad (5) \\ z' = m_{13}(x - x_p) + m_{23}(y - y_p) + m_{33}(-f) \end{cases}$$

با توجه به (۲) و (۵):

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{در معادله (۲) و (۵)}} \begin{cases} X_A - X_{L_1} = \lambda_1 \left[\overbrace{m_{11}(x - x_p) + m_{21}(y - y_p) + m_{31}(-f)}^{u_1} \right] \\ Y_A - Y_{L_1} = \lambda_1 \left[\overbrace{m_{12}(x - x_p) + m_{22}(y - y_p) + m_{32}(-f)}^{v_1} \right] \\ Z_A - Z_{L_1} = \lambda_1 \left[\overbrace{m_{13}(x - x_p) + m_{23}(y - y_p) + m_{33}(-f)}^{w_1} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A - X_{L_1} = \lambda_1 \cdot u_1 \\ Y_A - Y_{L_1} = \lambda_1 \cdot v_1 \\ Z_A - Z_{L_1} = \lambda_1 \cdot w_1 \end{cases}$$

$$\vec{r_1} = \lambda u_1 \vec{i} + \lambda_1 v_1 \vec{j} + \lambda_1 w_1 \vec{k}$$

به همین ترتیب برای بردار $\vec{r}_2$ عمل می‌کنیم پس داریم:

$$\vec{r}_2 = \lambda_2 u_2 \vec{i} + \lambda_2 v_2 \vec{j} + \lambda_2 w_2 \vec{k}$$

$$\vec{R}_1 = \frac{\vec{r}_1}{\lambda_1} \Rightarrow \vec{R}_1 = u_1 \vec{i} + v_1 \vec{j} + w_1 \vec{k}$$

$$\vec{R}_2 = \frac{\vec{r}_2}{\lambda_2} \Rightarrow \vec{R}_2 = u_2 \vec{i} + v_2 \vec{j} + w_2 \vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{N} = \vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \frac{1}{\lambda_1}\vec{r}_1 \times \frac{1}{\lambda_2}\vec{r}_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}\vec{n}$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix} = (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{i} + (w_1 u_2 - w_2 u_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(X_{L_2} - X_{L_1})(v_1 w_2 - v_2 w_1) + (Y_{L_2} - Y_{L_1})(w_1 u_2 - w_2 u_1) + (Z_{L_2} - Z_{L_1})(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

تفاوت عمده بین معادلات شرط هم خطی و شرط هم صفحه‌ای در این است که در شرط هم صفحه‌ای مختصات زمینی نقاط به عنوان مجهول وجود ندارد پس می‌توان از آن برای تعیین وضعیت نسبی بدون نقاط کنترل استفاده کرد. همانطور که ملاحظه می‌شود این معادلات دارای ۱۲ پارامتر می‌باشد که شامل ۶ پارامتر توجیه خارجی عکس سمت چپ و شامل ۶ پارامتر توجیه خارجی عکس سمت راست می‌باشد می‌توان با ثابت کردن یکی از عکسها، ۶ پارامتر را حذف نمود و همچنین با ثابت در نظر گرفتن b_x می‌توان مقیاس را ثابت کرد که به این وسیله یکی دیگر از پارامترها حذف می‌شود و تعداد پارامترها به ۵ می‌رسد.